

Geometría Integral en Espacios de Finsler Proyectivos

Cédric M. Campos
Trabajo de investigación



Departamento de Geometría y Topología
Universitat de València

13 de marzo de 2006

Trabajo de investigación realizado por Cédric Martínez Campos en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia, bajo la dirección del Dr. Vicente Miquel Molina, Catedrático de la Universidad de Valencia.

Valencia (España), marzo de 2006.

“Não conseguimos encontrar respostas para todos os nossos problemas. As que encontramos apenas nos levaram a formular novas questões. De uma certa maneira, sentimo-nos tão confusos como antes, mas acreditamos que agora estamos num nível mais alto e sobre coisas mais importantes.”

Encontrado na porta do Instituto de Matemática na Universidade de Tronso - Noruega.

Gracias ...

Inicié este trabajo hace ya bastante tiempo y las circunstancias han querido que viniese a terminarlo aquí a Brasil. Durante este largo trayecto, muchas personas han llegado a participar en estas notas, bien de forma directa, bien indirectamente, y a todas ellas les estoy agradecido. De los de este lado, quiero dar las gracias a Begoña, por su amistad y nuestras charlas; a Cidinha, tanto por permitirme presentarle un seminario, como por toda la ayuda que me ha brindado en mi estancia; y al servicio de biblioteca del ICMC - USP por su amabilidad y buena labor, ellos me han facilitado todos los artículos que me han sido necesarios y vitales para este trabajo.

De los de allí, por supuesto estoy enormemente agradecido a Vicente Miquel por la paciencia que ha tenido conmigo al dirigirme; a Carmen Romero por traerme hasta aquí y *cederme* su casa; a mi gran amigo Xing Chi, quién ha soportado mis largas peroratas sobre geometría. Por último, quiero dar las gracias a unas personas a las cuales no les preocupa saber en que se diferencian un espacio de Finsler proyectivo y un espacio proyectivo de Finsler, pero que sin embargo hacen maravillas para cuadrar las cuentas y llegar a fin de mes. Gracias a mi madre y mi abuela, por la educación que me han dado; y gracias, infinitas gracias a Laura, por sus palabras de aliento y complicidad.

...y disculpen.

Pese a que he puesto toda mi buena fe en hacer este trabajo, soy humano. Es más, en este aspecto en concreto soy muy humano, o más que la media, puesto que suelo caer por tres y cuatro veces en la misma piedra. Así que no os extrañéis si encontráis algún error en este trabajo. Os pido disculpas por adelantado y os ruego que me lo notifiquéis, si está en vuestra mano hacerlo. Gracias una vez más y disculpen.

São Carlos (Brasil), a 13 de marzo de 2006.

Índice general

Gracias ...	VII
...y disculpen.	IX
Introducción	XIII
Sobre la bibliografía	XXVII
1. Geometría convexa I	1
1.1. Definiciones básicas.	2
1.1.1. El espacio ortogonal.	10
1.1.2. La transformada de Legendre.	11
1.1.3. Las funciones radial y soporte.	20
2. Medidas de cuerpos convexos	23
2.1. Medidas y densidades	23
2.1.1. Densidades en un espacio vectorial.	24
2.1.2. Volúmenes y áreas.	27
2.1.3. Densidades sobre variedades.	27
2.1.4. Integración de densidades.	31
2.1.5. Densidad producto.	32
2.2. La aplicación de Gauss	32
2.2.1. Definiciones.	33
2.2.2. La medida de área.	33
2.3. Fórmulas de proyección	34
2.3.1. Volumen con respecto a la función radial.	34
2.3.2. Volumen con respecto a la función soporte.	36
2.3.3. Fórmulas de proyección	38
2.4. Los cuerpos intersección y proyección	42
2.4.1. El cuerpo intersección	42
2.4.2. El cuerpo proyección.	44

3. Geometría de Minkowski	47
3.1. Espacios de Minkowski	47
3.1.1. Definiciones básicas.	47
3.1.2. Geodésicas.	49
3.1.3. Perpendicularidad.	50
3.1.4. Curvas de Radon.	51
3.2. Áreas y volúmenes en espacios de Minkowski	59
3.2.1. Definición axiomática.	59
3.2.2. La noción de área.	62
3.3. El problema isoperimétrico	65
3.3.1. La desigualdad de Brunn-Minkowski	66
3.3.2. El principio de Cavalieri	68
3.3.3. La demostración de la desigualdad isoperimétrica.	71
3.3.4. El isoperimétrico y la bola unidad.	72
4. Fibrados dobles	79
4.1. Fibrados dobles	79
4.1.1. Nociones básicas.	79
4.1.2. La transformada de Gelfand	81
4.2. Las fórmulas de Crofton	86
4.2.1. Fórmulas de Crofton en fibrados dobles	86
4.2.2. Los espacios clásicos.	90
4.3. Morfismos de fibrados dobles	96
5. Espacios de Finsler proyectivos	101
5.1. Espacios de Finsler	101
5.1.1. Métricas Finsler.	101
5.1.2. Espacios de Finsler proyectivos.	102
5.1.3. Volúmenes en espacios de Finsler.	106
5.1.4. Áreas en espacios de Finsler.	107
5.2. Fórmulas de Crofton	108
5.2.1. Fórmulas de Crofton para espacios de Finsler proyectivos.	108
5.2.2. Fórmulas integrales de Cauchy generalizadas.	114
5.3. Densidades proyectivas y de Crofton en \mathbb{R}^n	115

Introducción

El objetivo del presente trabajo es conducir al lector, paso a paso, desde la geometría convexa hasta los últimos avances (que son también casi los primeros) en Geometría Integral de espacios de Finsler. Por el camino aparecerá un estudio detallado, y difícil de encontrar en la bibliografía, de los espacios de Minkowski y una visión nueva de la Geometría Integral que unifica el punto de vista de Gelfand y su escuela con la de Blaschke, Chern y Santaló. A continuación indicamos con un poco de detalle el contenido de los distintos capítulos de este trabajo, con algunas indicaciones de tipo histórico, con la intención de que esta visión resumida ayude a comprender la unidad de estas notas.

Geometría convexa y de Minkowski (Capítulos 1 a 3)

En el simposio de geometría realizado en la ciudad alemana de Siegen en 1978, el geómetra Rolf Schneider quiso transmitir una idea: lo rica que puede ser una teoría tan sólo con la definición de convexidad. Y es que es sorprendente lo mucho que se puede hacer con esa simple definición. La geometría convexa nació como parte de la geometría y evolucionó a lo largo de la historia hasta tener entidad propia, estando además relacionada con múltiples ramas de las matemáticas: análisis funcional, cálculo variacional, teoría de funciones complejas, teoría de control, teoría de grafos, criptología, cristalografía, etc. En el libro “Handbook of convex geometry” [29], P. M. Gruber da una imagen histórica de la geometría convexa desde Euclides y Arquímedes, pasando por Brunn y Minkowski, hasta nuestro tiempo. El propio matemático A. C. Thompson reconoce en “Minkowski geometry” [50] que, para una breve introducción histórica al tema, no hay nada mejor que la introducción realizada por T. Bonnesen y W. Fenchel en [7].

Las figuras convexas siempre han jugado un papel importante en la geometría. Sin embargo, Brunn fue el primero en realizar una extensa investigación de aquellos objetos caracterizados solamente por propiedades convexas. En dos trabajos: “Über Ovale und Eiflächen” y “Über Kurven ohne Wendepunkte” aparecidos en 1887 y 1889; probó, conjuntamente a varios resultados sobre cuerpos y regiones convexas, un teorema sobre las áreas de intersecciones de un cuerpo convexo con planos paralelos. Este teorema en lo que habría de seguir se tornó fundamental. La importancia de este teorema fue enfatizado por

Minkowski. En varios trabajos, en particular en “Volumen und Oberfläche” (1903) y “Zur Theorie der konvexen Körper” (1911), Minkowski introduce algunos conceptos básicos como la función de soporte, los volúmenes mixtos y otros. En ellos Minkowski creó las herramientas formales apropiadas para abordar problemas sobre cuerpos y regiones convexas. Minkowski, sobre todo, abrió el camino a varias aplicaciones, especialmente el isoperímetro y otros problemas de optimización. Además, descubrió la cercana relación entre estos conceptos y teoremas sobre la determinación de superficies convexas por medio de sus curvaturas Gaussianas y probó profundos teoremas en este aspecto.

Aunque la geometría convexa y de Minkowski son bastante extensas, veremos tan sólo los resultados más notables, además de aquellos que nos servirán para establecer una base fundamentada para los espacios de Finsler. Comencemos pues con la clásica definición de conjunto convexo y afines.

Definición 1.1 Sea V un espacio vectorial y sea F un subconjunto de V .

- a. Diremos que F es simétrico con respecto a $v \in V$ si, para todo punto $w \in F$, se tiene que $v - (w - v) \in F$. En el caso particular en que $v = 0$, F se dirá centrado.
- b. Diremos que F es un cuerpo si F es un compacto con interior no vacío.
- c. Diremos que F es convexo si, para todo par de puntos de F , el segmento que los une también está en F , es decir:

$$[v, w] \subseteq F \quad \forall v, w \in F.$$

- d. Siendo F convexo, se dice que un hiperplano afín H de V es un hiperplano de soporte de F en $v \in \partial F$ si H corta a la clausura de F en v sin separarla (i.e. $\overline{F} - (H \cap \overline{F})$ es conexo). Además, F se dirá estrictamente convexo si todo hiperplano de soporte de F corta a la clausura de F en un solo punto.

Es decir, un conjunto convexo F es aquel que no tiene *abolladuras* en la frontera y un hiperplano de soporte H es aquel que nos permite *apoyar* F en él. Si además podemos hacer *rodar* F sobre H , significa que es estrictamente convexo (no tiene segmentos en su frontera). Manipularemos mayormente cuerpos convexas y centrados o, abreviadamente, *c.c.c.*'s. Estos conjuntos no son más que la bola unidad para alguna norma, es más, hay una relación unívoca entre *c.c.c.*'s y normas en V . Si $K \subset V$ es un *c.c.c.*, la norma que genera (llamada funcional de Minkowski) viene dada por la ecuación:

$$\|v\|_K := \inf\{\lambda \geq 0 : v \in \lambda K\} \quad \forall v \in V.$$

Un hecho importante es que el grado de diferenciabilidad de la frontera de K como subvariedad de V está directamente relacionado con el grado de diferenciabilidad de la norma asociada, siendo ambos del mismo orden.

A partir de un *c.c.c.* se puede definir en el dual V^* otro *c.c.c.*, el cuerpo polar.

Definición 1.10 Sea $K \subset V$ un cuerpo convexo y centrado. Se llama cuerpo polar de K , denotado K^* , al subconjunto del espacio dual V^* definido por

$$K^* := \{\xi \in V^* : |\xi(v)| \leq 1 \forall v \in K\}.$$

Puesto que el cuerpo polar se ha definido a partir de otro cuerpo, un objetivo inmediato es estudiar las formas en que podemos relacionar ambos conjuntos. Como es de esperar, el bipolar de un cuerpo coincide con el propio cuerpo.

Si observamos detenidamente la definición de polar, se puede notar que en ella bastaría utilizar la frontera de K en vez de todo el conjunto K . Luego, para conocer un cuerpo o su polar basta conocer la frontera de alguno de ellos.

Corolario 1.8 (Teorema de soporte) Sean $v_0 \in \partial K$ y $\xi_0 \in \partial K^*$ y consideremos los hiperplanos afines

$$H_{\xi_0} = \{v \in V : \langle \xi_0, v \rangle = 1\} \quad y \quad H_{v_0} = \{\xi \in V^* : \langle \xi, v_0 \rangle = 1\}.$$

Son equivalentes:

- a. H_{ξ_0} soporta a K en v_0 .
- b. H_{v_0} soporta a K^* en ξ_0 .
- c. $\langle \xi_0, v_0 \rangle = 1$.

Realmente, este no es el teorema de soporte, sino una consecuencia. El teorema de soporte establece la existencia del covector ξ_0 cumpliendo las propiedades anteriores para el vector v_0 .

Puesto que la frontera de un cuerpo y su polar juegan un papel importante, trataremos de estudiarlas en tanto que subvariedades de V . Ya hemos comentado que la diferenciabilidad de ∂K está ligada a la diferenciabilidad de la norma generada por K . ¿Pero cómo podemos relacionar la diferenciabilidad de ∂K y ∂K^* ? La solución pasa por considerar la transformada de Legendre con respecto a K , la cual (bajo ciertas condiciones) es una biyección entre $V \setminus \{0\}$ y $V^* \setminus \{0\}$ que viene dada por la fórmula

$$\mathcal{L}_K(u) = \frac{df_u}{f(u)}, \quad \forall u \neq 0,$$

donde f es la norma generada por K . Notar que en ningún momento hemos considerado un producto escalar y, por tanto, el concepto de ortogonalidad. Aún así, esta aplicación hace el papel de *vector normal unitario*¹ sobre ∂K . Utilizando la transformada de Legendre, llegamos a demostrar el siguiente resultado:

¹La transformada de Legendre es tal que $\mathcal{L}_K(u)|_{T_u \partial K} \equiv 0$ y $\|\mathcal{L}_K(u)\|_{K^*} = 1$.

Teorema 1.32 *Sea K un cuerpo convexo y centrado de clase C^k , con $k \geq 2$, y sea f la norma generada por K . Entonces, la frontera ∂K^* de K^* es una subvariedad embebida de V^* de clase C^{k-1} si y sólo si el hessiano $\text{Hess} f$ es definido positivo en todos los puntos de ∂K .*

Un ejemplo en el que esto no se cumple es la bola unidad de la norma 4, para la cual el polar es la bola unidad de la norma $4/3$ (en general, el polar de la bola unidad de la norma p es la bola unidad de la norma q , siendo p y q conjugados). La bola unidad de la norma 4 es C^∞ y, sin embargo, la frontera la bola unidad de la norma $4/3$ no es diferenciable (en tanto que subvariedad). Esto es debido a que el hessiano de la norma 4 se anula en los puntos cardinales de su bola unidad, i. e. no es definida positiva.

La frontera de un cuerpo C^∞ cumpliendo el anterior teorema se llaman ciclo de referencia. En este ambiente no necesariamente euclídeo en el que nos movemos, los ciclos de referencia reemplazan a las esferas. Además, si S es un ciclo de referencia, S^* (la frontera del polar del cuerpo que define a S) también es un ciclo de referencia, siendo la transformada de Legendre, $\mathcal{L}_S : S \rightarrow S^*$, un difeomorfismo entre ellos.

Como ya hemos dicho, la geometría convexa se ocupa del estudio de los objetos convexos. Hemos comentado también que todo cuerpo convexo y centrado está relacionado (unívocamente) a una norma: el funcional de Minkowski. La geometría de Minkowski se encarga justamente de estudiar la estructura y propiedades que obtiene un espacio vectorial al dotarle de una norma. Un problema central en esta teoría es el problema isoperimétrico: *entre todas los cuerpos convexos C^∞ de área prefijada, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?* La solución a este problema se conoce bajo el nombre de *isoperimétrice*. Puesto que para determinar quién es el isoperimétrice, lidiaremos con medidas (áreas y volúmenes), haremos aquí un breve inciso para aclarar que tipo de medidas consideraremos.

En variedades diferenciables es común integrar con respecto a formas diferenciables y en análisis con respecto a todo tipo de medidas. Una densidad es una medida con un comportamiento similar al de una forma diferenciable. Por tanto, una densidad es un objeto con una estructura lo suficientemente amigable para trabajar fácilmente con ella, pero con la ventaja de que se puede integrar sobre una variedad sin necesidad de que esta sea orientable. Las densidades se definen en primer lugar en espacios vectoriales, para extenderlas de forma clásica a variedades, asociando a cada punto una densidad del espacio tangente.

Definición 2.1 *Sea $1 \leq k \leq n$, una k -densidad Φ (o densidad de orden k) en V es una aplicación*

$$\Phi : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que dados $v_1, \dots, v_k \in V$ linealmente independientes se tiene

$$\Phi(Lv_1, \dots, Lv_k) = |\det L| \cdot \Phi(v_1, \dots, v_k),$$

para todo endomorfismo L del subespacio engendrado por los vectores v_1, \dots, v_k .

Definición 2.9 Dada una variedad M de dimensión n , sea $1 \leq k \leq n$. Se dice que una aplicación continua $\Phi : \times^k TM \rightarrow \mathbb{R}$ es una k -densidad diferenciable sobre M , si $\Phi(p, \cdot)$ es una k -densidad vectorial sobre $T_p M$ para todo punto $p \in M$ y si su restricción al abierto $\times^k TM \setminus \mathcal{O}$ es una aplicación diferenciable, siendo

$$\mathcal{O} = \{(v_1, \dots, v_k) \in T_p M \times \dots \times T_p M : p \in M \text{ y } \text{rg}(v_1, \dots, v_k) < k\}.$$

Denotaremos $\mathcal{D}^k(M)$ al conjunto de k -densidades diferenciables sobre M .

Una n -densidad que no se anula en ningún punto se dice de volumen. Como ejemplo de densidades tenemos las normas de un espacio vectorial o el valor absoluto de una forma diferencial.

Volviendo a nuestro marco de espacios de Minkowski, queremos técnicas para calcular áreas y volúmenes que respeten nuestras ideas de área y volumen y que además sean estables si perturbamos un poco la estructura minkowskiana del espacio.

Definición 3.22 Una noción de k -área, con $1 \leq k \leq n - 1$, para espacios de Minkowski de dimensión n , corresponde a una manera de asignar a cada espacio de Minkowski (V, B) una k -densidad positiva area_B^k en V satisfaciendo los siguientes axiomas:

- (Normalización) si B es un elipsoide, entonces area_B^k es la k -densidad euclídea estándar;
- (Linealización) si $T : (V, B) \rightarrow (V', B')$ es una isometría entre espacios de Minkowski, entonces $\text{area}_B^k = T^* \text{area}_{B'}^k$;
- (Monotonía) si B y B' son dos cuerpos convexos centrados y cuadráticos en V tales que $B \supset B'$, entonces $\text{area}_B^k \geq \text{area}_{B'}^k$;
- (Continuidad) la asignación de area_B^k al espacio de Minkowski (V, B) ha de ser continua respecto de la distancia de Banach-Mazur.

La distancia de Banach-Mazur es una manera de cuantificar las diferencias entre dos espacios de Minkowski o, de forma equivalente, de medir cuanto se parecen las bolas unidad dadas por las respectivas normas. Cuando $k = n$, empleamos el término *noción de volumen* y la notación vol_B para area_B^n .

Estos conceptos de noción de área y volumen fueron abordados en primer lugar por Busemann y, más tarde, por Holmes y Thompson. Busemann consideró unas nociones tales que son constantes respecto de B , luego la densidad de k -área de Busemann ha de ser tal que

$$\gamma_{B \cap E}^{k\text{-Bus}} := \int_{B \cap E} \text{area}_B^{k\text{-Bus}} = \kappa_k,$$

para todo k -plano E y siendo κ_k es el volumen euclídeo de la k -esfera euclídea. Holmes y Thompson tomaron la noción dual a la de Busemann, lo que les llevó a la siguiente definición:

Definición 3.34 Sea llama noción de k -área de Holmes-Thompson, para $1 \leq k \leq n-1$, a la noción de k -área que asocia a cada espacio de Minkowski (V, B) la k -densidad definida por

$$\text{area}_B^{k\text{-HT}}(v) := \frac{\text{vol}((B \cap E)^*; v)}{\kappa_k},$$

para todo vector descomponible $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda_d^k V$, siendo $E = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

La desigualdad de Blaschke-Santaló establece que la noción de Holmes-Thompson es más pequeña que la de Busemann y que las densidades respectiva coinciden si y solamente si B es un elipsoide, i. e. $\gamma_{B \cap E}^{k\text{-HT}} = \kappa_k$ para todo k -plano E sii (V, B) es euclídeo.

Ahora que tenemos claro nuestros conceptos de medida, podemos encuadrar mejor el problema isoperimétrico. Puesto que en un espacio de Minkowski, todas las nociones de volumen son iguales excepto por un factor constante, la solución al problema isoperimétrico no depende tanto de la noción de volumen elegida como de la noción de área. Dado un espacio vectorial V y dado $\Omega \in \Lambda^n V^*$, consideremos el isomorfismo $i_\Omega : \Lambda^{n-1} V \rightarrow V^*$, dada por

$$i_\Omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1})(u) := \Omega(v_1, \dots, v_{n-1}, u) \quad \forall u \in V.$$

Teorema 3.37 Sea V un espacio de Minkowski de dimensión n . Supongamos que la noción de volumen en V viene dada por una n -forma Ω y supongamos que ω es una $(n-1)$ -densidad positiva en V tal que

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1} V : \omega(v) \leq 1\}$$

es \mathcal{C}^∞ y cuadráticamente convexo. Entonces, el cuerpo convexo, centrado y \mathcal{C}^∞

$$I := (i_\Omega(\mathcal{B}))^* \subset V \tag{1}$$

es el isoperimétrico para las nociones de volumen y área dadas en V , i. e. para cualquier otro cuerpo convexo, centrado y \mathcal{C}^∞ $K \subset V$ tal que $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$, tenemos

$$\text{volumen}(K) \leq \text{volumen}(I).$$

Hemos determinado quién es el isoperimétrico, aunque obtenerlo en la práctica no deja de ser algo complicado. Llegados aquí, una pregunta interesante sería saber cuando el isoperimétrico es la propia bola unidad o, al menos, homotético. Esta pregunta tiene una respuesta sencilla (en su forma) cuando se consideran las nociones de área y de volumen de Busemann y de Holmes-Thompson. Dado un punto u de la bola unidad B , sea E el hiperplano vectorial paralelo al hiperplano tangente a B en u . Consideremos ahora los cuerpos en E dados por la intersección de B con E y por la proyección de B sobre E en la dirección de u . Denotemos finalmente por $C_B(u)$ al cono de vértice u y base la intersección, y por $P_B(u)$ al cono de vértice u y base la proyección. Con esta notación,

Corolario 3.56 Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con las nociones de volumen y área de Busemann. Sea I_{Bus} el isoperimétrico asociado a estas nociones. Entonces, B y I_{Bus} son homotéticos si y sólo si

$$\text{vol}(C_B(u)) = \text{constante},$$

para todo $u \in \partial B$.

O en su versión dual,

Corolario 3.61 Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con las nociones de volumen y área de Holmes-Thompson. Sea I_{HT} el isoperimétrico asociado a estas nociones. Entonces, B y I_{HT} son homotéticos si y sólo si

$$\text{vol}(P_{B^*}(\xi)) = \text{constante},$$

para todo $\xi \in \partial B^*$.

Geometría integral (Capítulos 4 y 5)

El geómetra húngaro-austriaco Wilhelm Blaschke centró sus estudios en geometría diferencial y cinemática, desarrollando además la teoría clásica de geometría integral². En los años 30 del siglo pasado impartía un seminario en la universidad de Hamburgo al cual asistía el matemático español Luis Antonio Santaló, por aquel entonces aún no doctorado. Influenciado por las grandes e innovadoras ideas de Blaschke, Santaló presentaría finalmente su tesis “Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinética en el plano y el espacio” en Madrid en 1936, obteniendo así el grado de doctor con una calificación excelente. Varios años más tarde publicaría su libro “Integral geometry and geometric probability”, [45]. Uno de los problemas tratados en este texto es la generalización de un conocido resultado dado por Morgan William Crofton en 1868: la longitud de una curva en el plano es igual a la media integral del número de intersecciones entre la curva y rectas cualesquiera.

Teorema (M. W. Crofton, [23]) Si γ es una curva rectificable en el plano, entonces su longitud viene dada por la fórmula

$$\text{longitud}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{r \in \mathcal{R}} \#(\gamma \cap r) dr, \quad (2)$$

donde \mathcal{R} es el espacio de rectas afines del plano y dr es una medida invariante bajo la acción del grupo euclídeo.

²Varios matemáticos de la época originaron esta teoría: M. W. Crofton, J. H. Poincaré y H. P. Cartan destacan entre otros.

La elección de \mathcal{R} y dr no es arbitraria. Se ha de coger todo el espacio de rectas afines \mathcal{R} por cuestiones de simetría y dr ha de ser invariante puesto que la longitud de una curva es invariante bajo movimientos rígidos. Crofton fue el primero en considerar medidas en conjuntos de objetos geométricos como las rectas o planos y establecer relaciones entre estas medidas y otras cantidades geométricas como las longitudes o áreas.

En su trabajo inicial, incluido en el libro “Vorlesungen über Integralgeometrie” [6], Blaschke desarrolla esta nueva idea de medidas geométricas. Muchos eran los que pensaban que las fórmulas que relacionaban dichas medidas con cantidades métricas estaban estrechamente unidas a la naturaleza homogénea de los espacios geométricos. El propio Poincaré hacía notar que las medidas más relevantes eran aquellas que eran invariantes bajo la acción del grupo que determina la geometría del espacio y, por ello, solamente medidas de dicha clase deberían de ser consideradas en probabilidad geométrica. Consecuentemente, un gran trabajo de investigación se centró en determinar posibles generalizaciones de la fórmula de Crofton a espacios homogéneos. Esto fue llevado a cabo por Shiing-Shen Chern en 1940 en su trabajo pionero “On integral geometry in Klein spaces”, [20]. Hasta los años 60, todo el trabajo realizado en esta área utilizó las propiedades derivadas de la homogeneidad hasta el límite. Ejemplos son [32, 44], o el compendio escrito por Santaló, [45], que ya hemos mencionado.

En los años 60, Israil Moiseevic Gelfand y su escuela, basándose en problemas de ecuaciones diferenciales y algunos trabajos de Minkowski y Radon, crearon una teoría de la geometría integral aparentemente desligada a la de la escuela de Blaschke. Para dicha escuela, un problema en geometría integral, tenía la siguiente estructura: supongamos que tenemos una familia de subvariedades de una variedad dada parametrizadas por otra variedad, es decir, una familia del tipo

$$\{B_\gamma \subset B : \gamma \in \Gamma\};$$

entonces *toda* función sobre B induce una función sobre Γ del siguiente modo:

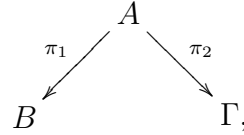
$$\tilde{f}(\gamma) := \int_{B_\gamma} f(x) d\mu_\gamma(x).$$

Bajo ciertas condiciones \tilde{f} está bien definida y la aplicación $f \mapsto \tilde{f}$ se llama una *transformación geométrica integral*. Un ejemplo típico y que estudiaremos más adelante es la transformada de Radon que asocia a una función sobre \mathbb{R}^n , medible y con soporte compacto, su integral sobre hiperplanos. La geometría integral de Gelfand se encarga pues de estudiar los núcleos, rangos y posibles fórmulas de inversión de estas transformaciones.

En la segunda parte de este trabajo trataremos de llenar el hueco existente entre la geometría integral de Blaschke y la de Gelfand. Si observamos con más detenimiento la construcción del problema anterior, vemos que se puede establecer otra relación entre B y Γ considerando la siguiente familia de subconjuntos:

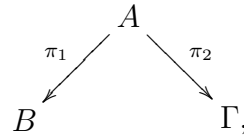
$$\Gamma_b := \{\gamma \in \Gamma : b \in B_\gamma\}.$$

Si los conjuntos Γ_b resultan ser subvariedades de Γ , entonces tenemos una familia $\{\Gamma_b \subset \Gamma : b \in B\}$ de subvariedades de Γ parametrizadas por B . Esta dualidad llevó a Gelfand y sus colaboradores (ver [27]) a estudiar el siguiente diagrama de fibrados:



donde A es la variedad $\{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : b \in B_\gamma\}$ o, equivalentemente, $\{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : \gamma \in \Gamma_b\}$, y donde π_1 y π_2 son las proyecciones naturales. Este tipo de diagramas se llaman *fibrados dobles*, más concretamente:

Definición 4.1 *Un fibrado doble es un conjunto formado por cinco elementos A, B, Γ, π_1 y π_2 , como indica el diagrama*

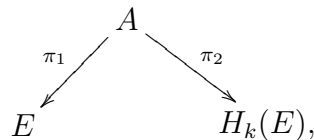


los cuales están relacionados de la forma siguiente:

- a. tanto $\pi_1 : A \rightarrow B$ como $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- b. la aplicación $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- c. para todo $b \in B$ y para todo $\gamma \in \Gamma$, los conjuntos $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El espacio total de ambos fibrados, A , recibe el nombre de espacio de incidencias. Dos elementos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dirán incidentes si sus respectivas fibras se intersecan, es decir, si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.

Un ejemplo sencillo y de gran importancia en lo que ha de seguir es el siguiente: denotemos por E^n alguno de los espacios clásicos (el euclídeo, el esférico o el hiperbólico de dimensión n) y sea $H_k(E)$ el espacio de subvariedades totalmente geodésicas de dimensión k de E . Entonces, tenemos un fibrado doble representado por el diagrama



donde el espacio de incidencias viene dado por

$$A = \{(x, \lambda) \in E \times H_k(E) : x \in \lambda\}$$

y donde las proyecciones π_i son las naturales.

Transformaciones típicas en fibrados diferenciables son la retroacción de una forma diferencial de la base del fibrado a una forma del espacio total (pull-back) y la compresión de una forma del espacio total a una forma del espacio base (integración sobre fibras o push-forward). En el marco dado por un fibrado doble, es lógico considerar la transformación de una densidad en Γ a una densidad en B , aplicando primero la retroacción por π_2 , para después aplicar la compresión por π_1 .

