Outils de modélisation et d'évaluation de performances

Abdellah El Fallahi
2010-2016

Introduction au cours 1/4

- Notions
  - Système
    - Est un ensemble de composants liés par des interactions simples /complexes
  - Modèle
    - Est une abstraction, une simplification du système réel dans lequel on a éliminé tout ce qu'on trouve superflu par rapport au problème qu'on veut résoudre via la modélisation
    - Il est utilisé pour designer:
      1. Soit un concept ou objet considéré comme *représentatif d'un autre*
      2. soit un objet *réel* dont on va chercher à donner une représentation, que l'on va chercher de simuler ou imiter

- Modélisation
  - Procédé par lequel nous utiliserons des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle.
  - Modéliser consiste à écrire en notions mathématiques ce qui est exprimé d'abord en mots en faisant intervenir des variables au besoin.

Introduction au cours 2/4

- Pour un problème donné on peut trouver plusieurs modèles disponibles
- Processus de modélisation consiste à choisir les seuls éléments pertinents
  - Les variables: le système peut être décrit par des équations
  - Liste des états possibles: système dynamiques
  - Critère à optimiser: problème d'optimisation

Introduction au cours 3/4

- Étapes d'un processus de modélisation
  - Observation de la réalité
  - Construction d'un modèle par sélection des éléments pertinents
  - Étude de la structure
  - Établissement des propriétés
  - Conception des méthodes de calcul (algorithmes)
  - Programmation et test
  - Validations des méthodes (données réelles)
  - Ajustement du modèle si les résultats ne sont pas satisfaisants

Introduction au cours 4/4

- Modèles continus – modèles à événements discrets
- Modèles continus
  - Physique ou chimique
    - Variable continues (température, pression, etc)
    - Basés sur les équations différentielles
- Modèles à événements discrets
  - Modèles économique au sens large

Objectifs et contenu du module

- Les graphes: sont utiles pour la modélisation des réseaux
- Les réseaux de Petri: modélisation des systèmes dynamique
- Les processus stochastiques: modélisation des systèmes ou le hasard intervient

Éléments du module

Le module est divisé en trois partie

- Théorie des graphes
- Processus stochastiques (file d'attente)
- Réseaux de Pétri

Réseaux de Petri
« Petri nets »

Réseaux de Petri

- Chapitre1: Les réseaux de Petri autonomes
- Chapitre 2: Les réseaux de Petri non autonomes
- Chapitre 3: Modélisation des systèmes industriels

Chapitre 1: RdP

- Introduction
- Définitions de base
- Dynamique des réseaux de Petri
- Structures particulières
- Outils d'analyse des réseaux de Petri
- Propriétés des réseaux de Petri

Chapitre 2: RdP non autonomes

- Introduction
- **RdP synchronisés**
- **RdP temporisés**
- RdP temporels
- **RdP continus**
- RdP Hypéride
- **RdP colorés**
- **RdP stochastiques**
- RdP lots stochastiques et déterministes

Chapitre 3: Modélisations des Systèmes industriels

- Introduction
- Modélisations des structures de bases
- Modélisations des entités industrielles
- Modélisations des structures complètes
- Modélisations des phénomènes de panne
- Propriétés des RdP et systèmes industriel

Réseau de Petri autonomes chapitre 1

RdP: Introduction

- Outil de modélisation graphique et mathématique
  - Applications: productique, automatique et informatique, …
- Historique:
  - Carl Adam Petri: 1962 Université de Darmstadt
  - Développement par l'université de technologie de massachusset

RdP: définition 1/2

- Def 1:
  - Un réseau de Petri est un graphe orienté biparti dont les nœuds sont des places et des transitions. On peut définir un RdP comme un 4-uplet
  - PN(P, T, Pre, Post) où:
  - P: l'ensemble des places $P=\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$
  - T: l'ensemble des transitions $T=\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$
  - Pre: (PxT) -----→ N l'application d'incidence avant
  - Post: (PxT) -----→ N l'application d'incidence après

RdP: définition 2/2

- Les matrices Pre et post sont de type nxm
- $Pre(P_i,T_j)$ est le poids de l'arc reliant P_i à T_j
- $Post(P_i,T_j)$ est le poids de l'arc reliant T_j à P_i
- Par conventions:
  - Les places sont représentées par des cercles
  - Les transitions par des barres ou des rectangles
  - Les arcs sont des arcs orientés

RdP: Notations

- $I(T_j)=°T_j$ (resp. $O(T_j)=T_j°$) est l'ensemble des places d'entrée (resp. de sortie) de la transition T_j
- De même $I(P_i)= °P_i$ (resp. $O(P_i)=P_i°$) est l'ensemble des transitions d'entrée (resp. de sortie) de la place P_i.
- La matrice d'incidence W est définie par
  - W = Post - Pre

RdP: Marquage

- Def:
  - Un réseau de Petri marqué est un couple (PN, M) où :
  - PN = (P, T, Pre, Post)
  - M: P --→ N est une fonction de marquage
  - On note M_0 le marquage initial d'un RdP
  - Le marquage d'un RdP est effectué par des jetons(tokens)
  - Les jetons sont représentés par des ronds noircis et sont placés au centre des places

Rdp: Exemple

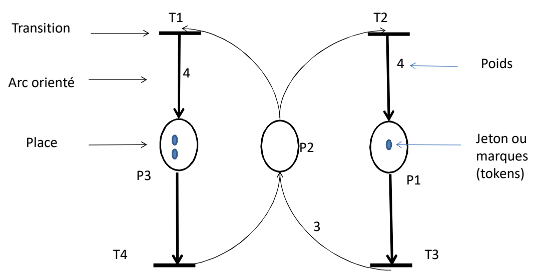


Fig 1.1: exemple de réseau de Petri

RdP: exercice

- Sur l'exemple de la figure 1.1 donner les ensembles P, T, les matrices Pre, post , W et le marquage initial.

