Chapitre 4
Problèmes de tournées

1. Introduction 1/3

- Données d'un problème de base en tournées
  - un réseau $G = (X,U,C)$, C_{ij} est souvent un temps
  - un nœud dépôt s dans X
  - une flotte de v véhicules de capacité W
  - un sous-ensemble A de X de n nœuds-clients
  - demande connue q_i pour chaque client i

1. Introduction 2/3

b) Objectif

- construire des tournées de coût total minimal.
- tournée = trajet d'un véhicule qui part du dépôt, traite certains clients et revient au dépôt.
- hypothèse : tout client est traité par une seule tournée et en une seule visite dans cette tournée.

c) Contraction des problèmes

En pratique, on contracte ces problèmes :

- ensemble S de n+1 nœuds : dépôt (index 0) et clients indexés de 1 à n
- distancier $D_{(n+1)x(n+1)}$ entre ces nœuds.

1. Introduction 3/3

- Revient à définir un graphe complet H = (S, SxS, D) sur ces nœuds : on peut aller de tout nœud i (client ou dépôt) à tout nœud j avec un coût D_{ij} correspondant au plus court chemin de i à j.

Avantages de la contraction :

  – réduction de taille : exemple, réseau à 5000 nœuds mais 500 clients connus et 100 à livrer un jour donné.

  – gain de temps : chemins optimaux précalculés.

2. Le Pb du Voyageur de Commerce

- Le PVC (ou TSP, Traveling Salesman Problem) est le pb de tournées le plus simple : la somme des demandes n'excède pas W, on a une seule tournée.
- Toute tournée est donc une suite T = (T_1, T_2, ..., T_n) de clients, de coût total :

$$C(T) = D(o, T_1) + \sum_{i=1}^{n-1} D(T_i, T_{i+1}) + D(T_n, 0)$$

- Il y a O(n!) ordres possibles.
- Le PVC est NP-difficile, même si S est un ensemble de points du plan et D la distance euclidienne (PVC euclidien).

2. Le PVC

2.1 Méthodes optimales

Elles peuvent résoudre de petits problèmes :

- méthodes arborescentes (Little, Carpanetto)

2.2 Bornes inférieures (BI) du coût optimal

- Pour évaluer les heuristiques.
- Parfois optimales.

2. Le PVC

a) PVC "orienté" (asymmétrique)

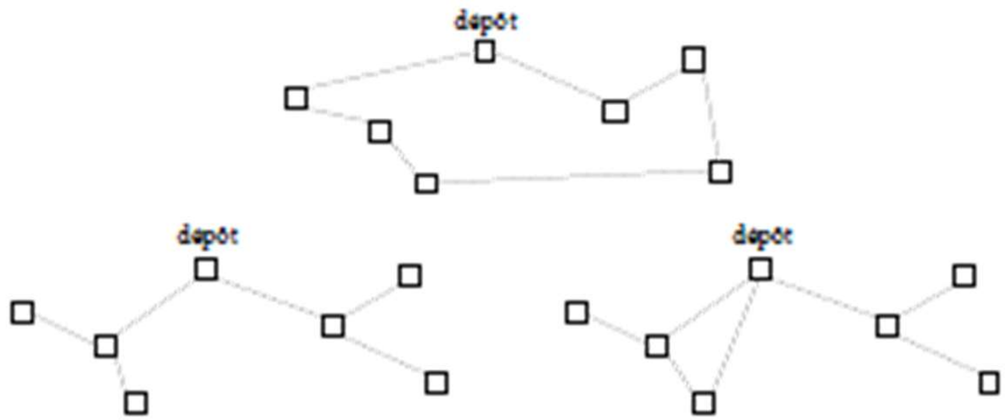
- La solution du PL d'affectation donne une BI.
- Si elle n'a aucun sous-cycle, c'est une solution optimale du PVC.

b) PVC "non orienté" (symétrique)

- Un arbre est un graphe connexe sans cycle.
- Un arbre recouvrant d'un graphe H est formé d'arêtes de H et relie tous les nœuds de H.

2. Le PVC

- BI de l'arbre recouvrant de coût minimal (ARCM) A*:



Tournée optimale(haut),

ARCM A* (gauche) et 1-arbre optimal B* (droite)

2. Le PVC

En effet, ôtons une arête à une tournée

optimale T*, on obtient un arbre recouvrant A particulier (non ramifié), et C(A*) <= C(A) <= C(T*).

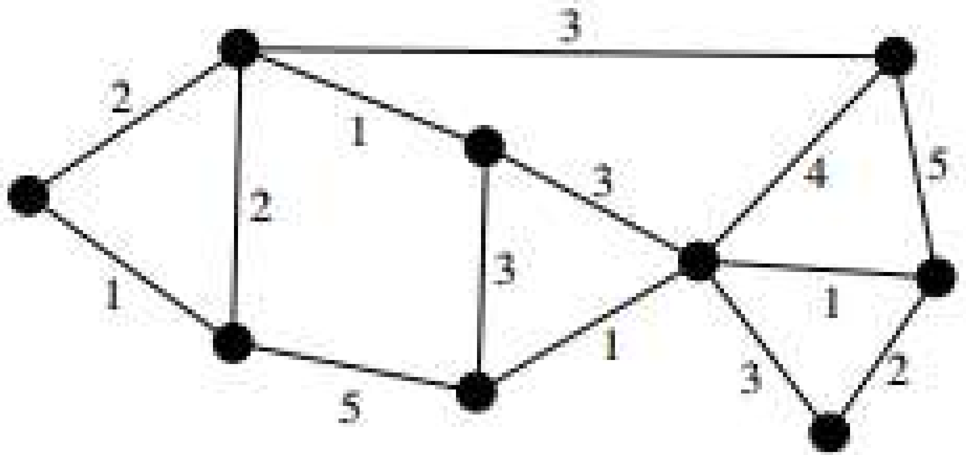
Amélioration de la borne de l'arbre : les 1-arbres

- Un 1-arbre est un arbre recouvrant auquel on ajoute une arête incidente au dépôt, ce qui crée un seul cycle.
- Un 1-arbre B* de coût minimal donne une borne inférieure, car toute tournée est un 1-arbre particulier, avec tous les nœuds sur l'unique cycle.