Definición 4.10 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ B & & \Gamma \end{array}$$

un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Si Φ es una k -densidad sobre Γ con $k \geq r$, entonces se llama transformada de Gelfand de Φ a la $(k-r)$ -densidad $\pi_{1}\pi_2^*\Phi$ definida sobre B .*

Un caso particular de la transformada de Gelfand es la transformada de Radon. Con esta nueva herramienta, estamos en disposición de generalizar la fórmula de Crofton. Nuestro objetivo es mostrar una fórmula del tipo

$$\text{vol}_k(N) = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(B_\gamma \cap N) \Phi,$$

para cualquier k -subvariedad N de B y siendo Φ una densidad de volumen sobre Γ . Notad la analogía con la fórmula original de Crofton, puesto que estamos calculando la media integral del número de intersecciones de N (la curva) con subvariedades de B (las rectas) parametrizadas por Γ (pendiente y traslación, $S^1 \times \mathbb{R}$). El volumen de N viene dado por una integral respecto a una k -densidad sobre B . El problema radica pues en encontrar una densidad independiente de la subvariedad N dada, pero ya tenemos una clara candidata.

Teorema 4.15 (Fórmula de Crofton para fibrados dobles) *Sea*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ B & & \Gamma \end{array}$$

un fibrado doble. Sea $n = \dim B$ y $n - k = \dim B_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea Φ una densidad de orden máximo sobre Γ y sea $N \subset B$ una subvariedad de dimensión k tal que la integral

$$\int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi$$

existe. Entonces, dicha integral coincide con el volumen de N con respecto a la transformada de Gelfand de Φ , es decir:

$$\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi. \quad (3)$$

Teniendo ahora esta fórmula general, sería interesante poder reencontrar las generalizaciones de la fórmula de Crofton a espacios euclídeos y espacios homogéneos debidas a Santaló y Chern (entre otros). En el caso de espacios homogéneos, hay que poner de manifiesto el buen comportamiento que tiene la transformada de Gelfand cuando el fibrado doble es equivariante en sus dos ramas (equivariante bajo la acción del grupo de Lie que da la estructura homogénea). La transformada de Lie lleva densidades invariantes en densidades invariantes.

Teorema 4.19 (Fórmula de Crofton para espacios homogéneos 4.19) *Sea G un grupo de Lie, sean H y K subgrupos cerrados de G y consideremos el fibrado doble*

$$\begin{array}{ccc} & G/(H \cap K) & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ G/H & & G/K, \end{array}$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones naturales. Sea n la dimensión de G/H y $n - k$ la dimensión de las fibras de π_1 . Si G/K admite una densidad invariante de orden máximo Φ y H es compacto, entonces existe una k -densidad invariante ϕ sobre G/H tal que para toda subvariedad $N \subset G/H$ de dimensión k se tiene

$$\int_N \phi = \int_{yK \in G/K} \#(N \cap B_{yK}) \Phi.$$

Es más, $\phi = \pi_{1*} \pi_2^* \Phi$.

Cuando los espacios homogéneos tratados son los espacios clásicos, entonces la densidad dada por la fórmula de Crofton para espacios homogéneos es única salvo un factor constante, por serlo las densidades invariantes.

Teorema 4.23 (Fórmula de Crofton para los espacios clásicos) *Sea E uno de los tres espacios clásicos, siendo n su dimensión, y sea G el grupo de isometrías correspondiente. Si H_{n-k} (con $1 \leq k < n$) denota el espacio de subvariedades $(n - k)$ -dimensionales completas y totalmente geodésicas de E y Φ_{n-k} es una densidad invariante sobre H_{n-k} , entonces existe una constante c que depende solamente de n , k y de la normalización de Φ_{n-k} tal que para toda subvariedad k -dimensional $N \subset E$ se tiene que*

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_{n-k}} \#(N \cap \gamma) \Phi_{n-k}.$$

Cuando Crofton estudió la fórmula que llegó a demostrar, lo hizo viendo que esta estaba detrás de la fórmula integral de Cauchy, la cual da en su versión *más sencilla* el área de una superficie en función a la longitud de la intersección de dicha superficie con planos afines.

Teorema 4.28 (Fórmula integral de Cauchy) *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta de clase C^∞ , entonces:*

$$\text{area}(S) = \frac{\pi^2}{2} \int_{\lambda \in H_2(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda \cap S) d\mu(\lambda),$$

donde μ es la medida invariante estándar de $H_2(\mathbb{R}^3)$.

Esta fórmula tiene una generalización que da el volumen de una k -superficie en función del *volumen* de la intersección de la k -superficie con *superficies* de dimensión mayor a la complementaria (en \mathbb{R}^4 , superficies con planos o hiperplanos, pero no con rectas).

Teorema 4.29 (Fórmula integral de Cauchy generalizada) *Sea B uno de los tres espacios clásicos: el elíptico, el euclídeo o el hiperbólico, y sea G el respectivo grupo de isometrías. Sea Γ_p , con $1 \leq p < n = \dim B$, el espacio de las subvariedades p -dimensionales completas y totalmente geodésicas de B , y sea Φ_p una densidad de orden máximo (medida) en Γ_p . Sea k un entero tal que $1 \leq k < n$ y $k + p > n$, entonces existe una constante c que depende solamente de n, k, p y de la normalización de Φ_p , tal que para toda subvariedad compacta k -dimensional $N \subset B$, se tiene*

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in \Gamma_p} \text{vol}_{k+p-n}(\gamma \cap N) \Phi_p.$$

La demostración de estos dos últimos resultados se basa en la utilización de morfismos de fibrados dobles, que son una estructura por niveles de fibrados dobles. Puesto que en cada nivel tenemos una fórmula de Crofton, la idea es relacionarlas de forma que en cierto nivel podamos transformar una integral en una integral doble, pasando así de una integral del cardinal de intersecciones a una integral de una integral del cardinal de intersecciones, esto es una integral de volúmenes.

Otro marco para la fórmula de Crofton son los espacios de Finsler proyectivos. Un espacio de Finsler es básicamente una variedad diferenciable la cual es infinitesimalmente un espacio de Minkowski.

Definición 5.1 *Sea M^n una variedad diferenciable. Una métrica Finsler es una aplicación $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:*

- $F \in C^\infty(TM \setminus \Theta)$, donde Θ es la sección nula de TM ;
- F es homogénea de grado 1 en la componente tangencial, i. e. si $x \in M$ y $v \in T_x M$, entonces:

$$F(x, t \cdot v) = |t| \cdot F(x, v), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

c. para todo punto $x \in M$, el conjunto dado por:

$$B_x M := \{v \in T_x M : F(x, v) \leq 1\}$$

es un cuerpo cuadráticamente convexo y suave en $T_x M$.

A priori, no tenemos definida una distancia sobre la variedad M , sin embargo, no es difícil definir una utilizando la métrica Finsler asociada. Dados dos puntos $x, y \in M$, tomamos como su distancia el ínfimo de las longitudes de los arcos que unen dichos puntos, es decir,

$$\text{dist}(x, y) := \inf\{\text{longitud}(\gamma) : \gamma \text{ es un arco uniendo } x \text{ e } y\},$$

donde la longitud de los arcos γ de M viene dada por la fórmula

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_\gamma F.$$

Notad que la última integral tiene sentido puesto que se puede considerar a F como una 1-densidad sobre M . Cuando la variedad M es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n y la métrica asociada F es tal que las rectas son las únicas geodésicas para la distancia arriba definida, se dice que F es una métrica Finsler proyectiva o bien que (\mathbb{R}^n, F) es un espacio de Finsler proyectivo.

Por la afinidad existente entre espacios de Finsler y espacios de Minkowski, es lógico apoyarse en las nociones de área y de volumen de espacios de Minkowski para obtener una definición consistente de área y volumen en espacios de Finsler. Entre las posibles nociones de volumen (o k -área) para espacios de Finsler, vamos a tomar aquella que a cada punto de un espacio de Finsler le asocia la densidad de volumen (k -área) de Holmes-Thompson sobre el espacio tangente en dicho punto.

Con las consideraciones hechas hasta el momento, estamos en posición de enunciar la fórmula de Crofton para espacios de Finsler proyectivos.

Teorema 5.13 (Fórmula de Crofton para espacios de Finsler proyectivos) *Sea F una métrica Finsler proyectiva en \mathbb{R}^n y sea k un entero tal que $1 \leq k \leq n-1$. Entonces, existe una densidad de orden máximo (una medida con signo) Φ_{n-k} sobre el espacio $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ de los $(n-k)$ -planos de \mathbb{R}^n tal que para cualquier subvariedad inmersa $N \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k , se tiene*

$$\text{area}_k^{HT}(N) = \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \#(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}. \quad (4)$$

Como consecuencia de este resultado, tenemos la respectiva fórmula de Cauchy para espacios de Finsler proyectivos.

Teorema 5.15 (Fórmula de Cauchy para espacios de Finsler proyectivos) *Sea F una métrica Finsler proyectiva en \mathbb{R}^n . Sea k un entero tal que $1 \leq k \leq n - 2$. Sea $N \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie compacta. Si Φ_{n-k} es la densidad de $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ dada en el teorema 5.13, entonces existe una constante $c_{n,k}$ que depende únicamente de n y k tal que*

$$\text{area}_{n-1}^{HT}(N) = c_{n,k} \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \text{area}_{n-k-1}^{HT}(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$

Para finalizar mostramos el estudio realizado por Gelfand y Smirnov en [28]. Estos establecen que toda k -densidad de Crofton³ ϕ es tal que los k -planos de \mathbb{R}^n minimizan el problema variacional $N \mapsto \int_N \phi$, donde N es una k -subvariedad inmersa de \mathbb{R}^n .

³Una k -densidad de Crofton es una k -densidad en \mathbb{R}^n , con $1 \leq k \leq n - 1$, para la cual se establece una fórmula de Crofton, *i. e.* pertenece al rango de la transformada de Gelfand.

Sobre la bibliografía

Como es común, al final de este trabajo podéis encontrar la bibliografía en la que está basado este trabajo. He de reconocer que no he leído cada libro/artículo que aparece en ella, y que si ahí aparece es porque considero que tiene importancia o puede servir de apoyo en los temas aquí tratados. Para que lector no quede confundido, enumeraré aquellos que son *básicos*. El presente trabajo está basado principalmente en la tesis doctoral de E. Fernandes, [24], y los artículos escritos en colaboración con su orientador J. C. Álvarez, [2, 3]. Por tanto, gran parte de los asuntos tratados aquí pueden ser encontrados en dichos artículos, pese a que en estas notas están desarrollados con más detalle.

Una referencia fundamental para la parte de geometría convexa y la teoría de Brunn-Minkowski es sin duda la obra de Thompson, [50], además del compendio de Gruber y Wills, [29]. En este campo también cabe destacar los artículos de Busemann, Petty, Holmes y Thompson, [11, 12, 18, 31], sobre el problema isoperimétrico y las nociones de área y volumen.

En lo que se refiere a geometría integral, los artículos de Gelfand y sus colaboradores son un óptimo punto de partida, en especial [28] que trata sobre densidades y fórmulas de Crofton. Para una buena comprensión de los fibrados dobles, recomiendo [27, 30, 40]. En cuanto a fórmulas de Crofton, los trabajos de Chern y Stantaló, [20, 21, 44, 45], son los más indicados.

Por último, citar el estudio de Schneider, [47], en el que obtiene una fórmula de Crofton sin necesidad de diferenciabilidad; y el par de artículos de Weil, [52, 53] en los que obtiene una interesante fórmula de proyección.

Capítulo 1

Geometría convexa I

En este capítulo, vamos a trabajar únicamente en espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo de los reales, teniendo en cuenta además las diversas estructuras que podemos tener en estos. En primer lugar, tendremos en cuenta, como es obvio, la estructura vectorial. En segundo lugar, la estructura afín asociada. Para diferenciar formalmente los subespacios en cada caso, hablaremos de k -planos vectoriales y de k -planos afines, siendo cualquier k -plano vectorial un k -plano afín pasando por el 0. En tercer lugar y no menos importante, tendremos en cuenta la estructura C^∞ asociada, *i. e.* la estructura inducida por cualquier identificación isomorfa con el espacio euclídeo real.

Al ser V de dimensión finita, existe un isomorfismo canónico entre V y su bidual V^{**} , la aplicación

$$J : v \in V \longrightarrow Jv \in V^{**}$$

de modo que $Jv(\xi) := \xi(v)$, para todo $\xi \in V^*$. Cuando se considera además una norma en V , esta induce una norma en V^* , y esta a su vez induce una norma en V^{**} . Para dichas normas, J es una isometría. Si lo que se considera en V es un producto escalar, entonces V es canónicamente isomorfo a V^* . Aunque no trabajaremos en espacios vectoriales dotados de un producto escalar, emplearemos algunas técnicas que se abstraen de él y para ponerlo de manifiesto, utilizaremos la notación de producto en dualidad, es decir:

$$\langle \xi, v \rangle = \langle v, \xi \rangle := \xi(v) = Jv(\xi),$$

para todo $\xi \in V^*$ y todo $v \in V$.

Puesto que manipularemos asiduamente hiperplanos e hipersuperficies, V designará a lo largo del capítulo un espacio vectorial de dimensión $n + 1$, lo que nos hará más ligera la notación. Las únicas k -superficies S de V que consideraremos serán las subvariedades regulares¹ de dimensión k de V , es decir, las k -superficies para las cuales su estructura

¹Una aplicación $f : N \rightarrow M$ es una subvariedad si es una inmersión inyectiva. Si además f es abierta sobre $f(N)$ con la topología inducida por la de M , entonces se dirá subvariedad regular o embebida. Se dice que un subconjunto N de una variedad M es una subvariedad (regular), si se puede definir en N una estructura diferenciable y si con esa estructura la inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es una subvariedad (regular).

diferenciable es compatible con la estructura diferenciable de V . Se hace notar que, ya que $T_v V = V$ para todo $v \in V$, $T_v S$ se puede considerar como un subespacio vectorial de V . En algunas ocasiones identificaremos el espacio vectorial tangente $T_v S$ con el espacio afín tangente $v + T_v S$ a S en v .

1.1. Definiciones básicas.

Comenzaremos dando algunas definiciones básicas para poder iniciar este tema.

Definición 1.1 Sea V un espacio vectorial y sea F un subconjunto de V .

- a. Diremos que F es simétrico con respecto a $v \in V$ si, para todo punto $w \in F$, se tiene que $v - (w - v) \in F$. En el caso particular en que $v = 0$, F se dirá centrado.
- b. Diremos que F es un cuerpo si F es un compacto con interior no vacío.
- c. Diremos que F es convexo si, para todo par de puntos de F , el segmento que los une también está en F , es decir:

$$[v, w] \subseteq F \quad \forall v, w \in F.$$

- d. Siendo F convexo, se dice que un hiperplano afín H de V es un hiperplano de soporte de F en $v \in \partial F$ si H corta a la clausura de F en v sin separarla (i.e. $\overline{F} - (H \cap \overline{F})$ es conexo). Además, F se dirá estrictamente convexo si todo hiperplano de soporte de F corta a la clausura de F en un solo punto.
- e. Un convexo F diremos que es 0-convexo si es un entorno convexo del 0.

Nota 1.2 Todo hiperplano afín H de V viene determinado por una aplicación lineal $\xi \in V^*$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$H = \{v \in V : \langle \xi, v \rangle = \alpha\}.$$

Si denotamos

$$H^+ = \{v \in V : \langle \xi, v \rangle \geq \alpha\} \quad \text{y} \quad H^- = \{v \in V : \langle \xi, v \rangle \leq \alpha\},$$

entonces H es un hiperplano de soporte de un convexo cerrado F si y solo si $F \cap H \neq \emptyset$, o bien $F \subset H^+$, o bien $F \subset H^-$.

Pese a que uno quisiera postergar conceptos y resultados relativos a *espacios de Minkowski* para el capítulo §3, es imposible tratar la geometría convexa sin tratar con ellos.

Definición 1.3 Dado un cuerpo 0-convexo K de un espacio vectorial V , se llama funcional de Minkowski asociado a K a la aplicación $\|\cdot\|_K : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\|v\|_K := \inf\{\lambda \geq 0 : v \in \lambda K\} \quad \forall v \in V. \quad (1.1)$$

Definición 1.4 Una pseudonorma F sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n es una aplicación $F : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ que verifica

- a. $F(v) \geq 0$ para todo $v \in V$, y $F(v) = 0$ sii $v = 0$,
- b. $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$, y
- c. $F(v + w) \leq F(v) + F(w)$ para todo $v, w \in V$.

Si la condición b se verifica bajo la forma más fuerte $F(\lambda v) = |\lambda| F(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos la definición usual de norma.

Teorema 1.5 Si K es un cuerpo 0-convexo, se tiene que $\|\cdot\|_K$ es una pseudonorma y que K es la bola unidad para dicha pseudonorma. Si, además, K es centrado, entonces $\|\cdot\|_K$ es una norma. Recíprocamente, la bola unidad B de un espacio (pseudo)normado $(V, \|\cdot\|)$ es un cuerpo (centrado) 0-convexo, además el funcional de Minkowski asociado a B coincide con la (pseudo)norma $\|\cdot\|$ de V .

Demostración Haremos la demostración para el caso K centrado y $\|\cdot\|_K$ norma, pues la demostración del otro caso resulta evidente una vez visto este. Supongamos que K es un cuerpo convexo y centrado de V . Por definición, tenemos que $\|\cdot\|_K$ es positiva (anulándose sólo en 0) y positivamente homogénea de grado 1. Por tanto, sólo falta comprobar la desigualdad triangular. Sean $v, w \in V$, los cuales podemos suponer no nulos y sean $\|v\|_K < \alpha$ y $\|w\|_K < \beta$, entonces $\frac{v}{\alpha}, \frac{w}{\beta} \in K$. Consideremos ahora el siguiente elemento:

$$\frac{v + w}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{v}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{w}{\beta}.$$

Por ser esta una combinación convexa de elementos de K y ser K convexo, dicha combinación ha de pertenecer también a K , luego $v + w \in (\alpha + \beta)K$ y por tanto

$$\|v + w\|_K \leq \alpha + \beta.$$

Puesto que esto es cierto para todo $\alpha > \|v\|_K$ y para todo $\beta > \|w\|_K$, tenemos finalmente

$$\|v + w\|_K \leq \|v\|_K + \|w\|_K.$$

Recíprocamente, supongamos que V viene dotado de una norma $\|\cdot\|$. Esta norma define una topología para la cual es continua, ya que por la desigualdad triangular se tiene

$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\|.$$

Es bien sabido que en un espacio vectorial de dimensión finita existe una única topología lineal y que en ella todas las normas son equivalentes, por tanto $\|\cdot\|$ también es continua con respecto a la topología inducida por la topología usual euclídea. Y puesto que B es la antiimagen del intervalo $[0, 1]$, la bola unidad es un cerrado acotado con interior no vacío, *i. e.* un cuerpo. Consideremos ahora dos elementos v, w de B , para cualquier combinación convexa de estos tenemos

$$\begin{aligned} \|tv + (1-t)w\| &\leq t\|v\| + (1-t)\|w\| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

por tanto $tv + (1-t)w \in B$ y B es convexo. La simetría de B con respecto al 0 es inmediata a partir de la paridad de la norma.

Finalmente, para ver que la norma $\|\cdot\|$ y la norma $\|\cdot\|_B$ coinciden en V , basta observar que ambas son positivamente homogéneas de grado 1 y que coinciden en la frontera de B . \square

Al funcional de Minkowski asociado a K , se le suele llamar también *norma generada por K* . El teorema 1.5 establece que existe una relación unívoca entre las normas de un espacio vectorial y los cuerpos convexos y centrados de dicho espacio, pudiendo además expresar cada norma como en (1.1) siendo K su respectiva bola unidad. Un hecho interesante es que el grado de diferenciabilidad de la norma generada por K está directamente relacionada con el grado de diferenciabilidad de la frontera de K .

Teorema 1.6 *Sea $K \subset V$ un c. 0-c. (cuerpo 0-convexo) y sea f la norma generada por K , la hipersuperficie ∂K es de clase C^k (con $k \geq 1$) si y sólo si f es de clase C^k .*

Demostración Supongamos en primer lugar que f es de clase C^k . Por la homogeneidad de la norma, tenemos necesariamente que $df_v \neq 0$ para todo $v \in V$ no nulo, ya que

$$df_v(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((1+t)v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (1+t)f(v) = f(v) > 0 \text{ si } v \neq 0. \quad (1.2)$$

Luego, $\partial K = f^{-1}(1)$ es una subvariedad embebida² de V de codimensión uno.

Sea ahora g una norma auxiliar C^∞ y fuertemente convexa (*e. g.* la norma proveniente de un producto escalar cualquiera) y sea $S = g^{-1}(1)$. Por lo ya demostrado, S es C^∞ . Supongamos que ∂K es C^k y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \pi : \partial K &\longrightarrow V \\ u &\longmapsto u/g(u). \end{aligned}$$

Tenemos, por composición, que π es una aplicación inyectiva de clase C^k y, además,

$$D\pi = \frac{1}{g} \cdot Di - \frac{dg}{g^2} \cdot i,$$

²Esta es una consecuencia del teorema del rango constante. Para más detalles, consultar [35].

donde $i : \partial K \hookrightarrow V$ es la inclusión. Deducimos de aquí que π es una inmersión ya que, para $u \in \partial K$ y $v \in T_u \partial K$

$$D\pi_u(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{dg_u(v)}{g(u)} \cdot u \Leftrightarrow v = 0,$$

porque, si $v \neq 0$ y está en la dirección de u , entonces K no es 0-convexo. Por tanto, π es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^k en su imagen con inversa

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : S = \pi(\partial K) &\longrightarrow \partial K \\ v &\longmapsto v/f(v). \end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que

$$f(v) = \frac{g(v)}{g\left(\pi^{-1}\left(\frac{v}{g(v)}\right)\right)}$$

y que, por ser composición de funciones de clase \mathcal{C}^k , f también lo es. \square

Una consecuencia inmediata de este teorema es que se establece un k -difeomorfismo natural entre $V \setminus \{0\}$ y $\partial K \times \mathbb{R}_+$, haciendo corresponder a un vector $v \in V$ no nulo sus *coordenadas polares*, tal y como veremos en la sección §2.3.1.

En lo que sigue, cuando digamos que K es diferenciable o de clase \mathcal{C}^k , haremos referencia a que ∂K como hipersuperficie de V lo es.

Teorema 1.7 (Hahn-Banach) *Sea Y un subespacio (propio) de un espacio vectorial X y sea h una aplicación sublineal³ definida sobre X . Si f es una aplicación lineal definida sobre Y tal que*

$$f(y) \leq h(y), \quad \forall y \in Y;$$

entonces existe una aplicación lineal \tilde{f} definida sobre X tal que

$$a. \quad \tilde{f}(y) = f(y), \quad \forall y \in Y;$$

$$b. \quad \tilde{f}(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X.$$

Demostraciones de este teorema y versiones geométricas de él pueden encontrarse en [8, 50]. Una consecuencia interesante de este teorema es que por cada punto de la frontera de un cuerpo convexo pasa (al menos) un hiperplano soporte.

³Una aplicación $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice sublineal si

$$a. \quad h(x_1 + x_2) \leq h(x_1) + h(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X;$$

$$b. \quad h(\alpha x) = \alpha h(x), \quad \forall \alpha \geq 0, \forall x \in X.$$

Teorema 1.8 (Teorema de soporte) Sea $K \subset V$ un c. 0-c. Si $v_0 \in \partial K$, entonces existe una aplicación lineal $\xi_0 \in V^*$ tal que el hiperplano afín

$$H = \{v \in V : \langle \xi_0, v \rangle = 1\}$$

soporta a K en v_0 . En particular, $\langle \xi_0, v_0 \rangle = 1$.

Demostración Consideremos el funcional de Minkowski asociado a K como en (1.1)

$$\sigma_K(v) := \inf\{\lambda \geq 0 : v \in \lambda K\}. \quad (1.3)$$

Notar que en este caso, el funcional σ_K no es una norma puesto que no tenemos simetría, pero sí sigue siendo sublineal⁴ con la propiedad que $v \in K$ si y solo si $\sigma_K(v) \leq 1$. Sea $v_0 \in \partial K$ y consideremos el subespacio vectorial Y generado por v_0 . Si definimos sobre Y la aplicación lineal $\langle \xi, \alpha v_0 \rangle = \alpha$, entonces $\langle \xi, \alpha v_0 \rangle \leq \sigma_K(\alpha v_0)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, pues, si $\alpha \geq 0$, $\alpha = \langle \xi, \alpha v_0 \rangle = \sigma_K(v_0)$ y, si $\alpha < 0$, entonces $\langle \xi, \alpha v_0 \rangle < 0 < \sigma_K(\alpha v_0)$. Aplicando ahora el teorema de Hahn-Banach 1.7, existe una extensión ξ_0 de ξ a todo V acotada superiormente por σ_K . Queda claro entonces que el hiperplano

$$H = \{v \in V : \langle \xi_0, v \rangle = 1\}$$

soporta a K en v_0 . □

Nota 1.9 Observar que si K es diferenciable, entonces el hiperplano dado por el teorema de soporte 1.8 es único y es precisamente el hiperplano afín tangente a ∂K en v . En efecto, por el teorema 1.6, si ∂K es diferenciable, la pseudonorma f definida por K es diferenciable y, como $\partial K = \{v \in V : f(v) = 1\}$, se tiene que $T_v \partial K = \ker df_v$. Por (1.2), $df_v(v) = f(v) = 1$, luego df_{v_0} es una extensión lineal de la 1-forma ξ y, para $v \in \partial K$, o bien $v \in T_{v_0} \partial K$, en cuyo caso $df_{v_0}(v) = 0$, o bien existe un λ tal que $\lambda v \in v_0 + T_{v_0} \partial K$, en cuyo caso $df_{v_0}(v) = 1/\lambda$, que es negativo si λ lo es, y que es ≤ 1 si λ es positivo, pues, en ese caso, ha de ser $\lambda \geq 1$. Por lo tanto df_{v_0} está acotada por f . Entonces, como vimos al final de la demostración anterior,

$$H = \{v \in V : \langle df_{v_0}, v \rangle = 1\} = v_0 + \ker df_{v_0} = v_0 + T_{v_0} \partial K$$

es un hiperplano soporte en v_0 , i. e., el espacio afín tangente a ∂K en v_0 es un hiperplano soporte en v_0 , y es único, pues cualquier otro hiperplano que pase por v_0 y que no sea el tangente separará ∂K (y, por tanto, K).

Además, veremos en la sección 1.1.2 que, en este caso, $\xi = df_{v_0}$ es una abstracción del vector normal a $T_{v_0} \partial K$ y que tiene una fuerte relación con el siguiente conjunto.

Definición 1.10 Sea $K \subset V$ un cuerpo 0-convexo. Se llama cuerpo polar de K , denotado K^* , al subconjunto del espacio dual V^* definido por

$$K^* := \{\xi \in V^* : \xi(v) \leq 1 \forall v \in K\}. \quad (1.4)$$

⁴Demostración análoga a la del teorema 1.5.

Si K es centrado, la condición $\xi(v) \leq 1$ se puede escribir $|\xi(v)| \leq 1$ puesto que, en este caso, si $\xi(v) \leq 1$ y $|\xi(v)| = \varepsilon > 1$, entonces $\xi(v) = -\varepsilon$, con lo que $\xi(-v) = \varepsilon > 1$, en contradicción con $\xi(v) \leq 1 \forall v \in K$. Es decir, en un cuerpo convexo y centrado, la condición $\xi(v) \leq 1 \forall v \in K$ implica $|\xi(v)| \leq 1 \forall v \in K$. Obviamente, dependiendo de las hipótesis sobre K , K^* heredará o no algunas propiedades. El siguiente resultado justifica la denominación de *cuerpo* para el conjunto K^* en el caso particular que nos ocupa.

Proposición 1.11 *Si $K \subset V$ un cuerpo convexo y centrado (0-convexo), entonces el cuerpo polar K^* es a su vez un cuerpo convexo y centrado (0-convexo).*

Demostración Veamos que cumple todos los requisitos:

- Centrado (o 0-convexo): obvio por la definición (1.4).
- Convexo: sean $\xi, \eta \in K^*$ y sea $t \in [0, 1]$, dado $v \in K$

$$\langle t\xi + (1-t)\eta, v \rangle = t \langle \xi, v \rangle + (1-t) \langle \eta, v \rangle \leq 1.$$

- Compacto: Las topologías que se considera en V y en V^* son las inducidas por las normas, que coinciden con la topología asociada a una norma euclídea auxiliar $|\cdot|_e$ y su dual d_e . Usando esto para ver que K^* es compacto, bastará probar que es cerrado y acotado en d_e . Tomemos como $|\cdot|_e$ una norma euclídea para la que $\sup_{v \in K} |v|_e = \lambda > 1$ y $\inf_{v \in K} |v|_e = 1$.

- Cerrado: sea $(\xi_m)_{m=1}^\infty \subset K^*$ una sucesión convergente a un cierto $\xi \in V^*$. Dado $v \in K$, tenemos que $\langle \xi_m, v \rangle \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por tanto $\langle \xi, v \rangle \leq 1$ y puesto que v es un elemento arbitrario de K , $\xi \in K^*$.
- Acotado: sea $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ una base de V tal que $e_i \in \partial K$ para todo $i = 1, \dots, n+1$. Sea $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}\}$ la correspondiente base dual y consideremos en V^* el cubo de ejes $[-\lambda\epsilon_i, \lambda\epsilon_i]$ con $i = 1, \dots, n+1$, es decir el conjunto:

$$C = \{\xi \in V^* : \xi = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \epsilon_i \text{ y } \sup_{i=1, \dots, n+1} |\xi_i| \leq \lambda\}.$$

Para $v \in \partial K$, $1 \leq |v|_e \leq \lambda$, por lo tanto $1 \leq \left| \frac{-v}{f(-v)} \right|$ y $f(-v) \leq |v|_e \leq \lambda$, luego, dado $\xi \in K^*$, para $v \in \partial K$, puede ocurrir: $|\xi(v)| \leq 1$ ó $\xi(v) < 0$. En este segundo caso, $\xi(-v) > 0$ y, por lo tanto, $\xi \left(\frac{-v}{f(-v)} \right) \leq 1$, de donde $\xi(-v) = f(-v) \xi \left(\frac{-v}{f(-v)} \right) \leq \lambda$. Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, $|\xi(v)| \leq \lambda$. Entonces, para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$

$$|\xi_i| = |\langle \xi, e_i \rangle| \leq \lambda,$$

luego $\xi \in C$ y $K^* \subset C$.

