Chapitre 2

Problèmes de localisation

Objectifs pédagogiques

- Connaitre l’Importance de la localisation
- Les différents problème de localisation
- Modélisation des problèmes de localisation
- Méthodes de résolutions des problèmes de localisation
- Notions de couverture

Importance de la localisation 1/2

- Un réseau de transport bien conçu, impliquera une économie importante des ressources. Tout transporteur est amené à bien prendre ces décisions de localisation à cause de:
  - les marchés sont plus étendus, mais souvent avec une clientèle dispersée,
  - les livraisons à distance sont plus faciles, grâce à l'ouverture des frontières,
  - les sites possibles sont donc plus nombreux
- La localisation est un problème complexe, crucial à cause des enjeux financiers, et avec des compromis à trouver

Importance de la localisation 2/2

- Exemple de choix
  - Installation dans un pays à bas coût de main d'œuvre (Low cost contries LCC):
    - augmentation des coûts d'expédition si on est loin des zones de consommation
    - Manque de main d'œuvre qualifiée
    - …
  - Installation près des consommateurs :
    - Augmentation des coûts d'approvisionnement de la matière première exotiques (bois, minerais).
    - Main d'œuvre chère
    - …

Classification et exemples 1/8

- Objectif : trouver *l'emplacement optimal d'installations* (usines etc.) sur un ensemble de *sites possibles, pour :*
  - minimiser le nombre d'installations pour couvrir les demandes,
  - ou maximiser la demande couverte avec un nombre fixe d'installations,
  - ou minimiser les coûts (construction, fonctionnement, charges, coûts de livraison aux clients, etc).

Classification et exemples 2/8

- Problèmes à résoudre:
  - combien d'installations faut-il placer ?
  - où doit-on placer chaque installation ?
  - comment affecter les demandes aux sites créés ?
- Problèmes associés
  - Transports (placement d'entrepôts, de hubs)
  - Placement d'unités de production,
  - Logistique de secours (interventions, ambulances),
  - Télécommunications (relais TV, BTS), etc.
  - Le centres hospitaliers
  - Les écoles
  - Les centres de polices

Classification et exemples 3/8

- Critères de classification en localisation
- Localisation planaire, discrète, et sur un réseau
- *Planaire ou continue : les sites peuvent être partout* dans le plan (relais de TV).
- *Discrète : nombre fini de sites, et on connaît la matrice* des "distances" au sens large entre sites ou *distancier:* en km, en temps, en coût, etc.
- *Sur un réseau : localisation discrète sur les nœuds* d'un réseau.

Classification et exemples 4/8

- *Type de graphe : problèmes un peu plus faciles sur* certains types de réseau. Exemple: stations de pompage sur un *arbre de pipe-lines.*
- *Nombre de sites à localiser. Peut être une variable du* de décision ou une donnée.
  - Le cas particulier *d'un seul site* est facile (méthodes du barycentre).
- *Problèmes statiques ou dynamiques.*
  - *Pour les problèmes* dynamiques:
    - les paramètres et les variables évoluent dans le temps.

Classification et exemples 5/8

- *Problèmes déterministes ou probabilistes.*
  - *Paramètres* connus (demande connues, …)
  - Paramètres variables dans le cas probabiliste (modèles probabilistes, plus complexes).
- *Problèmes mono ou multi-produits. Quand la nature* des produits n’est pas importante (transport en vrac), on se ramène à un produit fictif pour simplifier: palettes, m^3 de liquide…
- *Secteur privé ou public.*
  - *Le privé maximise le profit ou* minimise le coût, et la même entité paie les coûts d'installation puis de fonctionnement.
  - Secteur public: facilité pour l’acquisition du terrain

Classification et exemples 6/8

- Public : notion de service plus importante. L'entité ne paie souvent que l'installation ou le fonctionnement.
- *Objectifs simples ou multiples. Si objectifs antagonistes,* il faut souvent une approche *d'optimisation multicritère.*
- *Capacité finie ou infinie. La capacité d'un site est le plus* souvent *limitée. Parfois elle est « infinie » (= suffisante):* un relais de TV couvre tous les habitants de sa zone.

Classification et exemples 7/8

- *Affectation des demandes. Chaque demande est traitée* par un site (*assignment) ou par plusieurs (allocation).* Second cas fréquent si sites de capacité finie
- *Problèmes à un ou plusieurs niveaux.*
  - *Exemple : réseaux* de distribution à 1 étage (usines → clients) ou 2 (usines→ entrepôts (hub)→ clients).
- *Installations indésirables. Placement des installations* près des clients, sauf les "indésirables« .
  - Décharge loin d'une ville → coût de transport élevé
    - d'où choix entre le coût de transport et nb de personnes affectées par la décharge
    - La recherche d'un compromis entre plusieurs objectifs
      - Optimisation multi-objective