Dynamique des réseaux de Petri 1/1

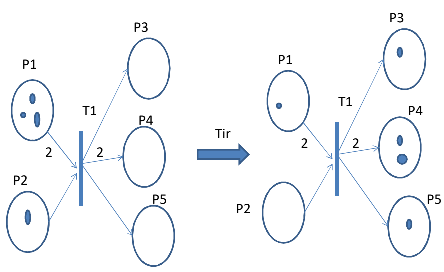
- La dynamique des RdP est réalisée en introduisant les marques dans les places.
- Les jetons circulent de place en place en franchissant les différentes transitions
- Le franchissement d'une transition doit suivre certaines règles
- Une transition T_j est franchissable pour un marquage M ssi:
- $M(P_i) \geq Pre(P_i, T_j), \forall P_i \in {}^{\circ}T_J$

Dynamique des réseaux de Petri 2/2

- Le franchissement d'une transition T_j consiste à retirer $Pre(P_i,T_j)$ marques de toute P_i dans $°T_j$ et à ajouter $Post(P_i,T_j)$ jetons pour toute P_i dans $T_j°$.
- À partir d'un marquage M la mise à feu d'une transition T_j conduit au nouveau marquage M' donné par:

$$M'(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_j) + Post(P_i, T_j), \forall P_i \in P$$

Franchissement: exemple



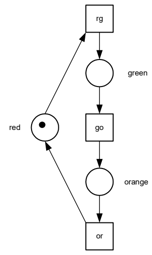
Franchissement: Notations

- $M \xrightarrow{Tj} M'$ ou M(Tj >M'
- $M \xrightarrow{s} M'$ ou M(s>M'
- R(M_0) est l'ensemble des marquages atteignables à partir de M_0 en effectuant un ou plusieurs tirages

$$R(M_0) = \{M_i \mid \exists s \text{ tel que } M_0 \xrightarrow{s} M'\}$$

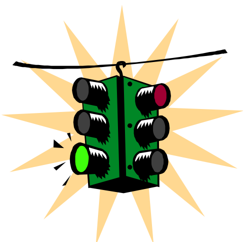
Exemple de franchissement

A single traffic light

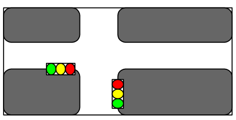


Problème d'un feu rouge double

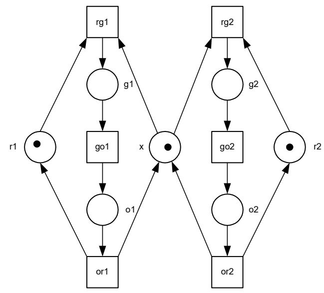
- Modéliser le problème de deux feux rouges de la situation suivante:



How to make them alternate?

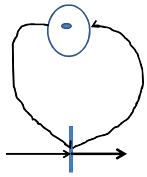


Solution



RdP: structures particulières

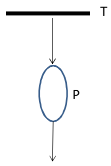
- Les boucles:
  - Une boucle (P_i, T_j) est telle que $P_i \in {}°T_j$ et $P_i \in T_j°$
  - Un RdP est pur s'il ne contient pas de boucle



Boucle

La transition source

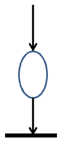
- Une transition source est une transition sans place d'entrée (elle est toujours franchissable)



Transition source

Transition puits

- Une transition puits c'est une transition sans place de sortie



Transition puits

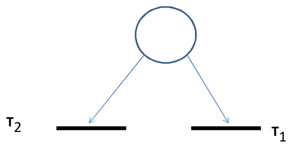
RdP à capacité finie

- Un RdP à capacité finie est RdP dans lequel le marquage de chaque place P_i est limité à une quantité $Q(P_i)$. Par conséquent, une transition T_j est validée par un marquage M ssi:

$$M(P_i) \geq Pre(P_i, T_j) \quad \forall P_i \in {}°T_J \quad et$$
$$M(P_i) + Post(P_i, T_j) \leq Q(P_i) \quad \forall P_i \in T_j°$$

Conflits 1/2

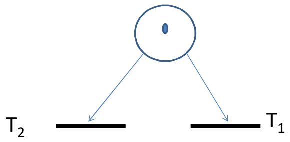
- Conflit structurel:
  - Deux transitions T_1 et T_2 sont en conflit structurel se elles ont au moins une places d'entrée en commun



Conflit structurel

Conflits 2/2

- Conflit effectif
  - Deux transition T_1 et T_2 sont en conflit effectif pour un marquage M si elles ont au moins une place d'entrée Pi en commun tel que:
  - $M(P_i) >= Pre(P_i,T_1)$ et $M(P_i) >= Pre(P_i, T_2)$



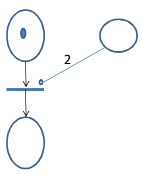
Conflit effectif

RdP: Graphe

- Graphe d'état
  - Est un RdP dans lequel chaque transition possède une et une seule place d'entrée et une et une seule place de sortie
- Graphe d'événement
  - Est un RdP dans lequel chaque place possède une et une seule transition d'entrée et une et une seule transition de sortie

RdP: Arc inhibiteur

- Les arcs inhibiteurs rendent possible le franchissement des transitions quand les places d'entrée sont vides ou ont un marquage inférieur à une valeur donnée



Outils d'analyse des RdP

- Les principales méthodes d'analyse des réseaux de Petri peuvent être classer en trois groupes:

1. Méthodes basées sur l'énumérations de tous les états possibles
   - Arbre et graphes de marquage
   - Arbre et graphes de couverture
2. Méthodes basées sur l'algèbre linéaire
3. Méthodes de réduction des RdP

Arbres et graphes des marquages

- L'arbre des marquages atteignables définit tous les marquages que l'on peut atteindre à partir d'un marquage M_0
- c'est une arborescence dans laquelle:
  - Les nœuds sont les marquages atteignables à partir de M_0
  - Chaque arc représente la mise à feu d'une transition
  - La racine de l'arborescence correspond à M_0
  - Le graphe des marquages atteignables est obtenu en fusionnant les nœuds de l'arbre de marquages qui correspond au même marquage
  - Le nombre de marquages peut être infini, dans ce cas il est impossible de construire l'arbre de marquages atteignables