- Interior no vacío: consideremos ahora el *rombo* de ejes $[-\epsilon_i, \epsilon_i]$ con $i = 1, \dots, n+1$, es decir el conjunto:

$$R = \{\xi \in V^* : \xi = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \epsilon_i \text{ y } \sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i| \leq 1/\lambda\}.$$

Dado $\xi \in R$, sea $v \in K$, entonces

$$|\langle \xi, v \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i| |\langle \epsilon_i, v \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i| \lambda \leq 1,$$

donde hemos utilizado que $\epsilon_i \in K^*$ para todo $i = 1, \dots, n+1$. Así pues $R \subset K^*$.

Por tanto K cumple todas las condiciones necesarias para ser un *c.c.c.* (o *c. 0-c.*). \square

Notar que en la anterior demostración los conjuntos C y R no son más que las bolas unidad de V^* para las respectivas normas $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$ y $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n+1} |x_i|$, fijada una base $\{\epsilon_i\}$.

Ejemplo 1.12 Consideremos el espacio \mathbb{R}^2 dotado del producto escalar euclídeo, entonces podemos identificar el dual \mathbb{R}^{2*} con el propio espacio \mathbb{R}^2 . Sea K_1 la bola unidad con respecto a la norma 1, $\|\cdot\|_1$, y sea K_∞ la bola unidad con respecto a la norma ∞ , $\|\cdot\|_\infty$. Veamos que (con la identificación $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2*}$ que acabamos de indicar) $K_1^* = K_\infty$.

Por definición, tenemos

$$K_1^* = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\langle (\xi, \eta), (x, y) \rangle| \leq 1, \forall (x, y) \in K_1\}.$$

Dado $(\xi, \eta) \in K_\infty$, sea $(x, y) \in K_1$,

$$\begin{aligned} |\langle (\xi, \eta), (x, y) \rangle| &= |\xi x + \eta y| \\ &\leq \sup\{|\xi|, |\eta|\} \cdot (|x| + |y|) \\ &= \|(\xi, \eta)\|_\infty \cdot \|(x, y)\|_1 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Luego, $K_\infty \subset K_1^*$.

Recíprocamente, sea $(\xi, \eta) \in K_1^*$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|(\xi, \eta)\|_\infty = \xi$. Supongamos además por reducción al absurdo que $(\xi, \eta) \notin K_\infty$, entonces

$$1 < \xi = |\langle (\xi, \eta), (1, 0) \rangle| \leq 1,$$

lo cual es contradictorio y por tanto $K_1^* = K_\infty$.

Gracias a la desigualdad de Hölder, con un razonamiento similar se demuestra que si $1 \leq p, q \leq \infty$ son conjugados, *i. e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces el polar de la bola unidad de la norma p es la bola unidad de la norma q . Como ya hemos dicho, en un espacio vectorial de dimensión finita existe una identificación canónica entre el propio espacio y su bidual. Por medio de esa representación, un cuerpo y su bipolar son idénticos.

Proposición 1.13 Sea $K \subset V$ un cuerpo convexo centrado, entonces $(K^*)^* = K$.

Demostración Sea $v \in K$, entonces $|\langle \xi, v \rangle| \leq 1$ para todo $\xi \in K^*$, luego $v \in (K^*)^*$. Recíprocamente, sea $v \in (K^*)^*$ y supongamos, por reducción al absurdo, que $v \notin K$. En dicho caso, existirá $\lambda \in]0, 1[$ tal que $\lambda v \in \partial K$. Por el teorema de soporte 1.8, existe $\xi_0 \in K^*$ tal que $\langle \xi_0, \lambda v \rangle = 1$, pero entonces $|\langle \xi_0, v \rangle| = \lambda^{-1} > 1$, sin embargo $|\langle \xi, v \rangle| \leq 1$ para todo $\xi \in K^*$, por tanto nuestra suposición es errónea y necesariamente $v \in K$. \square

Veamos ahora algunos resultados sencillos que relacionan un cuerpo con su polar a través de sus respectivas fronteras y los correspondientes hiperplanos de soporte.

Proposición 1.14 Dado un cuerpo convexo y centrado K de un espacio vectorial V , sean $v_0 \in \partial K$ y $\xi \in V^*$ y consideremos el hiperplano afín dado por

$$H_\xi = \{v \in V : \langle \xi, v \rangle = 1\}.$$

Entonces, H_ξ soporta a K en v_0 si y solamente si $v_0 \in H_\xi$ y $\xi \in \partial K^*$.

Demostración Supongamos que H_ξ soporta a K en v_0 , por definición $v_0 \in H_\xi$. Gracias a la nota 1.2, tenemos que

$$K \subset H_\xi^- = \{v \in V : \langle \xi, v \rangle \leq 1\}.$$

Por simetría,

$$K \subset (-H_\xi)^- = \{v \in V : \langle \xi, v \rangle \leq -1\},$$

luego para todo $v \in K$ se tiene que $|\langle \xi, v \rangle| \leq 1$, es decir $\xi \in K^*$. Si ξ perteneciera al interior de K^* , entonces debería existir un escalar $\lambda > 1$ tal que $\eta = \lambda \xi$ yace en la frontera. En ese supuesto,

$$1 < \lambda |\langle \xi, v_0 \rangle| = |\langle \eta, v_0 \rangle| \leq 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $v_0 \in H_\xi$ y $\xi \in \partial K^*$. Tenemos que H_ξ corta a K en v_0 y que además no separa la frontera ∂K puesto que $K \subset H_\xi^-$. \square

Corolario 1.15 Sean $v_0 \in \partial K$ y $\xi_0 \in \partial K^*$ y consideremos los hiperplanos afines

$$H_{\xi_0} = \{v \in V : \langle \xi_0, v \rangle = 1\} \quad y \quad H_{v_0} = \{\xi \in V^* : \langle \xi, v_0 \rangle = 1\}.$$

Son equivalentes:

- H_{ξ_0} soporta a K en v_0 .
- H_{v_0} soporta a K^* en ξ_0 .
- $\langle \xi_0, v_0 \rangle = 1$.

Corolario 1.16 *Un cuerpo convexo y centrado K es estrictamente convexo si y sólo si para todo $\xi \in \partial K^*$ existe un único hiperplano de soporte de K^* en ξ .*

Demostración Sean H y H' dos hiperplanos de soporte de K^* en ξ , estos vienen determinados por dos vectores $v, v' \in \partial K$ tales que

$$H = \{\eta \in V^* : \langle \eta, v \rangle = 1\} \quad \text{y} \quad H' = \{\eta \in V^* : \langle \eta, v' \rangle = 1\}.$$

O de forma equivalente, H_ξ soporta a K en v y v' . Con esto nuestra tesis queda clara. \square

1.1.1. El espacio ortogonal.

Uno de los concepto más importantes asociado a un producto escalar es el de ortogonalidad. Gracias a esto, uno puede obtener otros objetos de forma canónica, por ejemplo el complementario a un subespacio vectorial dado. Puesto que hemos supuesto que carecemos de un tal producto, necesitamos una herramienta que nos permita trabajar de una forma análoga. Con la siguiente definición de ortogonalidad, podremos abstraernos de algunos hechos que a priori parecen provenir de la noción clásica de ortogonalidad pero que realmente no lo hacen.

Definición 1.17 *Sea E un subconjunto de un espacio vectorial V , se llama espacio ortogonal a E al conjunto*

$$E^\perp := \{\xi \in V^* : \xi|_E \equiv 0\}. \quad (1.5)$$

Es inmediato ver que el espacio ortogonal E^\perp es un subespacio vectorial de V^* y que, si E es un subespacio vectorial de V entonces, el biortogonal $(E^\perp)^\perp$ coincide con el propio subespacio E . Huelga decir que esta definición extiende la definición clásica de ortogonalidad y que, en el supuesto de tener un producto escalar, ambas son iguales (usando la identificación entre V y V^* dada por el producto escalar). El siguiente es un simple resultado que relaciona un subespacio vectorial, su complementario y sus respectivos espacios ortogonales. Su demostración puede ser encontrada en [50].

Proposición 1.18 *Sean E_1 y E_2 dos subespacios vectoriales tales que $V = E_1 \oplus E_2$, entonces $V^* = E_2^\perp \oplus E_1^\perp$, además E_1 y E_2 son isomorfos a E_2^\perp y E_1^\perp , respectivamente.*

Cuando F es un subespacio estricto de V^* , no se puede definir una inyección $i : F^* \hookrightarrow V$ de forma unívoca. El anterior resultado nos permite hacerlo fijando previamente un complementario de F . En algunos casos, haremos abuso de notación al dar de entrada un subespacio $E^* \subset V^*$, pero esto no querrá decir que E^* es el dual de algún subespacio $E \subset V$, sino que solamente es una forma de indicar que es un subespacio del espacio dual V^* .

El siguiente paso lógico es extender el concepto de proyección ortogonal.

Definición 1.19 Sea $E \subset V$ un subespacio vectorial, se llama proyección ortogonal sobre E a la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_E : V^* &\longrightarrow E^* \\ \xi &\longmapsto \xi|_E. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Esta aplicación es lineal, es más, es la aplicación dual o traspuesta⁵ de la inclusión.

Proposición 1.20 Sea $E \subset V$ un subespacio vectorial, entonces $\ker \pi_E = E^\perp$ y $\pi_E = i^*$, siendo $i : E \hookrightarrow V$ la inyección natural.

1.1.2. La transformada de Legendre.

Al carecer de producto escalar, ¿cómo podemos definir un normal unitario sobre una hipersuperficie regular de V ? La transformada de Legendre es la respuesta para un cuerpo 0-convexo. Si K es diferenciable, vimos en la nota 1.9 que existe un único hiperplano de soporte de K en $v: v + T_v \partial K$. Sea $\xi_v \in (T_v \partial K)^\perp$ no nulo, entonces la aplicación

$$v \in \partial K \mapsto \frac{\xi_v}{\langle \xi_v, v \rangle} \in V^* \quad (1.7)$$

está bien definida y no depende del ξ_v elegido. En particular, si tomamos $\xi_v = df_v$ (donde f es la pseudonorma definida por K), la aplicación (1.7) se escribe

$$v \in \partial K \mapsto df_v \in V^*, \quad (1.8)$$

lo que muestra con claridad que la aplicación (1.7) es diferenciable si lo es K . Escribimos ahora la definición formal.

Definición 1.21 Sea $K \subset V$ un c. 0-c. de clase C^1 , la transformada de Legendre con respecto a K (o ∂K), denotada \mathcal{L}_K (o $\mathcal{L}_{\partial K}$), es la aplicación dada por (1.7) (o, equivalentemente, por (1.8)). Es decir, dado $v \in \partial K$, $\mathcal{L}_K(v)$ es el único covector $\xi \in V^*$ que cumple:

- a. $\ker \xi = T_v \partial K$;
- b. $\langle \xi, v \rangle = 1$.

Usando (1.8), se puede escribir

$$\mathcal{L}_K(v) = df_v \text{ para todo } v \in \partial K. \quad (1.9)$$

⁵Dada una aplicación lineal $F : V \rightarrow W$, se llama aplicación dual o traspuesta a la aplicación $F^t : W^* \rightarrow V^*$ tal que $\langle F(v), \xi \rangle = \langle v, F^t(\xi) \rangle$, para todo $v \in V$ y $\xi \in W^*$. La aplicación traspuesta de una aplicación lineal es a su vez lineal. En algunas ocasiones se denota por F^* .

Cuando no se incurra en confusión, denotaremos a la transformada de Legendre simplemente por \mathcal{L} . Así pues, se puede entender $\mathcal{L}(v)$ como el normal exterior y unitario⁶ a ∂K en v .

Proposición 1.22 *Sea $K \subset V$ un c. 0-c. diferenciable, entonces*

$$\mathcal{L}(\partial K) = \partial K^*.$$

Demostración Probaremos primero que

$$\partial K^* := \{\xi \in V^* : \sup_{v \in K} \langle \xi, v \rangle = 1\}. \quad (1.10)$$

Para ello, observemos que $\partial K^* := \{\xi \in K^* : \lambda \xi \notin K^* \text{ si } \lambda > 1\}$. Entonces, como K es compacto, se tiene que existe v_0 tal que $\sup_{v \in K} \langle \xi, v \rangle = \langle \xi, v_0 \rangle$.

Si $\sup_{v \in K} \langle \xi, v \rangle = 1$, entonces $1 = \langle \xi, v_0 \rangle \geq \langle \xi, v \rangle$ para todo $v \in K$ y, para $\lambda > 1$, $\langle \lambda \xi, v_0 \rangle = \lambda > 1$, por lo tanto $\lambda \xi \notin K^*$, y $\xi \in \partial K^*$.

Si $\sup_{v \in K} \langle \xi, v \rangle < 1$, entonces $1 < \mu := \langle \xi, v_0 \rangle \geq \langle \xi, v \rangle$ para todo $v \in K$, luego $1 = \left\langle \frac{1}{\mu} \xi, v_0 \right\rangle = \sup_{v \in K} \left\langle \frac{1}{\mu} \xi, v \right\rangle$, de donde se deduce $\frac{1}{\mu} \xi \in K^*$, con $\frac{1}{\mu} > 1$, luego $\xi \notin \partial K^*$.

Una vez demostrada (1.10), vamos con la demostración de la proposición. Si $v_0 \in \partial K$, de la propiedad 2 de la definición 1.21 resulta que $\langle \mathcal{L}_K(v_0), v_0 \rangle = 1$, y para otro $v \in K$ puede ocurrir:

- $v \in T_{v_0} \partial K$, en cuyo caso $\langle \mathcal{L}_K(v), v \rangle = 0$,
- existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda v \in v_0 + T_{v_0} \partial K$. Entonces, por la propiedad 1 de la definición 1.21, se tiene $\langle \mathcal{L}_K(v_0), \lambda v - v_0 \rangle = 0$, de donde $\langle LL_K(v_0), v \rangle = \frac{1}{\lambda}$. Si $\lambda < 0$, $\langle LL_K(v_0), v \rangle < 0 < 1$ y, si $\lambda > 0$, como $v_0 + T_{v_0} \partial K$ es el hiperplano soporte de K en v_0 , ha de ser $\lambda \geq 1$, por lo tanto $\langle LL_K(v_0), v \rangle \leq 1$.

Se deduce de todo esto que $\sup_{v \in K} \langle \mathcal{L}_K(v_0), v \rangle = 1$ y, por lo tanto, $\mathcal{L}_K(v_0) \in \partial K^*$ y $\mathcal{L}_K(\partial K) \subset \partial K^*$.

Recíprocamente, si $\xi \in \partial K^*$, existe $V_0 \in K$ tal que $\langle \xi, v_0 \rangle = 1$. Además, $v_0 \in \partial K$, pues, si no, existiría $\lambda > 1$ tal que $\lambda v_0 \in K$ y $\langle \xi, \lambda v_0 \rangle = \lambda > 1$, en contradicción con $\xi \in \partial K^*$. Como $\langle \xi, v_0 \rangle = \sup_{v \in \partial K} \langle \xi, v \rangle$, v_0 es un punto crítico para la función ξ definida sobre ∂K , luego $d\xi_{v_0}(v) = 0$ para todo $v \in T_{v_0} \partial K$ y, como ξ es lineal sobre V y ∂K es una subvariedad regular de V , $d\xi_{v_0}(v) = \langle \xi, v \rangle$, luego $\langle \xi, v \rangle = 0$ para todo $v \in T_{v_0} \partial K$. Por lo tanto ξ cumple las dos propiedades que definen \mathcal{L}_K en 1.21, luego $\xi = \mathcal{L}_K(v_0)$, lo que prueba $\mathcal{L}_K(\partial K) \supset \partial K^*$. \square

Proposición 1.23 *Bajo las mismas hipótesis, si además K es estrictamente convexo, entonces la transformada de Legendre es inyectiva.*

⁶Unitario para la norma $\|\cdot\|_{K^*}$

Demostración Sean $u, v \in \partial K$ tales que $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v) = \xi$. Entonces $T_u \partial K = T_v \partial K = \ker \xi$ y $\langle \xi, u \rangle = \langle \xi, v \rangle = 1$, lo que implica $u - v \in \ker \xi$, i. e., el hiperplano soporte $u + T_u \partial K = v + T_v \partial K$ es el mismo en u y en v , lo que no puede ocurrir si K es estrictamente convexo y $u \neq v$. \square

La proposición 1.22 nos dice que para conocer la frontera de K^* , basta conocer la de K . La proposición 1.23 nos dice además que si K es estrictamente convexo, entonces no hay información redundante en ∂K . Puesto que la transformada de Legendre es una biyección entre ∂K y ∂K^* , un atlas \mathcal{C}^k de ∂K inducirá un atlas \mathcal{C}^k sobre ∂K^* (basta considerar la composición de las cartas con la transformada de Legendre inversa). Otra cuestión es determinar si la estructura diferenciable que este atlas induce sobre ∂K^* es compatible con la estructura diferenciable de V^* . Veremos que para que esto sea cierto, hacen falta unas condiciones más fuertes. Antes de ello, vamos a pasar a estudiar unos ejemplos concretos en \mathbb{R}^2 , para así entender mejor el funcionamiento y peculiaridades de la transformada de Legendre.

Ejemplo 1.24 Sean los arcos $\alpha_1(t) := (1, t)$, con $t \in [-1, 1]$, y $\alpha_2(t) := (\cos t, \sin t + 1)$, con $t \in [0, \pi]$. Sean α_3 y α_4 los simétricos y sea α la concatenación de todos ellos. Entonces α parametriza una *píldora* centrada en $(0, 0)$ y en posición vertical (figura 1.1). Podemos utilizar la definición de la transformada de Legendre 1.21 para calcular su polar, lo cual tiene un coste computacional menor que la propia definición de cuerpo polar 1.10. Obtenemos entonces un *ojo* centrado (figura 1.2). Observar como las partes rectas de la píldora (partes no estrictamente convexas) se han centrado en los extremos del ojo y como las medidas se han visto invertidas.

Proposición 1.25 Consideremos \mathbb{R}^2 dotado del producto escalar estándar. Supongamos que la frontera de un c. 0-c. viene parametrizada por una curva cerrada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tipo \mathcal{C}^2 tal que $\ddot{\alpha}$ no se anula en ningún punto. Si definimos la aplicación $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\mu = \ddot{\alpha} - \frac{\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle}{\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle} \dot{\alpha},$$

entonces, con la identificación entre \mathbb{R}^2 y su dual dada por el producto escalar,

$$\mathcal{L} \circ \alpha = \frac{\mu}{\langle \mu, \alpha \rangle}.$$

Cuando la curva α se escribe en coordenadas polares, la expresión para la transformación de Legendre queda como sigue.

Proposición 1.26 Consideremos \mathbb{R}^2 dotado del producto escalar estándar. Supongamos que la frontera de un c. 0-c. viene parametrizada por una curva cerrada $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\alpha = \rho \cdot u,$$

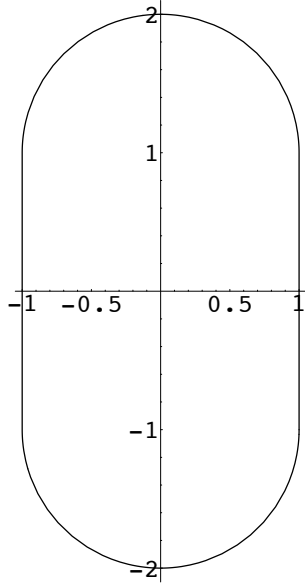


Figura 1.1: Cuerpo original.

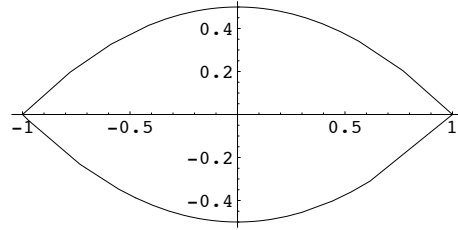


Figura 1.2: Cuerpo polar.

con $\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ al menos de clase \mathcal{C}^1 y

$$u(t) = (\cos t, \sin t).$$

Entonces

$$\mathcal{L} \circ \alpha = \frac{1}{\rho} u - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \dot{u}. \quad (1.11)$$

Demostración Sea $\tilde{\alpha} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva cerrada dada por el segundo miembro de la ecuación (1.11). Tenemos por una parte

$$\langle \tilde{\alpha}, \alpha \rangle = 1.$$

Por otra parte,

$$\langle \tilde{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \rho = 0.$$

Por tanto, por la definición 1.21, $\mathcal{L} \circ \alpha = \tilde{\alpha}$. □

Ejemplo 1.27 Sean las funciones radiales dadas por

$$\rho_1(t) = \sqrt{1 + \cos^4 t} \sqrt{1 + \sin^4 t} \quad \text{y} \quad \rho_2(t) = \sqrt{3 + \sin 2t}.$$

Si consideramos las curvas α_1 y α_2 que estas definen, obtenemos los cuerpos y sus respectivos polares de las figuras 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6.

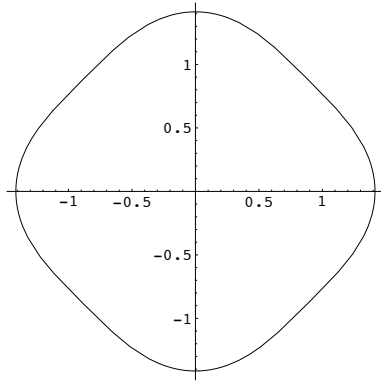


Figura 1.3: Cuerpo dado por α_1 .

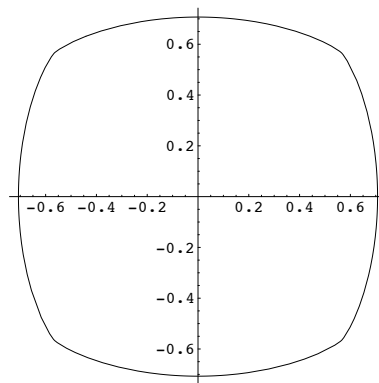


Figura 1.4: Cuerpo dado por $\mathcal{L} \circ \alpha_1$.

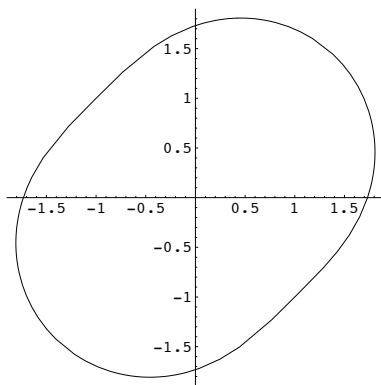


Figura 1.5: Cuerpo dado por α_2 .

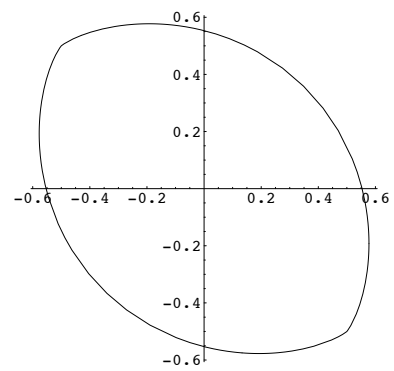


Figura 1.6: Cuerpo dado por $\mathcal{L} \circ \alpha_2$.

Con objeto de poder manejar más fácilmente la transformada de Legendre, vamos a extenderla a V . Así trataremos con ella en el propio espacio vectorial, para luego restringirla a ∂K .

Nota 1.28 Sea $\lambda > 0$, entonces $(\lambda K)^* = \lambda^{-1} K^*$. Luego no es totalmente antinatural considerar la extensión de la transformada de Legendre a $V \setminus \{0\}$ por homogeneidad de grado -1 , es decir,

$$\tilde{\mathcal{L}}(u) := \frac{1}{f(u)} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{u}{f(u)}\right) \quad \forall u \neq 0, \quad (1.12)$$

siendo f la pseudonorma generada por K . Entonces, usando (1.9), tenemos

$$\tilde{\mathcal{L}}(u) = \frac{df_u}{f(u)}, \quad \forall u \neq 0. \quad (1.13)$$

Los dos siguientes teoremas son resultados clásicos de geometría diferencial y de variedades riemannianas, traducidos a nuestro ámbito. Para la demostración clásica de estos, consultar [33, 51].

Teorema 1.29 (Ecuación de Weierstrass) *Supongamos que $K \subset V$ es un c.c.c. al menos \mathcal{C}^2 . Dados $u \in \partial K$ y $v \in T_u \partial K$, sea $\alpha : I \rightarrow \partial K$ una curva de clase \mathcal{C}^2 , con $\alpha(t_0) = u$ y $\dot{\alpha}(t_0) = v$ para cierto $t_0 \in I$. Entonces:*

$$\langle D\mathcal{L}_u(v), v \rangle = - \langle \mathcal{L}(u), \ddot{\alpha}(t_0) \rangle. \quad (1.14)$$

Demostración Puesto que $\dot{\alpha}$ es un campo tangente a ∂K a lo largo de α , tenemos que $\langle \mathcal{L} \circ \alpha, \dot{\alpha} \rangle$ es idénticamente nulo. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \mathcal{L} \circ \alpha, \dot{\alpha} \rangle (t_0) \\ &= \langle D\mathcal{L}_u(v), v \rangle + \langle \mathcal{L}(u), \ddot{\alpha}(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.30 *Dado un cuerpo 0-convexo $K \subset V$ de clase \mathcal{C}^2 , sea H el campo tensorial de tipo $(0, 2)$ dado por*

$$H_u(v, w) = \left\langle D\tilde{\mathcal{L}}_u(v), w \right\rangle, \quad (1.15)$$

para todo $u \in V$ no nulo y todo $v, w \in T_u V$. Se tiene entonces que:

- H es simétrico;
- dados $u \in \partial K$ y $v, w \in T_u \partial K$ se cumple

$$H_u(v, w) = \text{Hess}(f, u)(v, w) \quad (1.16)$$

c. $H_u(v, v) \geq 0$, i. e. H restringido a ∂K es semidefinido positivo.

Demostración Dada una base cualquiera de V , consideremos la carta $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que esta induce. Tenemos entonces

$$df_u = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Por tanto, las componentes de la transformada de $\tilde{\mathcal{L}}$ son

$$\tilde{\mathcal{L}}_i = \frac{1}{f(u)} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Derivando componente a componente,

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_j}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} f - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \frac{1}{f^2}.$$

Teniendo esto en cuenta y que la expresión de la derivada de $\tilde{\mathcal{L}}$ en la carta dada es

$$D\tilde{\mathcal{L}}_u(v) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_j}{\partial x^i}(u) v^i dx^j,$$

obtenemos finalmente

$$\langle D\tilde{\mathcal{L}}_u(v), w \rangle = \frac{1}{f(u)} \text{Hess}(f, u)(v, w) - \langle \tilde{\mathcal{L}}(u), v \rangle \langle \tilde{\mathcal{L}}(u), w \rangle.$$

De aquí se deduce fácilmente a y b.

Por último, dados $u \in \partial K$ y $v \in T_u \partial K$, sea $\alpha : I \rightarrow \partial K$ una curva \mathcal{C}^2 tal que $\alpha(t_0) = u$ y $\dot{\alpha}(t_0) = v$ para cierto $t_0 \in I$. Definamos la función $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$h(t) := \langle \mathcal{L}(u), u - \alpha(t) \rangle, \quad \forall t \in I.$$

Puesto que K es convexo, K está contenido en el semiespacio $H_{\mathcal{L}(u)}^-$, lo que implica que $h \geq 0$ en I . Pero $h(t_0) = 0$, luego h tiene un mínimo absoluto en $t = t_0$ y por tanto $h''(t_0) \geq 0$. Derivando h dos veces, obtenemos fácilmente que

$$h''(t) = -\langle \mathcal{L}(u), \ddot{\alpha}(t) \rangle.$$

Basta aplicar la ecuación de Weingarten (1.14). □

Ejemplo 1.31 Sean $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ las respectivas bolas unidad de las normas $\|\cdot\|_4$ y $\|\cdot\|_{4/3}$ (figuras 1.7 y 1.8). Puesto que 4 y 4/3 son conjugados, P es el polar de Q y viceversa. Ahora bien, p es una norma \mathcal{C}^∞ , mientras que q es tan sólo \mathcal{C}^1 . Gracias al teorema 1.6, sabemos que tanto ∂P como ∂Q son subvariedades embebidas de \mathbb{R}^2 de clase \mathcal{C}^∞ y \mathcal{C}^1 respectivamente. La estructura diferenciable que ambas reciben, viene dada por el teorema

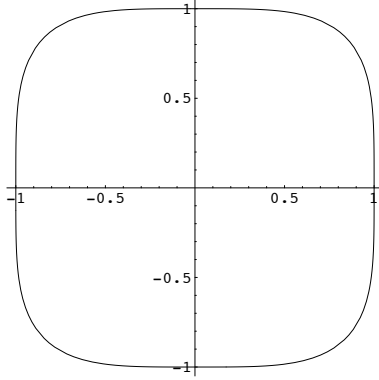


Figura 1.7: Bola de la norma 4.