Classification et exemples 8/8

- *Interactions entre sites*
  - Deux sites intéressants pour un hypermarché peuvent desservir des zones en commun:
    - ouvrir les 2 sites en même temps n'est pas souhaitable.
    - Problème du choix entre les deux sites
  - Les interactions entre sites voisins compliquent beaucoup les problèmes.
    - BTS (problème d'interférence)

Localisation d'une installation 1/3

- Scores charge-distance (load-distance scores) Données
  - *m sites possibles pour une nouvelle installation,*
  - *n entités (clients, fournisseurs, etc.) à desservir,*
  - mesure simple de « *charge » Lj pour chaque entité j.* A définir :
    - tonnage entrant ou sortant,
    - nombre de déplacements/semaine,
    - patients venant consulter, etc.
  - distances d_{ij} *entre tout site i et toute entité j.*
- Objectif: choisir un site *i* minimisant un score estimant* le travail de déplacement des charges.

Localisation d'une installation 2/3

- Méthode 1:
  - calcul pour tout site *i d'un score charge-distance ld(i),*
  - puis choix du site de score minimal.

$$ld(i) = \sum_{j=1,n} L_j . d_{ij}$$

  - *Exemple : Localisation d'un dispensaire dans une ville.*
  - entités : quartiers.
  - charges: nombre d'habitants (patients potentiels).
  - distances : du centre des secteurs aux sites possibles.

Localisation d'une installation 3/3

- Méthode 2: le Barycentre

Pour la localisation *continue (= non discrète).*

- on connaît les coordonnées x_j *et* y_j *de l'entité j.*
- on cherche les coordonnées *(x*,y*) de l'installation.*
- choix évident : *centre de gravité des charges*

$$x^* = \frac{\sum_{j=1,n} L_j . x_j}{\sum_{j=1,n} L_j}, \quad y^* = \frac{\sum_{j=1,n} L_j . y_j}{\sum_{j=1,n} L_j}$$

Le lieu obtenu doit souvent être ajusté. La localisation planaire de plusieurs installations est plus difficile (PNL).

Exemple

- Une ville souhaite installer un nouveau dispensaire pour desservir 7 quartiers dont les informations sont présentées par le tableau suivant: avec des coordonnées en km et le nombre d'habitants en mil habitants.
- Le quadrillage des rues des villes US impose l'utilisation de la distance "Manhattan

Quartier	Coordonnées (x,y)	Population
A	(2.5,4.5)	2
B	(2.5,2.5)	5
C	(5.5,4.5)	10
D	(5,2)	7
E	(8,5)	10
F	(7,2)	20
G	(9,2.5)	14

- Deux terrains sont disponibles au centre des quartiers C et F. Déterminer le meilleur site en utilisant des scores charge × distance en 10^3 habitants × km et la norme L1. Comparer ensuite avec une localisation "continue" basée sur le centre de gravité (faire dès le début une représentation graphique).

Solution

Quartier j	Coordonnées (x_j, y_j)	Population L_j	Site en C = (5.5,4.5)		Site en F = (7,2)		$L_j.x_j$	$L_j.y_j$
			Distance d_{ij}	Score $l_i.d_{ij}$	Distance d_{ij}	Score $l_i.d_{ij}$		
A	(2.5,4.5)	2	3	6	7	14	5	9
B	(2.5,2.5)	5	5	25	5	25	12.5	12.5
C	(5.5,4.5)	10	0	0	4	40	55	45
D	(5,2)	7	3	21	2	14	35	14
E	(8,5)	10	3	30	4	40	80	50
F	(7,2)	20	4	80	0	0	140	40
G	(9,2.5)	14	5.5	77	2.5	35	126	35
		68		239		168	453.5	205.5

Problèmes de couverture 1/21

- Problème de couverture totale
- Données :
  - *m points de demande ou "clients" (indexés par i)*
  - *n sites potentiels (indexés par j)*
  - D_c *distance de couverture (distance max de service)*
  - booléens a_{ij} *=1 ssi i est couvert par le site j (distance* $\leq D_c$*).*
  - c_j *coût d'ouverture du site j.*

  Objectif: déterminer les sites à ouvrir pour couvrir *toutes les demandes, avec un coût total minimal.*

Problèmes de couverture 2/21

- NP-difficile. Formulable par un PL en 0-1 :

$$(1)\, Min \sum_{j=1,n} c_j x_j$$

$$(2)\, \forall i = 1 \ldots m : \sum_{j=1,n} a_{ij} x_j \geq 1$$

$$(3)\, \forall j = 1 \ldots n : x_j \in \{0,1\}$$

$$(4) \ldots$$

  - (3) X_j les variables de décisions (0-1, 1 si le site *j* est ouvert)
  - (1) la fonction-objectif à minimiser (coût des sites ouverts)
  - (2) contraintes, tout client *i* couvert par au moins un site

Problèmes de couverture 3/21

- Ecriture matricielle:
  - *A : matrice binaire m×n des* a_{ij}
  - 1I : vecteur formé de *m "1".*
    - Min *c.x*
    - *A.x ≥ 1I*
    - $x \in \{0,1\}^n$
- Explication : une colonne *j de A est un m-vecteur binaire* codant le sous-ensemble des clients couverts par le site *j.*
  - Il faut choisir un sous-ensemble de colonnes *j* ($x_j = 1$) dans lequel chaque client apparaît au moins une fois.