Arbre et graphe de recouvrement

- L'arbre de recouvrement (de couverture) limite la taille de l'arbre lorsque le nombre des états n'est pas fini. Pour cela, un nouveau symbole w est introduit qui correspond à « l'infini »

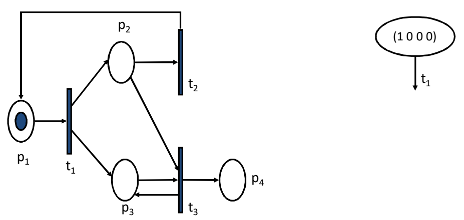
Algorithme de construction de l'arbre de recouvrement

1. Création des successeurs M de M_0 en appliquant une seule transition
2. Si M est strictement supérieur à M_0 ($M(P_i) > M_0(Pi)$ pour toute Pi, alors on remplace par *w* touts les composants de M qui sont strictement supérieurs à ceux de M_0
3. Pour chaque nouveau marquage M: s'il existe sur le chemin de M_0 à M un marquage identique à M, alors on ne génère pas de successeur du marquage M (« marquage déjà atteint »).
4. Si à partir de M aucune transition n'est franchissable, Alors, M n'a pas de successeur et on retourne à 3 (M est marqué « Blocage »), sinon on génère tous les nœuds successeurs de M en respectant les règles suivants

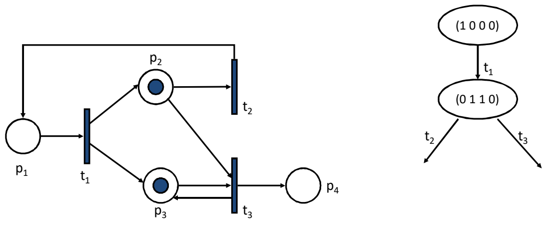
Les règles de génération

- Pour chaque successeur M’ de M, une composante *w* de M reste *w* pour M’
- S’il existe sur le chemin de M_0 à M un marquage M’’ tel que:
  - $M'(P_i) > M''(P_i)$ pour toute P_i dans P et M’# M, alors on remplace par *w* les composantes de M’ qui sont supérieures aux composantes de M’’

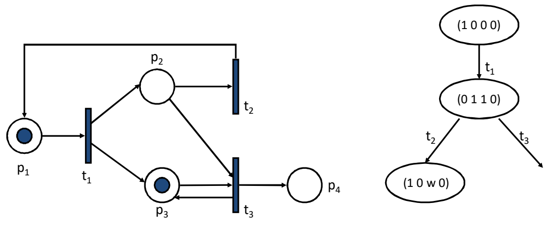
Exemple de graphe de recouvrement



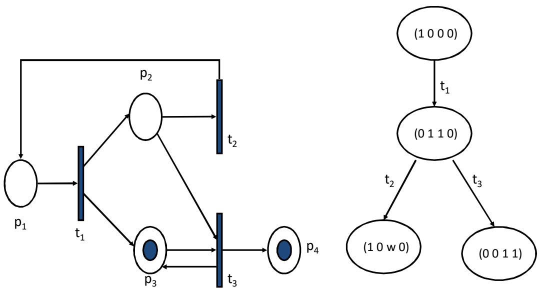
Exemple de graphe de recouvrement



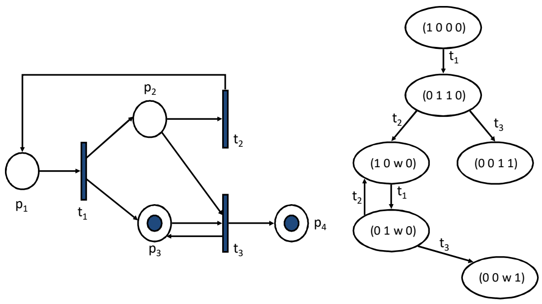
Exemple de graphe de recouvrement



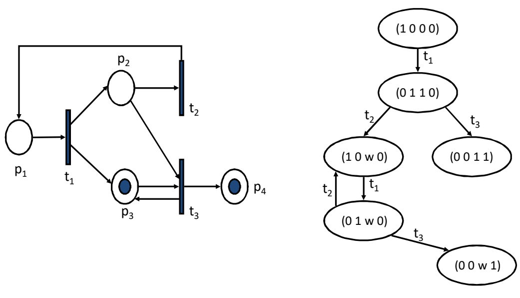
Exemple de graphe de recouvrement



Exemple de graphe de recouvrement

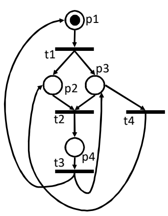


Graphe de recouvrement

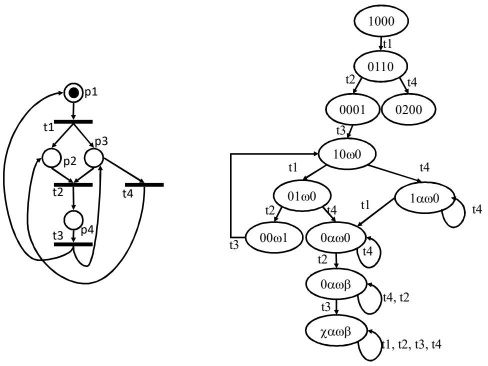


Exercice

- Donner le graphe de recouvrement du RdP suivant



Solutions



Équation d’état

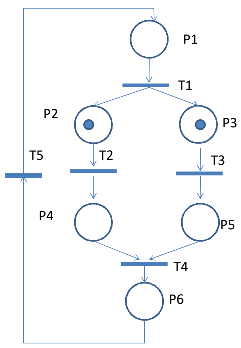
- L’équation d’état est définie par:

$$M' = M + W.V_s^t$$

- M: marquage initial
- W: matrice d’incidence
- V_s^t : vecteur caractéristique de S
- M’: le nouveau marquage obtenu après l’exécution de la séquence S

Exercice

- On considère le RdP suivant:
- Déterminer le marquage après franchissement des transitions T_2, $T_2T_3T_4T_1T_3$ puis $T_2T_3T_4T_5T_1T_3$.

