

Defensa del D.E.A.

Un embebimiento matemático

Cédric M. Campos

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de CC. Matemáticas
Universidad de Valencia

11 de octubre de 2006



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Cálculo de variaciones

F. Andre Vaillo, J. M. Mazón Ruiz y S. Segura de León

Objetivo: Consideremos un funcional de energía $I : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(u) := \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

a partir del Lagrangiano $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dado un subconjunto $A \subset X(\Omega)$, ¿ $\exists \min_A I(u)$?

Método indirecto: estudio de puntos críticos, $I'(u) = 0$.

Método directo: teorema tipo Weierstrass, $I \in \mathcal{C}(K)$.



El método directo

Hilbert, Lebesgue, Tonelli

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ Banach reflexivo} \\ I : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ I \text{ débilmente semicontinuo inferior} \\ I \text{ coercivo} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \min_X I(u)$$

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} \Omega \text{ abierto acotado } \mathcal{C}^1 \\ L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuo} \\ L(x, z, \cdot) \text{ convexo } \forall (x, z) \\ L \text{ coercivo } (\rightsquigarrow q) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall u_0 \in W^{1,q}(\Omega) \\ \exists \min_{u_0 + W^{1,q}_0(\Omega)} I(u) \end{array} \right.$$



El método indirecto

Euler, Lagrange

Teorema

Sean Ω abierto acotado \mathcal{C}^1 y $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lagrangiano \mathcal{C}^2 . Dado $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$,

$$\exists \bar{u} = \min_{u_0 + W_0^{1,q}(\Omega)} I(u) \Rightarrow I'(\bar{u}) = 0.$$

Ecuación de Euler-Lagrange ($I'(u) = 0$)

$$L_z(x, u(x), \nabla u(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} L_{p_i}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$$

abreviadamente $L_z - \sum \partial_{x_i} L_{p_i} = 0$.



Funcionales no convexos

Funcional tipo $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} F(u),$$

con $a|z|^{p+1} \leq F(z) \leq A|z|^{p+1}$, para ciertos $p, a, A > 0$.

Ecuación de E-L asociada:

$$\begin{cases} -\Delta u = F'(u) \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema (Caso $0 < p < 1$)

$\exists \text{mín}_{H_0^1(\Omega)} I(u)$ no nulo



Funcionales no convexos

Teorema (Caso $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$)

$$\left. \begin{array}{l} |f(z)| \leq c(1 + |z|^p) \\ |f'(z)| \leq c(1 + |z|^{p-1}) \\ F(z) \leq \gamma \cdot f(z) \cdot z \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f(u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \\ \text{tiene sol. no trivial.} \end{array} \right.$$

Teorema (Caso $p > \frac{n+2}{n-2}$)

Sea Ω abierto estrellado respecto al 0 de clase \mathcal{C}^1 . Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es solución clásica de la ecuación de E-L con

- $f(z) = |z|^{p-1}z$ (Pohozaev) ó
- $f(z) = |z|^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda z$ ($\lambda > 0$),

entonces $u \equiv 0$ en Ω .



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- **Análisis armónico**
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Análisis armónico

Oscar Blasco de la Cruz

- 1 Teorema de representación de Riesz
- 2 Funciones armónicas
- 3 Función conjugada
- 4 Teoremas de interpolación



Teorema de representación de Riesz

Teorema (Radon-Nikodym)

Sean μ, η medidas no negativas y finitas sobre (X, Σ) .

$$\eta \ll \mu \Rightarrow \exists! f \in L^1(\mu) \text{ t.q. } \eta(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \Sigma \rightsquigarrow \frac{d\eta}{d\mu} = f$$

Teorema (Frigyes Riesz)

X localmente compacto y Hausdorff, entonces

$$(\mathcal{C}_0(X))^* = M(X) \rightsquigarrow \forall \Phi \exists! \mu \quad \Phi(f) = \int_X f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X).$$