2. Le PVC

- L'algorithme de Prim calcule un arbre recouvrant A* de coût minimal.
- On obtient un 1-arbre optimal B* en ajoutant à A* la plus petite arête incidente au dépôt.
- **Algorithme de Prim**
  - partir d'un arbre A réduit au dépôt
  - cout := 0
  - for count := 1 to nc do
    - chercher la plus petite arête (i,j) telle que $i \in A$ et $j \notin A$
    - ajouter (i,j) à A
    - cout := cout + D(i,j)
  - endfor

Exercice d'application de l'algorithme de Prim



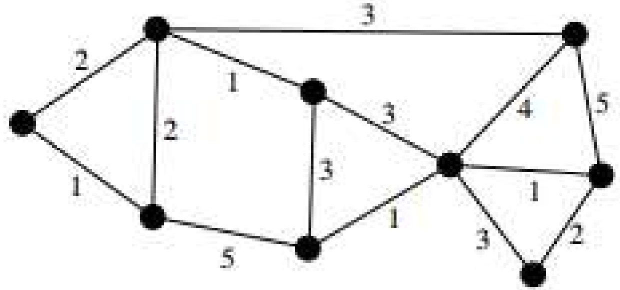
La méthode de Kruskal

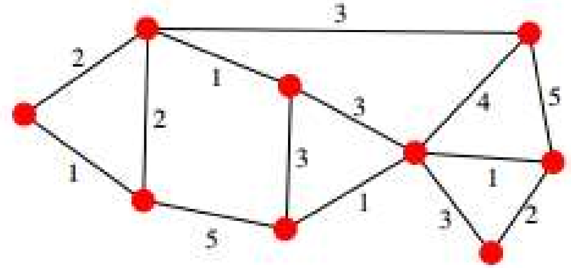
- On part d’une forêt d’arbres constitués de chacun des sommets isolés du graphe.
- À chaque itération, on ajoute à cette forêt l’arête de poids le plus faible ne créant pas de cycle avec les arêtes déjà choisies.
- On stoppe quand on a examiné toutes les arêtes

Algorithme de Kruskal

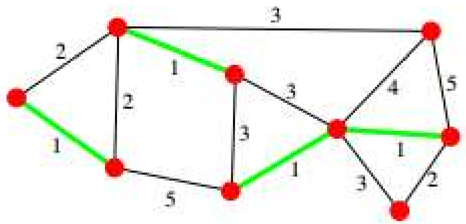
- Initialiser T avec
  $\begin{cases} \texttt{sommets : tous les sommets de } G \\ \texttt{arêtes : aucune} \end{cases}$
- Traiter les arêtes de G l'une après l'autre par poids croissant :
  - Si une arête permet de connecter deux composantes connexes de T,
    - alors l'ajouter à T
    - sinon ne rien faire
  - Passer à l'arête suivante
- S'arrêter quand il n'y a plus d'arêtes
- Retourner T

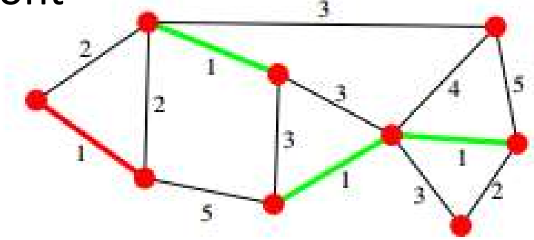
La méthode de Kruskal

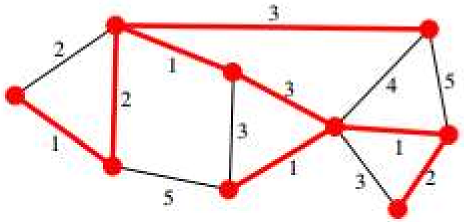




Ordonner les arcs dans un ordre croissant (n-1 arcs sont suffisants)







$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 14$$

2. Le PVC

2.3 Heuristiques constructives

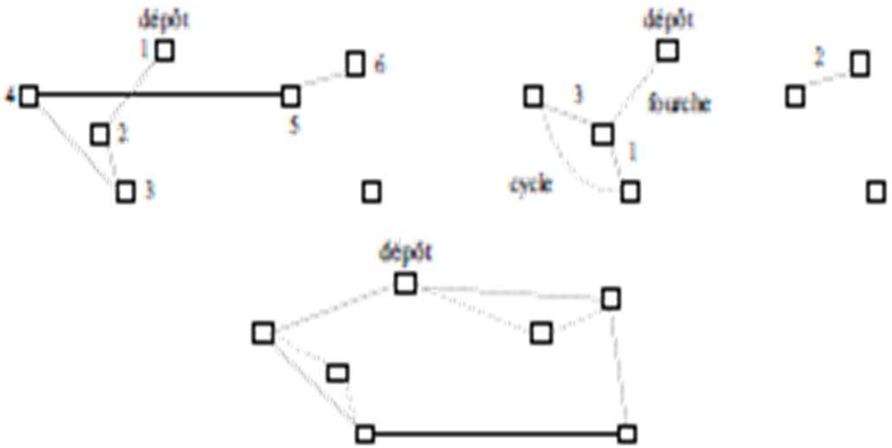
Construisent une solution par des décisions successives.