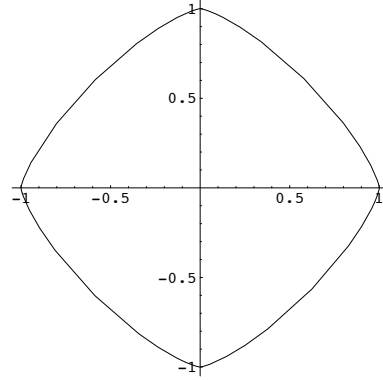


Figura 1.8: Bola de la norma 4/3.

del rango constante. Dichas estructuras vienen dadas por cartas cuyas inversas tienen la forma

$$\begin{aligned} p : t \in]-1, 1[&\longmapsto (t, (1 - t^4)^{1/4}) \in P, \\ q : s \in]-1, 1[&\longmapsto (s, (1 - s^{4/3})^{3/4}) \in Q. \end{aligned}$$

Si componemos la inversa de la carta de P con la transformada de Legendre que este cuerpo define, obtenemos entonces la inversa de una carta de Q :

$$\mathcal{L} \circ p : t \in]-1, 1[\longmapsto (t^3, (1 - t^4)^{3/4}) \in Q.$$

Cartas con esta forma definen sobre Q una estructura \mathcal{C}^∞ para la cual Q no es una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^2 , ya que $\frac{d}{dt}(\mathcal{L} \circ p)(0) = (0, 0)$. Si consideramos ahora la composición

$$(\mathcal{L} \circ p)^{-1} \circ q(s) = s^{1/3},$$

observamos que las dos estructuras dadas sobre Q no son ni tan siquiera \mathcal{C}^1 compatibles, lo que era de esperar.

Ya hemos comentado con anterioridad que si tenemos un atlas para ∂K , a través de la transformada de Legendre podemos obtener otro para ∂K^* con el mismo grado de diferenciabilidad. Más concretamente, si

$$\Delta := \{(U_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

es un atlas para ∂K , entonces el conjunto

$$\tilde{\Delta} := \{(\mathcal{L}(U_\alpha), X_\alpha \circ \mathcal{L}^{-1})\}_{\alpha \in A}$$

es un atlas para ∂K^* . Como hemos visto en 1.31, este atlas no confiere al polar de la bola unidad de la norma 4 una estructura de subvariedad embebida de V . El siguiente teorema caracteriza este hecho en términos del hessiano de la norma generada por K .

Teorema 1.32 *Sea K un cuerpo convexo y centrado de clase \mathcal{C}^k , con $k \geq 2$, y sea f la norma generada por K . Entonces, la frontera ∂K^* de K^* es una subvariedad embebida de V^* de clase \mathcal{C}^{k-1} si y sólo si el hessiano $\text{Hess} f$ es definido positivo en todos los puntos de ∂K .*

Demostración Cuando la transformada de Legendre $\mathcal{L} : \partial K \rightarrow V^*$ es un embebimiento de clase \mathcal{C}^{k-1} , entonces las aplicaciones $\mathcal{L}^{-1} \circ X$, donde $X : U \subset \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta de ∂K , definen un atlas \mathcal{C}^{k-1} sobre ∂K^* . Está claro gracias a (1.9) que \mathcal{L} es de clase \mathcal{C}^{k-1} y, puesto que $\partial K^* = \mathcal{L}(\partial K)$ es convexo, bastará ver que \mathcal{L} es una inmersión inyectiva si y sólo si la aplicación bilineal H dada en (1.15) es definida positiva en todos los puntos de ∂K .

Supongamos pues en primer lugar que H es definida positiva en ∂K y que sin embargo existe un punto $u \in \partial K$ tal que $D\mathcal{L}_u$ no es inyectiva. En este supuesto, ha de existir un vector $v \in T_u \partial K$ no nulo tal que $D\mathcal{L}_u(v) = 0$, pero esto implica que

$$H_u(v, v) = \langle D\mathcal{L}_u(v), v \rangle = 0,$$

lo cual es contradictorio.

Análogamente, supongamos que \mathcal{L} es una inmersión inyectiva y tenemos un punto $u \in \partial K$ tal que H_u no es definida positiva. Entonces, por el teorema 1.30.c, existe un vector $v \in T_u \partial K$ no nulo tal que $H_u(v, v) = 0$. Esto implica por razonamientos algebraicos⁷ que $D\mathcal{L}(v) = 0$, es decir que \mathcal{L} no es una inmersión, lo que contradice nuestra suposición. \square

Es una mera cuestión de cálculo comprobar que el hessiano de la norma 4 no es definida positiva en los puntos $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$. Esto esclarece pues el problema que aparecía al considerar esta norma y su dual en el ejemplo 1.31.

Corolario 1.33 *Sea $K \subset V$ un cuerpo 0-convexo de clase \mathcal{C}^k , con $k \geq 2$, entonces la transformada de Legendre y su extensión $\tilde{\mathcal{L}}$ son difeomorfismos de clase \mathcal{C}^{k-1} entre ∂K , ∂K^* y $V \setminus \{0\}$, $V^* \setminus \{0\}$, respectivamente. Además, $\mathcal{L}_K^{-1} = \mathcal{L}_{K^*}$.*

Nota 1.34 Una versión equivalente del teorema 1.32 se puede establecer utilizando la función $F = \frac{1}{2}f^2$, ya que en ese caso

$$\text{Hess} F = df \otimes df + f \cdot \text{Hess} f,$$

lo que nos da $\text{Hess} F = \text{Hess} f$ en ∂K . Por ello, a un cuerpo K cumpliendo el teorema 1.32, se le dice *cuadrático*. Notar que si el grado de diferenciabilidad de K es superior o igual a 3, entonces el polar K^* también es cuadrático.

⁷Si B es una aplicación bilineal simétrica, entonces la matriz (B_{ij}) que la representa en alguna base también es simétrica y, por tanto, diagonalizable. Si existe un elemento v tal que $B(v, v) = 0$, entonces 0 es un valor propio del homomorfismo inducido por (B_{ij}) y podremos hacer que en la representación diagonal B_{11} sea igual a 0. En este caso queda claro que $B(v, \cdot)$ es nulo.

Definición 1.35 Un ciclo de referencia en V es la frontera de un cuerpo 0-convexo y cuadrático de clase C^∞ .

Si consideramos el cuerpo que define a un ciclo de referencia S , podemos tomar su polar. Y por los resultados anteriormente mencionados, la frontera de este cuerpo también será un ciclo de referencia: el ciclo de referencia polar S^* . Intuitivamente, podemos entender el papel de un ciclo de referencia como el de la esfera S^n .

1.1.3. Las funciones radial y soporte.

Definición 1.36 Sea $K \subset V$ un cuerpo 0-convexo, se define la función radial de K como la aplicación $\rho_K : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\rho_K(v) := \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda v \in K\} \quad \forall v \in V \setminus \{0\}. \quad (1.17)$$

Dado un ciclo de referencia $S \subset V$, se llama función radial de K con respecto a S a la restricción de ρ_K a S . A esta función se la denotará por $\rho_{K,S}$.

Notar que $\rho_K(v)$ es el único escalar positivo λ tal que $\lambda v \in \partial K$. Mencionar también que la extensión de $\rho_{K,S}$ por homogeneidad de grado -1, coincide con la propia función radial de K , ρ_K .

Definición 1.37 Sea $K \subset V$ un cuerpo 0-convexo, se llama función de soporte de K a la aplicación $h_K : V^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$h_K(\xi) := \sup\{\langle \xi, v \rangle : v \in K\} \quad \forall \xi \in V^*. \quad (1.18)$$

Dado un ciclo de referencia $S \subset V$, se llama función de soporte de K con respecto a S a la restricción de h_K a S^* . A esta función se la denotará por $h_{K,S}$.

Dado $\xi \in V^*$ no nulo, ξ es constante en los hiperplanos paralelos a su núcleo, en particular en el hiperplano de soporte que define y $h_K(\xi)$ vale justamente dicha constante. Notar también que la función de soporte de un cuerpo K es homogénea de grado 1. Es más, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 1.38 Dado $K \subset V$ un cuerpo 0-convexo, se tiene que para todo $v \in V$ no nulo

$$h_{K^*}(v) = \frac{1}{\rho_K(v)}.$$

Demostración Puesto que h_{K^*} y ρ_K son funciones homogéneas de grado 1 y -1 respectivamente, basta mostrarlo para $v \in \partial K$. Por definición de función radial, dado $v \in \partial K$

$$\rho_K(v) = 1,$$

luego basta ver que $h_{K^*}(v) = 1$. Por definición de dual de un cuerpo, $\langle \xi, v \rangle \leq 1$ para todo $\xi \in K^*$. Pero, gracias al lema 1.8, existe $\xi_0 \in K^*$ tal que se cumple la igualdad $\langle \xi_0, v \rangle = 1$, por tanto

$$h_{K^*}(v) = \sup\{\langle \xi, v \rangle : \xi \in K^*\} = 1.$$

□

En virtud de la proposición 1.13, tenemos la afirmación dual

$$h_K(\xi) = \frac{1}{\rho_{K^*}(\xi)}, \quad \forall \xi \in V^* \setminus \{0\}.$$

Proposición 1.39 *Sea $K \subset V$ un cuerpo 0-convexo, entonces se tiene que la función de soporte de K es una pseudonorma en V^* , concretamente $h_K = \|\cdot\|_{K^*}$. (Obviamente, si K es c.c.c., entonces h_K es una norma).*

Demostración El resultado es inmediato observando que la función de soporte h_K vale 1 sobre la frontera del cuerpo polar, ∂K^* . □

Capítulo 2

Geometría convexa II: Medidas de cuerpos convexos

2.1. Medidas y densidades

Puesto que trataremos con medidas de cuerpos convexos y, en los últimos capítulos, con la geometría integral, necesitaremos apoyarnos en medidas. Ya que las variedades que veremos serán siempre variedades reales de tipo C^∞ , utilizaremos únicamente medidas de Borel. Estas nos ayudarán a entender cómo funcionan las llamadas densidades.

Dado un espacio vectorial n -dimensional V , para cada base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de dicho espacio, se puede definir una medida, que no es más que la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n vista en V a través de la identificación natural existente entre V y \mathbb{R}^n , una vez fijada la base e . Estas medidas, tienen dos propiedades fundamentales: primero, son invariantes por traslaciones; y segundo, son iguales entre si módulo un factor. Dadas dos bases e y e' , el factor que relaciona las medidas λ_e y $\lambda_{e'}$ viene determinado por la siguiente formula:

$$\lambda_{e'} = |\det L|^{-1} \cdot \lambda_e \quad (2.1)$$

donde L es el cambio de base de e a e' . Este hecho, deriva del siguiente¹:

$$\lambda \circ L = |\det L| \cdot \lambda$$

para toda aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde λ es la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n . En nuestro caso particular, basta observar que

$$\lambda_e \equiv \lambda \text{ y } \lambda_{e'} \equiv \lambda \circ L^{-1},$$

para así determinar (2.1).

¹Cf. [9]

2.1.1. Densidades en un espacio vectorial.

En el modo usual de definir una integral sobre variedades usando formas, aparece un problema con respecto a la orientabilidad de la variedad. Las densidades son un objeto definido en cualquier variedad que se puede integrar sobre espacios vectoriales y variedades diferenciables y sus integrales no requieren la necesidad de establecer una orientación tal y como sucede con formas. Pasemos pues a estudiar este objeto en su estructura más simple.

Definición 2.1 Sea $1 \leq k \leq n$, una k -densidad Φ (o densidad de orden k) en V es una aplicación

$$\Phi : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que dados $v_1, \dots, v_k \in V$ linealmente independientes se tiene

$$\Phi(Lv_1, \dots, Lv_k) = |\det L| \cdot \Phi(v_1, \dots, v_k), \quad (2.2)$$

para todo endomorfismo L del subespacio engendrado por los vectores v_1, \dots, v_k .

Existen definiciones alternativas de densidad², por ejemplo las llamadas k -densidades de grado s :

$$\Phi(Lv_1, \dots, Lv_k) = |\det L|^s \cdot \Phi(v_1, \dots, v_k),$$

o las k -densidades impares:

$$\Phi(Lv_1, \dots, Lv_k) = \det L \cdot \Phi(v_1, \dots, v_k),$$

en oposición a nuestra definición que correspondería a las densidades pares. En [28] podemos encontrar una definición equivalente a la aquí dada, para la cual necesitamos introducir el cono de Grassmann.

Definición 2.2 Sea V un espacio vectorial real de dimension n . Dado $0 \leq k \leq n$, se dice que $v \in \Lambda^k V$ (vector contravariante de orden k o k -vector) es descomponible, si existen $v_1, \dots, v_k \in V$ tales que v es el producto exterior de estos: $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. Al conjunto de k -vectores contravariantes con esta propiedad, se le denotará por $\Lambda_d^k V$.

Es inmediato ver que $\Lambda_d^k V \subset \Lambda^k V$ tiene estructura de cono³. Además, se hace notar que coincide con el propio espacio $\Lambda^k V$ cuando $k \in \{0, 1, n-1, n\}$.

²Estas definiciones se pueden encontrar en [28].

³Dado un subconjunto C de un espacio vectorial, se dice que C es un cono si $\lambda u \in C$ para todo $u \in C$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3 Sea $1 \leq k \leq n$, una k -densidad ϕ (o densidad de orden k) en V es una aplicación

$$\phi : \Lambda_d^k V \rightarrow \mathbb{R}$$

positivamente homogénea de grado uno, i. e.

$$\phi(\lambda \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = |\lambda| \cdot \phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k),$$

para todo $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda_d^k V$.

Por analogía con las k -formas de un espacio vectorial, denotaremos al conjunto de k -densidades sobre V por $|\Lambda^k V^*|$. Puesto que las definiciones 2.1 y 2.3 son equivalentes, podemos utilizar sin ambigüedad la aplicación definida en el producto cartesiano k veces de V y la aplicación correspondiente definida en el cono de Grassmann de orden k . Como ejemplos de densidades, tenemos las normas de V que son 1-densidades o el valor absoluto de una k -forma que es una k -densidad.

Ejemplo 2.4 Dado $n \geq 2$, sea la aplicación $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(v_1, v_2) := \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2}, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Comprobemos que Φ es una densidad por la definición 2.1. Dados $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes (si v_1 y v_2 son linealmente dependientes entonces $\Phi(v_1, v_2) = 0$), sean $w_1, w_2 \in \langle \{v_1, v_2\} \rangle$. Existirán pues unos coeficientes $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$ tales que $w_i = \alpha_i^j v_j$. Es un mero ejercicio de cálculo deducir que entonces

$$\Phi(w_1, w_2) = |\det(\alpha_i^j)| \cdot \Phi(v_1, v_2).$$

Intuitivamente es claro que Φ a de ser una densidad puesto que, en realidad, $\Phi(v_1, v_2)$ no es más que el área del paralelogramo formado por v_1 y v_2 .

De (2.2) se deduce que, aunque el signo de una k -densidad puede cambiar entre rectas de k -vectores, este se mantiene constante en cada recta. Pese a ser trivial, cabe destacar que una densidad de orden máximo tiene signo constante.

Definición 2.5 Una densidad de volumen en un espacio vectorial es una densidad de orden máximo que toma valores positivos.

En la definición anterior, queremos decir con *orden máximo* que el orden de la densidad coincide con la dimensión del espacio vectorial. Una k -densidad en V es, desde otro punto de vista, una densidad de orden máximo en los subespacios k -dimensionales de V . Es más, si fuera positiva en uno de ellos, entonces podríamos considerar su restricción a dicho subespacio como una densidad de volumen de este.

Si fijamos una orientación en V , entonces existe una relación entre las densidades de orden máximo y las formas de orden máximo. Sea Φ una n -densidad en V y definamos una aplicación $\Omega : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$\Omega(v_1, \dots, v_n) = \Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$$

si la base (v_1, \dots, v_n) está orientada positivamente, y

$$\Omega(v_1, \dots, v_n) = -\Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$$

en caso contrario. Se puede comprobar que efectivamente Ω es una n -forma y que además $\Phi = |\Omega|$, si la densidad es positiva, y $\Phi = -|\Omega|$, en caso contrario. Nosotros, solamente mostraremos la linealidad de Ω en la primera componente, y se comprueba el resto del mismo modo. Fijada una base positivamente orientada $e = (e_1, \dots, e_n)$, sean $v_1, \dots, v_n, v'_1 \in V$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (v_1, \dots, v_n) , (v'_1, v_2, \dots, v_n) y $(v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_n)$ son bases positivamente orientadas. Tenemos entonces que $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \alpha e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, $v'_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \beta e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ y

$$\begin{aligned} \Omega(v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_n) &= \Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n + v'_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &= \Phi((\alpha + \beta)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= |\alpha| \cdot \Phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) + |\beta| \cdot \Phi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) + \Phi(v'_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &= \Omega(v_1, \dots, v_n) + \Omega(v'_1, v_2, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Acabamos de ver que existe una relación muy estrecha entre el espacio de n -formas $\Lambda^n V^*$ y el de n -densidades $|\Lambda^n V^*|$ (de ahí la notación). Una cuestión que surge de forma natural es si existe una misma relación entre las k -formas y las k -densidades, para $1 \leq k < n$. La respuesta es no, mientras que $\Lambda^k V^*$ es un espacio vectorial para cualquier $1 \leq k \leq n$, $|\Lambda^k V^*|$ sólo lo es cuando $k = n$ y, en ese caso, su dimensión es igual a 1 y cualquier n -densidad no nula forma una base de $|\Lambda^n V^*|$.

Ejemplo 2.6 Ya vimos que la aplicación Φ dada en 2.4 es una 2-densidad. Si se desarrolla la definición de dicha aplicación, se llega fácilmente a que

$$\Phi(v_1 \wedge v_2) = \sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\det \begin{pmatrix} v_1^i & v_1^j \\ v_2^i & v_2^j \end{pmatrix} \right)^2},$$

donde los v_i^j son los coeficientes de v_i en la base canónica (e_1, \dots, e_n) . Para el caso $n = 2$, obtenemos

$$\Phi(v_1 \wedge v_2) = \left| \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{pmatrix} \right| = |e_1 \wedge e_2|(v_1 \wedge v_2),$$

es decir, $\Phi = |e_1 \wedge e_2|$.

2.1.2. Volúmenes y áreas.

Dar una densidad de volumen en un espacio vectorial V es equivalente a considerar una medida de Lebesgue en V . Ello da pie a definir el volumen de objetos de V con respecto a una densidad.

Definición 2.7 Sea Φ una densidad de volumen en el espacio vectorial V . Sea $e = (e_1, \dots, e_n)$ una base de V tal que

$$\Phi(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = 1$$

y consideremos la medida de Lebesgue asociada a dicha base λ_e . Dado un subconjunto A de V , se define su volumen respecto a la densidad Φ como la integral en A respecto de la medida de Lebesgue λ_e , i. e.

$$\text{volumen}(A; \Phi) = \int_A \Phi := \int_A d\lambda_e = \lambda_e(A).$$

Notar que el volumen de A está bien definido puesto que es independiente de la base e elegida. Si $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ fuera otra base de V con $\Phi(e'_1 \wedge \dots \wedge e'_n) = 1$, por (2.2) tenemos $|\det L| = 1$, donde L es la aplicación de cambio de base con $Le_i = e'_i$ para $i = 1, \dots, n$, y por (2.1) las dos medidas asociadas a estas bases coinciden.

2.1.3. Densidades sobre variedades.

De forma natural, todo concepto u objeto definido en un espacio vectorial se puede extender a variedades ya que estas son localmente idénticas al espacio euclídeo. En el caso de las k -densidades no podemos construir un fibrado vectorial tal y como se hace con las k -formas o los campos vectoriales, aunque sí utilizaremos una técnica parecida.

Recordemos primero qué es un fibrado.

Definición 2.8 Un fibrado diferenciable es una terna $\pi : A \rightarrow B$ donde A y B son variedades diferenciables y π es una sumersión⁴ suprayectiva. La variedad A recibe el nombre de espacio total, B el de base y π el de proyección. Dado un punto $p \in A$, la fibra sobre p es su anti-imagen por la proyección: $\pi^{-1}(p)$.

Las fibras de π son subvariedades regulares del espacio total⁵ y por ello es lícito considerar el tangente a dicha variedad en un punto dado. Un hecho sencillo pero importante es que, dados $p \in B$ y $q \in \pi^{-1}(p)$, se tiene

$$\ker(D\pi_q) = T_q\pi^{-1}(p).$$

⁴Una sumersión es una aplicación diferenciable con diferencial suprayectiva en todo punto.

⁵Teorema del rango constante.

Dada una variedad diferenciable M^n , sea $1 \leq k \leq n$ y consideremos la variedad dada por

$$\times^k TM := \bigcup_{p \in M}^{\circ} \left(\underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k \text{ veces}} \right). \quad (2.3)$$

La estructura diferenciable de este conjunto se construye de forma totalmente análoga a la de la variedad tangente.

Definición 2.9 Dada una variedad M de dimensión n , sea $1 \leq k \leq n$. Se dice que una aplicación continua $\Phi : \times^k TM \rightarrow \mathbb{R}$ es una k -densidad diferenciable sobre M , si $\Phi(p, \cdot)$ es una k -densidad vectorial sobre $T_p M$ para todo punto $p \in M$ y si su restricción al abierto $\times^k TM \setminus \mathcal{O}$ es una aplicación diferenciable, siendo

$$\mathcal{O} = \{(v_1, \dots, v_k) \in T_p M \times \cdots \times T_p M : p \in M \text{ y } \text{rg}(v_1, \dots, v_k) < k\}.$$

Denotaremos $\mathcal{D}^k(M)$ al conjunto de k -densidades diferenciables sobre M .

Vamos a ver ahora una definición alternativa y equivalente⁶ a la anterior para las n -densidades de una variedad n -dimensional.

Como ya hemos comentado, dado un espacio vectorial V , el espacio de densidades $|\Lambda^k V^*|$ no es un espacio vectorial salvo que k coincida con la dimensión de V . Sea M una variedad diferenciable, dado un punto $p \in M$, podemos considerar el espacio de densidades de orden máximo asociado a este punto, $|\Lambda^n T_p^* M|$. Consideremos ahora la reunión disjunta de todos estos espacios

$$|\Lambda^n M| := \bigcup_{p \in M}^{\circ} |\Lambda^n T_p^* M|. \quad (2.4)$$

Al igual que ocurre con la variedad tangente o cotangente, un atlas de M induce un atlas en $|\Lambda^n M|$. Para cada (U, X) , carta de M , sea la carta (\tilde{U}, \tilde{X}) tal que si $\Phi_p \in |\Lambda^n M|$, entonces

$$\tilde{X}(\Phi_p) = (X(p), \alpha(p)), \quad (2.5)$$

donde $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ es de modo que

$$\Phi_p = \alpha(p) \cdot |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_p.$$

Esta construcción nos conduce ineludiblemente a definir el siguiente fibrado:

$$\begin{aligned} \pi : |\Lambda^n M| &\longrightarrow M \\ \Phi_p &\longmapsto p. \end{aligned} \quad (2.6)$$

⁶Proposición 2.13.

Definición 2.10 Dada una variedad M de dimensión n , se dice que una aplicación Φ es una n -densidad diferenciable sobre M si es una sección⁷ diferenciable del fibrado dado en (2.6).

El siguiente resultado nos da la representación de un densidad orden máximo en un abierto coordenado.

Proposición 2.11 Sea $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(M, |\Lambda^n M|)$, entonces Φ es una n -densidad (o densidad de orden máximo) sobre M si y sólo si para toda carta (U, X) de M existe una aplicación $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ tal que

$$\Phi_p = f(p) \cdot |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_p \quad \forall p \in U. \quad (2.7)$$

Demostración Primero, se hace notar que dada un carta (U, X) , si definimos en dicho abierto la aplicación

$$\Theta := |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|,$$

entonces $\Theta \in \mathcal{D}^n(U)$. Ciertamente, puesto que si (V, Y) y (\tilde{W}, \tilde{Z}) son cartas de U y $|\Lambda^n U|$ respectivamente entonces en $Y(V \cup \Theta^{-1}(\tilde{W}))$

$$\tilde{Z} \circ \Theta \circ Y^{-1} = (Z \circ Y^{-1}, |\text{Jac}(Z \circ X^{-1})|(X \circ Y^{-1})),$$

donde Z es la carta asociada a \tilde{Z} como en (2.5). Con esto, queda claro que Θ es una sección diferenciable de $|\Lambda^n U|$.

Supongamos ahora que $\Phi \in \mathcal{D}^n(M)$ y sea (U, X) una carta de M . Puesto que para cada $x \in M$ el espacio $|\Lambda^n T_x^* M|$ tiene dimensión 1, entonces para cada $x \in U$ existe un valor $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\Phi_x = f(x) \cdot |(dx^1)_x \wedge \cdots \wedge (dx^n)_x|.$$

Como ya hemos visto, $|dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$ es una densidad diferenciable, en particular es una densidad de volumen sobre U , luego f necesariamente ha de ser una aplicación \mathcal{C}^∞ de U en \mathbb{R} .

Recíprocamente, supongamos (2.7). Con lo visto anteriormente, Φ es una densidad de orden máximo en cada abierto coordenado de M , en particular diferenciable en cada abierto, luego es diferenciable en todo M . Además es una sección del fibrado de n -densidades de M y por tanto una n -densidad sobre M . \square

Un punto importante en la definición de integración sobre formas es determinar la existencia de una forma que no se anule. Esto sólo es factible si la variedad es orientable, en cambio no necesitamos de esa suposición con densidades.

⁷Se entiende por sección de un fibrado $\pi : A \rightarrow B$, una aplicación diferenciable $s : B \rightarrow A$ tal que $s \circ \pi = Id_B$. Cuando el fibrado es vectorial, la sección nula es aquella que a cada punto del espacio base se le asigna el 0 de la fibra.

Proposición 2.12 *Sea M una variedad diferencial de dimensión n , existe una n -densidad $\Phi \in \mathcal{D}^n(M)$ que no se anula en ningún punto $p \in M$.*

Demostración Sea $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas de M localmente finito y sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una partición de la unidad asociada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ⁸. Consideremos las densidades de orden n sobre U_α definidas por

$$\Phi^\alpha := |dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n|.$$

Puesto que el conjunto $\{\alpha \in A : f_\alpha(p) \neq 0\}$ es finito para todo $p \in M$, es lícito definir la densidad:

$$\Phi_p := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) \cdot \Phi_p^\alpha.$$

Así definida, Φ es una n -densidad de clase \mathcal{C}^∞ por ser suma localmente finita de n -densidades de clase \mathcal{C}^∞ . Además, dado un punto $p \in M$ cualquiera, existe al menos un $\alpha_0 \in A$ con $f_{\alpha_0}(p) \neq 0$ y, para n vectores $v_1, \dots, v_n \in T_p M$ linealmente independientes, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_p(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) \cdot \Phi_p^\alpha(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &\geq f_{\alpha_0}(p) \cdot \Phi_p^{\alpha_0}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Estamos ahora en disposición de probar la equivalencia entre las dos definiciones dadas de n -densidad.

Proposición 2.13 *La definición 2.9, para el caso $k = n$, y la definición 2.10 son equivalentes.*

Demostración Sea ϕ una n -densidad diferenciable según 2.10 y sea (U, X) una carta de M . En el abierto coordenado U tenemos

$$\phi_x = \alpha(x) \cdot |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_x$$

con $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dado $(x, v_1, \dots, v_n) \in \times^k TM \setminus \mathcal{O}$,

$$\phi_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \alpha(x) \cdot |\det(v_i^j)|,$$

siendo v_i^j los coeficientes de v_i con respecto a la base de vectores coordenados. De este modo, la aplicación

$$\Phi : \times^k TU \setminus \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R},$$

⁸Por ser M paracompacta, tenemos la existencia de un tal recubrimiento localmente finito. La existencia de la partición de la unidad viene dada por un teorema. Consultar [35] para más detalles.

dada por $\Phi(x, v_1, \dots, v_n) = \phi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$, es diferenciable. Puesto que la colección $\{\times^k TU \setminus \mathcal{O} : U \text{ es abierto coordenado de } M\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\times^k TM \setminus \mathcal{O}$, tenemos que Φ es una aplicación diferenciable en $\times^k TM \setminus \mathcal{O}$. Además, fijado $x \in M$, $\Phi(x, \cdot)$ es una n -densidad de $T_x M$, luego Φ es una n -densidad diferenciable de M según la definición 2.9.

Recíprocamente, sea Φ una n -densidad diferenciable de M según la definición 2.9 y sea (U, X) una carta de M . Fijado $x \in U$, $\Phi(x, \cdot) \in |\Lambda^n T_x^* M|$, luego existe un escalar $\alpha(x)$ tal que

$$\Phi(x, \cdot) = \alpha(x) \cdot |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_x.$$

En U , $|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|$ es una densidad diferenciable para la definición 2.10 y, por lo visto anteriormente, es una densidad diferenciable en U para la definición 2.9. Puesto que $|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|$ no se anula en ningún punto, α a de ser necesariamente diferenciable. Si definimos ahora la aplicación

$$\phi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \Phi(x, v_1, \dots, v_n),$$

para todo $x \in M$ y todo $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ en $\Lambda^n T_x M$, tenemos gracias a la proposición 2.7 que ϕ es una n -densidad sobre M para la definición 2.10. \square

Definición 2.14 Una densidad diferenciable de orden máximo positiva en cada espacio tangente se llama una densidad de volumen.

Si M es orientable y si Ω es una forma de volumen sobre M , entonces $|\Omega|$ es una densidad de volumen. Por lo contrario, si M no fuera orientable, no podríamos encontrar una densidad de volumen que fuera el valor absoluto de una forma de volumen, puesto que para las variedades no orientables no existe una forma globalmente definida que no se anule en algún punto. Sin embargo, sí tenemos una densidad de volumen.