Funciones armónicas

Transformada de Fourier y convolución

Definición

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ y $\mu \in M(\mathbb{T})$, dados $n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{T}$:

- $\hat{f}(n) := \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) \frac{dt}{2\pi}$

$$\rightsquigarrow \hat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t)$$

- $(f * g)(t) := \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s) \frac{ds}{2\pi}$

$$\rightsquigarrow (\mu * f)(t) := \int_{\mathbb{T}} f(t-s) d\mu(s)$$



Funciones armónicas

Núcleos de sumabilidad

Definición

Poisson: $P(\mu)(re^{it}) := \mu * P_r(t) = \int P_r(t-s) d\mu(s)$

Dirichlet: $\delta_n(\mu)(t) := \sum_{|k| \leq n} \hat{\mu}(k) e^{ikt} = \mu * D_n(t)$

Fejer: $\sigma_n(\mu)(t) := \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{\mu}(k) e^{ikt} = \mu * F_n(t)$

Teorema

$$\sigma_n(\mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\omega^*} \mu \quad y \quad P_r(\mu) \xrightarrow[r \nearrow 1]{\omega^*} \mu$$



Funciones armónicas

Caracterización

Definición

$u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D})$ es armónica sii $\Delta u \equiv 0$ en \mathbb{D} .

Teorema

Son equivalentes

- 1 u es armónica.
- 2 (P.V.M.) $u \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$ y $\forall z \in \mathbb{D}, 0 \leq r < 1 - |z|$

$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{it}) \frac{dt}{2\pi}.$$

- 3 $\exists F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $u = \operatorname{Re} F$.



Funciones armónicas

Integral de Poisson

Definición

$$\mu \in M_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}(\mu)(z) := \int_{\mathbb{T}} P(z\bar{\xi}) d\mu(\xi), \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Teorema

$\mathcal{P} : M_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \rightarrow h^1(\mathbb{D})$ es un *isomorfismo isométrico*.



Función conjugada

Teorema de Marcel Riesz

Definición (Armónica conjugada)

$$u \in h^1(\mathbb{D}) \rightsquigarrow \tilde{u} \in h^1(\mathbb{D}) \text{ t.q. } u + i\tilde{u} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \text{ y } \tilde{u}(0) = 0$$

Definición (Función conjugada)

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ y } u := \mathcal{P}(f) \rightsquigarrow \tilde{f} := \lim_{r \nearrow 1} \tilde{u}(re^{it})$$

Teorema (Marcel Riesz)

$$1 < p < \infty \Rightarrow \exists C_p > 0 \text{ t.q. } \|\tilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T})$$



Teoremas de interpolación

Teorema (Marcinkiewicz)

Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, si $T : L^q(X, \nu) \rightarrow L^q(X, \nu)$ es un operador débilmente q -acotado para $q = p_0, p_1$, entonces está fuertemente p -acotado para todo $p_0 < p < p_1$.

Teorema (Riesz-Thorin \rightsquigarrow M. Riesz)

Sean $T : L^{p_0}(\nu) \cap L^{p_1}(\nu) \rightarrow L^{p'_0}(\eta) \cap L^{p'_1}(\eta)$ un operador lineal (p_0, p'_0) -fuerte y (p_1, p'_1) -fuerte, con $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y $1 \leq p'_0 < p'_1 \leq \infty$. Dado $0 < \alpha < 1$, T es (p_α, p'_α) -fuerte donde p_α (al igual que p'_α) viene dado por:

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1} \quad \left(\frac{1-\alpha}{p_0} \text{ si } p_1 = \infty \right).$$



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- **Espacios funcionales**
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

1 Familias sumables

Idea: análisis de una variable sobre espacios de Banach.