a) Exemples
   - heuristique Plus Proche Voisin (PPV)
   - heuristique de Fletcher
   - méthode de l'élastique (Shamos, PVC euclidien)

PPV part du dépôt puis relie à chaque étape le client libre le plus proche. Fletcher part de nœuds isolés et prend à chaque étape la plus petite arête ne faisant ni fourche, ni cycle avec les arêtes déjà prises.

2. Le PVC

- Shamos construit l'enveloppe convexe, puis l'allonge le moins possible pour relier les nœuds restants.



PPV (gauche), Fletcher (droite) et Shamos (centre)

Les numéros désignent les décisions successives

2. Le PVC

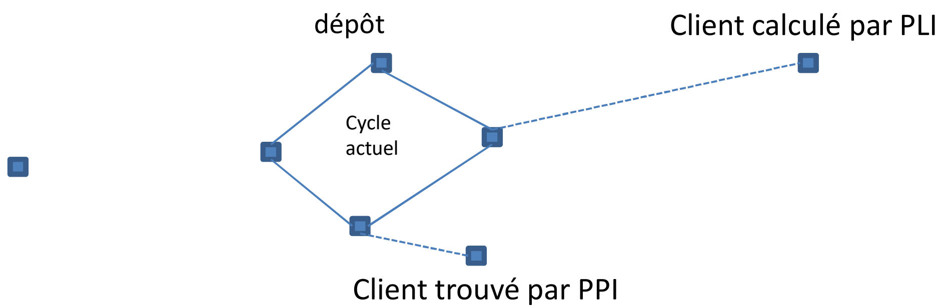
b) Méthodes d'insertion

- A partir d'une boucle sur le dépôt, elles insèrent un client à chaque étape.
- 3 versions :
  - Plus Proche Insertion (PPI),
  - Plus Lointaine Insertion (PLI),
  - et Meilleure Insertion (MI).

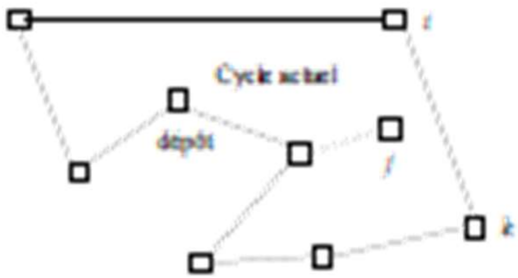
Itération de base pour PPI et PLI :

- Chercher le client libre j le plus près (PPI) ou le plus loin (PLI) du cycle en cours de construction.
- insérer j entre deux nœuds i et k du cycle pour minimiser la variation de coût $D_{ij} + D_{jk} - D_{ik}$.

2. Le PVC



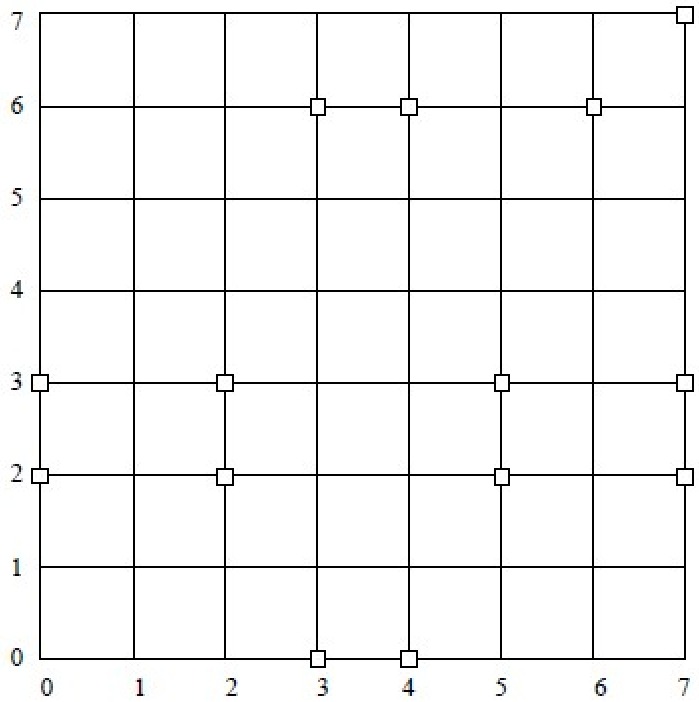
La meilleure insertion n'est pas forcément avant où après
le nœud du cycle le plus proche. Il faut donc tester toutes les insertions possibles pour j :



2. Le PVC

- Itération de base pour MI :
- tester chaque client libre j et chaque couple de nœuds consécutifs (i, k) sur le cycle.
- insérer le nœud donnant la plus faible variation de coût, à la position correspondante.
- Les méthodes d'insertion donnent de bons résultats en moyenne. De manière anti-intuitive, PLI donne les meilleurs résultats moyens dans le cas euclidien!

exercice

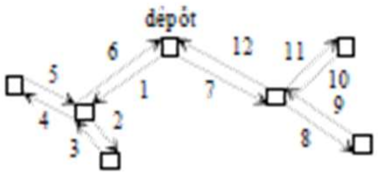


- Résoudre avec l'algorithme de PPV
- Algorithme de fletcher
- Algorithme de shamos

2. Le PVC

c) Méthode de l'arbre de Christofides*

- Calcul d'un ARCM (algo de Prim). Puis "tour de l'arbre" et élimination des nœuds déjà visités.