Problèmes de couverture 4/21

- Techniques de réduction de taille :
  - soit L_i *la ligne i de A et* C_j *la colonne j.*
  - par convention, $C_k \geq C_j \Leftrightarrow a_{ik} \geq a_{ij}$ *pour tout i.*
  - *un site k domine un site j si* $c_k \leq c_j$ *et* $C_k \geq C_j$
  - *k couvre tous les clients de j sans coûter plus cher!*
  - donc on peut éliminer la colonne *j et forcer* x_j *à prendre la valeur 0.*

A	1	...	*k*	...	*j*	...	*n*
1			0		0		
2			1		1		
3			1		0		
...			0		0		
m			1		1		

Problèmes de couverture 5/21

- Techniques de réduction (suite) :

Moins évident : *un client k domine un client i ssi* $L_k \leq L_i$. Tout site *j qui couvre k* ($a_{kj} = 1$) *couvre aussi i.* Si la contrainte (2) pour *k est vérifiée, celle pour i aussi.* On peut donc supprimer la ligne (contrainte) *i de A.*

A	1	2	3		...		*n*
1							
k	0	0	1	0	0	1	1
i	1	0	1	1	0	1	1
...							
m							

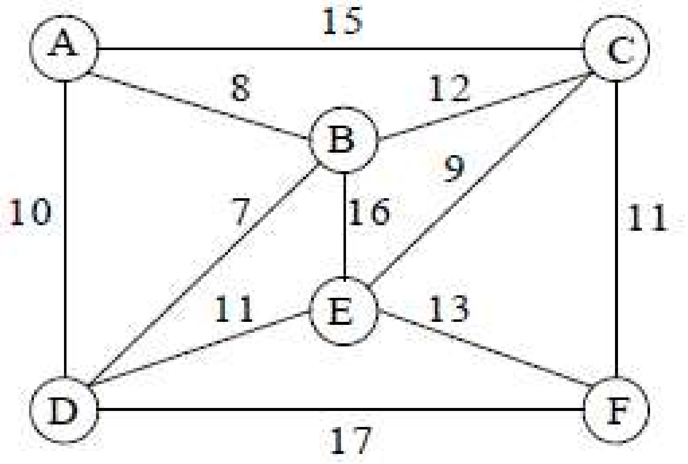
Problèmes de couverture 6/21

- **Techniques de réduction (suite)**
- Ouverture évidente
- Si une ligne *i de A a un seul 1, en* a_{ij}, *alors seul le site j* couvre le client *i. On peut forcer* x_j *à prendre la valeur 1 et supprimer toute* autre contrainte *k satisfaite (telle que* $a_{kj} = 1$*).*

- **Utilisation des réductions**
  - teste des lignes et colonnes en ordre quelconque
  - si on trouve des réductions, on doit tout retester
  - en effet, une réduction peut en créer d'autres
  - stop quand on ne trouve plus de réductions.

Problèmes de couverture 7/21

- Exemple avec *m = n = 6 et* D_c *= 12 :*



$$
\begin{array}{llcl}
\text{Min } X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F & & & \\
(1) & X_A + X_B + X_D & \geq & 1 \\
(2) & X_A + X_B + X_C + X_D & \geq & 1 \\
(3) & X_B + X_C + X_E + X_F & \geq & 1 \\
(4) & X_A + X_B + X_D + X_E & \geq & 1 \\
(5) & X_C + X_D + X_E & \geq & 1 \\
(6) & X_C + X_F & \geq & 1 \\
 & X_A, X_B, X_C, X_D, X_E, X_F \in \{0,1\} & &
\end{array}
$$

Problèmes de couverture 8/21

- Réductions :
  - Site A dominé par B et F par C : on force $X_A = X_F = 0$.
  - Seul C couvre F : $X_C = 1$ et suppression des contraintes satisfaites (2),(3),(5),(6).
  - (1) et (4), si A couvert alors D aussi : supprimer (4).
- Après réduction, le PL devient :

$$\begin{aligned}&\text{Min } X_B + X_D + 1\\&X_B + X_D \geq 1\\&X_B, X_D \in \{0,1\}\end{aligned}$$

- 2 optima à deux sites ouverts: $X_b = X_c = 1$ ou $X_c = X_d = 1$

Problèmes de couverture 9/21

- Problème de couverture maximale
- Pb de couverture totale parfois inadapté :
  - trop de sites à ouvrir
  - clients de même poids, même si demandes faibles.
- Couverture maximale : maximiser la demande totale couverte, avec un nombre limité de sites ouverts.
- NP-difficile*. Paramètres et variables additionnels :
  - *p nombre max. de sites à ouvrir (donné),*
  - *d_i demande du point i (donnée)*
  - *z_i variable 0-1 indiquant si le client i est couvert ou non.*