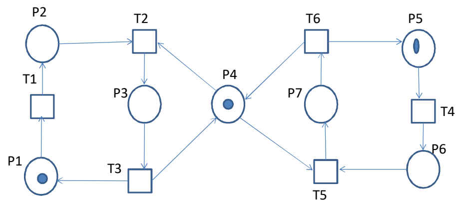


ANALYSE STRUCTURELLE DES P/T D’UN RDP

Analyse structurelle: motivation

- Nous avons étudié les propriétés qu'on peut établir pour un RdP en construisant et en analysant le graphe des marquages atteignables.
- Néanmoins, ce graphe peut devenir très grand: exponentiel en fonction du nombre de places.
- L'analyse structurelle peut aider à établir des propriétés sans construire le graphe de recouvrement. Les techniques principales sont:
  - P-invariant
  - Trappes

Exemple 1



Marquage comme vecteurs

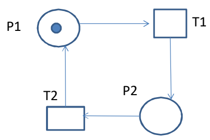
- On va écrire le marquage comme un vecteur colonne
  - $M_0 = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)^t$
- Aussi, on peut écrire la séquence des transition à franchir comme un vecteur colonne. Exemple, si T_1, T_2 et T_4 sont les transition à franchir donc on peut représenter cette séquence par $u=(1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)^t$
- Donc le marquage résultat après le franchissement de cette séquence est
  - $M = M_0 + W.u$
  - Calculer M.

Avertissement

- L'équation d'état ne garantie pas qu'un tel marquage est atteignable
- Les marquage obtenus pas l'équation d'état c'est une sur-approximation des marquages atteignables
- Cependant, on peut parfois utiliser l'équation d'état pour montrer qu'un marquage M ne peut pas être atteint, i.e si $M_0 + W.U$ a une solution non naturelle.

Exemple 2

On considère le RdP suivant et le marquage $M=(1\ 1)^t$



$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Cette équation n'admet pas de solution et par conséquent le marquage M n'est pas atteignable

Invariants

- La solution de l'équation W.U = 0 est appelée T-invariant (transitions invariants). La solution entière indique (possible) la présence des boucles.
- Les solutions de l'équation $W^t x = 0$ sont appelées place invariantes ou P-invariants. X est un invariant propre si X <> 0.
- Par exemple, dans l'exemple 2 u = $(1\ 1)^t$ est un T-invariant.
- Dans l'exemple 1 les vecteurs X_1=(1 1 1 0 0 0 0)t; X_2 = (0 0 1 1 0 0 1)t et X_3 = (0 0 0 0 1 1 1)t sont des p-invariant.
- Un P-invariant indique que le nombre de marques dans tous les marquages atteignables satisfait une invariante linéaire

Propriétés des P-invariants

- Soit M un marquage obtenu après le franchissement d'une séquence de transitions de vecteur caractéristique u, donc
  - $M = M_0 + W.U$
  - Soit X un P-invariant
- $M^t.X = (M_0 + W.U)^t.X = M^t_0.X + U^t W^t.X = M^t_0.X$
- Par exemple, X_2 est un P-invariant ça veut dire que tous les marquages atteignables vérifient:
  - $M(P_3) + M(P_4) + M(P_5) = M_0(P_3) + M_0(P_4) + M_0(P_5)=1$

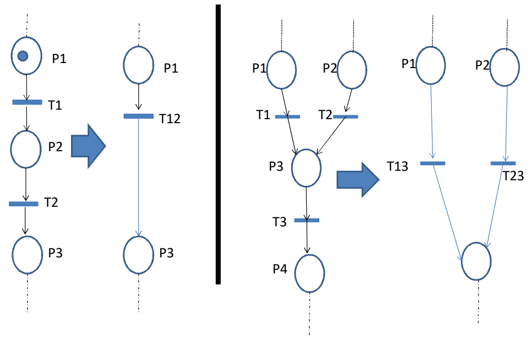
Méthodes de réductions 1/2

- Substitution des places:
  - Les transitions de sortie de P_i n'ont pas d'autres places d'entrée que P_i
  - Il n'existe pas de transition d'entrée de P_i qui soit également transition de sortie de P_i
  - Au moins une transition de sortie de P_i n'est pas une transition puits

Méthodes de réduction 2/2

- Réduction des transition
  - Transitions neutres $I(T_j) = O(T_j)$
  - Transitions identiques $I(T_j) = I(T_k)$ et $O(T_j) = O(T_k)$

Exemple de réduction



Propriétés comportementales 1/4

- Atteignabilité
  - L'atteignabilité d'un marquage M' à partir de M consiste à vérifier s'il existe une séquence s tel que M'Є R(M)
  - Pour tout marquage atteignable M d'un RdP <PN,M_0> l'équation $M = M_0 + W.Y$ admet une solution

Propriétés comportementales 2/4

- Bornitude
  - Une place Pi d'un RdP <PN,M_0> est k-bornée s'il existe un entier k tel que $M(P_i) <= k$ pour tout M dans $R(M_0)$
  - On dit que le RdP est sauf s'il est 1-borné
  - Un RdP est bornée ssi les marquages liés au nœuds de l'arbre de recouvrement ne contient pas l'élément 'w'.