- Résultat médiocre en moyenne, mais on peut prouver qu'elle n'est jamais à plus de deux fois l'optimum : elle calcule une tournée T telle que C(T) / C(T*) <=2.

2. Le PVC

- Ce type de résultat est appelé garantie de performance (worst case performance ratio). Il n'est connu que pour certaines heuristiques car il est souvent difficile à établir.
- Meilleure heuristique à garantie de performance pour le PVC : $C(T) / C(T^*) <= 1.5$. Décevant, mais beaucoup d'heuristiques ont une performance moyenne meilleure!

d) Boîtes noires d'heuristiques

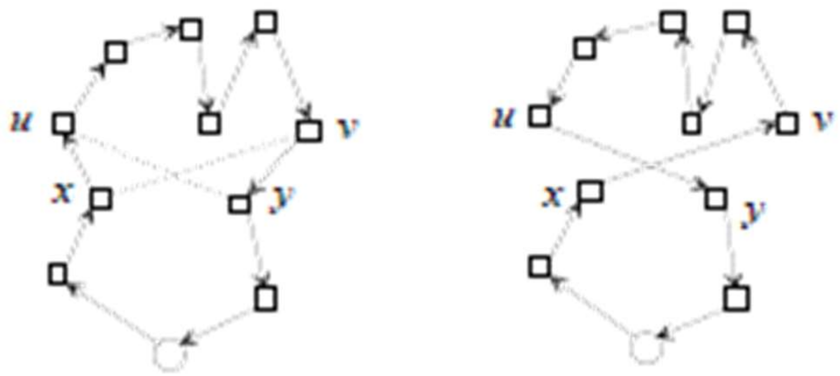
- Les heuristiques atteignent souvent leur pire cas sur des données différentes : on a intérêt à les exécuter toutes et à sortir le meilleur résultat. Beaucoup de logiciels de tournées utilisent de telles "boîtes noires" d'heuristiques.

2. Le PVC

2.4 Recherches locales

- Améliorent progressivement une solution de départ, calculée par exemple par une heuristique simple. Elles construisent une suite de solutions de coûts décroissants.

a) Transformation ou "mouvement" 2-OPT



2. Le PVC

Elle consiste à "croiser" deux arêtes :

– variation D = D(x,v) + D(u,y) – D(x,u) – D(v,y)

– section u à v inversée, pas toujours faisable

- De même, k-OPT consiste à enlever k arêtes et à reconnecter les k chaînes obtenues avec k autres arêtes.
- Tester toutes les transformations k-OPT pour une solution donnée est faisable en $O(n^k)$. En pratique, on utilise 2-OPT et 3-OPT, mais pas k-OPT avec k > 3.*

2. Le PVC

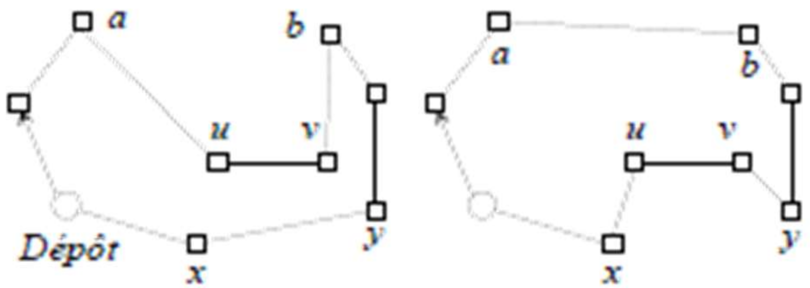
c) Exemple de mise en œuvre de 2-OPT

calculer une solution initiale S

- **repeat**
- $\Delta_{min} := \infty$
- **for each** couple d'arêtes ((u,x),(v,y)) non contigües
  - $\Delta = D(x,v)+D(u,y)-D(x,u)-D(v,y)$
  - **if** $\Delta < \Delta_{min}$ then*
    - $\Delta_{min} := \Delta$; p := ((u,x),(v,y))
  - **endif**
- endfor
- **if** $\Delta_{min} < 0$ then
  - croiser réellement les arêtes de la paire p dans S
- **endif**
- **until** $\Delta_{min} = \infty$

2. Le PVC

b) Transformation Or-OPT

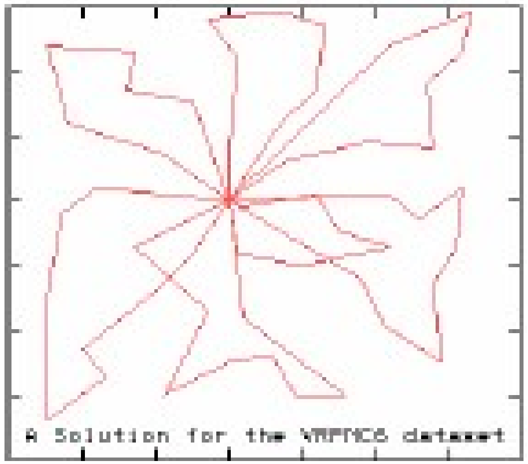


Déplacement d'une chaîne de nœuds consécutifs* :

- $\Delta = D(a,b)+D(y,v)+D(u,x)-D(a,u)-D(v,b)-D(y,x)$
- sens de circulation conservé, sauf sur (u,v)
- en pratique, on se limite à des chaînes de 1 à 3 nœuds

3. Le Pb de Tournées de Véhicules

- Le PTV (VRP, Vehicle Routing Problem) étend le PVC au cas de plusieurs tournées. Il est encore plus difficile : on ne connaît pas l'optimum pour certains pbs à 75 clients.