Problèmes de couverture 10/21

- On a encore une formulation sous forme de PL en 0-1:

$$(1)\quad Max \sum_{i=1,m} d_i z_i$$

$$(2)\quad \forall i = 1 \ldots m : z_i \leq \sum_{j=1,n} a_{ij} x_j$$

$$(3)\quad \sum_{j=1,n} x_j \leq p$$

$$(4)\quad \forall j = 1 \ldots n : x_j \in \{0,1\}$$

$$(5)\quad \forall i = 1 \ldots m : z_i \in \{0,1\}$$

Problèmes de couverture 11/21

- équation (1): demande totale satisfaite, à maximiser.
- Contraintes (2) *: comment régler les* z_i *?*
- Par définition, $z_i = 1 \Leftrightarrow$ *client i couvert :*

$$z_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1,n} a_{ij} x_j > 0$$

- *Contrainte (3): ouverture d'au plus p sites, on peut avoir des clients non couverts*
- Si moins de *p sites suffisent, la fonction-objectif sera* égale à la demande totale.

Problèmes de couverture 12/21

- Résolution des problèmes de couverture
- Avec un logiciel de programmation linéaire
  - PL en 0-1 donc en nombres entiers
  - algorithme du simplexe inutilisable.
  - méthodes arborescentes ($xj = 0$ *ou* $xj = 1$)*+réductions*
  - exemple de problème gérable : 100 clients, 20 sites.
- Note : les problèmes de partitionnement ($A.x = 1$) *sont* encore plus durs car pas toujours faisables. Exemple : découpage électoral, secteurs commerciaux.

Problèmes de couverture 13/21

- Heuristiques gloutonnes

PL trop longs à résoudre pour les grands problèmes. Des heuristiques sont alors nécessaires.

- Heuristiques gloutonnes (les plus simples)
  - suite de décisions définitives (sans retours en arrière)
  - choix le plus avantageux à chaque étape
  - selon un certain critère (à définir)
  - exemple, Plus Proche Voisin pour le TSP.

Problèmes de couverture 14/21

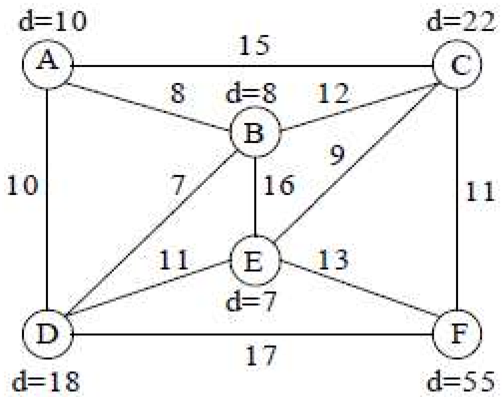
- Heuristique gloutonne de Chvàtal (couverture totale)
- Ouvrir le site de + faible coût par nouveau client non couvert
- *Cout := 0 // coût total des sites ouverts*
- *Ouverts := Ø // ensemble des sites ouverts*
- *Repeat*
- *j := site libre de coût moyen minimal par nouveaux points couvert : c(j) / nb de nouveaux points couverts.*
- *Ajouter j à Ouverts*
- *Cout := Cout + c(j)*
- *enlever du pb le site j et les nouveaux points couverts*
- *Until (couverture complète).*

Problèmes de couverture 15/21

- Heuristique analogue pour la *couverture maximale :*
- site augmentant le plus la demande totale couverte.
- *Ouverts := Ø // ensemble des sites ouverts*
- *NbOuverts := 0 // nombre de sites ouverts*
- *QteCouverte := 0 // quantité totale couverte*
- *Repeat*
- *j := site libre augmentant QteCouverte au maximum*
- *NbOuverts := NbOuverts + 1*
- *Ajouter j à Ouverts*
- *QteCouverte := QteCouverte +somme des nouvelles demandes couvertes*
- *Until (NbOuverts = p) ou (toutes les demandes sont satisfaites).*
- *p insuffisant : NbOuverts = p et QteCouverte < demande totale.*
- *p suffisant : NbOuverts < p, QteCouverte = demande totale.*

Problèmes de couverture 16/21

- Exemple d’application



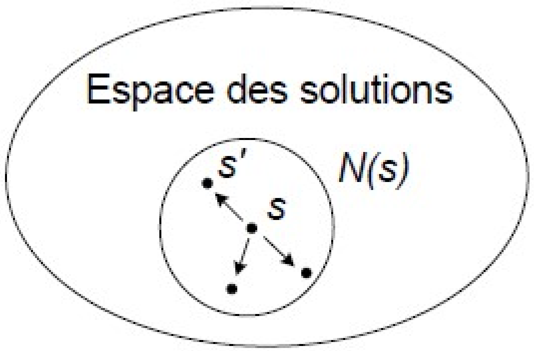
Site choisi	Clients couverts	Qté couverte si ouvert en 1er	Couverte si ouvert après C
A	A, B, D	36	36
B	A, B, D	36	36
C	C, E, F	84	déjà ouvert
D	A, B, D, E	43	36
E	C,D,E	47	18
F	C,F	77	0