Propriétés comportementales 3/4

- Vivacité
  - Une transition T_j d'un RdP <PN,M_0> est quasi-vivante ssi il existe une séquence de franchissement s telle que la transition T_j est franchissable immédiatement après le tir de la séquence s.
  - Une transition T_j d'un RdP <PN,M_0> est vivante si quel que soit le marquage M, il existe une séquence s qui, partant de M, conduit à un marquage qui permet de franchir la transition T_j, i.e

$$\forall M \in R(M_0), \exists M' \in R(M) \quad \text{t.q} \quad T_j \text{ est franchissable pour M'}$$

Propriétés comportementales 3/4

- Réversibilité
  - Un RdP est réversible si quel que soit le marquage M atteignable à partir de M_0, M_0 est aussi atteignable à partir de M.
  - Un marquage M_a est un état d'accueil s'il peut être atteint à partir de tous les marquages atteignables

Les Réseaux de pétri non autonomes

Plan du cours

- Introduction
- RdP synchronisés
  - Présentation
  - fonctionnement
- RdP temporisés
  - Présentation
  - RdP P-Temporisés
  - RdP T-temporisés

Plan du cours

- RdP Temporels
  - Présentation
  - Fonctionnement
- RdP continus
  - Présentation
  - Passage d'un RdP temporisé à un RdP continu
  - Equation fondamentale
- RdP Hybrides
  - Présentation
  - Fonctionnement
- RdP Colorés
  - Présentation
  - Validation de transitions
  - Franchissement des transitions

Introduction aux RdPs non autonomes

- Dans un RdP non autonome, l'évolution ne dépend pas seulement de l'état du réseau mais aussi de l'environnement qui lui est associé.
- l'évolution peut dépendre du temps
  - RdP temporisé
  - RdP temporel
  - Stochastique ou continu
- L'évolution peut aussi dépendre des données externes
  - RdP haut niveau

RdP synchronisé 1

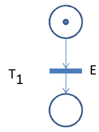
- Définition
  - Un RdP synchronisé est réseau non autonome dont le fonctionnement dépend de l'occurrence d'un certain événement
  - Le franchissement des transitions est conditionné par des événement
  - Une transition est franchissable s'elle est validée et l'événement se produit

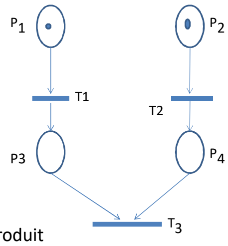
RdP synchronisé 2

- Déf 2
  - Un RdP synchronisé est un RdP marqué dans lequel toute transition est associée à un événement.
  - événement:
    - Externe E
    - Événement interne: changement d'état, de marquage
    - Événement neutre: événement toujours occurrent

RdP synchronisé 3

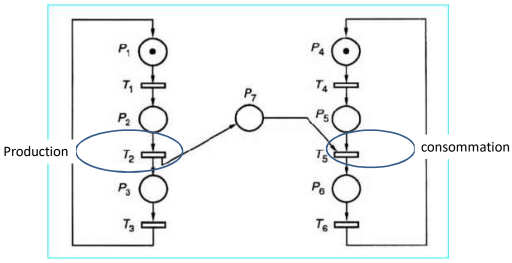
- Exemple 1-1:





- T_1 est franchissable dés que E se produit
- T_1 est immédiatement franchie

Exemples 1-2: structures –Synchronisation -Producteur / Consommateur



Synchronisation des deux taches P2 et P6

Les RdPs temporisés

- Les RdPs temporisés permettent de décrire les systèmes dont le fonctionnement dépend du temps (durée entre le début et la fin d'une opération).
- Introduction du temps au niveau de la place ou la transition
  - Les RdPs P-temporisés
  - Les RdPs T-temporisés

Les RdPsP-temporisés

- Un RdP P-temporisé est un doublet <PN, Temp> où:
  - PN: est un réseau de Petri marqué
  - Temp: application de l'ensemble P dans l'ensemble des nombres rationnels positifs.
  - Temp(P_i) = d_i = la temporisation de la place P_i

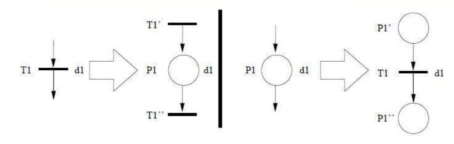
Les RdPs P-temporisés

- Fonctionnement
  - Lorsque une marque est déposée dans une place Pi, cette marque doit rester au moins un temps di
  - La marque est donc indisponible
  - Quand le temps di est écoulé la marque devient disponible pour le franchissement
  - Le franchissement des transition s'effectue comme dans RdP autonome, il y a une durée nulle

Les RdPs T-temporisés

- Un RdP T-temporisé est un doublet <PN, Temp> où:
  - PN: est un réseau de Petri marqué
  - Temp: application de l'ensemble T dans l'ensemble des nombres rationnels positifs.
  - Temp(T_i) = d_i = la temporisation de la transition T_i

Exemple 2-1: Équivalence P-temporisé et T-temporisé



– Equivalence réseau de Petri T-temporisé et P-temporisé

Analyse de performance

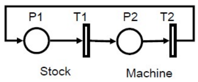
- Le calcul des indices s'effectue en régime stationnaire, c'est-à-dire qu'on l'évolution des marquages et stabilisée
- Quelques indices
  1. Le nombre moyen de jeton dans une places
  2. La fréquence moyenne de franchissement des transitions
  3. Le temps moyen d'attente d'une marque dans une place

Application aux systèmes de production

- Le nombre moyen de pièces fabriquées par unité de temps
- Le temps moyen d'utilisation des machines
- Le nombre moyen de pièces dans un stock
- Le temps moyen de séjour d'une pièces dans stock

Exercice

- Le réseau de Petri suivant modélise un flux de palettes évoluant à l'intérieur d'une station de production composée d'un stock amont et d'une machine. Le flux de palettes est fermé et est composé de 10 palettes. Le temps de séjour d'une palette dans le stock est de 30 secondes (d1=0.5) et le temps de production est d'une minute (d2=1).



exercice

- Donner le marquage initial du réseau.
- Représenter les courbes d'évolution des marquages des places P1 et P2.
- Qu'elle est le nombre moyen de palettes dans le stock amont et dans la machine de production ?
- Représenter les courbes d'évolution des marquages des places P1 et P2 lorsque d1=d2=1 -Donner les marquages moyens des places.
- Représenter les courbes d'évolution des marquages des places P1 et P2 lorsque d1=1 et d2=0.5 - Donner les marquages moyens des places.