3. Le Pb de Tournées de Véhicules

3.1 Heuristiques constructives inspirées du PVC

- Toute heuristique du PVC est utilisable pour construire les tournées du PTV une par une. On crée une tournée quand la capacité du véhicule est épuisée. C'est le mode séquentiel.
- Par exemple, on peut appliquer PPV en mode séquentiel. Le nombre de véhicules utilisés (= de tournées) nv fait partie des résultats.

3. Le Pb de Tournées de Véhicules

Si nv est imposé, on utilise le mode parallèle :

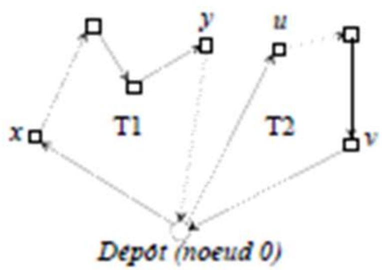
- on construit nv tournées T_1, T_2, ..., T_{nv} en parallèle.
- chaque itération de l'heuristique détermine les meilleures décisions pour T_1, T_2, ..., T_{nv}.
- exemple avec PPV : on détermine le prochain client pour T_1, puis T_2 etc jusqu'à T_{nv} et on recommence.
- Ce mode parallèle donne des tournées mieux équilibrées.

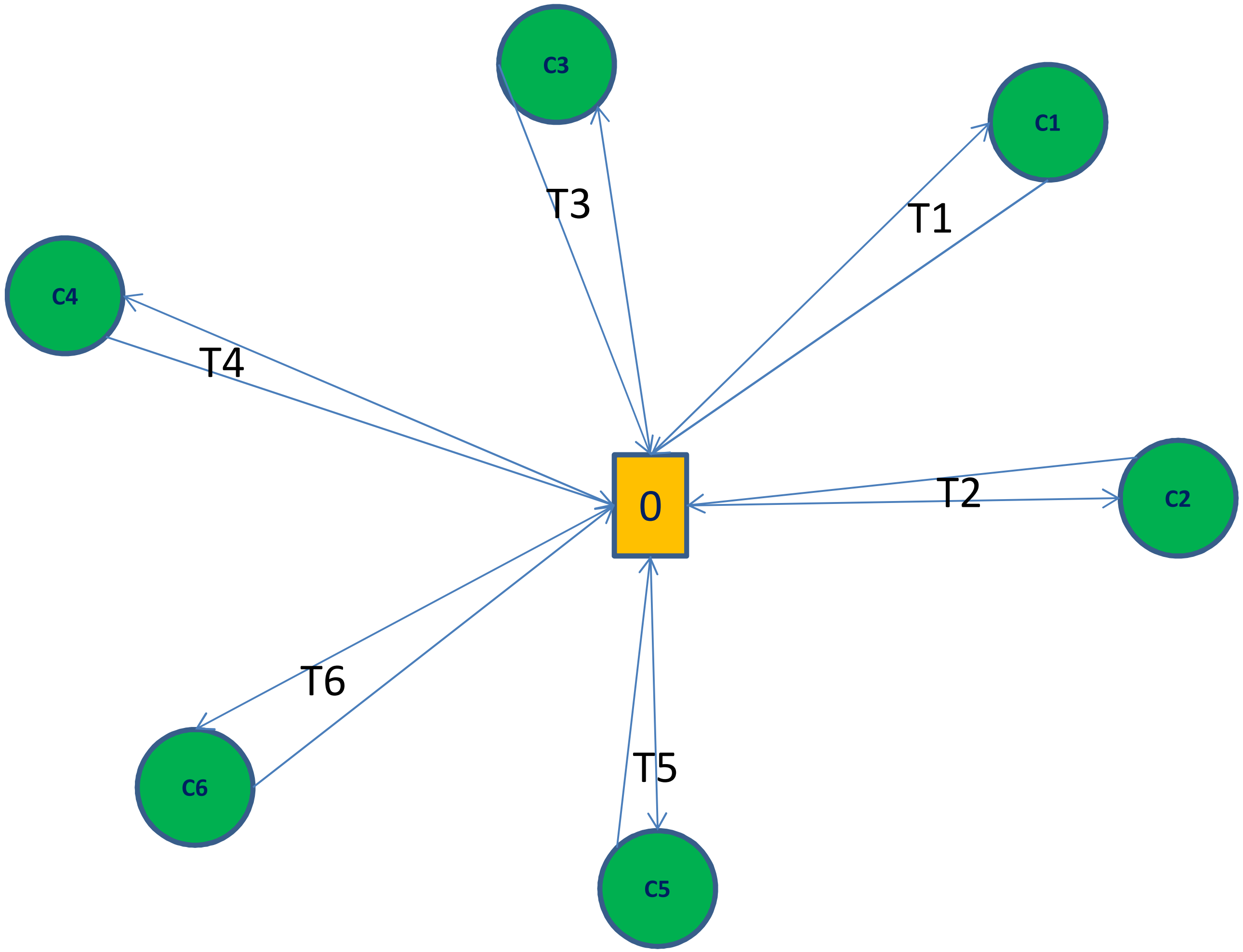
3. Le Pb de Tournées de Véhicules

3.2 Heuristique de Clarke &Wright

Ou méthode de la marguerite. Principe :