Problèmes de couverture 17/21

- Recherches locales (*local search)*
- Principes :
  - heuristiques pour l'optimisation combinatoire
  - amélioration progressive d'une solution initiale *S,* par exemple donnée par une heuristique gloutonne
  - basées sur un "petit" sous-ensemble de solutions *V(S),* appelé voisinage de *S (neighborhood, N(S)).*
  - *V(S) est défini implicitement par une* transformation simple de *S.*

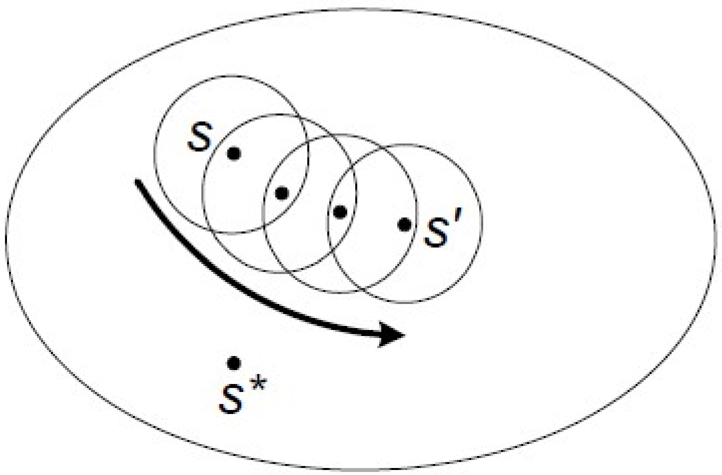
Problèmes de couverture 18/21

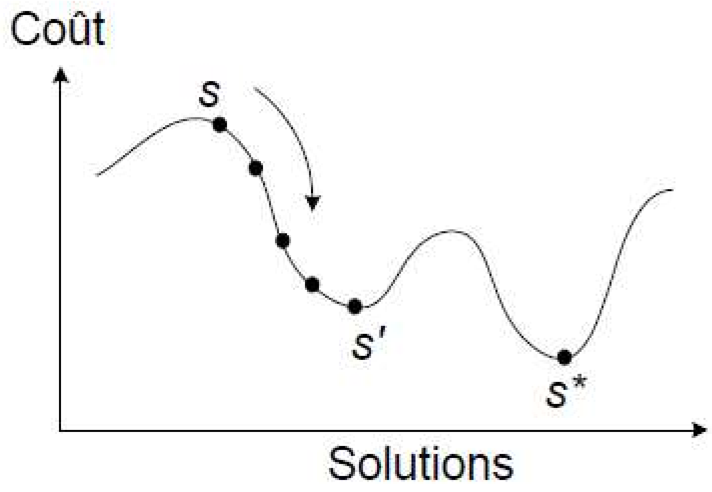
- Chercher une solution initiale S
- **Repeat**
  - Construire un voisinage N(S)
  - chercher une meilleure solution *S'* dans *N(S)*
  - si *S' trouvée alors S := S'*
- **Until *S' non trouvée***
- Deux versions sont possibles pour le choix de la meilleure solution. A chaque itération on prend :
  - soit la 1ère solution *S' trouvée qui améliore S*
  - soit la meilleure solution *S' du voisinage.*
- *S optimum local pour le type de voisinage choisi*



Problèmes de couverture 19/21

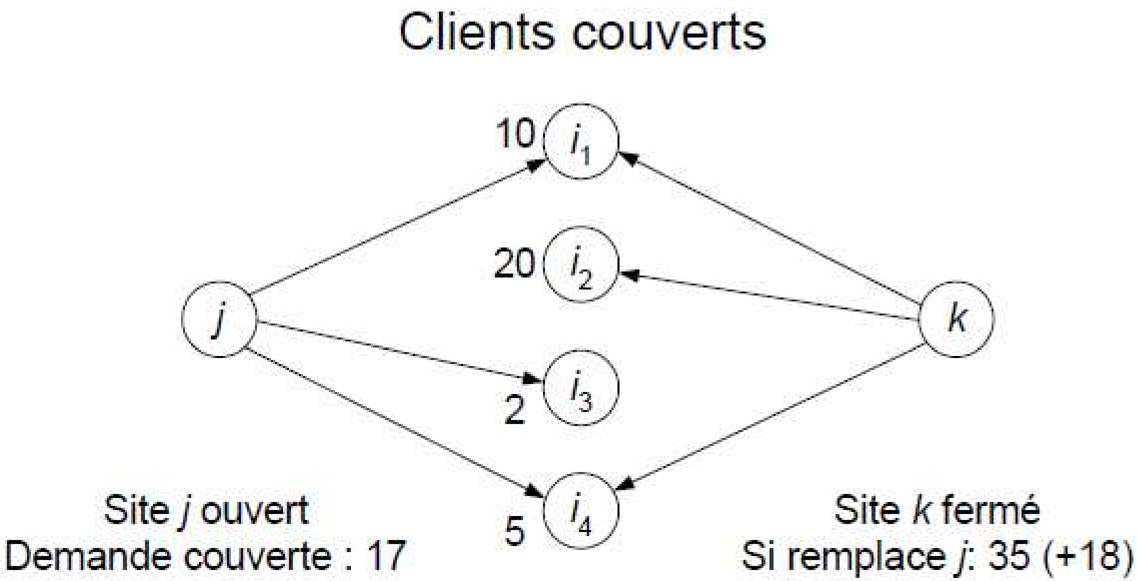
- 2 vues imagées, solution *S initiale, S' finale, S* optimale*