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

1 Familias sumables

- Sumabilidad
- Sumabilidad absoluta
- Convergencia
- Convergencia absoluta
- Convergencia incondicional



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

1 Familias sumables

- Teorema de Riemann
- Teorema de Cauchy (de la media)
- Teorema de Mertens
- Criterio de Stolz



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

- 1 Familias sumables
- 2 Familias sumables de funciones
 - Sumabilidad puntual
 - Sumabilidad uniforme
 - Sumabilidad absoluta y uniforme
 - Sumabilidad uniforme interna



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

- 1 Familias sumables
- 2 Familias sumables de funciones
 - Continuidad
 - Series de potencias (en varias variables \mathbb{C})
 - Dominios de convergencia, de Reinhardt, propios y completos
 - Holomorfía



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

- 1 Familias sumables
- 2 Familias sumables de funciones
 - Identidad de series de potencias
 - Identidad de funciones holomorfas
 - Fórmula integral de Cauchy



Espacios funcionales

Manuel Valdivia Ureña & Pablo Galindo Pastor

- 1 Familias sumables
- 2 Familias sumables de funciones
- 3 Álgebras de Banach
 - Álgebras de Banach (sobre \mathbb{C}) unitarias
 - Teoría espectral (básico)
 - Espectro de un álgebra de Banach conmutativa
 $M(A) := \{\phi : A \rightarrow \mathbb{C} : \phi \text{ homomorfismo no trivial}\}$
 - Transformada de Gelfand $\hat{x}(\phi) := \phi(x)$
 - Transformada de Fourier: Teorema de Gelfand-Wiener
 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ con serie de Fourier abs. conv. $\Rightarrow 1/f$ tmb.



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- **Teoría de control**

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Teoría de control

Hildebrando Munhoz

- $$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), & t \leq 0, & z(0) = z_0 \\ y(t) = Cz(t) + Du(t) \end{cases}$$
- $$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds$$
- Teoría de C_0 -semigrupos (y aplicación a EDPs)
- Controlabilidad y observabilidad
- Estabilidad, estabilizabilidad y detectabilidad



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Integración en variedades y cohomología

Olga Gil Medrano

- Orientación
 - Definición
 - Caracterización (existencia de una forma de volumen)
 - Orientación de fronteras
 - Doble recubrimiento de una variedad no orientable
- Integración
 - Definición local (soporte compacto)
 - Definición global (particiones de la unidad)
 - Importancia de la orientabilidad



Teorema de Stokes

... y consecuencias

Stokes $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$

Green $\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

Gauss $\int_M d\omega = 0$ para M compacta

Divergencia $\int_D \operatorname{div} X \cdot \Omega = \int_{\partial D} i(X)\Omega$
 $\int_D \Delta f dv = \int_{\partial D} \nabla f dv$ (caso riemanniano)

PVM $(a^{ij} \partial_{ij} + b^i \partial_i) f = 0$ en $D \subset\subset M \Rightarrow$ extremos en ∂D



Cohomología de DeRham

Definición

$$\Lambda^k(M) \xrightarrow{d_k} \Lambda^{k+1}(M) \rightsquigarrow H^k(M) := \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}$$

Números de Betti $b_k := \dim H^k(M)$

Característica de Euler-Poincaré $\chi_M := \sum_{k=0}^k (-1)^k b_k$

Axiomas:

- 1 $H(\text{punto}) = \mathbb{R}$
- 2 (homotopía) $\phi \sim \psi \Rightarrow \phi^\# = \psi^\#$
- 3 (unión disjunta) $M = \bigsqcup_\alpha M_\alpha \Rightarrow H(M) = \prod_\alpha H(M_\alpha)$
- 4 (Mayer-Vietoris) $M = U \cup V$, existe un triángulo exacto $H(M) \rightarrow H(U) \oplus H(V) \rightarrow H(U \cap V) \rightarrow H(M)$



Cohomología de DeRham

Resultados

Teorema (Isomorfismo de Poincaré)

$$D_M : H(M) \cong (H_c(M))^*$$

Teorema (DeRham)

$$H(M) \cong H(\mathcal{N})$$

Corolario

$$M \text{ compacta} \Rightarrow \dim H(M) < \infty$$



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- **Topología diferencial**
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Topología diferencial