- initialiser la marguerite (n tours avec un client chacun) fusions de 2 tours tant que cela procure un gain à chaque étape, fusion de gain maximal




C3
C1
T3
T1
C4
T4
0
T2
C2
T6
T5
C6
C5

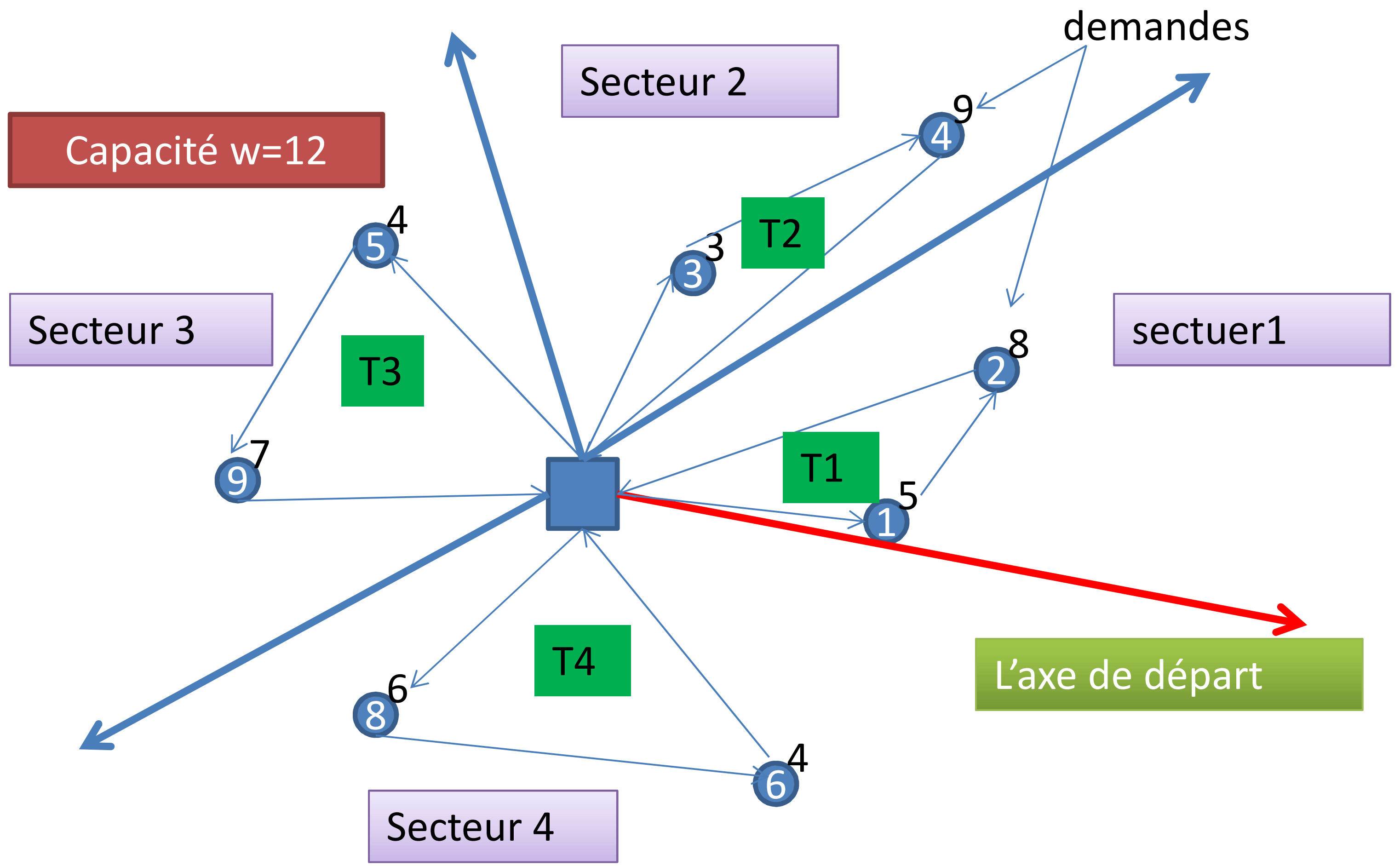
3. Le Pb de Tournées de Véhicules

- Si le véhicule de la tournée T_1 peut faire T_2 sans revenir au dépôt (demande totale <= W), le gain de la fusion est : e(y,u) = D(y,s) + D(s,u) – D(y,u).
- NB: 4 fusions possibles si réseau non orienté.
- Une itération de l'algo teste toutes les paires de tournées et les 4 cas par paire. Elle réalise la fusion de gain > 0 maximal, si elle existe. Sinon, c'est la fin de l'algo.
- Chaque itération diminuant le coût et économisant aussi une tournée, la méthode est réputée pour minimiser à la fois le coût et le nombre de véhicules utilisés.