Problèmes de couverture 20/21

- Exemple de voisinage pour la couverture maximale :
- tester toutes les façons de remplacer un site ouvert par un autre actuellement fermé, *p.(n-p) solutions à tester.*



Exercice

- On considère le problème de couverture totale défini par une matrice binaire quelconque A, $m \times n$. m points de demandes (clients), n sites potentiels.
- a) Rappeler très brièvement en termes d'ensembles la signification des lignes et colonnes de A. A quelle condition existe-t-il des solutions?
- b) En supposant le problème réalisable, que signifie le fait que la somme d'une ligne i soit égale à un entier $k \leq n$? Que la somme d'une colonne j soit égale à un entier $k \leq m$? Que peut-on conclure si une colonne j ne contient pas de zéros? Si toute paire de colonnes n'a aucune ligne avec deux 1?
- c) Simplifier au maximum la matrice suivante en précisant les éliminations (quelle ligne ou colonne est dominée par quelle autre). Puis résoudre optimalement le problème en précisant les sites ouverts et les sites qui couvrent chaque client.

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	0
4	0	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1	1

Exercice 3

- Pendant la conception de la ville de Tamasna, les responsables ont prévu qu'elle aura M quartiers. Le nombre d'enfants estimé pour chaque quartier i est donné par hi, et on a prévu l'ouverture de n écoles au maximum dans cette ville pour scolariser ses enfants (n<=m). La distance entre deux quartiers i et j est donnée par dij. Une école ouverte ne peut couvrir qu'au maximum k quartiers dont le quartier qui l'abrite. Les élèves d'un quartier doivent être affectés à la même école. Pour cette première version on considère qu'on n'a pas de contrainte concernant la distance de couverture.
- **Questions :**
  - Modéliser le problème de localisation des écoles sous la forme d'un programme linéaire
  - On suppose maintenant que M=6, n=6 et k=3. Les autres données du problème sont présentées dans le tableau 1. Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de couverture totale. Résoudre ce problème en utilisant la méthode de chvatal, la distance de couverture est de 12.

Exercice 3

	Q1	Q2	Q 3	Q4	Q5	Q6
Q1	0	8	15	10	24	27
Q2		0	12	7	16	33
Q3			0	19	9	11
Q4				0	11	17
Q5					0	13
Q6						0
Nb élèves	120	135	95	80	105	115
Coût d'installation	8	7	8.5	6	9	5.5

P-centre

- L'objectif de ce problème linéaire est de minimiser la distance maximale entre un client et le centre auquel il est rattaché, et non plus la somme des distances. Les contraintes restent cependant les mêmes. Dans la formulation de ce problème, il n'y a alors que la fonction à minimiser qui change. La distance maximale à minimiser est

$$z \geq \sum d_{ij} x_{ij} \qquad \forall i$$

P-centre

- On considère que tous les clients sont accessibles (pas de distance de couverture) mais on tient compte des distances.
- Problème des p-centres (NP-difficile)
- Fréquents en logistique de secours. Données :
  - *m clients à servir (indice i), sans distance de couverture,*
  - *n sites (indice j) mais on peut ouvrir p sites au maximum,*
  - distances d_{ij} *au sens large entre nœuds et sites.*
- Objectif
- Placer les sites en minimisant la distance maximale aux clients.
- Exemple : placer 4 casernes de pompiers dans une ville pour minimiser le temps d'intervention sur un incendie.