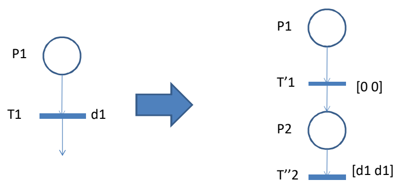
Les RdP temporels

- Les RdPs temporels sont une extension des RdPs temporisés. Leur fonctionnement dépend toujours du temps, mais le franchissement des transitions s'effectue dans une fenêtre temporelle
- Déf
  - Un RdP temporel est un doublet <PN,IS>
  - PN réseau de petri marqué
  - IS application de T dans QxQ
  - IS(Ti) = $[a_i,b_i]$

Les RdP temporels

- Fonctionnement
  - La transition est validée pendant l'intervalle de temps qui lui est associé
  - Si elle est franchie, elle l'est au plus tard à l'instant bi de validation.
- Équivalence
  - Pour passer d'un RdP T-temporisé à un RdP temporel il suffit de remplacer chaque transition T_i par une séquence T'_i T''_i

Exemple 3-1: d'équivalence RdP temporisé et RdP temporel



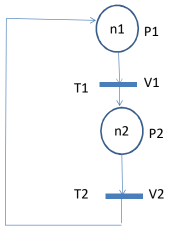
Equivalence entre un RdP T-temporisé et un RdP temporel

Réseaux de Petri continus

Les RdPs continus

- Les RdPs continus sont utilisés lorsque le nombre de marques est très importants. Il est alors impossible de représenter les marques dans les places.
- Les marques seront remplacés par des nombre entiers
- Les temporisation sont remplacées par des vitesse de franchissement

Représentation d'un RdP continu



Exemple 4-1: RdP Continu

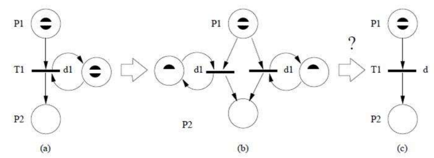
Passage d'un RdP temporisé à un RdP Continu

- Le fonctionnement d'un RdPC se définit comme une extension d'un RdP T-temporisé.
- Les jetons sont divisés en sous parties jusqu'à l'obtention d'une infinité de sous-jetons
- Les temporisations associées aux transitions sont remplacés par des vitesses de transitions

Étapes de passage d'un RdPT à RdPC

- Partage des marques en k jetons
- Dédoublement des transition a l'instant t+d_1 (d_1 la temporisation associé à T_1)
- Remplacement des k transitions de durée d_1 par une seule transition de durée d
- On doit retrouvé le même comportement à l'instant t+d_1.
- Le problème qui se pose est de trouver le bon d. Donc il faut faire des approximations de d

Exemple 4-1: Passage s'un RdPT à un RdPC



Passage d'un RdP temporisé à un RdP continu

Approximations 1

- Lorsque k est fini on obtient deux approximation
  1. $d = d_1/k$
     - remplacement de k franchissement en parallèle de durée d_1 par k franchissement en série de durée d_1/k
     - Si on a moins de k jetons dans P_1 on ne peut pas franchir les k transitons en parallèle
  2. $d = d_1.\max(1/k, 1/m_1)$
     - Permet de prendre en considération le blocage précédent en choisissant une approximation qui dépend des marquages en amont

Approximations 2

- Lorsque k est infini
- On remplaces les deux approximations précédentes par des vitesses de franchissement
- La première approximation devient $V = 1/d_1$ (RdPCC)
- La deuxième approximation devient
  - $V_i = 1/d_i \,.\, \min(1, m_a, \ldots, m_b)$ avec $\{P_a, \ldots, P_b\} = {}^{\circ}T_i$ est RdPCV

Equation fondamentale

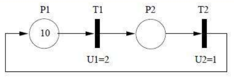
- L'équation fondamentale permet de donner l'évolution des marquages au cours du temps

$$\frac{dM(t)}{dt} = W.v(t)$$

- Avec
  - M(t): le marquage à l'instant t
  - W: matrice d'incidence
  - V(t): vitesse de franchissement à l'instant t
    - $V(t) = (V_1(t), V_2(t), \ldots, V_m(t))$

Exemple 4-2

- Soit un système simple de production composé d'une entité et d'un stock en amont. Le but est d'étudier le flux des palettes qui traverse le système, le modèle de RdPC de ce système est représenté par le réseau suivant



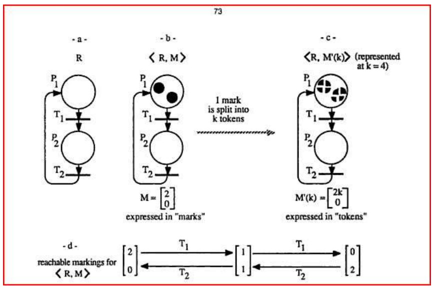
Modèle RdP continu du flux de palettes

Exemple 4-2

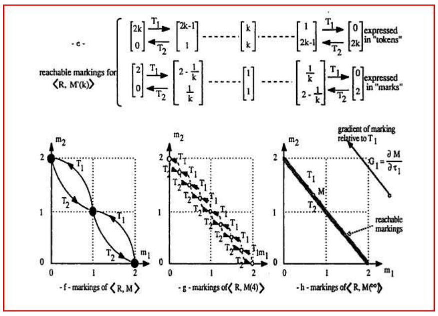
$$\begin{cases} v_1(t) = U_1 = 2 & \text{(constante)} \\ v_2(t) = U_2 = 1 & \text{(constante)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(t) = m_1(0) + (U_2 - U_1).t = 10 - t \\ m_2(t) = m_2(0) + (U_1 - U_2).t = t \\ \forall t, m_i(t) \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 4-3



Exemple 4-3 suite



Réseaux de pétri stochastique (RdPS)

Introduction aux RdPS

- Les réseaux de Petri stochastiques ont été développés par florin en 1978
- L'objectif est la modélisation des systèmes qui présentent des aléas liés à la sûreté de fonctionnement
  - Pannes
  - Défauts
  - Accidents
- Les RdPS sont les plus utilisés dans les systèmes productifs parce que ils peuvent être à la fois déterministes et stochastiques.