Nota 2.15 Dadas sobre M una densidad de orden máximo Ψ y una densidad de volumen Φ , para cada $p \in M$ existe una constante $\nu(p)$ tal que $\Psi_p = \nu(p)\Phi_p$. Como Ψ y Φ son densidades de clase C^∞ y Φ no se anula en ningún punto, $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ . En particular, para dos densidades de volumen, la función ν que las relaciona es estrictamente positiva.

2.1.4. Integración de densidades.

De la misma manera que se define la integral de una n -forma sobre una variedad orientable, se puede definir la integral de una n -densidad sobre una variedad tanto orientable como no orientable⁹. Esto es debido a que en la fórmula de cambio de variable para integrales aparece el valor absoluto del jacobiano de la transformación, mientras que para n -formas, la fórmula no incluye el valor absoluto. Por tanto, para que la integral esté

⁹En [35, 36] se puede encontrar la definición de las integrales para formas, estando además en [35] la análoga para densidades.

bien definida es necesario prescribir una orientación. La ventaja que justifica el uso de densidades es que para ellas la fórmula de cambio de variables sí que incluye el valor absoluto.

2.1.5. Densidad producto.

Sean M y N dos variedades de dimensiones m y n respectivamente, y sean Φ y Ψ dos densidades de orden máximo sobre M y N (resp.). Dadas dos cartas (U, X) y (V, Y) de M y N (resp.), existen dos funciones $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^∞ tales que

$$\Phi = f \cdot |\alpha| \quad \text{y} \quad \Psi = g \cdot |\beta|.$$

con $\alpha = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ y $\beta = dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$.

Definición 2.16 Se llama densidad producto de Φ y Ψ sobre la variedad $M \times N$, a la densidad de orden $m + n$ dada por

$$\Phi \star \Psi = (f \circ \pi_M) \cdot (g \circ \pi_N) \cdot |\alpha \wedge \beta|,$$

donde π_M y π_N son las respectivas proyecciones de $M \times N$ sobre M y N .

Notar que esta definición es independiente de las cartas elegidas, puesto que si (\tilde{U}, \tilde{X}) y (\tilde{V}, \tilde{Y}) son otras dos cartas de M y N respectivamente, tales que

$$\Phi = \tilde{f} \cdot |\tilde{\alpha}| \quad \text{y} \quad \Psi = \tilde{g} \cdot |\tilde{\beta}|,$$

entonces en $U \cap \tilde{U}$ y $V \cap \tilde{V}$ tenemos respectivamente

$$\tilde{f} = f \cdot |\det(\text{Jac}(\tilde{X} \circ X^{-1}))| \quad \text{y} \quad \tilde{g} = g \cdot |\det(\text{Jac}(\tilde{Y} \circ Y^{-1}))|.$$

Por tanto en $(U \cap \tilde{U}) \times (V \cap \tilde{V})$

$$(\tilde{f} \circ \pi_M) \cdot (\tilde{g} \circ \pi_N) \cdot |\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}| = (f \circ \pi_M) \cdot (g \circ \pi_N) \cdot |\alpha \wedge \beta|.$$

2.2. La aplicación de Gauss

En el resto del capítulo, K denotará siempre (salvo mención explícita) un cuerpo 0-convexo y cuadrático con frontera \mathcal{C}^∞ , S será la frontera de un cuerpo de ese tipo (*i. e.* un ciclo de referencia) y supondremos V orientado. Volveremos a adoptar, como en el capítulo §1, la convención de que V es un espacio vectorial de dimensión $n + 1$.

2.2.1. Definiciones.

Definición 2.17 Sea K un cuerpo de un espacio vectorial V de dimensión $n+1$ y sea $\Sigma \subset \Lambda^n V$ un ciclo de referencia. Se entiende por aplicación de Gauss de K con respecto a Σ a la aplicación $g_{K,\Sigma} : \partial K \rightarrow \Sigma$, donde $g_{K,\Sigma}(u)$ es el único vector alternado $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \Sigma$ tal que

- a. $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = T_u \partial K$;
- b. (v_1, \dots, v_n, u) es una base positivamente orientada de V .

Definición 2.18 Sea $K \subset V$ un cuerpo y $S \subset V$ un ciclo de referencia. Se llama aplicación de Gauss de K con respecto a S a la aplicación $\tilde{g}_{K,S} : \partial K \rightarrow S^*$, donde $\tilde{g}_{K,S}(u)$ es el único covector $\xi \in S^*$ tal que

- a. $\ker \xi = T_u \partial K$;
- b. $\langle \xi, u \rangle > 0$.

Dado un espacio vectorial V y dado $\Omega \in \Lambda^{n+1} V^*$, existe un isomorfismo natural entre el espacio de vectores alternados $\Lambda^n V$ y el dual V^* . Basta definir la aplicación $i_\Omega : \Lambda^n V \rightarrow V^*$, dada por

$$i_\Omega(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)(u) := \Omega(v_1, \dots, v_n, u) \quad \forall u \in V. \quad (2.8)$$

Sea el ciclo de referencia $\Sigma = i_\Omega^{-1}(S^*)$, es fácil ver que $\tilde{g}_{K,S} = i_\Omega \circ g_{K,\Sigma}$. En algunas ocasiones se produce un abuso de notación y se identifica por g_K a cualquiera de las dos definiciones de aplicación de Gauss.

Otra observación interesante es que, si K es cuadrático y consideramos $S = \partial K$, entonces nuestra segunda definición de aplicación de Gauss $\tilde{g}_{K,S}$ no es más que la transformada de Legendre \mathcal{L} . Además, ambas visiones de la aplicación de Gauss son difeomorfismo entre los respectivos conjuntos considerados.

2.2.2. La medida de área.

Sea $\Sigma \subset \Lambda^n V$ un ciclo de referencia, entonces existe una única densidad vectorial $\omega \in |\Lambda^n V^*|$ tal que $\omega(\sigma) = 1$ para todo $\sigma \in \Sigma$. Esta densidad vectorial induce sobre V una densidad $\tilde{\omega} \in \mathcal{D}^n V$ de tipo \mathcal{C}^∞ que es la densidad constante $\tilde{\omega}_v = \omega$, para todo $v \in V$. Por abuso, seguiremos denotando a esta densidad por ω .

Consideremos un cuerpo $K \subset V$, entonces ω restringida a la frontera de K es una densidad de orden máximo. Esto nos ofrece un método para medir la superficie de ∂K .

Definición 2.19 Sean $K \subset V$ un cuerpo y $\Sigma \subset \Lambda^n V$ un ciclo de referencia. La medida de área del cuerpo K con respecto a Σ es la medida definida por la densidad:

$$dS_{K,\Sigma} := (g_{K,\Sigma}^{-1})^* \omega,$$

donde ω es la densidad asociada a Σ .

Dicha medida es \mathcal{C}^∞ , positiva y (por ser K centrado) par (i. e. invariante bajo la aplicación antipodal). Esta medida también se puede ver desde la perspectiva de un ciclo de referencia en V^* .

Definición 2.20 Sean $K \subset V$ un cuerpo y $S \subset V$ un ciclo de referencia. La medida de área del cuerpo K con respecto a S es la medida definida por la densidad:

$$dS_{K,S} := (\tilde{g}_{K,S}^{-1})^* \omega,$$

donde ω es la densidad asociada al ciclo $i_\Omega^{-1}(S^*)$.

Dado un ciclo de referencia $\Sigma \subset \Lambda^n V$, sea Ω una n -forma sobre V . Consideremos el ciclo de referencia de V dado por $S = i_\Omega(\Sigma)^*$, entonces

$$dS_{K,S} = (\tilde{g}_{K,S}^{-1})^* \omega = (i_\Omega^{-1})^* dS_{K,\Sigma}.$$

Así pues, tenemos tres formas de medir el área de ∂K con respecto a ω :

$$\text{area}(\partial K) = \int_{\partial K} \omega = \int_\Sigma dS_{K,\Sigma} = \int_{S^*} dS_{K,S}.$$

Al igual que con la aplicación de Gauss, identificaremos dS_K con cualquiera de las dos definiciones de medida de superficie.

Teorema 2.21 (Teorema de existencia de Minkowski) Sea $\Sigma \subset \Lambda^n V$ un ciclo de referencia. Dada una densidad par $\Phi \in \mathcal{D}^n \Sigma$, existe un cuerpo $K \subset V$ tal que $\Phi = dS_K$ (es decir, tal que Φ es la medida de superficie de K con respecto a Σ).

Demostraciones de este teorema pueden ser encontradas en [25, 46].

2.3. Fórmulas de proyección

2.3.1. Volumen con respecto a la función radial.

Sea $S \subset V$ un ciclo de referencia y definamos la aplicación $j : S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ dada por

$$j(u, r) := r \cdot u \quad \forall (u, r) \in S \times \mathbb{R}_+. \quad (2.9)$$

Entonces j es un difeomorfismo entre $S \times \mathbb{R}_+$ y $V \setminus \{0\}$.

Definición 2.22 Sea $S \subset V$ un ciclo de referencia y sea $v \in V \setminus \{0\}$, se llaman coordenadas polares de v respecto de S al par $(u, r) = j^{-1}(v) \in S \times \mathbb{R}_+$.

Lema 2.23 Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$. Sea Ω una $(n + 1)$ -forma no nula de V y sea $S \subset V$ un ciclo de referencia. Entonces, para todo $u \in S$ y para todo sistema de vectores $v_1, \dots, v_n \in T_u S$, se tiene

$$|\Omega(v_1, \dots, v_n, u)| = \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n),$$

donde ω es la densidad de orden n asociada al ciclo de referencia $\Sigma = i_\Omega^{-1}(S^*)$.

Demostración Dado $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \Lambda^n T_u S$, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v_1^0 \wedge \dots \wedge v_n^0 \in \Sigma$ tales que

$$v_1^0 \wedge \dots \wedge v_n^0 = \lambda \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Si definimos $\xi_0 = i_\Omega(v_1^0, \dots, v_n^0)$, entonces $\mathcal{L}(u) = \pm \xi_0$, donde \mathcal{L} es la transformada de Legendre respecto a S . Luego, $|\langle \xi_0, u \rangle| = 1$ y por la definición de i_Ω obtenemos

$$\begin{aligned} |\Omega(v_1, \dots, v_n, u)| &= |\lambda| \cdot |\Omega(v_1^0, \dots, v_n^0, u)| \\ &= |\lambda| \cdot |\xi_0(u)| \\ &= |\lambda|. \end{aligned}$$

Por otra parte, $\omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = |\lambda| \cdot \omega(v_1^0 \wedge \dots \wedge v_n^0) = |\lambda|$, puesto que ω es la densidad asociada a Σ , y por tanto $|\Omega| = \omega$. \square

Lema 2.24 Bajo las mismas condiciones, se tiene que en $S \times \mathbb{R}_+$

$$j^*|\Omega| = r^n \omega \star |dr|,$$

donde j viene definida por (2.9), ω es la restricción a S de la densidad asociada a Σ .

Demostración Al ser $|\Omega|$ una densidad de orden máximo, $j^*|\Omega|$ también lo es; lo que es obvio para $\omega \star |dr|$. Es más, por ser ambas densidades de volumen sobre $S \times \mathbb{R}_+$, existe una aplicación $\nu : S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de clase C^∞ tal que $j^*|\Omega| = \nu \cdot \omega \star |dr|$. Veamos que ciertamente $\nu(u, r) = r^n$, para todo $(u, r) \in S \times \mathbb{R}_+$.

Dado un punto $(u, r) \in S \times \mathbb{R}_+$, la diferencial de j en dicho punto viene dada por

$$Dj_{(u,r)}(\alpha, \lambda) = \lambda u + r\alpha, \quad \forall (\alpha, \lambda) \in T_u S \times \mathbb{R}.$$

Sea el campo vectorial constante $X(u, r) = (0, 1) \in T_u S \times \mathbb{R}$ definido sobre $S \times \mathbb{R}_+$, entonces $Dj_{(u,r)}(0, 1) = u$. Por otra parte, si $v_1, \dots, v_n \in T_u S$ son linealmente independientes y tomamos $\alpha_i = v_i/r$, entonces $v_i = Dj_{(u,r)}(\alpha_i, 0)$ para $i = 1, \dots, n$. Con todo ello deducimos que

$$\begin{aligned} |\Omega|(v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge u) &= j^*|\Omega|((\alpha_1, 0) \wedge \dots \wedge (\alpha_n, 0) \wedge (0, 1)) \\ &= \nu(u, r) \cdot \omega \star |dr|((\alpha_1, 0) \wedge \dots \wedge (\alpha_n, 0) \wedge (0, 1)) \\ &= \nu(u, r) \cdot \omega(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \\ &= \frac{\nu(u, r)}{r^n} \cdot \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n), \end{aligned}$$

de donde, aplicando el lema anterior, obtenemos el resultado deseado. \square

Teorema 2.25 Sean $K \subset V$ un cuerpo, $S \subset V$ un ciclo de referencia y Ω una $(n+1)$ -forma en V , entonces

$$\text{volumen}(K; \Omega) = \frac{1}{n+1} \int_{u \in S} \rho_K^{n+1}(u) \omega, \quad (2.10)$$

donde ω es la densidad de orden n asociada al ciclo $\Sigma = i_{\Omega}^{-1}(S^*)$ y ρ_K es la función radial con respecto a K .

Demostración En primer lugar, notar que

$$j^{-1}(K) = \{(u, r) \in S \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq r \leq \rho_K(u)\}.$$

Aplicando el lema 2.24 y el teorema de Fubini, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{volumen}(K; \Omega) &= \int_K |\Omega| \\ &= \int_{j^{-1}(K)} r^n \omega \star |dr| \\ &= \int_{u \in S} \left(\int_0^{\rho_K(u)} r^n dr \right) \omega \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{u \in S} \rho_K^{n+1}(u) \omega. \end{aligned}$$

□

2.3.2. Volumen con respecto a la función soporte.

Sean $K \subset V$ un cuerpo y $S \subset V$ un ciclo de referencia, entonces se puede identificar $V \setminus \{0\}$ con $S^* \times \mathbb{R}_+$ mediante el difeomorfismo $\Gamma : S^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow V \setminus \{0\}$ definido por

$$\Gamma(\xi, r) := r \cdot g_K^{-1}(\xi) \quad \forall (\xi, r) \in S^* \times \mathbb{R}_+, \quad (2.11)$$

donde $g_K : \partial K \rightarrow S^*$ es la aplicación de Gauss de K con respecto a S .

Lema 2.26 Dado un espacio vectorial V de dimensión $n+1$, sean $K \subset V$ un cuerpo, $S \subset V$ un ciclo de referencia y Ω una $(n+1)$ -forma no nula de V . Entonces se tiene que en $S^* \times \mathbb{R}_+$

$$\Gamma^*|\Omega| = r^n h_K(\xi) dS_K \star |dr|,$$

donde Γ viene dada por (2.11), dS_K es la medida de superficie de K con respecto a S y h_K es la función de soporte con respecto a K .

Demostración Puesto que tanto $\Gamma^*|\Omega|$ como $dS_K \star |dr|$ son densidades de volumen de $S^* \times \mathbb{R}_+$, necesariamente debe existir una aplicación $\nu : S^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ de clase \mathcal{C}^∞ tal que $\Gamma^*|\Omega| = \nu \cdot dS_K \star |dr|$. Luego, basta comprobar que $\nu(\xi, r) = r^n h_K(\xi)$, para todo $(\xi, r) \in S^* \times \mathbb{R}_+$.

En primer lugar, observemos que dado $(\alpha, \lambda) \in T_\xi S^* \times \mathbb{R}$,

$$D\Gamma_{(\xi, r)}(\alpha, \lambda) = \lambda g_K^{-1}(\xi) + r(Dg_K^{-1})_\xi(\alpha).$$

Por otra parte, consideremos en $S^* \times \mathbb{R}_+$ el campo vectorial

$$X(\xi, r) = (0, 1), \quad \forall (\xi, r) \in S^* \times \mathbb{R}_+,$$

entonces $D\Gamma_{(\xi, r)}(X) = g_K^{-1}(\xi)$. Sea ahora $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $T_{g_K^{-1}(\xi)}\partial K$ tal que $\omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = 1$, siendo ω (como de costumbre) la densidad asociada al ciclo $i_\Omega^{-1}(S^*)$. Entonces, $i_\Omega(v_1, \dots, v_n) = \pm \xi$ y por tanto obtenemos

$$\begin{aligned} |\Omega(v_1, \dots, v_n, D\Gamma(X))| &= |\Omega(v_1, \dots, v_n, g_K^{-1}(\xi))| \\ &= |\xi(g_K^{-1}(\xi))| \\ &= h_K(\xi). \end{aligned}$$

Finalmente, para $i = 1, \dots, n$, sea $V_i = (\frac{\alpha_i}{r}, 0) \in T_\xi S^* \times \mathbb{R}$ con $(Dg_K^{-1})(\alpha_i) = v_i$. Entonces $D\Gamma_{(\xi, r)}(V_i) = v_i$ y por tanto

$$\begin{aligned} h_K(\xi) &= |\Omega(v_1, \dots, v_n, D\Gamma(X))| \\ &= \Gamma^*|\Omega|(V_1 \wedge \dots \wedge V_n \wedge X(\xi, r)) \\ &= \nu(\xi, r) \cdot dS_K \star |dr|(V_1 \wedge \dots \wedge V_n \wedge (0, 1)) \\ &= \nu(\xi, r) \cdot dS_K \left(\frac{\alpha_1}{r} \wedge \dots \wedge \frac{\alpha_n}{r} \right) \\ &= \frac{\nu(\xi, r)}{r^n} \cdot ((g_K^{-1})^* \omega)(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \\ &= \frac{\nu(\xi, r)}{r^n} \cdot \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \\ &= \frac{\nu(\xi, r)}{r^n}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.27 Dado un espacio vectorial V de dimensión $n+1$, sean $K \subset V$ un cuerpo, $S \subset V$ un ciclo de referencia y Ω una $(n+1)$ -forma no nula de V . Entonces

$$\text{volumen}(K; \Omega) = \frac{1}{n+1} \int_{\xi \in S^*} h_K(\xi) dS_K,$$

donde dS_K es la medida de superficie de K con respecto a S y h_K es la función de soporte con respecto a K .

Demostración En primer lugar, notar que

$$\Gamma^{-1}(K \setminus \{0\}) = \{(\xi, r) \in S^* \times \mathbb{R}_+ : 0 < r \leq 1\}.$$

Aplicando el lema 2.26 y el teorema de Fubini, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{volumen}(K; \Omega) &= \int_K |\Omega| \\ &= \int_{\Gamma^{-1}(K \setminus \{0\})} \Gamma^* |\Omega| \\ &= \int_{S^* \times]0,1]} r^n h_K(\xi) dS_K \star |dr| \\ &= \int_{\xi \in S^*} \left(\int_0^1 r^n h_K(\xi) dr \right) dS_K \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{\xi \in S^*} h_K(\xi) dS_K. \end{aligned}$$

□

2.3.3. Fórmulas de proyección

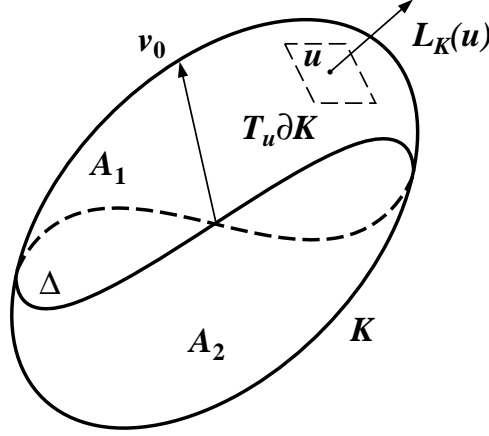
Aquí serán necesarios los conceptos vistos en §1.1.1.

Lema 2.28 Sean V un espacio vectorial de dimensión $n+1$ y E^* un hiperplano vectorial de V^* . Dado un cuerpo convexo y centrado $K \subset V$, existen conjuntos $A_1, A_2, \Delta \subset \partial K$ tales que:

- a. la frontera de K es la unión disjunta $\partial K = A_1 \cup \Delta \cup A_2$;
- b. Δ es el conjunto de puntos críticos de la proyección π_{E^*} restringida a ∂K , además es una subvariedad de ∂K de dimensión $n-1$;
- c. A_1 y A_2 son abiertos conexos de ∂K , difeomorfos entre si mediante la restricción de la aplicación antipodal;
- d. $\pi_{E^*}|_{A_i} : A_i \rightarrow \pi_{E^*}(K \setminus \Delta)$ es un difeomorfismo, para $i = 1, 2$.

Demostración Sea $v_0 \in \partial K \cap (E^*)^\perp$ y definamos entonces la aplicación

$$\begin{aligned} L : \partial K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle \mathcal{L}(v), v_0 \rangle, \end{aligned}$$

Figura 2.1: Descomposición del ciclo ∂K .

donde \mathcal{L} es la transformada de Legendre con respecto a K . Se puede entender L como la *altura* de v con respecto a E^* . Los conjuntos buscados son:

$$\begin{aligned}\Delta &:= L^{-1}(0), \\ A_1 &:= L^{-1}(]-\infty, 0[), \\ A_2 &:= L^{-1}(]0, +\infty[).\end{aligned}$$

Así a queda claro.

Para ver b, establezcamos primero la siguiente relación

$$dL_v = 0 \Leftrightarrow v = \pm v_0. \quad (2.12)$$

Sea $\{e_j\}$ una base de V y consideremos la base dual $\{e^j\}$, entonces¹⁰

$$L(v) = \mathcal{L}_j(v)v_0^j.$$

Dado $v \in \partial K$, sea (U, X) una carta alrededor de v . Para dicha carta, la diferencial de L tiene la expresión

$$\begin{aligned}dL_v &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \Big|_v \cdot dx^i \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial x^i} \Big|_v \cdot v_0^j \cdot dx^i.\end{aligned}$$

¹⁰Seguimos aquí la notación de sumación de Einstein.

Si analizamos el coeficiente de dx^i , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial x^i} \Big|_v \cdot v_0^j &= ((D\mathcal{L}_v)^t(v_0))_i \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, (D\mathcal{L}_v)^t(v_0) \right\rangle \\ &= \left\langle D\mathcal{L}_v \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), v_0 \right\rangle, \end{aligned}$$

donde $(D\mathcal{L})^t : V \rightarrow T_v^* \partial K$ es la aplicación dual de $D\mathcal{L}_v$. Por tanto

$$dL_v = \left\langle D\mathcal{L}_v \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), v_0 \right\rangle \cdot dx^i$$

y

$$\begin{aligned} dL_v = 0 &\Leftrightarrow v_0 \in \ker D\mathcal{L}_v \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow v_0 \in \ker \xi \quad \forall \xi \in T_{\mathcal{L}(v)} \partial K^* \\ &\Leftrightarrow v_0 \in (T_{\mathcal{L}(v)} \partial K^*)^\perp \\ &\Leftrightarrow E^* = \ker v_0 = T_{\mathcal{L}(v)} \partial K^* \\ &\quad \text{Corolario 1.15} \\ &\Leftrightarrow \ker \mathcal{L}(v) = T_{v_0} \partial K \\ &\Leftrightarrow v = \pm v_0. \end{aligned}$$

Así (2.12) queda demostrada y, puesto que F tiene rango máximo y constante en el abierto $\partial K \setminus \{\pm v_0\}$, tenemos que Δ es una subvariedad embebida de ∂K de dimensión $n - 1$. Sólo falta ver que Δ es en efecto el conjunto de puntos singulares de $\pi_{E^*}|_{\partial K}$. Notad que

$$D(\pi_{E^*}|_{\partial K})_v = \pi_{E^*}|_{T_v \partial K},$$

luego

$$\begin{aligned} D(\pi_{E^*}|_{\partial K})_v \text{ no tiene rango máximo} &\Leftrightarrow \pi_{E^*}|_{T_v \partial K} \text{ no es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow \ker \pi_{E^*} \subset T_v \partial K \\ &\Leftrightarrow v_0 \in T_v \partial K \\ &\Leftrightarrow v_0 \in \ker \mathcal{L}(v) \\ &\Leftrightarrow L(v) = \langle \mathcal{L}(v), v_0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

La aplicación antipodal es un difeomorfismo de V en si mismo, luego también ha de serlo su restricción a ∂K en su imagen, ∂K . Si denotamos por p a dicha restricción y observamos que $p(\Delta) = \Delta$, $p(A_1) = A_2$ y $p(A_2) = A_1$, entonces queda claro.

Finalmente, notad que las aplicaciones dadas en d son biyectivas y con rango máximo en sus respectivos dominios, luego son difeomorfismos. \square

Como ya hemos dicho, la aplicación L representa la altura con respecto a E^* . Así, otra forma de establecer (2.12) sería ver que $\pm v_0$ son los únicos extremos de L en ∂K .

Teorema 2.29 (Fórmula de proyección de Cauchy) *Sea $K \subset V$ un cuerpo centrado y cuadráticamente convexo y sea $\Sigma \subset \Lambda^n V$ un ciclo de referencia. Entonces, dada una forma lineal no nula $\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \in \Lambda^n V^*$, se tiene que*

$$\text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) = \frac{1}{2} \int_{v \in \Sigma} |\langle \xi, v \rangle| dS_K, \quad (2.13)$$

donde $E^* = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ y dS_K es la medida de superficie de K con respecto a Σ .

Demostración Para comenzar, vamos a simplificar nuestro problema. Puesto que $g_K : \partial K \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo, nuestra tesis es equivalente a demostrar que

$$\text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) = \frac{1}{2} \int_{u \in \partial K} |\langle \xi, g_K(u) \rangle| \omega,$$

donde ω es la n -densidad asociada a Σ . Utilizando ahora el lema anterior, además del teorema de Sard¹¹; nos basta con ver que

$$\text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) = \int_{u \in A_1} |\langle \xi, g_K(u) \rangle| \omega.$$

Si notamos que $\pi_{E^*}(\Delta)$ tiene medida nula en $\pi_{E^*}(K)$; entonces, utilizando nuevamente el lema anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) &= \int_{\pi_{E^*}(K)} |\xi| \\ &= \int_{\pi_{E^*}(K \setminus \Delta)} |\xi| \\ &= \int_{A_1} \pi_{E^*}^* |\xi|. \end{aligned}$$

Así pues, veamos que ciertamente

$$(\pi_{E^*}^* |\xi|)_u = |\langle \xi, g_K(u) \rangle| \omega, \quad \forall u \in A_1.$$

Sea la aplicación lineal $\bar{\pi}_{E^*} : \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^n E$ dada por

$$\bar{\pi}_{E^*}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) := \pi_{E^*}(v_1) \wedge \cdots \wedge \pi_{E^*}(v_n), \quad \forall v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \Lambda^n V.$$

¹¹Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, el conjunto de puntos críticos de f tiene medida nula en \mathbb{R}^n .

Sean $v_1, \dots, v_n \in T_u \partial K$. Entonces, para $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \Lambda^n V$, se tiene que $v = \omega(v) \cdot g_K(u)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (\pi_{E^*}^* |\xi|)_u(v) &= |\langle \xi, \bar{\pi}_{E^*}(v) \rangle| \\ &= |\langle \xi, \bar{\pi}_{E^*}(\omega(v) \cdot g_K(u)) \rangle| \\ &= |\langle \xi, \bar{\pi}_{E^*}(g_K(u)) \rangle| \omega(v) \\ &= |\langle \xi, g_K(u) \rangle - \xi(w)| \omega(v), \end{aligned}$$

donde w es el único vector alternado de $\ker \bar{\pi}_{E^*}$ tal que $g_K(u) = \bar{\pi}_{E^*}(g_K(u)) + w$. De este modo, tan sólo nos queda probar que $\langle \xi, w \rangle = 0$. Sean $w_1, \dots, w_n \in V$, tales que $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$. Puesto que $w \in \ker \bar{\pi}_{E^*}$, deben existir escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\alpha_1 \cdot \pi_{E^*}(w_1) + \dots + \alpha_n \cdot \pi_{E^*}(w_n) = 0,$$

luego

$$\tilde{w} := \alpha_1 \cdot w_1 + \dots + \alpha_n \cdot w_n \in \ker \pi_{E^*} = (E^*)^\perp.$$

Ahora bien, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\alpha_1 \neq 0$ y entonces

$$w = \frac{1}{\alpha_1} \cdot \tilde{w} \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_n,$$

con lo que obviamente $\langle \xi, w \rangle = 0$, puesto que $\langle \xi_i, \tilde{w} \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. \square

He aquí la fórmula análoga para subespacios de codimensión superior a 1, la cuál dejaremos sin demostración.

Teorema 2.30 (W. Weil, [52, 53]) *Sea $K \subset V$ un cuerpo centrado y cuadráticamente convexo y sea $S \subset V$ un ciclo de referencia. Entonces, dado $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k$ (con $1 \leq k < n$), se tiene que*

$$\text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) = \frac{2^k}{k!} \int_{v \in S^k} |\langle \xi, v \rangle| \Phi \star \dots \star \Phi, \quad (2.14)$$

donde $E^* = \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle$ y Φ es la medida generadora de K .

2.4. Los cuerpos intersección y proyección

2.4.1. El cuerpo intersección

En este apartado, haremos un pequeño cambio de notación. En un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$, sea $K \subset V$ un cuerpo convexo y centrado y sean $v_1, \dots, v_n \in V$, generando el subespacio $E = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Denotaremos por

$$\text{area}(K \cap E; v), \quad (2.15)$$

donde $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$, al volumen en E del cuerpo $K \cap E$ con respecto a la densidad asociada a una n -forma lineal Ω_v tal que $\Omega_v(v) = 1$. Notar que, aunque la forma Ω_v no es única, sí lo es la densidad restringida a E .