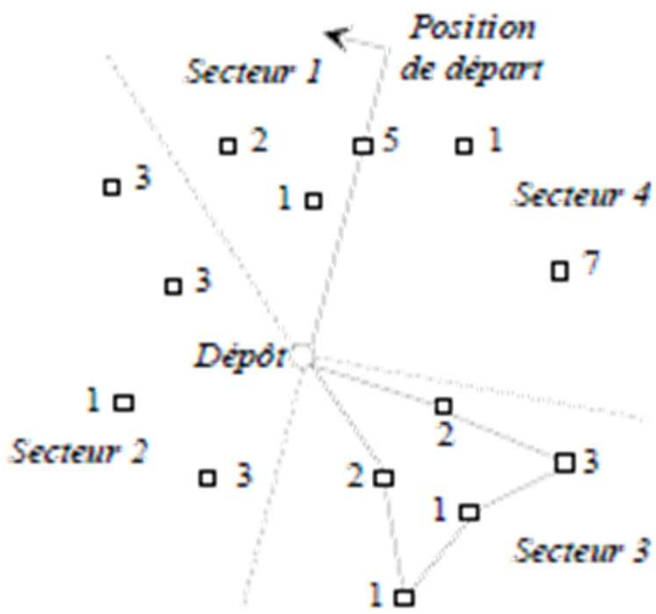
3. Le Pb de Tournées de Véhicules

3.3 Heuristique de Gillett et Miller

- Méthode de type cluster first - route second : on construit des groupes de clients puis on calcule une tournée dans chaque groupe. Principe :
  - trier les clients par angle polaire croissant / dépôt
  - les balayer à partir d'un client de départ quelconque
  - ceci donne des secteurs compatibles avec la capacité
  - calculer une tournée par secteur avec PPV
  - améliorer chaque tournée avec 2-OPT
  - bons résultats en campagne ou à grande échelle et avec un dépôt central.


demandes
Secteur 2
Capacité w=12
9
4
T2
4
3
5
3
Secteur 3
sectuer1
T3
8
2
7
9
T1
5
1
L'axe de départ
T4
6
8
4
6
Secteur 4

3. Le Pb de Tournées de Véhicules



Principe de la sweep heuristic de Gillett et Miller

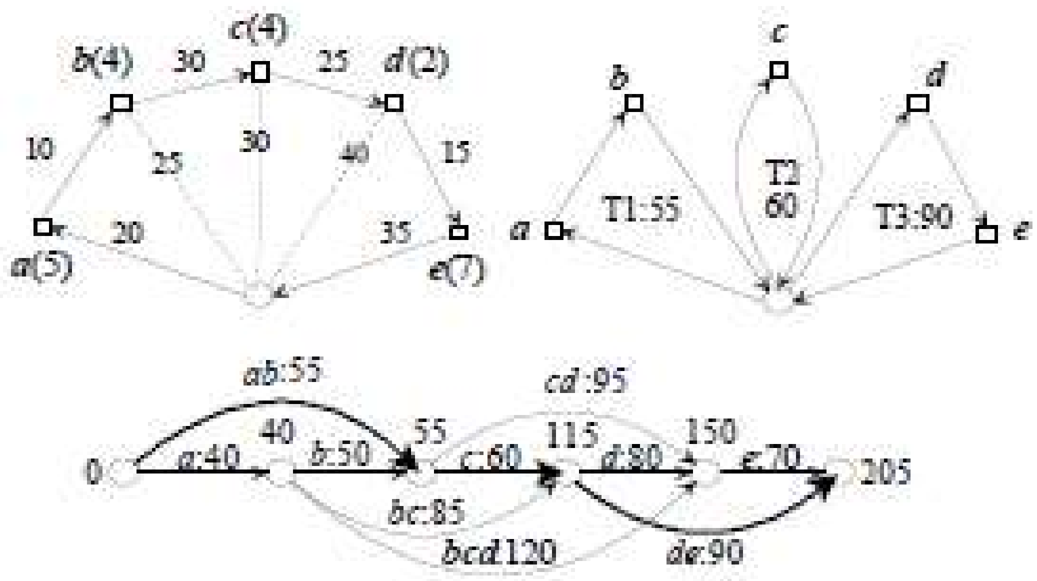
3. Le Pb de Tournées de Véhicules

- 3.4 Heuristique de Beasley
  - Méthode de type route first - cluster second : on calcule
  - un tour géant visitant tous les clients, puis on découpe ce
  - tour en tournées réalisables.
  - Le découpage peut se faire optimalement, cf. exemple
  - suivant avec un tour géant S=(a,b,c,d,e) à nc=5 clients.
  - Les demandes sont entre parenthèses. Les allers-retours
  - possibles au dépôt sont en pointillés. La capacité des
  - véhicules est W = 10.

3. Le Pb de Tournées de Véhicules

- On construit un graphe auxiliaire H avec nc+1 nœuds indexés de 0 à nc. Si la sous-suite de clients S_i ... S_j peut constituer une tournée réalisable, elle est modélisée dans H par un arc (i-1,j), valué par le coût de la tournée.
- Le découpage optimal en tournées correspond à un chemin optimal du 1er au dernier nœud dans H (en trait gras). On obtient 3 tournées, pour un coût total de 205.