Carmen Romero Fuster & Juanjo Nuño Ballesteros

1 Espacios de surtidores

1 $C_{p,q}^r(M, N) := \{f \in C^r(U_p, V_q) : f(p) = q\}$

2 $J_{p,q}^{k,r}(M, N) := C_{p,q}^r(M, N) / \sim_k$

3 $J^{k,r}(M, N) := \bigsqcup_{p \in M, q \in N} J_{p,q}^{k,r}(M, N)$

2 Topologías de Whitney

1 $G^k(M, N)$ denso en $G^s(M, N)$ para $1 \leq k \leq s$

2 $M \sim_1 N \Leftrightarrow M \sim_\infty N$

3 M es C^1 sii es C^∞

3 Transversalidad

4 Estabilidad

$\text{Sub}^\infty(M, N), \text{Inm}_{1:1}^\infty(M, N), \text{Inm}_{AN}^\infty(M, N), \text{Sub}_{PL}^\infty(M, N).$

5 Teoría de Morse



Transversalidad

Definición

Sean $f : M \rightarrow N$ y $S \hookrightarrow N$, entonces

$$f \dashv S \quad \equiv \quad T_{f(x)}M = T_{f(x)}S + d_x f(T_x M) \quad \forall x \in M.$$

Teorema (Transversalidad de R. Thom)

LBT Sean $F : M \times P \rightarrow N$ y $S \hookrightarrow N$, entonces

$$F \dashv S \Rightarrow \exists Q \subseteq P \text{ denso tal que } F_q \dashv S \quad \forall q \in Q.$$

TET $\overline{\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : f \dashv S\}} = C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

TTT $\overline{\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : j^k f \dashv S\}} = C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

Nota: TTT \rightsquigarrow Teorema de inmersión de Whitney: $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$.



Teoría de Morse

Definición

$$f \in \mathcal{C}^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

- 1 $\Sigma := \{\sigma = j^1 h(p) \in J^1(M, \mathbb{R}) : dh(p) = 0\}$
- 2 $\Sigma_f := \{p \in M : df(p) = 0\} = (j^1 f)^{-1}(\Sigma)$
- 3 $f \in \text{Morse}(M) \Leftrightarrow d^2 f(p) > 0 \ \forall p \in \Sigma_f$

Teorema

- 1 $f \in \text{Morse}(M) \Leftrightarrow j^1 f \dashv \Sigma$
- 2 $\text{Morse}(M)$ *abierto y denso en $\mathcal{C}^\infty(M^n, \mathbb{R})$*
- 3 *Para M compacta: f es estable $\Leftrightarrow f \in \text{Morse}(M)$ con valores críticos distintos.*

Teoría de Morse

Teorema (Intervalo regular)

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ con M compacta. Sean $M_{[a,b]} := f^{-1}[a, b]$ y $M^c := f^{-1}] - \infty, c]$. Si $M_{[a,b]}$ no tiene puntos críticos, entonces

- 1 $M_{[a,b]} \approx f^{-1}(a) \times [a, b]$,
- 2 $\forall c \in [a, b] \ f^{-1}(c) \approx f^{-1}(a)$,
- 3 $M^a \subset M^b$ es un retracts de deformación.

Teorema (Reeb)

Sea M^n compacta, si existe $f \in \text{Morse}(M)$ con sólo 2 puntos críticos, entonces $M \approx S^n$ (homeomorfas).



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



De la geometría a la informática y viceversa

Juan Luis Monterde García-Pozuelo

Curvas y superficies de Bézier

- Algoritmo de DeCasteljau: dado $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}^2$,

$$\left. \begin{aligned} P_i^0(t) &= P_i \\ P_i^r(t) &= (1-t)P_i^{r-1}(t) + tP_{i+1}^{r-1}(t) \end{aligned} \right\} \alpha_{\mathcal{P}}(t) := P_0^n(t)$$

- Polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \rightsquigarrow \alpha_{\mathcal{P}}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