Definición 2.31 Sea K un cuerpo convexo y centrado en un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$. Se llama cuerpo intersección de K al conjunto:

$$\mathcal{I}K := \{v \in \Lambda^n V : \text{area}(K \cap E; v) \geq \kappa_n, \text{ si } v \neq 0\}, \quad (2.16)$$

donde κ_n es el volumen de la bola unidad de \mathbb{R}^n .

Se puede comprobar que el cuerpo intersección $\mathcal{I}K$ es efectivamente un c.c.c..

Teorema 2.32 (Busemann) Dado un cuerpo convexo centrado K en un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$, se tiene que la extensión a 0 en el 0 de V de la aplicación

$$v \in \Lambda^n V \mapsto (\text{area}(K \cap E; v))^{-1}$$

es una norma en $\Lambda^n V$.

La demostración de este teorema es inmediata gracias a la siguiente proposición y a las proposiciones 1.38 y 1.39.

Proposición 2.33 Bajo las mismas condiciones y dado $v \in \Lambda^n V$ no nulo, se tiene

$$\rho_{\mathcal{I}K}(v) = \frac{1}{\kappa_n} \cdot \text{area}(K \cap E; v), \quad (2.17)$$

donde κ_n es el volumen de la bola unidad de \mathbb{R}^n .

Demostración Dado $v \in \Lambda^n V$ no nulo, sean $\lambda \in \mathbb{R}_+$ y $w \in \partial \mathcal{I}K$, tales que $v = \lambda \cdot w$, entonces:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{I}K}(v) &= \lambda^{-1} \cdot \rho_{\mathcal{I}K}(w) = \lambda^{-1} \quad \text{y} \\ \text{area}(K \cap E_v; v) &= \lambda^{-1} \cdot \text{area}(K \cap E_w; w) = \lambda^{-1} \cdot \kappa_n, \end{aligned}$$

donde $E_v = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ y E_w el respectivo. □

Utilizando la fórmula (2.10) llegamos fácilmente a que

$$\rho_{\mathcal{I}K}(v) = \frac{1}{n\kappa_n} \cdot \int_{u \in S \cap E} \rho_K^n(u) \omega, \quad (2.18)$$

donde $S \subset V$ es un ciclo de referencia cualquiera y ω es la densidad asociada al ciclo $i_{\Omega_v}^{-1}((S \cap E)^*)$, siendo Ω_v una forma lineal sobre V tal que $\Omega_v(v) = 1$. Puesto que ρ_K es de clase C^∞ , $\rho_{\mathcal{I}K}$ también, lo que se traduce en que $\mathcal{I}K$ es infinitamente diferenciable.

Sea L un endomorfismo sobre V , entonces L induce un endomorfismo \bar{L} sobre el espacio de vectores alternados $\Lambda^n V$ definido como sigue:

$$\bar{L}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) := L(v_1) \wedge \cdots \wedge L(v_n), \quad \forall v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \Lambda^n V.$$

Es fácil ver que, si L^t denota endomorfismo traspuesto (o dual) de L , entonces $\bar{L}^t = \bar{L}^t$. Y si L es invertible, entonces $\bar{L}^{-1} = \bar{L}^{-1}$.

Teorema 2.34 Sea $K \subset V$ un cuerpo convexo centrado y sea L un automorfismo de V , entonces:

$$\bar{L}(\mathcal{I}K) = \mathcal{I}(L(K)).$$

Demostración Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ linealmente independientes y sea $w_i = L(v_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Sea el subespacio vectorial $E = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ y consideremos su imagen $F = L(E) = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Entonces $L|_E : E \rightarrow F$ es un isomorfismo y se tiene que

$$\text{area}(L(K) \cap F; w_1 \wedge \dots \wedge w_n) = \text{area}(K \cap E; v_1 \wedge \dots \wedge v_n),$$

por tanto

$$\begin{aligned} w_1 \wedge \dots \wedge w_n \in \mathcal{I}(L(K)) &\Leftrightarrow \text{area}(L(K) \cap F; w_1 \wedge \dots \wedge w_n) \geq \kappa_n \\ &\Leftrightarrow \text{area}(K \cap E; v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \geq \kappa_n \\ &\Leftrightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \mathcal{I}K \\ &\Leftrightarrow \bar{L}^{-1}(w_1 \wedge \dots \wedge w_n) \in \mathcal{I}K \\ &\Leftrightarrow w_1 \wedge \dots \wedge w_n \in \bar{L}(\mathcal{I}K). \end{aligned}$$

□

2.4.2. El cuerpo proyección.

Volviendo a la nuestra notación habitual para el área de un objeto, veamos la siguiente definición:

Definición 2.35 Sea K un cuerpo convexo centrado en un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$. Se llama cuerpo proyección de K al conjunto:

$$\Pi K := (ZK)^* \subset \Lambda^n V, \quad (2.19)$$

donde ZK es el cuerpo

$$ZK := \{\xi \in \Lambda^n V^* : \text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) \leq \kappa_n, \text{ si } \xi \neq 0\},$$

siendo κ_n es el volumen de la bola unidad de \mathbb{R}^n .

Veamos que ciertamente ZK es un cuerpo centrado y convexo.

Proposición 2.36 Si $K \subset V$ es un c.c.c. de clase \mathcal{C}^∞ , entonces ZK también es un c.c.c. de clase \mathcal{C}^∞ .

Demostración Sea $\xi \in \Lambda^n V^*$ no nulo entonces, por la fórmula de proyección de Cauchy, tenemos

$$\text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi) = \frac{1}{2} \int_{v \in \Sigma} |\langle \xi, v \rangle| dS_K,$$

donde $E^* = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$, siendo $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$, y donde dS_K es la medida de superficie de K con respecto a un ciclo de referencia cualquiera $\Sigma \subset \Lambda^n V$. La aplicación

$$\xi \in \Lambda^n V^* \mapsto \int_{v \in \Sigma} |\langle \xi, v \rangle| dS_K$$

es obviamente una norma \mathcal{C}^∞ (por ser dS_K una medida positiva infinitamente diferenciable) y por ello ZK es un cuerpo centrado convexo de clase \mathcal{C}^∞ . \square

Proposición 2.37 *Sea K un cuerpo convexo centrado en un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$, entonces para $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \in \Lambda^n V^*$ no nulo*

$$h_{\Pi K}(\xi) = \frac{\text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi)}{\kappa_n}, \quad (2.20)$$

donde $E^* = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$.

La demostración es análoga a la de la proposición 2.33, teniendo en cuenta esta vez que la aplicación

$$\xi \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\} \mapsto \text{area}(\pi_{E^*}(K); \xi)$$

es homogénea de grado 1. Decir también que dado $\xi \in \Lambda^n V^*$, se tiene, gracias a la fórmula de proyección de Cauchy 2.13, que

$$h_{\Pi K}(\xi) = \frac{1}{2\kappa_n} \int_{v \in \Sigma} |\langle \xi, v \rangle| dS_K. \quad (2.21)$$

Teorema 2.38 *Sea K un cuerpo convexo y centrado de un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$ y sea L un automorfismo sobre V . Entonces, dados $\xi_1, \dots, \xi_n \in V^*$ linealmente independientes, se tiene*

$$\text{area}(\pi_{E^*}(L(K)); \xi) = \text{area}(\pi_{L^t(E^*)}(K); \bar{L}^t \xi),$$

donde $E^* = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ y $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$.

Demostración Sea $F^* = L^t(E^*)$ y consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{L^t} & V^* \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ E^* & \xrightarrow{\Phi} & F^* \end{array}$$

donde i es la inyección canónica y $\Phi = L^t|_{E^*}$. A este diagrama, le corresponde un diagrama conmutativo dual como sigue

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{L} & V \\ \pi_{E^*} \downarrow & & \downarrow \pi_{F^*} \\ E & \xleftarrow{\Phi^t} & F \end{array}$$

donde Φ^t es un isomorfismo por serlo Φ . Luego $\pi_{E^*}(L(K)) = \Phi^t(\pi_{F^*}(K))$, de donde obtenemos fácilmente nuestra tesis. \square

Teorema 2.39 Sea $K \subset V$ un cuerpo convexo centrado y sea L un automorfismo de V , entonces:

$$\bar{L}(\Pi K) = \Pi(L(K)).$$

Demostración Veamos en primer lugar que

$$\bar{L}^t(Z(L(K))) = ZK.$$

Sean $\eta_1, \dots, \eta_n \in V^*$ linealmente independientes y sea $\xi_i = (L^t)^{-1}(\eta_i)$, para $i = 1, \dots, n$. Sean $\eta = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n$ y $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ y sean $F^* = \langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ y $E^* = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned} \eta \in \bar{L}^t(Z(L(K))) &\Leftrightarrow \xi \in Z(L(K)) \\ &\Leftrightarrow \text{area}(\pi_{E^*}(L(K)); \xi) \leq \kappa_n \\ &\Leftrightarrow \text{area}(\pi_{L^t(E^*)}(K); \bar{L}^t(\xi)) \leq \kappa_n \\ &\Leftrightarrow \text{area}(\pi_{F^*}(K); \eta) \leq \kappa_n \\ &\Leftrightarrow \eta \in ZK. \end{aligned}$$

Sean ahora $w_1, \dots, w_n \in V$ linealmente independientes y sea $v_i = L^{-1}(w_i)$, para $i = 1, \dots, n$. Sean $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ y $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Entonces:

$$\begin{aligned} w \in \Pi(L(K)) &\Leftrightarrow |\langle \xi, w \rangle| \leq 1, \quad \forall \xi \in Z(L(K)) \\ &\Leftrightarrow |\langle \xi, w \rangle| \leq 1, \quad \forall \xi \in \bar{L}^{t-1}(ZK) \\ &\Leftrightarrow |\langle \bar{L}^{-1^t}(\eta), w \rangle| \leq 1, \quad \forall \eta \in ZK \\ &\Leftrightarrow |\langle \eta, v \rangle| \leq 1, \quad \forall \eta \in ZK \\ &\Leftrightarrow v \in \Pi K \\ &\Leftrightarrow w \in \bar{L}(\Pi K). \end{aligned}$$

\square

Capítulo 3

Geometría de Minkowski

En este capítulo estudiaremos espacios vectoriales dotados de una norma, no proveniente (en general) de un producto escalar. La geometría minkowskiana tiene una importancia particular, ya que es un prerequisite básico para los espacios de Finsler. Además de introducir el concepto de noción de volumen (y de área), el cual volveremos a tratar con los espacios de Finsler, abordaremos como tema central el problema isoperimétrico.

Aunque en el capítulo §1 estudiamos pseudonormas generales, cuya bola unidad no tenía necesariamente simetría central, a partir de aquí consideraremos únicamente normas, aunque algunos de los resultados son válidos con más generalidad.

3.1. Espacios de Minkowski

3.1.1. Definiciones básicas.

Como ya vimos en el capítulo anterior, dado un espacio vectorial V y un cuerpo convexo centrado y simétrico K en V , se puede obtener a partir de K una norma para la cual K es la bola unidad y a la inversa.

Definición 3.1 Llamaremos espacio de Minkowski a un par $(V, \|\cdot\|)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita dotado de una norma $\|\cdot\|$.

Puesto que hay una equivalencia entre la norma y la bola unidad que esta define, usaremos indistintamente la notación $(V, \|\cdot\|)$ o (V, B) , siendo B la bola unidad para $\|\cdot\|$. En ocasiones, cuando sea obvio o cuando no sea necesario, no haremos referencia ni a la norma, ni a la bola unidad, y hablaremos tan sólo del espacio de Minkowski V , sobrentendiendo que viene acompañado de una norma. Además, supondremos que todos los cuerpos (incluyendo la esfera unidad definida por la norma del espacio) tiene un ciclo de referencia como frontera.

Definición 3.2 Dos espacios de Minkowski $(V_1, \|\cdot\|_1)$ y $(V_2, \|\cdot\|_2)$ se dicen isométricos si existe una isometría entre ellos, es decir, un isomorfismo $T : V_1 \rightarrow V_2$ que preserva las

las normas:

$$\|T(v)\|_2 = \|v\|_1 \quad \forall v \in V_1.$$

Si B_1 y B_2 son respectivamente la bola unidad de V_1 y V_2 , entonces V_1 y V_2 son isométricos *sii* existe un isomorfismo que transforma B_1 en B_2 . Esta idea nos sirve para estudiar las diferencias entre dos espacios de Minkowski de misma dimensión. Otra cuestión es ver si podemos cuantificar esas diferencias.

Consideremos ahora el espacio de aplicaciones lineales entre V_1 y V_2 , $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Este es a su vez un espacio vectorial y las normas de V_1 y V_2 inducen una norma en $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ que hace de este un espacio de Minkowski. Dicha norma viene dada por el funcional

$$\|T\| := \sup\{\|T(v)\|_2 : \|v\|_1 \leq 1\},$$

definición equivalente a la siguiente

$$\|T\| = \inf\{\epsilon > 0 : T(B_1) \subset \epsilon B_2\}.$$

Un hecho conocido es inmediato es que, si tenemos dos aplicaciones lineales $T : V_1 \rightarrow V_2$ y $S : V_2 \rightarrow V_3$, entonces

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|,$$

donde cada una de las normas es distinta a las demás, puesto que vienen inducidas, a priori, por normas diferentes.

Dados dos espacios vectoriales de misma dimensión V_1 y V_2 , consideremos el número

$$\Delta(V_1, V_2) := \inf\{\log(\|T\| \|T^{-1}\|) : T \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \text{ es un isomorfismo}\}. \quad (3.1)$$

Es fácil ver que esta es una aplicación no-negativa, simétrica y que cumple la desigualdad triangular, sin embargo, no define una distancia sobre el conjunto de espacios de Minkowski de dimensión prefijada: basta tomar dos espacios isométricos y considerar como isomorfismo T la isometría que los relaciona.

Un hecho relevante es que el ínfimo de la definición de Δ siempre es alcanzado¹, lo que no quiere decir que este ínfimo sea cero. Eso sí, el ínfimo será nulo, *i. e.* $\Delta(V_1, V_2) = 0$, si y sólo si V_1 y V_2 son isométricos. Si consideramos el ser isométricos como una relación de equivalencia y si consideramos el conjunto de clases que define dicha relación, entonces Δ sí es una distancia, la llamada distancia de *Banach-Mazur*.

Definición 3.3 Sea M_n el conjunto de espacios de Minkowski de dimensión n . Sea \sim la relación de equivalencia ser isométricos. Se llama espacio de clases de Minkowski de dimensión n al espacio métrico (\mathcal{M}_n, Δ) , donde $\mathcal{M}_n = M_n / \sim$ y la distancia Δ viene dada en (3.1).

Teorema 3.4 El espacio de clases de Minkowski (\mathcal{M}_n, Δ) es compacto y conexo.

¹Para más detalles, consultar [50].

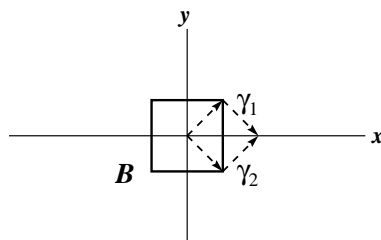


Figura 3.1: γ_1 y γ_2 son geodésicas uniendo los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$ para la norma ∞ .

3.1.2. Geodésicas.

La norma de un espacio de Minkowski es, desde otro punto de vista, una densidad de orden 1. Si c es una curva en un espacio de Minkowski $(V, \|\cdot\|)$, i. e. el rango de una aplicación derivable a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow V$, entonces el número

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

no depende ni de la parametrización de la curva ni de la orientación del espacio. Este número es la longitud de la curva c . Una pregunta natural es: ¿cuál es la curva (o curvas) que minimiza la distancia entre 2 puntos? He aquí la respuesta:

Teorema 3.5 *Sea V un espacio de Minkowski y sean $x, y \in V$. Denotemos \overline{xy} el segmento que une x con y . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ es una curva derivable a trozos que une x con y , entonces:*

$$\text{longitud}(\gamma) \geq \text{longitud}(\overline{xy}) = \text{dist}(x, y).$$

Demostración Basta tener en cuenta que toda curva derivable a trozos se puede aproximar por poligonales, curvas para las cuales la tesis es obvia gracias a la desigualdad triangular. \square

Así pues, las líneas rectas son geodésicas de los espacios de Minkowski. Otra cuestión es ver cuándo estas son únicas. Esto es cierto siempre y cuando $\|u + v\| < \|u\| + \|v\|$ para todo par de vectores no colineales o, equivalentemente, cuando la bola unidad es estrictamente convexa, el cual es el caso de los espacios de Minkowski que estudiamos. Como un contra ejemplo sencillo, se puede tomar la norma infinito y observar que no se tiene unicidad de las geodésicas tal y como se muestra en la figura 3.1.

Teorema 3.6 *Sea (V, B) un espacio de Minkowski cualquiera con B estrictamente convexo, entonces las geodésicas de V son las líneas rectas.*

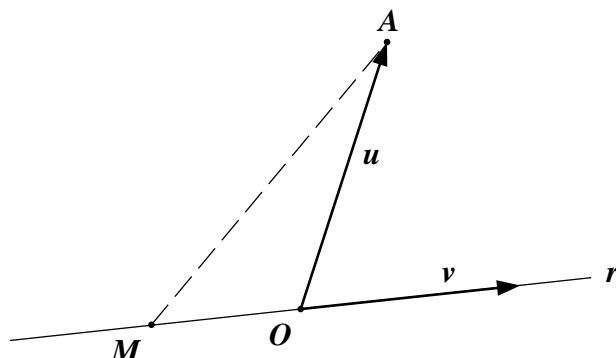


Figura 3.2: $u \dashv v \leftrightarrow d(A, H) \leq d(A, M)$ para todo $M \in r$.

3.1.3. Perpendicularidad.

Un problema que aparece cuando la norma del espacio vectorial no proviene de un producto escalar es definir el concepto de perpendicularidad, problema que ya hemos tratado en la sección 1.1.1. Para poder abstraer el papel que juega la norma en este concepto, haremos notar que dados 2 vectores u y v perpendiculares (en el sentido euclídeo), el módulo de u (como vector) coincide con la distancia que hay entre u (como punto) a la recta definida por v .

Definición 3.7 Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Minkowski. Dados dos vectores $u, v \in V$, se dice que u es perpendicular a v , denotado $u \dashv v$, si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\|u\| \leq \|\lambda v - u\|.$$

O de forma equivalente, si $\|u\| \leq \text{dist}(u, \langle v \rangle)$.

La notación empleada no es una cuestión sin importancia, puesto que se ha tomado así para poner de manifiesto que esta definición de perpendicularidad no es simétrica. Podemos encontrarnos casos en los que $u \dashv v$ y sin embargo no es cierto que $v \dashv u$. Aún así, esta definición generaliza la habitual, es decir:

$$u \perp v \Leftrightarrow u \dashv v \text{ y } u \vdash v.$$

Proposición 3.8 Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Minkowski, entonces:

- para todo $u \in V$, $0 \dashv v$ y $v \dashv 0$;
- dados $u, v \in V$, $u \dashv v \Leftrightarrow \lambda u \dashv \rho v$ para todo $\lambda, \rho \in \mathbb{R}$;
- dado $u \in V$, $u \dashv v$ para todo $v \in T_u \partial B$, siendo B la bola unidad de V .

La segunda propiedad nos permite definir la perpendicularidad entre dos rectas vectoriales. La tercera nos viene a decir que u es perpendicular al hiperplano tangente a la esfera unidad en u .

Definición 3.9 *En un espacio de Minkowski, una recta vectorial r es perpendicular a un subespacio afín H si r es perpendicular a toda recta vectorial $h' \subset H'$, siendo H' el espacio director asociado a H . Una recta afín, será perpendicular a un subespacio afín, si lo es la recta vectorial asociada.*

Notar que una recta r (vectorial o no) es perpendicular a un espacio afín H si y sólo si es perpendicular a toda recta afín incluida en él. Todo esto puede ser resumido en términos de la bola unidad de V : si r es vectorial, $r \perp H$ si y sólo si H es paralelo al hiperplano afín tangente a ∂B en $u \in r \cap \partial B$.

3.1.4. Curvas de Radon.

En un espacio de Minkowski (V, B) , sea r una recta vectorial. Si H es un hiperplano de soporte de B paralelo a r , entonces el vector $u \in H \cap B$ es perpendicular a r . Sea S_r el conjunto de puntos de ∂B obtenidos de esta manera, es decir, el conjunto

$$S_r := \{u \in \partial B : u \perp r \text{ y } r \parallel T_u \partial B\}.$$

Consideremos ahora la reunión C_r de rectas que pasan por el origen y cortan a S_r . Entonces, C_r es un cono con vértice en el origen que contiene a todas las rectas perpendiculares a r . La forma que tiene este cono es la que determina la simetría de la perpendicularidad en el espacio (V, B) .

Teorema 3.10 *En un espacio de Minkowski (V, B) , la perpendicularidad es una propiedad simétrica si y sólo si el cono C_r es plano y paralelo a $T_u \partial B$, donde $u \in r \cap \partial B$.*

Uno podría llegar a preguntarse si esto es siempre cierto para algún tipo de cuerpos convexos. La respuesta a esta pregunta para dimensión $n \geq 3$ fue dada por Blaschke:

Teorema 3.11 (Blaschke, [5]) *Sea (V, B) un espacio de Minkowski tal que, para toda recta vectorial r , C_r yace en un hiperplano; entonces la frontera de B es un elipsoide, i. e. la norma $\|\cdot\|_B$ proviene de un producto escalar.*

Así pues, para dimensiones mayores que 2, los únicos espacios de Minkowski para los cuales la perpendicularidad es una propiedad simétrica son aquellos en los que la esfera unidad es un elipsoide. Cuando tratamos el caso en que la dimensión es 2, la respuesta no es la misma. Por supuesto, los espacios con esfera unidad elipsoidal siguen teniendo simetría con respecto a la perpendicularidad, pero existen curvas convexas para las cuales esto sigue siendo cierto y, sin embargo, no son elipses. Dichas curvas son las llamadas *curvas de Radon*.

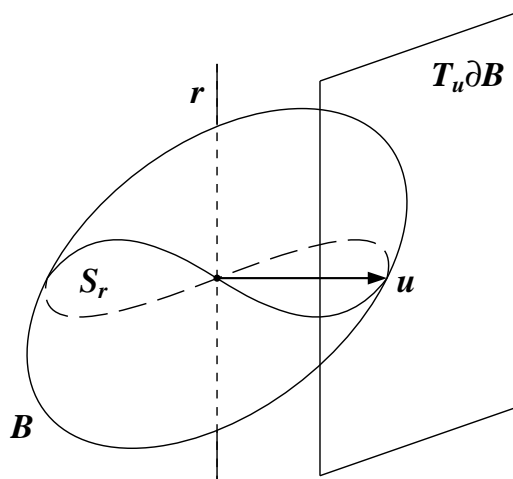


Figura 3.3: Para todo $u \in S_r$, r es paralelo a $T_u \partial B$.

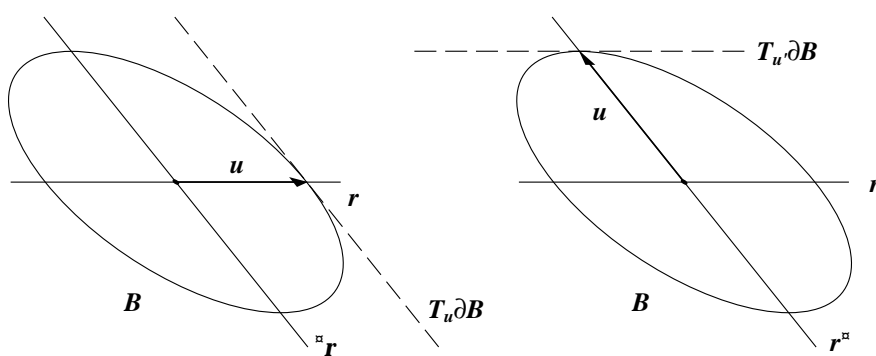


Figura 3.4: ${}^\perp r \parallel T_u \partial B$ y $r \dashv {}^\perp r$; $r \parallel T_u \partial B$ y $r^\square \dashv r$.

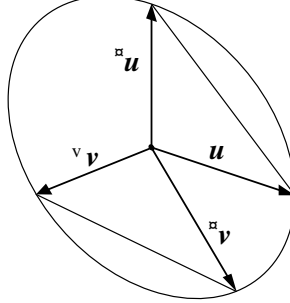


Figura 3.5: La curva ∂B tiene la propiedad triangular.

Definición 3.12 Dada una recta vectorial r en un espacio de Minkowski bidimensional, r^\perp y ${}^\perp r$ denotan las únicas rectas vectoriales tales que $r^\perp \dashv r$ y $r \dashv {}^\perp r$, respectivamente.

Definición 3.13 (Radon, [41]) Sea (V, B) un espacio de Minkowski bidimensional orientado, se dice que ∂B es una curva de Radon si $r^\perp = {}^\perp r$ para toda recta vectorial r . En este caso, se denota por r^\perp a la única recta vectorial perpendicular a r y a la cual r es perpendicular.

El ser una curva de Radon es un invariante afín y, puesto que la esfera euclídea S^1 es una curva de Radon, los elipses también lo son.

Definición 3.14 Sea (V, B) un espacio de Minkowski bidimensional, entonces

- dado $v \in \partial B$, ${}^\perp v$ denota el único vector tal que $v \dashv {}^\perp v$ y $(v, {}^\perp v)$ es una base positivamente orientada;
- análogamente, v^\perp denota el único vector tal que $v^\perp \dashv v$ y (v, v^\perp) es una base positivamente orientada;
- se dice que el círculo unidad ∂B tiene la propiedad triangular si el 2-vector $v \wedge {}^\perp v$ es constante para todo $v \in \partial B$;
- finalmente, se dice que ∂B tiene la propiedad triangular dual si el 2-vector $v \wedge v^\perp$ es constante para todo $v \in \partial B$;

Proposición 3.15 En un plano de Minkowski (V, B) , si el círculo unidad ∂B tiene la propiedad triangular, entonces $v^\perp = {}^\perp v$ para todo $v \in \partial B$.

Demostración En primer lugar, notar que, dado $v \in \partial B$, se tiene que

$${}^\perp(-v^\perp) = v.$$

Puesto que ∂B tiene la propiedad triangular,

$$\begin{aligned} v \wedge {}^\perp v &= (-v^\perp) \wedge {}^\perp(-v^\perp) \\ &= -v^\perp \wedge v \\ &= v \wedge v^\perp. \end{aligned}$$

Por tanto, $v^\perp - {}^\perp v$ es colineal a v . Por definición, v es paralelo a $T_{v^\perp}\partial B$, luego $v^\perp - {}^\perp v$

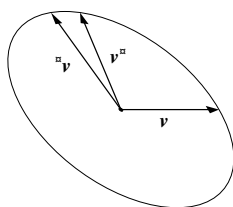


Figura 3.6: v^\perp y ${}^\perp v$ para $v \in \partial B$.

también. Así pues,

$${}^\perp v = v^\perp - (v^\perp - {}^\perp v) \in T_{v^\perp}\partial B$$

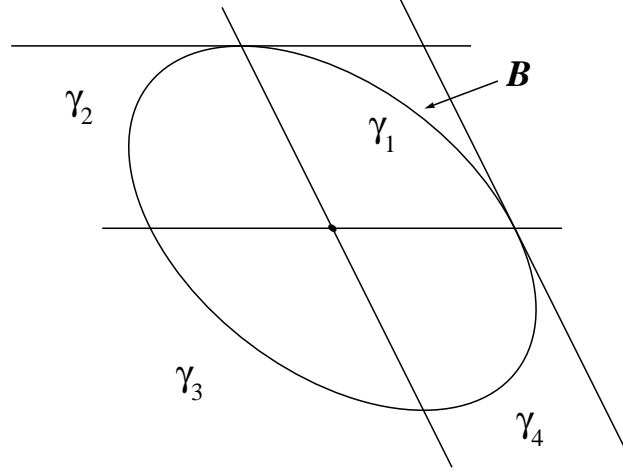
y necesariamente $v^\perp = {}^\perp v$, ya que ∂B es estrictamente convexo y $T_{v^\perp}\partial B$ es un hiperplano de soporte de ∂B . \square

Corolario 3.16 *El círculo unidad ∂B tiene la propiedad triangular si y sólo si tiene la propiedad triangular dual.*

Corolario 3.17 *Si ∂B tiene la propiedad triangular (o la dual), entonces es una curva de Radon.*

Demostrar esto ha sido relativamente sencillo. Aunque el recíproco también es cierto, se necesita un trabajo más elaborado. Sea (V, B) un espacio de Minkowski de dimensión 2 tal que ∂B es una curva de Radon. Dada una recta r pasando por el origen, r y r^\perp cortan a ∂B en cuatro arcos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 . Así, γ_1 y γ_3 son simétricos, al igual que γ_2 y γ_4 .

Lema 3.18 *Sea (V, B) un espacio de Minkowski de dimensión 2 tal que ∂B es una curva de Radon. Sean r y r^\perp dos rectas vectoriales cortando a ∂B en cuatro arcos: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 . La curva de Radon ∂B está completamente determinada por cualquiera de esos arcos, i. e. si C es una curva de Radon coincidente con ∂B en alguno de los cuatro arcos $\gamma_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $C = \partial B$.*

Figura 3.7: Descomposición de ∂B en 4 arcos simétricos 2 a 2.

Demostración Supongamos que ∂B y C coinciden en γ_1 . Por simetría, también coinciden en γ_3 . Razonando de igual manera, sólo nos hace falta probar que ∂B y C coinciden en γ_2 .