3. Le Pb de Tournées de Véhicules



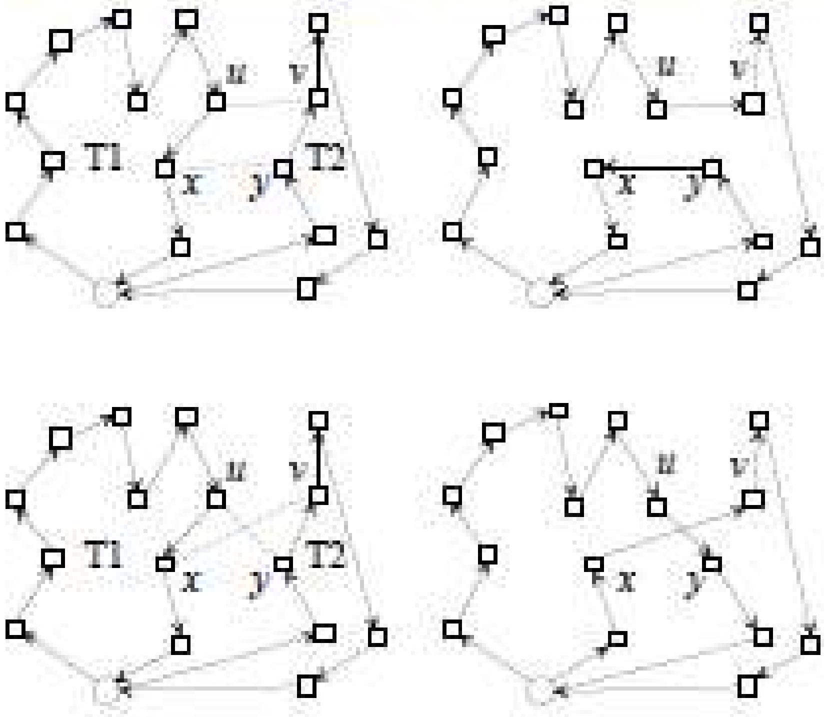
Exemple pour l'heuristique de Beasley

3. Le Pb de Tournées de Véhicules

- 3.5 Recherches locales
- Les recherches locales vues pour le PVC (2-OPT et Or-OPT) peuvent être appliquées tournée par tournée. Mais on peut aussi les appliquer à deux tournées.

3. Le Pb de Tournées de Véhicules

Exemple de 2-OPT sur deux tournées (2 cas) :



3. Le Pb de Tournées de Véhicules

- 4. Quelques complications
- 4.1 Dépôts multiples
- Si on n'a pas de contraintes de capacité des dépôts, on affecte chaque client au dépôt le plus proche et on résout un VRP par dépôt. Sinon, on affecte les clients par PL, pour minimiser la somme des distances aux dépôts tout en respectant les capacités des dépôts (formuler ce PL en exercice).

3. Le Pb de Tournées de Véhicules

4.2 Flotte hétérogène

On a plusieurs types de véhicules, de capacités différentes. On connaît le nombre de véhicules de chaque type. La pratique montre qu'on a toujours intérêt à utiliser en priorité les plus gros véhicules.

4.3 Contraintes d'accès

Si certains arcs du réseau sont interdits à un type de véhicule (poids ou hauteur limités), il faut construire pour ce type un distancier spécifique, en calculant des PCC n'empruntant pas d'arcs interdits. Cela peut se faire en enlevant temporairement ces arcs du réseau.

Exercice application de l’algo de Clarke &Wright

Distancier

		To					
		0	1	2	3	4	5
From	0	-	28	31	20	25	34
	1		-	21	29	26	20
	2			-	38	20	32
	3				-	30	27
	4					-	25
	5						-

Customer	Quantity
1	37
2	35
3	30
4	25
5	32

Exercice 1

On considère le problème du voyageur de commerce euclidien avec les 10 nœuds suivants, définis par leurs coordonnées. Les mailles ont 1 km de côté. Le nœud-dépôt est le numéro 1. Dans les calculs suivants, choisir toujours le nœud de plus petit numéro en cas d'ex-aequo.

N° nœud	x	y	N° nœud	x	y
1	2	3	6	5	4
2	3	3	7	5	0
3	3	5	8	0	4
4	0	1	9	4	2
5	4	4	10	3	0

a) Calculez un arbre recouvrant de coût minimal puis un 1-arbre de coût minimal (partir du dépôt).

b) Calculez une solution par l'heuristique Plus Proche Voisin (Nearest Neighbour). Quelle est sa distance maximale à l'optimum en % ?

c) Calculez une solution par la méthode de l'arbre de Christofides. Faire le « tour de l'arbre » en suivant des numéros de nœuds croissants. Distance maximale et à l'optimum en % ?

d) Peut-on améliorer la meilleure solution heuristique ?

Exercice 2

Une minoterie doit livrer de la farine à 18 boulangers répartis sur un réseau routier. Pour simplifier, on suppose que la distance entre deux nœuds est égale à la distance euclidienne. Le tableau indique pour chaque nœud ses coordonnées X et Y dans un repère orthonormé gradué en km et sa demande en tonnes de farine. Le dépôt a les coordonnées (3,3). La minoterie a 4 camions de capacité 10 tonnes.

Nœud	X	Y	Demande	Nœud	X	Y	Demande
1	1	0	2	10	0	3	1
2	2	0	2	11	6	3	2
3	6	0	1	12	2	4	3
4	0	1	2	13	5	4	2
5	2	1	1	14	6	4	1
6	5	1	1	15	4	5	2
7	1	2	3	16	0	6	2
8	3	2	2	17	3	6	1
9	5	2	1	18	5	6	1

a) Appliquez l'heuristique Plus Proche Voisin pour construire les tournées une par une. Dans le cas du VRP, on doit prendre à chaque étape le plus proche nœud non encore traité, mais compatible avec la charge du camion. Représentez graphiquement les tournées et précisez bien la longueur de chaque tournée, la longueur totale et le nombre de camions nécessaires.

b) Appliquez la Sweep Heuristic de Gillett et Miller pour former des secteurs, en commençant par le client n° 18 et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Résolvez ensuite le problème de voyageur de commerce dans chaque secteur avec l'heuristique de Shamos.