Définition des RdPS

- Définition:
  - Un RdPS est un 5 uplets (P,T,Pre,Post,M_0,μ)
  - Où:
  - P: ensemble des places
  - T: ensemble des transitions
  - Pre, post matrice d'incidence avant et après
  - M0: marquage initial
  - μ: ensemble des taux de franchissement

RdPS temps de franchissement

- À chaque transition est associée une durée de franchissement d_i.
- d_i est une variable aléatoire avec une distribution de probabilité exponentielle
- $Pr(d_i<=t) = 1-exp(-\mu_i*t)$: probabilité pour que le franchissement de T_i ait lieu avant *t*

RdPS temps de franchissement

- La valeur moyenne de la durée de franchissement est notée par d_i* et définie par

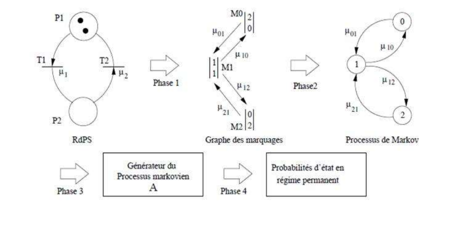
$$d_i^* = \int_0^\infty (1 - \Pr_{di}(t)).dt = \int_0^\infty e^{-\mu_i * t} dt = \frac{1}{\mu_i}$$

- *$1/\mu_i$* est appelé le taux de franchissement de la transition T_i
- Conflit:
  - Lorsque deux transitions sont simultanément franchissables, c'est la transition qui a le plus petit temps de franchissement qui est franchie

Analyse d'un RdPS

- L'analyse d'un réseau de Petri conduit à l'obtention de ses indices de performances.
- Démarches:
  1. Constructions du graphes des marquages
  2. Déduction du processus de Markov associé
  3. Détermination du générateur du processus markovien
  4. Calcul des probabilité d'états en régime stationnaire
  5. Calcul des indices de performance

Exemple 5-1



Graphe des marquages

- Il est obtenu à partir d'un marquage M_0 et par franchissement successif des transitons
- la propriété sans mémoire de la distribution exponentielle des taux de transition permet de montrer que le graphe des marquages d'un RdPS borné est un Processus de Markov

Générateur du processus markovien

- C'est une matrice carrée notée A et qui regroupe l'ensemble des taux de transition entre les marquages du graphe

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

- $a_{ij} = \mu_{ij}$: le taux de transition entre le marquage M_i et M_j ($j \neq i$)
- $a_{ii} = -\sum u_{ij}$: la somme des taux de sortie du marquage M_i

Application à l'exemple 5-1

- On obtient le générateur du processus Markovien suivant

$$A = \begin{bmatrix} -\mu_{01} & \mu_{01} & 0 \\ \mu_{10} & -(\mu_{10} + \mu_{12}) & \mu_{12} \\ 0 & \mu_{21} & -\mu_{21} \end{bmatrix}$$

Équation fondamentale

- Cette équation permet de donner l'évolution des probabilité d'être dans un marquage au cours du temps

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t).A$$

- $\Pi(t) = [\Pi_1(t), \Pi_2(t), \ldots, \Pi_r(t)]$
- $\Pi_i(t)$: c'est la probabilité d'être dans le marquage M_i à l'instant t

Probabilité d'état en régime permanent

- Les probabilités d'état en régime permanent ∏i() sont obtenues en résolvant le système suivant:

$$\begin{cases} \Pi(\infty).A = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} \Pi_i(\infty) = 1 \end{cases}$$

Exemple 5-2

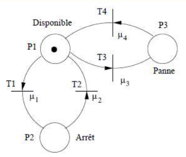
- Soit une machine de production dont l'évolution est déterminée par trois états distincts: disponible-arrêt – panne
- Les taux de franchissement sont donnés par le tableau suivant

μ_i	Valeur	Signification
μ_1	1	taux d'arrêt
μ_2	2	taux de remise en marche
μ_3	1	taux de panne
μ_4	3	taux de réparation

Exemple 5-2 (suite)

- Modéliser les états de la machine par un RdP
- Donner le processus markovien
- Donner le générateur du processus markovien

Solution



$$A = \begin{bmatrix} -\mu_1-\mu_3 & \mu_1 & \mu_3 \\ \mu_2 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_4 & 0 & -\mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi(\infty) \,.\, A = 0 \\ \sum_{i=0}^{2} \pi_i(\infty) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \pi_0(\infty) & \pi_1(\infty) & \pi_2(\infty) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 0 \\ \pi_0(\infty) + \pi_1(\infty) + \pi_2(\infty) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0(\infty) = 0.5455 \\ \pi_1(\infty) = 0.2727 \\ \pi_2(\infty) = 0.1818 \end{cases}$$

Indices de performances

- Fréquence moyenne de franchissement d'une transition est: $f_j^* = \sum_k \mu_j(k) * \pi_k^*$
  - *K* tel que T_j soit franchissable à partir de M_k
- Le nombre moyen de jetons dans une place est:

$$M^*(P_i) = \sum_k M_k^*(P_i) * \pi_k^*$$

- Le temps moyen de séjour d'un jeton dans une place est: $D^*(Pi) = \frac{M^*(Pi)}{Post_i * F^*}$
  - $Post_i$: poids des arcs en amont de P_i
  - F^* la fréquence moyenne des transition en amont de P_i