Para simplificar los cálculos, supongamos que $V = \mathbb{R}^2$ y que tanto ∂B como C están parametrizados por el ángulo de las coordenadas polares. Es decir, que la parametrización de ∂B es una aplicación $\delta : [0, 2\pi] \rightarrow \partial B$ de la forma

$$\delta(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

donde ρ es la aplicación radial de ∂B con respecto a S^1 . Entonces, la parametrización de C será una aplicación $\tilde{\delta} : [0, 2\pi] \rightarrow C$ de la forma

$$\tilde{\delta} = ((\rho + \lambda) \cos \theta, (\rho + \lambda) \sin \theta),$$

donde $\lambda : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación \mathcal{C}^∞ tal que $\lambda(0) = \lambda(2\pi)$.

Sean $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$ tales que $\delta(\theta_0)$ y $\delta(\theta_1)$ son los extremos de γ_1 y $\delta(\theta_1)$ y $\delta(\theta_2)$ son los extremos de γ_2 . Dado $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, sea el vector $u = \delta(\theta) = \tilde{\delta}(\theta)$ y consideremos la recta r dada por u . Entonces, existe $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$ tal que $\delta(\theta') \in r^\perp \cap \partial B$ y $\tilde{\delta}(\theta') \in r^\perp \cap C$. Así que $T_{\delta(\theta')} \partial B$ y $T_{\tilde{\delta}(\theta')} C$ son paralelos a r y, por tanto, paralelos entre sí. Luego, para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, se tiene que

$$\det(\delta'(\theta), \tilde{\delta}'(\theta)) = 0,$$

lo que implica que λ es una aplicación \mathcal{C}^∞ satisfaciendo en $[\theta_1, \theta_2]$ la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\lambda' = \frac{\rho'}{\rho} \lambda.$$

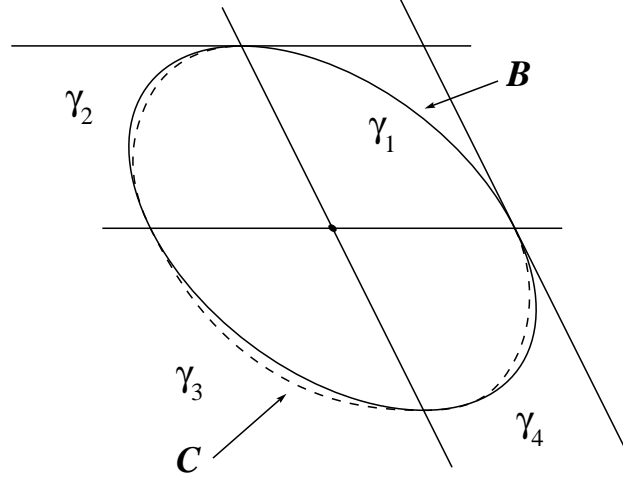


Figura 3.8: Curvas de Radon ∂B y C coincidentes en γ_1 .

Puesto que $\lambda(\theta_1) = 0$ y la solución trivial cumple la ecuación, por unicidad de la solución, $\lambda \equiv 0$ en $[\theta_1, \theta_2]$ y ∂B y C coinciden en γ_2 . \square

Sean r_1 y r_2 dos rectas afines de un espacio vectorial V que no contienen el origen y no son paralelas. Sean r'_1 y r'_2 su respectivas simetrías con respecto del origen. Estas cuatro rectas determinan un paralelogramo centrado. Sean ahora λ_1 y λ_2 las rectas vectoriales paralelas a r_1 y r_2 , respectivamente. Denotemos por A el punto de intersección entre r_1 y λ_2 y denotemos por B la intersección entre r_2 y λ_1 . Sea C una curva suave, cerrada, centrada, convexa y tangente a r_1 y r_2 en A y B , respectivamente. Y, finalmente, sea γ el arco más corto de C que une A con B .

Lema 3.19 *Con la notación anterior, existe una única curva \tilde{C} cerrada, centrada, convexa y de clase C^1 con la propiedad triangular² y tal que coincide con C en γ .*

Demostración Tomemos como base de V los vectores $e_1 = \overrightarrow{OA}$ y $e_2 = \overrightarrow{OB}$ y supongamos que la base (e_1, e_2) está positivamente orientada. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ una parametrización de γ , entonces $\alpha = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2$. Y sea $\delta : [a, b] \rightarrow V$ la función dada por:

$$\delta = \frac{1}{\det(\alpha, \alpha')} \cdot \alpha',$$

donde \det es el determinante con respecto a la base (e_1, e_2) . Esta función tiene como imagen un arco desde el punto B hasta el punto A' , el cual es el simétrico a A con

²Notar que una tal curva \tilde{C} confiere a V una estructura de espacio de Minkowski, por lo que tiene sentido hablar de perpendicularidad entre vectores y, por ende, de la propiedad triangular.

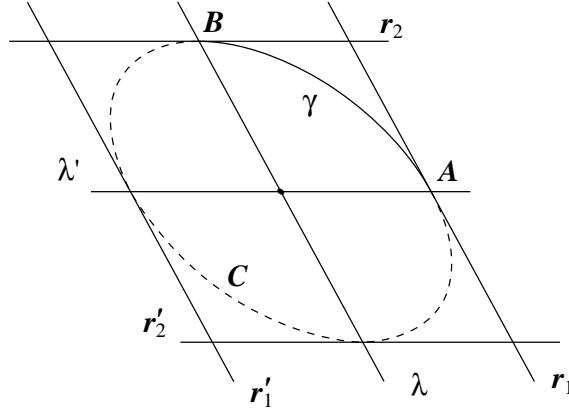


Figura 3.9: El arco γ determina una única curva con la propiedad triangular.

respecto al origen:

$$\begin{aligned}\delta(a) &= \frac{1}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} \cdot \alpha'(a) = \frac{\alpha'_2(a)}{\det(e_1, \alpha'_2(a) \cdot e_2)} \cdot e_2 = e_2, \\ \delta(b) &= \frac{1}{\det(\alpha(b), \alpha'(b))} \cdot \alpha'(b) = \frac{\alpha'_1(b)}{\det(e_2, \alpha'_1(b) \cdot e_1)} \cdot e_1 = -e_1.\end{aligned}$$

Sean ahora los arcos $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \delta([a, b])$ y sus respectivos simétricos γ_3 y γ_4 . Entonces, la curva buscada es $\tilde{C} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$. Por construcción, es obvio que \tilde{C} es centrada y simétrica. También por construcción, la curva \tilde{C} es claramente \mathcal{C}^1 , exceptuando en A , B y sus simétricos, en los que hay que verificarlo. Veámoslo en B : para que esto último sea cierto, el tangente a \tilde{C} en B por γ_1 y por γ_2 han de coincidir, es decir, se ha de cumplir que $\det(\alpha'(b), \delta'(a)) = 0$. Se puede comprobar que

$$\delta' = \frac{1}{\det(\alpha, \alpha')} \cdot \alpha'' - \frac{\det(\alpha, \alpha'')}{\det(\alpha, \alpha')} \cdot \delta,$$

luego

$$\begin{aligned}\det(\alpha'(b), \delta'(a)) &= \frac{\det(\alpha'(b), \alpha''(a))}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} - \frac{\det(\alpha(a), \alpha''(a))}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} \cdot \det(\alpha'(b), \delta(a)) \\ &= \frac{\det(\alpha'(b), \alpha''(a))}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} - \frac{\det(e_1, \alpha''(a))}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} \cdot \det(\alpha'_1(b) \cdot e_1, e_2) \\ &= \frac{\det(\alpha'(b), \alpha''(a))}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} - \frac{\det(\alpha'_1(b) \cdot e_1, \alpha''(a))}{\det(\alpha(a), \alpha'(a))} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos el resultado para A y, por simetría, para A' y B' .

Veamos ahora que se cumple la propiedad triangular. Sea $v \in \tilde{C}$, podemos suponer que $v \in \gamma_1$, pues los otros casos son análogos. Sea $t \in [a, b]$ tal que $v = \alpha(t)$. Entonces, $\alpha(t) \dashv \delta(t)$ en (V, \tilde{C}) y $(\alpha(t), \delta(t))$ es una base positivamente orientada, por tanto: ${}^\perp\alpha(t) = \delta(t)$ y

$$\begin{aligned} v \wedge {}^\perp v &= \alpha(t) \wedge \delta(t) \\ &= \det(\alpha(t), \delta(t)) \cdot e_1 \wedge e_2 \\ &= e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Así pues, tan sólo falta comprobar la unicidad. Sea \hat{C} una curva con las mismas propiedades que \tilde{C} . Observar que para las 3 nociones de perpendicularidad asociadas a C , \tilde{C} y \hat{C} , tenemos que el único vector cumpliendo la definición 3.14.a, con $v = \alpha(a)$, es $\alpha(b)$. Para $t \in [a, b]$, sea $\beta(t) \in \hat{C}$ el propio para $v = \alpha(t)$. Puesto que \hat{C} también tiene la propiedad triangular, existe una constante no nula $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(t) \wedge \beta(t) = \lambda e_1 \wedge e_2, \quad \forall t \in [a, b].$$

Por tanto, existe otra constante $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\delta(t) = \tilde{\lambda} \beta(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

Pero ya hemos visto que $\delta(a) = \beta(a) = \alpha(b)$, luego $\tilde{\lambda} = 1$, los arcos δ y β son idénticos y las curvas \tilde{C} y \hat{C} son la misma. \square

Ahora estamos en disposición de demostrar la equivalencia entre las curvas de Radon y las curvas con la propiedad triangular.

Proposición 3.20 *Si (V, B) es un plano de Minkowski tal que ∂B es una curva de Radon, entonces ∂B tiene la propiedad triangular.*

Demostración Sean r y r^\perp dos rectas perpendiculares pasando por el origen. Sea γ uno de los cuatro arcos en los que dividen a ∂B las dos rectas. Por el lema 3.19, existe una curva C con la propiedad triangular y que coincide con ∂B en γ . Pero, por tener la propiedad triangular, también es una curva de Radon. Luego, ∂B y C son dos curvas de Radon que coinciden en un cuadrante. Por tanto, gracias al lema 3.18, $\partial B = C$ y, por ello, ∂B tiene la propiedad triangular. \square

Corolario 3.21 *Sea (V, B) un espacio de Minkowski bidimensional, entonces ∂B es una curva de Radon si y solamente si tiene la propiedad triangular.*

3.2. Áreas y volúmenes en espacios de Minkowski

En un espacio euclídeo (V^n, \langle, \rangle) , hay una forma canónica de definir una densidad de volumen. Puesto que las densidades de orden máximo son todas iguales excepto por un factor constante, basta con fijar una normalización. Esto puede hacerse fijando un valor para un n -vector en particular. En el caso euclídeo, se toma la densidad que vale 1 sobre el n -vector $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, siendo (e_1, \dots, e_n) una base ortonormal de V .

Para un espacio de Minkowski, hay una laguna al respecto: no tenemos una tal base ortonormal y, por tanto, no existe una manera de definir canónicamente una densidad de volumen. Esto no quiere decir que no se pueda dar un sistema para hacerlo. Deberemos abstraernos nuevamente de la ligadura que crea el producto escalar y así dar una definición consistente que, por supuesto, deberá coincidir con el caso euclídeo. Busemann fue el primero en estudiar este problema en [13, 14], para después ser tratado por Holmes y Thompson en [31]. Otra referencia es, por supuesto, el libro del propio Thompson, [50], capítulo §5.

3.2.1. Definición axiomática.

El objetivo es definir un concepto universal de volumen. En primer lugar, si tratamos con espacios euclídeos queremos que nuestra definición de volumen coincida con la habitual. Por supuesto, también deseamos invariancia bajo isometrías. Otro punto importante es que si dos espacios de Minkowski no difieren mucho el uno del otro, entonces que tampoco lo hagan las formas de medir volúmenes en ellos. De forma global, lo que buscamos es una idea de volumen familiar y que respete las estructuras minkowskianas.

Definición 3.22 *Una noción de volumen en espacios de Minkowski corresponde a una manera de asignar a cada espacio de Minkowski (V, B) una densidad de volumen vol_B en V satisfaciendo los siguientes axiomas:*

- a. (Normalización) si B es un elipsoide, entonces vol_B es la densidad de volumen euclídea estándar;*
- b. (Linealización) si $T : (V, B) \rightarrow (V', B')$ es una isometría entre espacios de Minkowski, entonces $\text{vol}_B = T^* \text{vol}_{B'}$;*
- c. (Monotonía) si B y B' son dos cuerpos convexos centrados y cuadráticos en V tales que $B \subset B'$, entonces $\text{vol}_B \geq \text{vol}_{B'}$;*
- d. (Continuidad) la asignación de vol_B al espacio de Minkowski (V, B) ha de ser continua respecto de la distancia de Banach-Mazur, dada por la ecuación (3.3).*

El número real

$$\gamma_B := \text{volumen}(B) = \int_B \text{vol}_B$$

juega un papel importante. Debido al axioma de linealización, γ_B es un invariante isométrico. Además, este número determina la densidad vol_B :

Proposición 3.23 *Sea $v \in \Lambda^n V$ no nulo, entonces*

$$\text{vol}_B(v) = \frac{\gamma_B}{\text{vol}(B; v)}. \quad (3.2)$$

Demostración Sea $v_0 \in \Lambda^n V$ tal que $\text{vol}_B(v_0) = 1$, por definición

$$\text{vol}(B; v_0) = \int_B \text{vol}_B = \gamma_B,$$

es decir

$$\text{vol}_B(v_0) = \frac{\gamma_B}{\text{vol}(B; v_0)}.$$

Por homogeneidad obtenemos el resultado deseado. \square

El siguiente resultado da una definición equivalente de noción de volumen con respecto al invariante γ_B .

Proposición 3.24 *La asignación de un número real positivo γ_B a cada espacio de Minkowski (V, B) corresponde a una noción de volumen si y solamente si se cumple:*

- a. (Normalización) para todo elipsoide centrado $\varepsilon \subset V^n$, $\gamma_\varepsilon = \kappa_n$, donde κ_n es el volumen euclídeo de la bola unidad euclídea en \mathbb{R}^n ;
- b. (Linealización) si (V, B) y (V', B') son isométricos, $\gamma_B = \gamma_{B'}$;
- c. (Monotonía) si B y B' son dos cuerpos convexos centrados y cuadráticos en V tales que $B \subset B'$, entonces

$$\frac{\gamma_B}{\gamma_{B'}} \geq \frac{\text{vol}(B; \Phi)}{\text{vol}(B'; \Phi)},$$

donde Φ es una densidad de volumen cualquiera;

- d. (Continuidad) la aplicación $\gamma : (V, B) \in \mathcal{M}_n \mapsto \gamma_B \in \mathbb{R}_+$ es continua con respecto a la distancia de Banach-Mazur para todo $n \geq 1$.

La noción de volumen de Busemann.

La noción de volumen más natural (y más simple) es aquella para la cual γ_B es constante respecto de la norma una vez fijada la dimensión del espacio vectorial. Considerando esto, necesariamente

$$\gamma_B = \kappa_n,$$

donde κ_n es el volumen euclídeo de la bola unidad euclídea en \mathbb{R}^n .

Definición 3.25 Se llama noción de volumen de Busemann a la noción de volumen que asocia a cada espacio de Minkowski (V^n, B) la densidad de volumen (de Busemann)

$$\text{vol}_B^{\text{Bus}}(v) := \frac{\kappa_n}{\text{vol}(B; v)}, \quad \forall v \in \Lambda^n V. \quad (3.3)$$

El volumen de Busemann coincide con la medida de Hausdorff determinada por la métrica proveniente de la norma.

La noción de volumen de Holmes-Thompson.

Sea $\Omega : \Lambda^n V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma alternada, a partir de ella se puede definir una forma alternada Ω^* sobre $\Lambda^n V^*$ de la siguiente forma. Si $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ es una base de V^* y $\{v_1, \dots, v_n\}$ su dual,

$$\Omega^*(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n) := \frac{1}{\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)}, \quad (3.4)$$

definiéndose por cero su valor en el cero. Si vemos a Ω como un n -vector alternado $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$, entonces $\Omega^* = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, siendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ la base dual de $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Obviamente, existe la misma relación para las densidades de grado máximo.

Si consideramos la densidad de volumen dual a la de Busemann, obtenemos la densidad de volumen de Holmes-Thompson.

Definición 3.26 Se llama noción de volumen de Holmes-Thompson a la noción de volumen que asocia a cada espacio de Minkowski (V^n, B) la densidad de volumen (de Holmes-Thompson)

$$\text{vol}_B^{\text{HT}}(v) := \frac{\text{vol}(B^*; v)}{\kappa_n}, \quad \forall v \in \Lambda^n V. \quad (3.5)$$

Notar que $\text{vol}_B^{\text{Bus}}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = (\text{vol}_B^{\text{HT}}(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n))^{-1}$ cuando $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ es la base dual de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$, lo que equivale a decir que

$$\text{vol}(B; v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \cdot \text{vol}(B^*; \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n) = \kappa_n^2.$$

Por otra parte, para que una noción de volumen coincida con la noción de Holmes-Thompson o para que la dual coincida con la de Busemann, ha de ocurrir, en virtud de la ecuación (3.2), que

$$\gamma_B = \frac{\text{vol}(B; v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \cdot \text{vol}(B^*; \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n)}{\kappa_n},$$

para todo cuerpo convexo y centrado B .

También a partir de (3.2), se puede observar que el siguiente producto es constante:

$$\text{vol}(B; v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \cdot \text{vol}(B^*; \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n) = \gamma_B \cdot \gamma_{B^*}.$$

Dicho producto es un invariante lineal de gran importancia para la geometría convexa.

Definición 3.27 Sea (V, B) un espacio de Minkowski y sea Φ una densidad cualquiera de orden máximo, se llama volumen producto del cuerpo convexo B al número

$$\text{vp}(B) = \text{vol}(B; \Phi) \cdot \text{vol}(B^*; \Phi^*).$$

Teorema 3.28 (Desigualdad de Blaschke-Santaló) Para un espacio de Minkowski cualquiera (V, B) de dimensión n , se tiene que

$$\text{vp}(B) \leq \kappa_n^2.$$

Además, la igualdad se alcanza si y sólo si B es un elipsoide.

Para una demostración, consultar [25]. Un resultado inmediato que se obtiene a partir de la desigualdad de Blaschke-Santaló y las definiciones correspondientes es el siguiente:

Corolario 3.29 Dado espacio de Minkowski (V, B) , se tiene que la densidad de volumen de Holmes-Thompson es más pequeña que la densidad de Busemann y coinciden si y sólo si B es un elipsoide.

3.2.2. La noción de área.

Con el objetivo de medir k -áreas, con $1 \leq k \leq n - 1$, en un espacio de Minkowski (V^n, B) , daremos también una definición axiomática.

Definición 3.30 Una noción de k -área, con $1 \leq k \leq n - 1$, para espacios de Minkowski de dimensión n , corresponde a una manera de asignar a cada espacio de Minkowski (V, B) una k -densidad positiva area_B^k en V satisfaciendo los siguientes axiomas:

- (Normalización) si B es un elipsoide, entonces area_B^k es la k -densidad euclídea estándar;
- (Linealización) si $T : (V, B) \rightarrow (V', B')$ es una isometría entre espacios de Minkowski, entonces $\text{area}_B^k = T^* \text{area}_{B'}^k$;
- (Monotonía) si B y B' son dos cuerpos convexos centrados y cuadráticos en V tales que $B \subset B'$, entonces $\text{area}_B^k \geq \text{area}_{B'}^k$;
- (Continuidad) la asignación de area_B^k al espacio de Minkowski (V, B) ha de ser continua respecto de la distancia de Banach-Mazur.

Nota 3.31 Toda noción de 1-área debe coincidir con la norma.

Recordar que si doy una k -densidad en un espacio de vectorial V^n , entonces también estoy dando una densidad de orden máximo en cada subespacio k -dimensional de V . Por tanto, una noción de k -área sobre un espacio de Minkowski (V, B) induce una noción de volumen en cada subespacio k -dimensional $E \subset V$ con las estructura de espacio de Minkowski dada por el cuerpo convexo $B \cap E$. Esto se ha de entender de la siguiente forma, si $v_1, \dots, v_k \in E$, entonces

$$\text{vol}_{B \cap E}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \text{area}_B^k(v_1 \wedge \dots \wedge v_k).$$

El recíproco también es cierto.

Proposición 3.32 *Sea vol una noción de volumen sobre \mathcal{M}_k , con $1 \leq k \leq n-1$. Sea area^k la aplicación definida sobre \mathcal{M}_n que a cada espacio de Minkowski (V, B) le asocia la k -densidad dada por*

$$\text{area}_B^k(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \text{vol}_{B \cap \langle v_1, \dots, v_k \rangle}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k),$$

para todo $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda_d^k V$. Entonces, area^k es una noción de k -área sobre \mathcal{M}_n .

Gracias a esto, podemos dar fácilmente dos ejemplos de nociones de área:

La noción de área de Busemann.

La noción de volumen de Busemann induce una noción de k -área sobre \mathcal{M}_n .

Definición 3.33 *Sea llama noción de k -área de Busemann, para $1 \leq k \leq n-1$, a la noción de k -área que asocia a cada espacio de Minkowski (V, B) la k -densidad definida por*

$$\text{area}_B^{k\text{-Bus}}(v) := \frac{\kappa_k}{\text{vol}(B \cap E; v)},$$

para todo vector descomponible $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda_d^k V$, siendo $E = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Cuando $k = 1$, $\kappa_1 = 2$ y

$$\text{vol}(B \cap \langle v \rangle; v) = \frac{2}{\|v\|_B};$$

luego,

$$\text{area}_B^{1\text{-Bus}}(v) = \|v\|_B.$$

Acabamos de ver que en el caso $k = 1$, la 1-densidad de área de Busemann coincide con la norma.

Se desprende de la definición que la noción de k -área de Busemann es la única noción de k -área para la cual todas las secciones de B con k -planos vectoriales tienen la misma

área, κ_k . Un caso interesante y que ya hemos visto es el caso $k = n - 1$. En general, una $(n - 1)$ -densidad ϕ de V está determinada por el cuerpo centrado y estrellado

$$\mathcal{B} = \{v \in \Lambda^{n-1}V : \phi(v) \leq 1\}.$$

En el caso particular de la $(n - 1)$ -densidad de área de Busemann,

$$\mathcal{B} = \{v \in \Lambda^{n-1}V : \text{vol}(B \cap E; v) \geq \kappa_{n-1}\}.$$

Si recordamos la definición 2.31, identificaremos el conjunto anterior como el cuerpo intersección de B y, como ya vimos, este es un cuerpo convexo y centrado de $\Lambda^{n-1}V$.

La noción de área de Holmes-Thompson.

De igual forma, la noción de volumen de Holmes-Thompson induce una noción de k -área sobre \mathcal{M}_n .

Definición 3.34 Sea llama noción de k -área de Holmes-Thompson, para $1 \leq k \leq n - 1$, a la noción de k -área que asocia a cada espacio de Minkowski (V, B) la k -densidad definida por

$$\text{area}_B^{k-HT}(v) := \frac{\text{vol}((B \cap E)^*; v)}{\kappa_k},$$

para todo vector descomponible $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda_d^k V$, siendo $E = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Repitiendo el proceso seguido para la noción de k -área Busemann, se puede ver que en el caso $k = 1$, la noción de 1-área de Holmes-Thompson coincide con la norma asociada a B . Para ver que en el caso $k = n - 1$ el cuerpo estrellado \mathcal{B} es en realidad un cuerpo convexo requiere un poco más de trabajo.

Proposición 3.35 Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $K \subset V$ un cuerpo convexo y centrado. Si E es un subespacio vectorial de V , entonces

$$\pi_E(K^*) = (B \cap E)^*$$

Demostración Sea $\xi \in \pi_E(K^*)$, existe $\eta \in K^*$ tal que $\eta|_E = \xi$. Tenemos entonces que dado $v \in K \cap E$

$$|\langle \xi, v \rangle| = |\langle \eta, v \rangle| \leq 1,$$

luego $\xi \in (K \cap E)^*$.

Para demostrar la inclusión contraria, dado $\xi \in (B \cap E)^*$, debemos encontrar un subespacio $F \subset V$ complementario a E tal que si tomamos $\eta \in V^*$ cumpliendo que $\eta|_E = \xi$ y $\eta|_F = 0^3$, entonces $|\langle \eta, v \rangle| \leq 1$ para todo $v \in K$. Sea $u \in \partial K \cap E$ tal que

³Notar que el covector η existe, basta definir una aplicación con las propiedades mencionadas y extenderlo por linealidad.

$\ker \xi$ es paralelo a un hiperplano de soporte de $K \cap E$ en u , sea h_1 dicho hiperplano y sea h_2 su simétrico. Entonces h_1 y h_2 definen una banda en E , llamémosla b , donde $|\xi|$ está acotado por 1.

Por otra parte, si $v \in V$ existe una única descomposición $v = v' + v''$ con $v' \in E$ y $v'' \in F$. Sea $p : V \rightarrow E$ tal que $p(v) = v'$. La aplicación p no es más que la proyección sobre E en la dirección de F . Pues bien, el subespacio F buscado tiene que ser tal que $p(v)$ caiga en b para todo $v \in K$, puesto que en ese caso $|\langle \eta, v \rangle| = |\langle \eta, v' \rangle| \leq 1$ para todo $v \in K$. Sea H_1 el hiperplano de soporte de K en u con $h_1 \subset H_1$ y sea H_2 el simétrico. Al igual que antes, H_1 y H_2 definen una banda en V , B . Dicha banda cumple que $K \subset B$ y $b = B \cap E$. Si tomamos F un complementario de E paralelo a H_1 , tenemos que $p(v) \in b$ para todo $v \in B$, en particular para $v \in K$. \square

Gracias a esta proposición y recordando la definición 2.35, podemos observar que en el caso $k = n - 1$, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{v \in \Lambda^{n-1}V : \text{vol}(B \cap E; \xi) \leq \kappa_{n-1}\}$$

es el dual del cuerpo proyección de B^* , i. e. $\mathcal{B} = ZB^*$, el cual es un cuerpo convexo centrado de $\Lambda^{n-1}V$.

Nuevamente, la desigualdad de Blaschke-Santaló (teorema 3.28) nos ofrece una comparación entre las dos nociones de área vistas.

Corolario 3.36 *Sea (V, B) un espacio de Minkowski de dimensión n . Para todo $1 \leq k \leq n - 1$, se tiene que*

$$\text{area}_B^{k-HT} \leq \text{area}_B^{k-Bus},$$

teniéndose la igualdad para todo k si y sólo si (V, B) es euclídeo.

Demostración Supongamos que la igualdad se alcanza para un determinado k , la desigualdad de Blaschke-Santaló nos dice que toda sección de B con un k -plano pasando por el origen es un elipsoide de dimensión k . Pero, es un echo conocido que si B es un cuerpo convexo centrado tal que para toda sección de B con un k -plano vectorial, con $2 \leq k \leq n - 1$, es un elipsoide, entonces B es un elipsoide. \square

3.3. El problema isoperimétrico

Este es un problema ya muy antiguo, del que una de las primeras constancias históricas es el caso particular llamado problema de la reina Dido. En su forma general, el enunciado es el siguiente: *entre todas los cuerpos convexos C^∞ de área prefijada, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?*

La solución a este problema es el llamado *isoperimétrico*, un cuerpo convexo y centrado que maximiza el volumen que contiene, fijado el área de su superficie. En espacios de Minkowski, el problema fue tratado por Busemann utilizando justamente las nociones

de área y volumen de Busemann. En [11] tenemos su estudio para el plano y en [12] la generalización para dimensiones cualesquiera. Puesto que en un espacio de Minkowski, todas las nociones de volumen son iguales excepto por un factor constante, la solución al problema isoperimétrico no depende tanto de la noción de volumen elegida como de la noción de área.

El objetivo de esta sección es dar una solución general al problema isoperimétrico en espacios de Minkowski. Es más, vamos a construir explícitamente un conjunto y demostrar que dicho conjunto es en realidad el isoperimétrico.

Teorema 3.37 *Sea V un espacio de Minkowski de dimensión n . Supongamos que la noción de volumen en V viene dada por una n -forma Ω y supongamos que ω es una $(n-1)$ -densidad positiva en V tal que*

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1}V : \omega(v) \leq 1\}$$

es \mathcal{C}^∞ y cuadráticamente convexo. Entonces, el cuerpo convexo, centrado y \mathcal{C}^∞

$$I := (i_\Omega(\mathcal{B}))^* \subset V \tag{3.6}$$

es el isoperimétrico para las nociones de volumen y área dadas en V , i. e. para cualquier otro cuerpo convexo, centrado y \mathcal{C}^∞ $K \subset V$ tal que $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$, tenemos

$$\text{volumen}(K) \leq \text{volumen}(I).$$

La prueba de este teorema se basa en la desigualdad de *Brunn-Minkowski*. Empezaremos presentando los elementos básicos de la teoría de Brunn-Minkowski.

3.3.1. La desigualdad de Brunn-Minkowski

La teoría de Brunn-Minkowski ocupa una posición fundamental en la teoría de cuerpos convexos. Sus técnicas, resultados y desigualdades constituyen hoy en día el núcleo de esta teoría.

Teorema 3.38 (La desigualdad de Brunn-Minkowski) *Sean K y L dos cuerpos convexos centrados de un mismo espacio vectorial de dimensión n . Entonces, dados α y β positivos, se tiene*

$$\text{vol}(\alpha K + \beta L)^{1/n} \geq \alpha \cdot \text{vol}(K)^{1/n} + \beta \cdot \text{vol}(L)^{1/n},$$

donde los volúmenes son obtenidos a partir de una densidad de volumen cualquiera. Además, se establece la igualdad si y sólo si K y L son homotéticos.