P-centres

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \text{Min } z \\
(2) & \forall i = 1 \ldots m : \sum_{j=1,n} y_{ij} = 1 \\
(3) & \sum_{j=1,n} x_j = p \\
(4) & \forall i = 1 \ldots m, \forall j = 1 \ldots n : y_{ij} \leq x_j \\
(5) & \forall i = 1 \ldots m : z \geq \sum_{j=1,n} d_{ij} . y_{ij} \\
(6) & \forall j = 1 \ldots n : x_j \in \{0,1\} \\
(7) & \forall i = 1 \ldots m, \forall j = 1 \ldots n : y_{ij} \in \{0,1\} \\
(8) & z \geq 0
\end{array}
$$

- PL dit "mixte" : variables entières et réelles.
- Variables de décision :
  - *xj =1 si site j choisi,*
  - *yij =1 si i affecté au site j.*
- Variable réelle *z :*
  - distance maxi d'intervention.

p-médians 3/7

- PL plus compliqué que les précédents !
- Facile : (1) objectif à minimiser, (2) chaque nœud est affecté à un site, (3) *p sites ouverts, (6)(7)(8) définition des variables.*
- Chaque contrainte (4) traduit l'implication : si le site *j fermé, aucun client ne peut lui être affecté.*
- Contraintes (5) minimise la distance maximale d'intervention :
  - calcul du maximum des *dij tels que yij = 1*.*
  - on *linéarise en bornant les distances d'intervention par z.*
  - cette borne *z va être compressée par la minimisation.*
  - à l'optimum, z sera égal à la distance d'intervention maximale.

p-médians 4/7

- Le problème p-médian a pour objectif de minimiser la somme totale des coûts de distribution entre les clients et leur site de rattachement (le coût totale du transport). C'est alors un problème linéaire et pour formuler ce problème, il faut tout d'abord expliciter les contraintes sous forme d'équations ou inéquations. Ici sont explicitées des cas généraux.
  - On veut que chaque client i soit affecté à un seul site j
  - Tout client i affecté ne peut l'être que si le site j existe et est ouvert $x_{ij} <= y_j$
  - Ensuite, on verifie l'ouverture exacte de p sites
  - En fin, (contraintes d'intégrité) x et y doivent être des entiers

p-médians

$$(1)\quad Min \sum_{i=1,m} \sum_{j=1,n} q_i . d_{ij} . y_{ij}$$

$$(2)\quad \forall i = 1 \ldots m : \sum_{j=1,n} y_{ij} = 1$$

$$(3)\quad \sum_{j=1,n} x_j = p$$

$$(4)\quad \forall i = 1 \ldots m, \forall j = 1 \ldots n : y_{ij} \leq x_j$$

$$(5)\quad \forall j = 1 \ldots n : x_j \in \{0,1\}$$

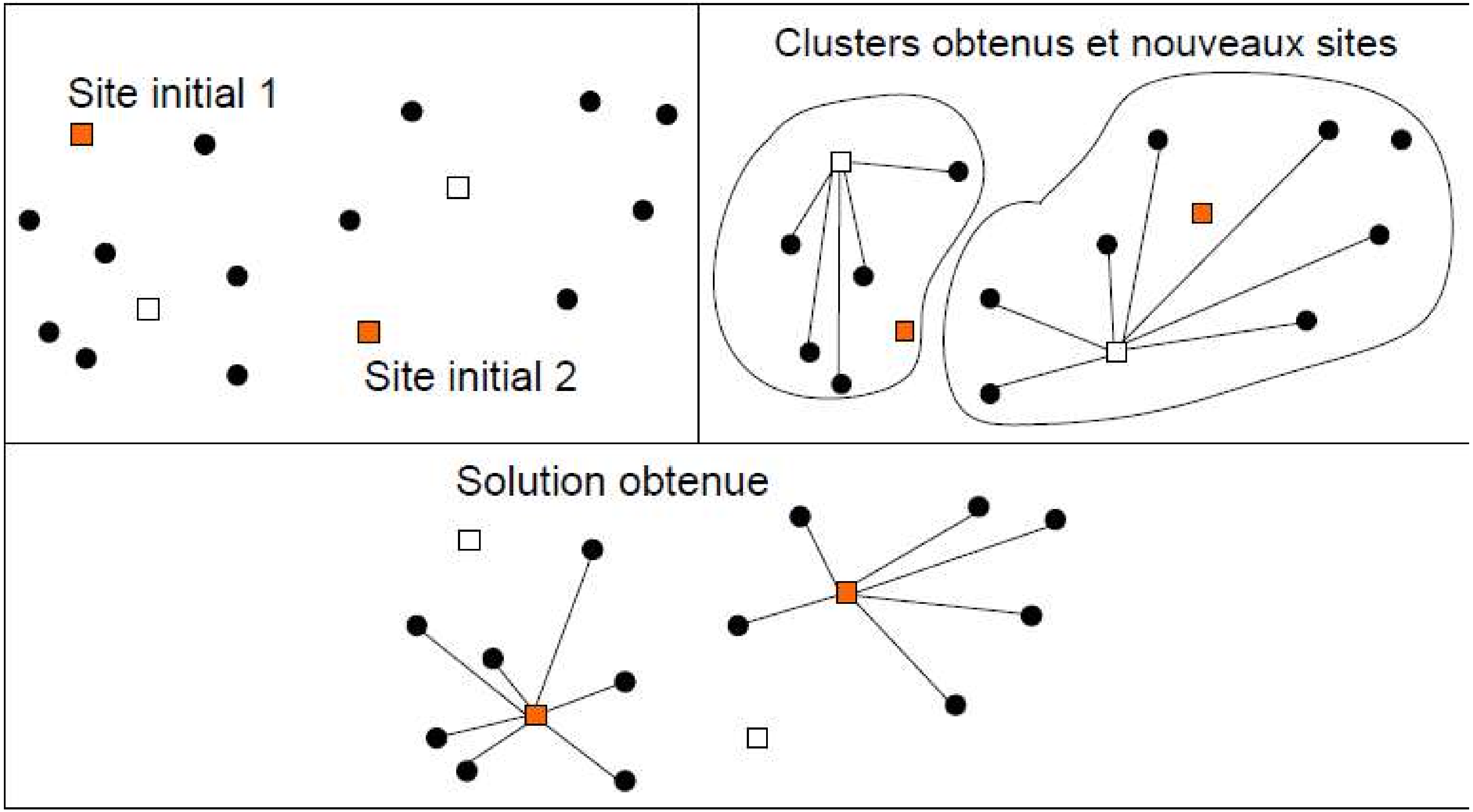
$$(6)\quad \forall i = 1 \ldots m, \forall j = 1 \ldots n : y_{ij} \in \{0,1\}$$