Exercice 1

- On souhaite modéliser les opérations d'un service de maintenance. Le service est composé d'une seule équipe de maintenance sur un parc de deux machines. L'équipe ne réalise que les actions de maintenance corrective. Les paramètres de maintenance des différentes machines sont les suivants : le taux de défaillance de la machine 1 est de $\lambda 1 = 1$ et son taux de réparation : $\mu 1 = 4$. Pour la machine 2, nous avons : $\lambda 2 = 2$, $\mu 2 = 5$. Tous ces paramètres sont des variables aléatoires distribuées avec une loi exponentielle.
- Donner le réseau de Petri stochastique associé à ce système.
- Déterminer les probabilités d'état en régime permanent.
- Quelle est la probabilité (en régime permanent) d'avoir la station de travail dans un état de défaillance ?
- Déterminer le temps de séjour moyen de l'équipe sur une opération de maintenance.
- Que devient le modèle précédent si le service est composé de 2 équipes ? Quelles sont les hypothèses à prendre en compte pour les opérations de maintenance ?

Exercice2

Une station de production peut se trouver dans deux de états de défaillance, légère et sévère, suivant la gravité de la panne. La défaillance sévère n'est diagnostiquée qu'à partir de l'état de défaillance légère. Après réparation de la défaillance légère ou sévère, la station se retrouve dans un état opérationnel. Les taux de défaillance et de réparation sont des variables aléatoires distribuées avec une loi exponentielle, dont les paramètres sont les suivants :

Panne légère	Panne sévère
Taux de défaillance : $\lambda 1 = 2$	Taux de défaillance : $\lambda 2 = 4$
Taux de réparation : $\mu 1 = 6$	Taux de réparation : $\mu 2 = 9$

- Donner le réseau de Petri stochastique associé à ce système.
- Déterminer les probabilités d'état en régime permanent.
- Quelle est la probabilité (en régime permanent) d'avoir la station de travail dans un état de défaillance ?

Exercice3

Dans sa phase d'exploitation, un engin militaire est doté d'un système de sécurité en cas de défaillance de certains composants, ce qui lui permet de continuer sa mission. Ce système permet de passer automatiquement (et successivement) d'un mode de fonctionnement normal (N) en 2 modes de fonctionnement dégradés (mode D1 puis mode D2). Si une défaillance intervient dans le mode D2, l'engin passe en mode panne (P). La réparation des composants défectueux dans chacun des modes permet de revenir au mode de fonctionnement normal (N). Les taux de défaillance et de réparations entre les différents modes sont les suivants :

	Mode D1	Mode D2	Mode panne (P)
Taux de défaillance (loi exponentielle)	$\lambda 1 = 1$	$\lambda 2 = 2$	$\lambda p = 5$
Taux de réparation (loi exponentielle)	$\mu 1 = 3$	$\mu 2 = 5$	$\mu p = 8$

Tous ces paramètres sont des variables aléatoires distribuées avec une loi exponentielle.

- Donner le réseau de Petri stochastique associé à ce système.
- Déterminer les probabilités d'état en régime permanent. Qu'en déduisez vous ?

Exercice 4

Une unité de production composée de 2 machines est maintenue en disponibilité par deux équipes de maintenance. Les équipes sont identiques et réparent indifféremment les deux machines. Les réparations sont effectuées par une seule équipe. Après une réparation, l'équipe revient en attente. Les taux de défaillance et de réparation des machines sont des variables aléatoires distribuées avec une loi exponentielle, dont les paramètres sont les suivants :

	Taux de défaillance	Taux de réparation
Machine 1	$\lambda 1 = 2$	$\mu 1 = 5$
Machine 2	$\lambda 2 = 3$	$\mu 2 = 7$

- Donner le réseau de Petri stochastique associé à ce système.
- Déterminer les probabilités d'état en régime permanent (On prend l'hypothèse que le réseau de Petri n'effectue qu'un seul franchissement de transition à la fois).
- Quelle est la probabilité (en régime permanent) d'avoir au moins une équipe en état de réparation ?

Exercice 5

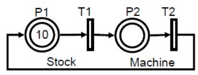
- Une unité de production composée de 2 machines est maintenue en disponibilité par deux équipes de maintenance. Les équipes sont identiques et réparent indifféremment les deux machines. Les réparations sont effectuées par une seule équipe. Après une réparation, l'équipe revient en attente. Les taux de défaillance et de réparation des machines sont des variables aléatoires distribuées avec une loi exponentielle, dont les paramètres sont les suivants :

	Taux de défaillance	Taux de réparation
Machine 1	$\lambda 1 = 2$	$\mu 1 = 5$
Machine 2	$\lambda 2 = 3$	$\mu 2 = 7$

- Donner le réseau de Petri stochastique associé à ce système.
- Déterminer les probabilités d'état en régime permanent (On prend l'hypothèse que le réseau de Petri n'effectue qu'un seul franchissement de transition à la fois).
- Quelle est la probabilité (en régime permanent) d'avoir au moins une équipe en état de réparation ?

Exercice 6

- Le réseau de Petri suivant modélise un flux de palettes évoluant à l'intérieur d'une station de production composée d'un stock amont et d'une machine. Le flux de palettes est fermé et est composé de 10 palettes. La vitesse maximale de sortie des palettes du stock est de 1 palettes/minutes (U1=1) et le taux de production est d'une palette par minute (U2=2).



Exercice 5

- En considérant que le réseau de Petri est **continu à vitesse constante :**
  - Déterminer les équations d'évolutions des marquages m1(t) et m2(t).
  - Tracer les courbes d'évolution de ces marquages.
  - Préciser les valeurs des marquages obtenus en régime permanent
- En considérant que le réseau de Petri est **continu à vitesse variable :**
  - Déterminer les équations d'évolutions des marquages m1(t) et m2(t).
  - Tracer les courbes d'évolution de ces marquages.
  - Préciser les valeurs des marquages obtenus en régime permanent.