- Curvas y superficies racionales

$$\alpha_{\mathcal{P}}^{\Omega}(t) = \frac{\omega_0 B_0^n(t) P_0 + \cdots + \omega_n B_n^n(t) P_n}{\omega_0 B_0^n(t) + \cdots + \omega_n B_n^n(t)}$$



Superficies minimales

El problema de Plateau-Bézier

- \vec{x} minimal $\Leftrightarrow \Delta^g \vec{x} = 0$ (operador de Laplace-Beltrami).
- Si \vec{x} es isoterma ($E = G$ y $F = 0$), $\Delta^g = \Delta$.
- Si una superficie de Bézier es armónica, **2 filas (o columnas) de la red de control determinan la superficie.**
- Representación de Weierstrass (cartas isotermas):
 - $\phi := \vec{x}_u - i\vec{x}_v$
 - (isotermalidad) $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = E - 2iF - G = 0$
 - $f = \phi_1 - i\phi_2$ y $g = \phi_3/f$ (o $h = g$ y $\omega = gfdz$)
- Funcional de área $\mathcal{A} \rightsquigarrow$ funcional de Dirichlet \mathcal{D} .
$$\vec{x} = \min \mathcal{A}, \quad \vec{x}_n = \min \mathcal{D}(n) \rightarrow \mathcal{A}(\vec{x}_n) \rightarrow \mathcal{A}(\vec{x})$$
- Máscaras.



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- **Fibrados**

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Fibrados

Vicente Miquel Molina

- 1 Fibrados diferenciables, sumersión:

$$\pi : E \rightarrow M.$$

- 2 Fibrados vectoriales, fibras espacios vectoriales:

$$e. g. E = TM \Rightarrow E_x = \pi^{-1}(x) = T_x M.$$

- 3 Fibrados principales, fibras grupos de Lie,

$$e. g. E = FM \Rightarrow E_x = \{\text{bases de } T_x M\} \cong Gl(n, \mathbb{K}).$$

- 4 Fibrados asociados, definición y existencia.

$$E(M, G) \leftrightarrow A(M, F, G, E)$$



Conexiones

Definiciones

- 1 Distribuciones horizontales,

$$T_u E = \ker(T_u \pi) \oplus H_u \text{ tal que } (T_u R_g)H_u = H_{ug}.$$

- 2 Conexiones lineales, $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \rightsquigarrow \nabla_X(fs) = (Xf)s + f\nabla_X s.$$

- 3 Extensión de ∇ a $\Gamma(E \otimes E)$ y $\Gamma(E^*)$,

$$\nabla(s \otimes t) := \nabla s \otimes t + s \otimes \nabla t \quad \text{y} \quad (\nabla_X \phi)(s) := X(\phi(s)) - \phi(\nabla_X s).$$

- 4 Conexiones métricas,

$$\nabla \langle \cdot, \cdot \rangle = 0 \quad \equiv \quad X \langle s, t \rangle = \langle \nabla_X s, t \rangle + \langle s, \nabla_X t \rangle.$$



Conexiones

Formas asociadas

- 1 Transformación de curvatura $R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E)$,

$$R^\nabla(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s.$$

- 2 1-formas de conexión $\omega_i^j \in \Gamma(T^*M)$,

$$\nabla \mathbf{e}_i = \omega_i^j \otimes \mathbf{e}_j \rightsquigarrow \nabla \mathbf{e} = \omega \otimes \mathbf{e}.$$

- 3 2-formas de curvatura $\Omega_i^j \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$,

$$R^\nabla \mathbf{e}_i = \Omega_i^j \otimes \mathbf{e}_j \rightsquigarrow R^\nabla \mathbf{e} = \Omega \otimes \mathbf{e}.$$

- 4 Ecuación de estructura de Cartan,

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j \rightsquigarrow d\omega = \omega \wedge \omega + \Omega.$$