- **PL en 0-1 plus simple :**
  - mêmes variables binaires
  - (1) distance moyenne
  - (2) clients affectés à un site
  - (3) nombre de sites à ouvrir
  - (4) pas de clients pour un site fermé
  - qi: la quantité demandée par le client i
  - dij: le côut de transport unitaire entre le centre j et le client i
- **Note :**
- La méthode des scores charge distance traite le cas *p = 1.*

P-centres et p-médians 6/7

- Une heuristique très efficace valable aussi dans le cas continu :
  - *ouvrir p sites au hasard*
  - *REPEAT*
  - *affecter chaque client au plus proche site ouvert*
  - *on obtient des clusters (un site + ses clients)*
  - *calculer le meilleur site dans chaque cluster*
  - *UNTIL l'ensemble des sites ne change pas.*
- Le calcul du meilleur site dans chaque cluster se fait :
  - avec la méthode des scores, si la liste de sites est finie
  - en calculant un centre de gravité, si localisation continue.

P-centres et p-médians 7/7



Pb de localisation d’entrepôts 1/4

- En anglais *location-allocation problems :*
  - déterminer quels entrepôts ouvrir (*locate).*
  - allouer les clients aux entrepôts (*allocate).*
  - un client peut être livré par plusieurs entrepôts !
  - minimiser coût des entrepôts + coûts de transport.
- Cas avec capacités d'entrepôts "infinies" et "un seul" produit ou *single-commodity, uncapacitated facility location problem :*
- *m sites (indice i) et n clients (indice j)*
  - f_i *coût fixe d'ouverture du site i*
  - d_j *demande du client j,* c_{ij} *coût unitaire de transport de i à j*
  - y_i *variable binaire d’ouverture*
  - x_{ij} *quantité livrée par le site i au client j.*

Pb de localisation d'entrepôts 2/4

$$(1) \quad \text{Min} \sum_{i=1,m} f_i . y_i + \sum_{i=1,m} \sum_{j=1,n} c_{ij} . x_{ij}$$

$$(2) \quad \forall j = 1 \ldots n : \sum_{i=1,m} x_{ij} = d_j$$

$$(3) \quad \forall i = 1 \ldots m : \sum_{j=1,n} x_{ij} \leq M \cdot y_i$$

$$(4) \quad \forall i = 1 \ldots m : y_i \in \{0,1\}$$

$$(5) \quad \forall i = 1 \ldots m, \forall j = 1 \ldots n : x_{ij} \geq 0$$

- *PL mixte :*
- (1) coût total, à minimiser
- (2) demandes satisfaites
- (3) : *M grande constante > 0.*
- Un dépôt fermé ne livre rien.
- Un dépôt ouvert peut ne rien livrer mais l'optimisation va le fermer!

Pb de localisation d'entrepôts 3/4

- Problème stratégique (long terme) et macroscopique (agrégé) :
  - Un "client" peut être une ville avec une demande annuelle agrégée et estimée.
  - Mélange de coûts ponctuels d'ouverture et coûts de transport quotidiens? En fait *fi peut être un coût d'exploitation quotidien.*
  - Sites de capacité infinie? Les sites peuvent être des terrains libres : on construira les sites ouverts en fonction des quantités livrées dans la solution. Borner la capacité des sites*.
  - Un seul produit? En fait, on veut dire que les produits sont *indiscernables pour le transport (palettes, containers).*

Pb de localisation d'entrepôts 4/4

- Grâce aux capacités infinies, chaque client peut toujours être *affecté à un seul site (le moins coûteux).*
- On peut étendre le modèle à des *capacités limitées :* certains clients doivent alors être livrés à partir de *plusieurs sites.*
- On peut aussi généraliser à *plusieurs produits.*