Grupo de holonomía

Transporte paralelo

- 1 Paralelismo de una sección $s \in \Gamma(E)$ a lo largo de una curva $c : [0, 1] \rightarrow M$, $\nabla_{\dot{c}} s = 0$.
- 2 Transporte paralelo: $\exists!$ $u \in \Gamma(E)$ paralela a lo largo de c con $u(0) = u_0$. Tomo $\tau_c : u_0 \in E_{c(0)} \mapsto \tau_c u_0 = u(1) \in E_{c(1)}$.
- 3 $\Omega_x := \{\text{lazos de } M \text{ en } x\}$,
 $\text{Hol}_x(\nabla) := \{\tau_\gamma : \gamma \in \Omega_x\}$.
- 4 $\Omega_x^0 := \{\text{lazos de } M \text{ en } x \text{ homotéticamente nulos}\}$,
 $\text{Hol}_x^0(\nabla) := \{\tau_\gamma : \gamma \in \Omega_x^0\}$.
- 5 $\text{Hol}_x^0(\nabla) \leq \text{Hol}_x(\nabla) \leq \text{Gl}(r, \mathbb{K})$



La ecuación de Yang-Mills

- 1 $\mathcal{C}(E) := \{\text{conexiones sobre } E\},$
 $\mathcal{C}^g(E) := \{\text{conexiones métricas sobre } (E, g)\}.$
- 2 $\mathcal{C}(E) = \nabla^0 + \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E)),$
 $\mathcal{C}^g(E) = \nabla^0 + \Gamma(T^*M \otimes \text{Ant}(E)).$
- 3 Funcional de Yang-Mills con $(M, g), (E, g)$ riemannianas y M compacta:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{C}^g(E) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \nabla &\mapsto \int_M \|R^\nabla\|^2.\end{aligned}$$

- 4 Ecuación de Yang-Mills: ∇ punto crítico de \mathcal{F} si

$$\langle R^\nabla, d^\nabla B \rangle = 0 \quad \forall B \in \text{Ant}(E) \quad \equiv \quad d^{\nabla*} R^\nabla = 0.$$



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



El Problema Isoperimétrico en Espacios de Minkowski

Optimizando el Volumen

Problema

En un espacio de Minkowski $(V, \|\cdot\|)$, ¿cuál es el cuerpo que tiene mayor volumen fijada el área de su frontera? En otras palabras, ¿existe un cuerpo I tal que

$$\text{volumen}(I) \geq \text{volumen}(K),$$

para todo cuerpo K con $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$?



La Solución al Problema Isoperimétrico

El Isoperimétrico

Teorema

Sea $\Omega \in \Lambda^n V^$ y sea $\omega \in |\Lambda^{n-1} V^*|$ positiva tal que*

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1} V : \omega(v) \leq 1\}$$

es un cuerpo de referencia. Entonces, el cuerpo de referencia

$$I := (i_\Omega(\mathcal{B}))^* \subset V$$

es el isoperimétrico para Ω y ω , i. e. para cualquier otro cuerpo de referencia $K \subset V$ tal que $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$, tenemos

$$\text{volumen}(K) \leq \text{volumen}(I).$$

Un Ejemplo de Isoperimétrica I

Las Nociones de Busemann y Holmes-Thompson

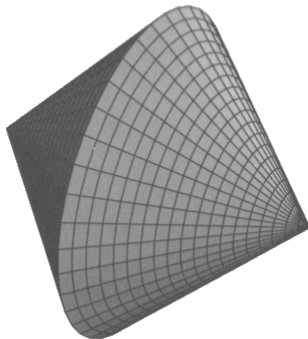


Figura: Bola unidad



Un Ejemplo de Isoperimétrica II

Las Nociones de Busemann y Holmes-Thompson

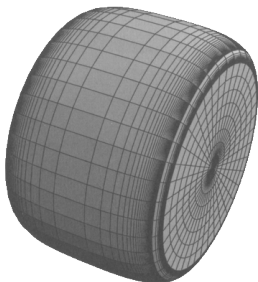


Figura: Busemann

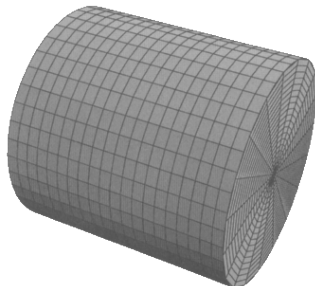


Figura: Holmes-Thompson

* Imágenes extraídas del libro de Thompson.

Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- **Fórmulas integrales**
- Espacios de Finsler proyectivos



La Fórmula Clásica de Crofton

Teorema (M. W. Crofton, 1868)

Si γ es una curva rectificable en el plano, entonces su longitud viene dada por la fórmula

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_{r \in \mathcal{R}} \#(\gamma \cap r) dr,$$

donde \mathcal{R} es el espacio de rectas afines del plano y dr es una medida invariante bajo la acción del grupo euclídeo.

Nota: la medida dr es independiente de la curva γ elegida.



Fibrados Dobles

Definición

Un *fibrado doble* es una estructura del tipo $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$, cumpliendo:

- 1 $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- 2 $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- 3 para todo $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$, $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El conjunto A se llama *espacio de incidencias* y dos puntos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dicen *incidentes* si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.



Fibrados Dobles

Definición

Un *fibrado doble* es una estructura del tipo $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$, cumpliendo:

- 1 $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- 2 $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- 3 para todo $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$, $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El conjunto A se llama *espacio de incidencias* y dos puntos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dicen *incidentes* si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.



Fibrados Dobles

Definición

Un *fibrado doble* es una estructura del tipo $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$, cumpliendo:

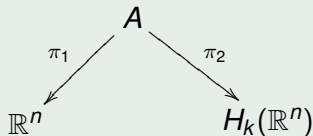
- 1 $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- 2 $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- 3 para todo $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$, $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El conjunto A se llama *espacio de incidencias* y dos puntos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dicen *incidentes* si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.



Un Ejemplo en el Espacio de k -Planos

Ejemplo



- $H_k(\mathbb{R}^n)$ espacio de k -planos afines
- $A = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times H_k(\mathbb{R}^n) : x \in \lambda\}$
- π_i proyecciones naturales



La Fórmula de Crofton Moderna

La Transformada de Gelfand

Definición

Sea $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(\Gamma)$ (con $k \geq r$), se llama *transformada de Gelfand de Φ* a $\pi_{1*}\pi_2^*\Phi \in \mathcal{D}^{k-r}(B)$.



La Fórmula de Crofton Moderna

La Transformada de Gelfand

Definición

Sea $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(\Gamma)$ (con $k \geq r$), se llama *transformada de Gelfand de Φ* a $\pi_{1*}\pi_2^*\Phi \in \mathcal{D}^{k-r}(B)$.

Idea: asignar a $b \in B$ el peso de los $\gamma \in \Gamma$ incidentes con él.



La Fórmula de Crofton Moderna

La Transformada de Gelfand

Definición

Sea $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(\Gamma)$ (con $k \geq r$), se llama *transformada de Gelfand de Φ* a $\pi_{1*}\pi_2^*\Phi \in \mathcal{D}^{k-r}(B)$.

Idea: asignar a $b \in B$ el peso de los $\gamma \in \Gamma$ incidentes con él.

Teorema (Fórmula de Crofton)

Si Φ es de orden máximo sobre Γ y $N \hookrightarrow B$ es tal que $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma)$, entonces:

$$\int_N \pi_{1*}\pi_2^*\Phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi.$$



La Fórmula de Crofton Moderna

Consecuencias

Chern $G/H \xleftarrow{\pi_1} G/(H \cap K) \xrightarrow{\pi_2} G/K,$

$$\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{yK \in G/K} \#(N \cap B_{yK}) \Phi$$

Clásica $E \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} H_{n-k}$

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_{n-k}} \#(N \cap \gamma) \Phi_{n-k}$$

Cauchy $\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_p} \text{vol}_{k+p-n}(\gamma \cap N) \Phi_p$



Sumario

1 Análisis

- Cálculo de variaciones
- Análisis armónico
- Espacios funcionales
- Teoría de control

2 Geometría

- Integración en variedades y cohomología
- Topología diferencial
- De la geometría a la informática y viceversa
- Fibrados

3 Trabajo de investigación

- El problema isoperimétrico
- Fórmulas integrales
- Espacios de Finsler proyectivos



Métricas Finsler

Métricas Infinitesimalmente Minkowskianas

Definición

Sea M^n una variedad diferenciable. Una *métrica Finsler* es una aplicación $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

- 1 $F \in \mathcal{C}^\infty(TM \setminus \Theta)$, donde Θ es la sección nula de TM ;
- 2 F_x es una norma no-degenerada en $T_x M$ para todo $x \in M$.

Ejemplo

- 1 En un espacio de Minkowski (V, B) tal que B es \mathcal{C}^∞ y fuertemente convexa, $F_x(v) := \|v\|_B$.
- 2 En una variedad riemanniana (M, g) , $F_x(v) := \sqrt{g_x(v, v)}$.

Espacios de Finsler Proyectivos

Espacios Geodésicamente Rectos

- 1 longitud(γ) := $\int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_\gamma F$
- 2 dist(x, y) := $\inf\{\text{longitud}(\gamma) : \gamma \text{ es un arco uniendo } x \text{ e } y\}$

Definición

Una *métrica Finsler Proyectiva* es una métrica Finsler F sobre \mathbb{R}^n para la cual las rectas son las únicas geodésicas para la distancia asociada. Al para (\mathbb{R}^n, F) se le dice *espacio de Finsler proyectivo*.

Ejemplo

Un espacio de Minkowski (V, B) tal que B es \mathcal{C}^∞ y fuertemente convexa.



Fórmulas de Cauchy-Crofton

en Espacios Finsler Proyectivos

Teorema

Sea (\mathbb{R}^n, F) un espacio de Finsler proyectivo.

- Existe una densidad $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ (con $1 \leq k \leq n-1$) tal que, para cualquier k -subvariedad $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\text{area}_k^{HT}(N) = \int_{\lambda \in H_{n-k}} \#(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$

- Existe una densidad $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ (con $1 \leq k \leq n-2$) y una constante $c_{n,k}$ tales que, para cualquier hipersuperficie $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\text{area}_{n-1}^{HT}(N) = c_{n,k} \int_{\lambda \in H_{n-k}} \text{area}_{n-k-1}^{HT}(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$

Densidades de Crofton y Proyectivas

Definición

Una densidad $\phi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq k \leq n-1$, es una densidad

- *de Crofton* si existe $\Phi \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ tal que

$$\int_N \phi = \int_{\lambda \in H_{n-k}} \#(N \cap \lambda) \Phi.$$

- *proyectiva* si todos los k -planos de \mathbb{R}^n son extremos de

$$N \mapsto \int_N \phi.$$

Teorema

Toda densidad de Crofton es proyectiva.



¿Quién soy yo?

- Por ahora:

- Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
- Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
- Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.

- De ahora en adelante:

- Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
- Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
- Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
- Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.

¿Quién soy yo?

- Por ahora:
 - Licenciatura y DEA en la Facultad de CC. Matemáticas bajo la orientación del Prof. Vicente Miquel.
 - Estancia en Francia como estudiante Erasmus. Trabajo de investigación sobre el teorema de concentración-compacidad de Lions.
 - Estancia en Brasil estudiando temas de control óptimo desde un punto de vista analítico.
- De ahora en adelante:
 - Concesión de una beca FPI en el IMAFF - CSIC, bajo la orientación del Prof. Manuel de León.
 - Geometría física, geometría mecánica, control óptimo...
 - Iniciación a la investigación con la asistencia a diversos congresos y preparación de seminarios sobre temas afines.
 - Preparación de un trabajo con los profesores M. de León y M. Epstein sobre medios con microestructura.