Consultar el libro de Burago y Zalgaller, [10], o bien el de Schneider, [46], para una demostración. En [25], Gardner da una interpretación geométrica de la desigualdad.

Teorema 3.39 (Volúmenes mixtos de Minkowski) Sea V un espacio de Minkowski con una noción de volumen. Sean K_1, \dots, K_r cuerpos convexos y centrados de V y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ números positivos. Entonces, $\text{vol}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r)$ es un polinomio homogéneo de grado n en las variables $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Más concretamente, existen unos números $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ con $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq r$ tales que

$$\text{vol}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^r \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}). \quad (3.7)$$

Los coeficientes $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ se llaman⁴ volúmenes mixtos de Minkowski.

Teorema 3.40 (Fórmula de polarización para volúmenes mixtos) Bajo las mismas hipótesis, el volumen mixto de n cuerpos convexos $K_1, \dots, K_n \subset V^n$, puede ser obtenido mediante la siguiente fórmula

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \left((-1)^{n+j} \sum_{i_1 < \dots < i_j} \text{vol}(K_{i_1} + \dots + K_{i_j}) \right).$$

De aquí se desprenden estas dos propiedades:

- a. para un cuerpo convexo K cualquiera, $V(K, \dots, K) = \text{vol}(K)$;
- b. los volúmenes mixtos son siempre no-negativos.

De ahora en adelante, adoptaremos la siguiente notación: si K y B son dos cuerpos convexos, definimos

$$V(K[n-1], B) := V(\overbrace{K, \dots, K}^{n-1 \text{ veces}}, B).$$

Corolario 3.41 Sean K y B dos cuerpos convexos de V^n y sea $\epsilon > 0$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \epsilon B) - \text{vol}(K)}{\epsilon} = nV(K[n-1], B).$$

Demostración Por el teorema 3.39,

$$\text{vol}(K + \epsilon B) = V(K, \dots, K) + nV(K[n-1], B)\epsilon + o(\epsilon^2).$$

□

Veamos ahora una consecuencia trivial de la desigualdad de Brunn-Minkowski, consecuencia que es equivalente a dicha desigualdad (ver [25]).

⁴Notar que podemos suponer sin pérdida de generalidad que dichos coeficientes son simétricos con respecto a sus argumentos y que, por tanto, son determinados unívocamente por la descomposición polinomial dada en (3.7).

Corolario 3.42 (Primera desigualdad de Minkowski) Sean K y B dos cuerpos convexos de V^n , entonces

$$V(K[n-1], B)^n \geq \text{vol}(K)^{n-1} \text{vol}(B), \quad (3.8)$$

alcanzándose la igualdad si y sólo si K y B son homotéticos.

Demostración Sea $\epsilon > 0$, por el teorema 3.38

$$\begin{aligned} \text{vol}(K + \epsilon B) &\geq (\text{vol}(K)^{1/n} + \epsilon \cdot \text{vol}(B)^{1/n})^n \\ &= \text{vol}(K) + n\epsilon \cdot \text{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}} \text{vol}(B)^{\frac{1}{n}} + o(\epsilon^2). \end{aligned}$$

El resultado se obtiene aplicando el corolario anterior. \square

3.3.2. El principio de Cavalieri

Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Sean Ω una n -forma y ω una $(n-1)$ -densidad positiva tal que la bola unidad

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1}V : \omega(v) \leq 1\}$$

tiene como frontera un ciclo de referencia. Sea el cuerpo convexo y centrado

$$I := (i_\Omega(\mathcal{B}))^* \subset V,$$

donde i_Ω es el isomorfismo canónico entre $\Lambda^{n-1}V$ y V^* dado por Ω . Al igual que \mathcal{B} , I también tiene por frontera un ciclo de referencia. Consideremos ahora la estructura de espacio de Minkowski de (V, I) .

Definición 3.43 Sea $K \subset V$ un cuerpo convexo y centrado. Sea E un subespacio vectorial de dimensión $n-1$ de V . Dado $v \in V$, se llama altura de v con respecto a E a la distancia entre v y E , esto es el valor

$$H_E^K(v) := \inf\{\|v - u\|_K : u \in E\}.$$

Cuando no haya lugar a confusión, denotaremos la función altura por H_E o simplemente por H .

Proposición 3.44 Con la notación anterior, dado $\xi \in \partial K^*$ con $\ker \xi = E$, se tiene

$$H_E^K(v) = |\langle \xi, v \rangle|, \quad \forall v \in V.$$

Demostración Dado $v \in V$, sea $u \in E$, entonces

$$\begin{aligned} |\xi(v)| &= |\langle xi, v - u \rangle| \\ &= |\langle v - u, \xi \rangle| \\ &\leq \sup_{\eta \in K^*} |\langle v - u, \eta \rangle| \\ &= h_{K^*}(v - u) \\ &= \|v - u\|_K, \end{aligned}$$

donde h_{K^*} es la función de soporte con respecto a K^* , luego $|\langle xi, v \rangle| \leq H(v)$.

Por otra parte, sea $u \in \partial K$ tal que $T_u \partial K$ es paralelo a E . Puesto que $V = \langle v \rangle \oplus E$, existe una única descomposición del tipo $v = \lambda u + v'$ con $v' \in E$. Gracias al corolario 1.15, tenemos

$$|\langle xi, v \rangle| = |\lambda \langle xi, u \rangle + \langle xi, v' \rangle| = \lambda,$$

luego $|\langle xi, v \rangle| = \|v - v'\| \geq H(v)$. \square

En la demostración anterior hemos obtenido $v = \pm H_E^K(v) \cdot u + v'$, más concretamente $v = H_E^K(v) \cdot u + v'$ si u y v pertenecen al mismo semiespacio definido por E .

Proposición 3.45 Con la misma notación, dados $v_1, \dots, v_{n-1}, u \in V$, se tiene

$$|\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u)| = \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) \cdot H_{\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle}^K(u), \quad (3.9)$$

siendo ω la $(n-1)$ -densidad asociada a $i_{\Omega}^{-1}(\partial K^*)$.

Demostración Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el sistema de vectores $\{v_1, \dots, v_{n-1}, u\}$ es linealmente independiente. Denotemos por E el subespacio vectorial $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$. Sea $u_0 \in \partial K$ tal que $T_{u_0} \partial K$ es el hiperplano de soporte paralelo a E más cercano a u . Entonces, $u = H(u) \cdot u_0 + u'$, para cierto $u' \in E$. Así pues,

$$|\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u)| = |\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u_0)| \cdot H(u).$$

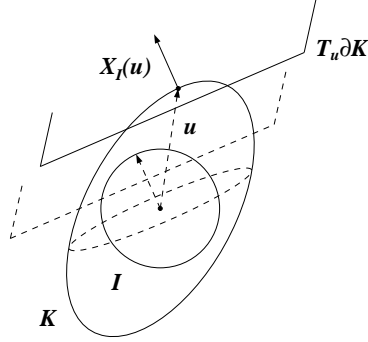
Gracias al lema 2.23, $|\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u_0)| = \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1})$, de donde se obtiene el resultado. \square

Definición 3.46 Dado un cuerpo convexo centrado y suave de V , se llama campo I -normal sobre ∂K al campo vectorial X_K^I que a cada vector $u \in \partial K$ le asigna el único vector $X_K^I(u) \in \partial I$ tal que $T_u \partial K$ es paralelo a $T_{X_K^I(u)} \partial I$ y tal que, en u , $X_K^I(u)$ apunta hacia fuera de K .

Lema 3.47 Con la notación descrita, en ∂K

$$|\Omega|_{X_K^I} = \omega,$$

considerando las densidades anteriores como densidades diferenciables de ∂K .

Figura 3.10: Campo vectorial I -normal sobre ∂K .

Demostración El resultado es trivial a partir del lema 3.45 y viendo que para todo $u \in \partial K$,

$$H_{T_u \partial K}^I(X_K^I(u)) = 1.$$

□

Sea K un cuerpo convexo centrado de clase C^∞ y X_K^I el campo I -normal sobre K , entonces para todo $\epsilon \geq 0$ y para todo $u \in \partial K$, tenemos que $u + \epsilon X_K^I(u) \in \partial(K + \epsilon I)$ y que el I -normal $X_{K+\epsilon I}^{K+\epsilon I}(u + \epsilon X_K^I(u))$ sobre $\partial(K + \epsilon I)$ en $u + \epsilon X_K^I(u)$, coincide con el I -normal $X_K^I(u)$ sobre ∂K en u .

Proposición 3.48 (El principio de Cavalieri) Para todo cuerpo convexo centrado y suave K de V y para cualquier $\epsilon \geq 0$,

$$\text{vol}(K + \epsilon I) - \text{vol}(K) = \int_0^\epsilon \text{area}(\partial(K + rI)) dr.$$

Demostración Recordemos que la noción de volumen en V venía dada por Ω ,

$$\text{vol}(K + \epsilon I) - \text{vol}(K) = \int_{(K+\epsilon I) \setminus K} |\Omega|.$$

Definamos pues la región $\Gamma = \text{interior}((K + \epsilon I) \setminus K)$ y consideremos las coordenadas dadas por la aplicación $j : \partial K \times]0, \epsilon[\rightarrow \Gamma$ con

$$j(u, r) = u + r \cdot X(u), \quad \forall (u, r) \in \partial K \times]0, \epsilon[,$$

donde $X = X_K^I$ es el campo I -normal sobre ∂K . Consideremos también la familia de aplicaciones $j_r := j(u, r)$ con $r \in]0, \epsilon[$. Notad que j es un difeomorfismo entre $\partial K \times]0, \epsilon[$ y Γ , al igual que j_r lo es entre ∂K y $\partial(K + rI)$; además,

$$Dj_{(u,r)}(v, \alpha) = v + rDX_u(v) + \alpha \cdot X(u) \quad \text{y} \quad Dj_{ru}(v) = v + rDX_u(v).$$

Dado un punto $u \in \partial K$, sea $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base de $T_u \partial K$ y sea $\{V_1, \dots, V_n\}$ la base de $T_{(u,r)}(\partial K \times]0, \epsilon[)$ dada por $V_i = (v_i, 0)$ y $V_n = (0, 1)$. Tenemos entonces, aplicando el lema 3.47,

$$\begin{aligned} j^*|\Omega|(V_1 \wedge \dots \wedge V_n) &= |\Omega|(Dj_r(v_1) \wedge \dots \wedge Dj_r(v_{n-1}) \wedge X(u)) \\ &= \omega(Dj_r(v_1) \wedge \dots \wedge Dj_r(v_{n-1})) \\ &= j_r^* \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) \\ &= (j_r^* \omega \star |dr|)(V_1 \wedge \dots \wedge V_n). \end{aligned}$$

Puesto que $j^*|\Omega|$ y $j_r^* \omega \star |dr|$ son densidades de orden máximo que coinciden en una base, han de ser idénticas. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(K + \epsilon I) - \text{vol}(K) &= \int_{\Gamma} |\Omega| \\ &= \int_{K \times]0, \epsilon[} j_r^* \omega \star |dr| \\ &= \int_0^\epsilon \left(\int_{\partial K} j_r^* \omega \right) dr \\ &= \int_0^\epsilon \left(\int_{\partial(K+rI)} \omega \right) dr \\ &= \int_0^\epsilon \text{area}(\partial(K+rI)) dr. \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de Fubini. □

Corolario 3.49 (Primera fórmula de Steiner) *Para cualquier cuerpo convexo, centrado y suave $K \subset V$, se tiene*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \epsilon I) - \text{vol}(K)}{\epsilon} = \text{area}(\partial K).$$

Corolario 3.50 *Dado un cuerpo convexo, centrado y suave K de un espacio vectorial V de dimensión n ,*

$$\text{area}(\partial K) = nV(K[n-1], I).$$

3.3.3. La demostración de la desigualdad isoperimétrica.

Demostración del Teorema 3.37. Supongamos que $K \subset V$ es un cuerpo convexo centrado de clase \mathcal{C}^∞ tal que $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$. Por el corolario 3.50 y la desigualdad de Minkowski (3.8),

$$\left(\frac{\text{area}(\partial K)}{n} \right)^n = V(K[n-1], I)^n \geq \text{vol}(K)^{n-1} \text{vol}(I).$$

Por el mismo corolario,

$$\text{area}(\partial I) = nV(I[n-1], I) = n\text{vol}(I).$$

Luego,

$$\text{vol}(I)^n \geq \text{vol}(K)^{n-1}\text{vol}(I)$$

y por tanto $\text{vol}(I) \geq \text{vol}(K)$. □

3.3.4. El isoperimétrico y la bola unidad.

Proposición 3.51 *Sea (V, B) un espacio euclídeo de dimensión n (i. e. B es un elipsoide). Consideremos sobre V una noción de volumen y una noción de $(n-1)$ -área, entonces el isoperimétrico es la bola unidad.*

Demostración Sea Ω la n -forma euclídea (i. e. $\Omega(u_1, \dots, u_n) = 1$ para cualquier base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$). Sea ω la $(n-1)$ -densidad euclídea (i. e. $\omega(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}) = 1$ para cualquier sistema de vectores ortonormales $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$). Sea

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1}V : \omega(v) \leq 1\},$$

tenemos que demostrar entonces que $B^* = i_\Omega(\mathcal{B})$.

Dado $\xi \in \mathcal{B}^*$, sea $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = i_\Omega^{-1}(\xi)$. Sea $u \in \partial B$ y sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortogonal de V tal que $\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Por una parte existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda_1 n_1 \wedge \dots \wedge n_n$ y por otra existe una única descomposición $u = \lambda_2 \cdot u_n + u'$ con $u' \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle$, además $|\lambda_2| \leq 1$. Se deduce de esto que

$$\begin{aligned} |\langle xi, u \rangle| &= |\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u)| \\ &= |\lambda_1 \lambda_2| \cdot |\Omega(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} \wedge u_n)| \\ &\leq |\lambda_1| \\ &= |\lambda| \cdot \omega(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1}) \\ &= \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Así pues, $|\langle xi, u \rangle| \leq 1$ para todo $u \in \partial B$ y, por tanto, $\xi \in B^*$.

Recíprocamente, sea $\xi \in B^*$ y sea $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = i_\Omega^{-1}(\xi)$. Si tomamos $u \in \partial B$ ortogonal a $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ y razonamos como antes, llegamos a que

$$\omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = |\langle xi, u \rangle| \leq 1,$$

luego $\xi \in i_\Omega(\mathcal{B})$. □

Dada una noción de área, ¿para que cuerpos convexos $B \subset V$, el isoperimétrico es homotético a B ? Busemann fue el primero que consideró este problema, haciéndolo para la noción de área de Busemann, [18]. Así mismo, Holmes y Thompson estudiaron el problema para las nociones que ellos definieron. Esta cuestión en su forma general está lejos de ser trivial y, hoy en día, sigue abierta. Ahora daremos unas caracterizaciones para ambas nociones que nos responden en cierto grado a este problema.

Dado $u \in \partial B$, denotemos por $E(u)$ al hiperplano vectorial paralelo a $T_u \partial B$. Con esto, es fácil ver que $H_{E(u)}^I(u) = |\langle \xi, u \rangle|$, donde $\xi \in \partial I^*$ y $\ker \xi = E(u)$.

Lema 3.52 *Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski y sea I el isoperimétrico asociado a unas nociones de volumen y de $(n-1)$ -área determinadas. Entonces, dado $\lambda \geq 0$, $B = \lambda I$ si y solamente si $H_{E(u)}(u) = \lambda$, para todo $u \in \partial B$.*

Demostración De la definición de la función de altura, está claro que $H_{E(v)}(v) = 1$, para todo $v \in \partial I$. Notar también que dado $u \in \partial B$, $E(u) = E(\lambda^{-1}u)$. Luego,

$$\begin{aligned} H_{E(u)}(u) = \lambda \quad \forall u \in \partial B &\Leftrightarrow H_{E(\lambda^{-1}u)}(\lambda^{-1}u) = H_{E(\lambda^{-1}u)}(\lambda^{-1}u) = 1 \quad \forall u \in \partial B \\ &\Leftrightarrow u \in \lambda \partial I \quad \forall u \in \partial B, \end{aligned}$$

$$H_{E(u)}(u) = \lambda H_{E(\lambda^{-1}u)}(\lambda^{-1}u) = \lambda,$$

tal y como queríamos demostrar. \square

Lema 3.53 *Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con unas nociones de volumen y de $(n-1)$ -área determinadas. Sea $u \in \partial B$ y sea S_0 un subconjunto medible de $E(u)$. Si denotamos por $C(S_0, u)$ al cono de base S_0 y vértice u , entonces*

$$\text{vol}(C(S_0, u)) = \frac{1}{n} \text{area}(S_0) H_{E(u)}(u),$$

donde H es la función altura dada por el isoperimétrico asociado a las nociones mencionadas.

Demostración Dado $t \in [0, H(u)]$, sea S_t la imagen por p de la intersección del hiperplano paralelo a $E(u)$ y pasando por tu y el cono $C(S_0, u)$, siendo p la proyección sobre $E(u)$ en la dirección de u (ver figura 3.11). Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h : C(S_0, u) &\longrightarrow \bigcup_{t \in [0, H(u)]} S_t \\ v &\longmapsto (p(v), H(v)). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la aplicación h es un difeomorfismo. Además, si $v_1, \dots, v_n \in V$ son tales que los $n-1$ primeros vectores forman una base de $E(u)$, aplicando la formula (3.9)

$$\begin{aligned} |\Omega|(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge v_n) &= \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) \cdot H(v_n) \\ &= \omega \star |dt|((v_1, 0) \wedge \dots \wedge (v_{n-1}, 0) \wedge (0, H(v_n))) \\ &= h^*(\omega \star |dt|)(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge v_n), \end{aligned}$$

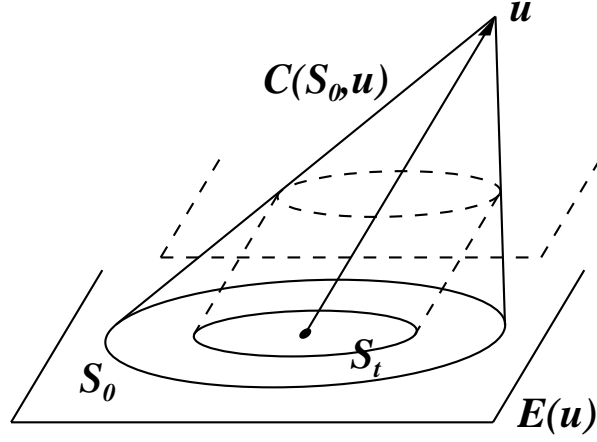


Figura 3.11: Cono de vértice $u \in \partial B$ y base medible S_0 .

luego $|\Omega| = h^*(\omega \star |dt|)$. Por tanto, el volumen de $C(S_0, u)$ vale

$$\text{vol}(C(S_0, u)) = \int_{C(S_0, u)} |\Omega| = \int_0^{H(u)} \left(\int_{S_t} \omega \right) dt.$$

Sea ahora la homotecia

$$\begin{aligned} f : S_0 &\longrightarrow S_t \\ v &\longmapsto \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

siendo $\lambda = 1 - \frac{t}{H(u)}$. Dada una base $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de $E(u)$, tenemos

$$\begin{aligned} \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) &= \lambda^{-(n-1)} \omega(\lambda \cdot v_1 \wedge \dots \wedge \lambda \cdot v_{n-1}) \\ &= \lambda^{-(n-1)} f^* \omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}). \end{aligned}$$

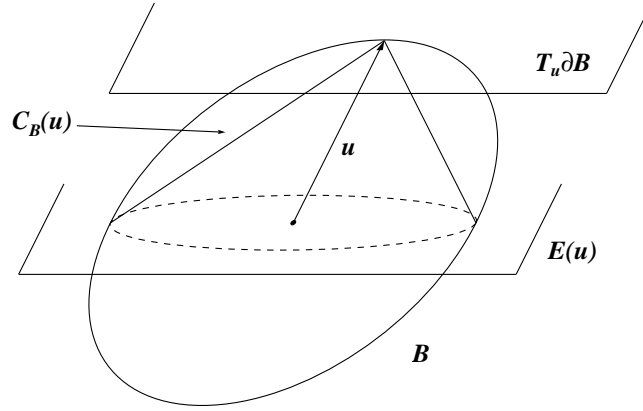
Por tanto, $\omega = \lambda^{-(n-1)} f^* \omega$ en $E(u) \cap B$, luego

$$\int_{E(u) \cap B} \omega = \lambda^{-(n-1)} \cdot \int_{S(t)} \omega.$$

Si llegamos esto último a la expresión integral obtenida antes para el volumen de $C(S_0, u)$, llegamos a que

$$\begin{aligned} \text{vol}(C(S_0, u)) &= \int_0^{H(u)} \left(1 - \frac{t}{H(u)} \right)^{n-1} \text{area}(S_0) dt \\ &= \frac{1}{n} \text{area}(S_0) H(u), \end{aligned}$$

que justamente donde queríamos llegar. \square

Figura 3.12: Cono intersección de B con vértice u .

Dado un cuerpo convexo $B \subset V$ y dado $u \in \partial B$, denotemos por $C_B(u)$ al cono intersección de B , i. e. el cono de vértice u y de base $E(u) \cap B$.

Proposición 3.54 *En un espacio de Minkowski (V^n, B) con unas nociones de volumen y de $(n-1)$ -área determinadas, se tiene que para todo $u \in \partial B$,*

$$\text{vol}(C_B(u)) = \frac{1}{n} \text{area}(E(u) \cap B) H_{E(u)}(u),$$

donde H es la función altura dada por el isoperimétrico asociado a las nociones mencionadas.

Proposición 3.55 *Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con una noción de volumen y otra de $(n-1)$ -área. Sea I el isoperimétrico asociado a estas nociones. Entonces, B y I son homotéticos si y sólo si el valor*

$$\frac{\text{vol}(C_B(u))}{\text{area}(E(u) \cap B)}$$

es constante con respecto a $u \in \partial B$.

Si recordamos el caso particular de la noción de $(n-1)$ -área de Busemann, la cuál es tal que toda sección de la bola unidad tiene área κ_{n-1} , obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.56 *Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con las nociones de volumen y área de Busemann. Sea I_{Bus} el isoperimétrico asociado a estas nociones. Entonces, B y I_{Bus} son homotéticos si y sólo si*

$$\text{vol}(C_B(u)) = \text{constante}, \quad (3.10)$$

para todo $u \in \partial B$.

Si ω es una $(n-1)$ -densidad tal que

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1}V : \omega(v) \leq 1\},$$

es un cuerpo convexo y centrado, significa que en realidad ω es una norma en $\Lambda^{n-1}V$. Por tanto, nos es lícito considerar la norma generada por polar \mathcal{B} , llamada $(n-1)$ -densidad dual de ω y denotada ω^* .

Considerando el noción de volumen dual de una noción de volumen dada y la noción de área dual de una noción de área dada, vamos a ver que el isoperimétrico para las nociones duales no es sino que el polar del isoperimétrico de las nociones originales.

Lema 3.57 *Sea V un espacio vectorial. Dada una n -forma no trivial Ω , consideremos el isomorfismo canónico $i_\Omega : \Lambda^{n-1}V \rightarrow V^*$, entonces su dual $(i_\Omega)^* = i_{(\Omega^*)}^{-1}$.*

Demostración Puesto que $i_\Omega^* : V \rightarrow \Lambda^{n-1}V^*$ y $i_{\Omega^*} : \Lambda^{n-1}V^* \rightarrow V$ son isomorfismos, bastará demostrar que $i_{\Omega^*} \circ i_\Omega^* = \text{Id}_V$. En primer lugar, notar que

$$\langle i_\Omega^*(v), w_1, \dots, w_{n-1} \rangle = \Omega(w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1} \wedge v)$$

y

$$\langle i_{\Omega^*}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \eta \rangle = \Omega^*(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{n-1} \wedge \eta).$$

Dado $v \in V$ no nulo, sea $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} = i_\Omega^*(v)$ y sea $w = i_{\Omega^*}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Tenemos que probar que $w = v$, lo que ocurrirá si y sólo si $\langle \eta, w \rangle = \langle \eta, v \rangle$ para todo $\eta \in V^*$. Sea pues $\eta \in V^*$. Si $\langle \eta, v \rangle = 0$, tenemos que $v \in \ker \eta$, pero tenemos también que $v \in \ker \xi_i$, para $1 \leq i \leq n-1$. Por dualidad $\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \ker v$, lo que implica que $\eta \in \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \rangle$ y por tanto

$$\langle \eta, w \rangle = \Omega^*(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{n-1} \wedge \eta) = 0.$$

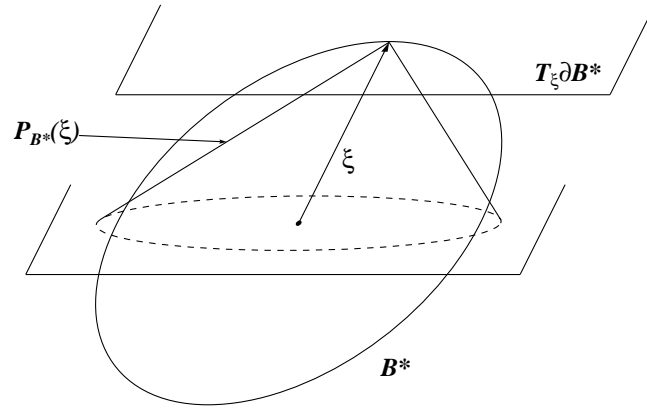
Supongamos que $\langle \eta, v \rangle \neq 0$, entonces $\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta\}$ forma una base de V^* . Sea $\{w_1, \dots, w_n\}$ su dual y veamos que w_n es un múltiplo de v : por una parte

$$\begin{aligned} \Omega(w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1} \wedge v) &= \langle i_\Omega^*(v), w_1, \dots, w_{n-1} \rangle \\ &= \langle \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{n-1}, w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-1} \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

y por otra, si en la lista $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ cambiamos algún w_i por w_n y denotamos la nueva lista por $\{w'_1, \dots, w'_{n-1}\}$,

$$\Omega(w'_1 \wedge \dots \wedge w'_{n-1} \wedge v) = 0.$$

Así que ha de existir un escalar λ tal que $w_n = v$, pero por definición $\langle \eta, w_n \rangle = 1$, luego $w_n = \frac{1}{\langle \eta, v \rangle} \cdot v$. \square

Figura 3.13: Cono proyección de B con vértice u .

Teorema 3.58 Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con una noción de volumen y otra de $(n - 1)$ -área. Sea I el isoperimétrico asociado a estas nociones y sea \mathcal{I} el isoperimétrico asociado a las nociones duales. Se tiene entonces que $\mathcal{I} = I^*$.

Demostración Gracias a la ecuación (3.6), tenemos que demostrar que

$$\mathcal{I}^* = i_{\Omega^*}(\mathcal{B}^*) = i_{\Omega}(\mathcal{B})^* = I.$$

Sea $v \in V$, aplicando el lema anterior,

$$\begin{aligned} v \in i_{\Omega^*}(\mathcal{B}^*) &\Leftrightarrow i_{\Omega^*}^*(v) \in \mathcal{B}^* \\ &\Leftrightarrow \langle i_{\Omega^*}^*(v), w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1} \rangle, \quad \forall w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1} \in \mathcal{B} \\ &\Leftrightarrow \langle v, i_{\Omega}(w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1}) \rangle, \quad \forall w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1} \in \mathcal{B} \\ &\Leftrightarrow \langle v, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in i_{\Omega}(\mathcal{B}) \\ &\Leftrightarrow v \in i_{\Omega}(\mathcal{B})^* \end{aligned}$$

□

Dado un cuerpo convexo $B \subset V$ y dado $\xi \in \partial B^*$, sea $F(\xi)$ el hiperplano vectorial paralelo a $T_{\xi} \partial B^*$ y sea $\pi_{\xi} : V^* \rightarrow F(\xi)$ la proyección sobre $F(\xi)$ en la dirección de ξ . Denotaremos por $P_{B^*}(\xi)$ al cono proyección de B^* , i. e. el cono de vértice ξ y de base $\pi_{\xi}(B^*)$.

Proposición 3.59 Dado un espacio de Minkowski (V^n, B) con unas nociones de volumen y de $(n - 1)$ -área determinadas, sea I el isoperimétrico asociado a dichas nociones. Se tiene que para todo $\xi \in \partial B^*$,

$$\text{vol}(P_{B^*}(\xi)) = \frac{1}{n} \text{area}(\pi_{\xi}(B^*)) H_{F(\xi)}(u),$$

donde H es la función altura dada por el isoperimétrico I^* .

Proposición 3.60 *Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con una noción de volumen y otra de $(n - 1)$ -área. Sea I el isoperimétrico asociado a estas nociones. Entonces, B y I son homotéticos si y sólo si el valor*

$$\frac{\text{vol}(P_{B^*}(\xi))}{\text{area}(\pi_\xi(B^*))}$$

es constante con respecto a $\xi \in \partial B^$.*

Puesto que la densidad de área de Holmes-Thompson coincide con la de Busemann siempre y cuando B es un elipsoide⁵, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.61 *Sea (V^n, B) un espacio de Minkowski con las nociones de volumen y área de Holmes-Thompson. Sea I_{HT} el isoperimétrico asociado a estas nociones. Entonces, B y I_{HT} son homotéticos si y sólo si*

$$\text{vol}(P_{B^*}(\xi)) = \text{constante}, \quad (3.11)$$

para todo $\xi \in \partial B^$.*

Si un *c.c.c.* satisface la ecuación (3.10), se dice que cumple la condición del cono intersección, de forma semejante, si satisface la ecuación (3.11), se dice que cumple la condición del cono proyección. En dimensión 2, estas propiedades son equivalentes a la propiedad triangular y a la propiedad triangular dual, respectivamente.

⁵Corolario 3.36

Capítulo 4

Fibrados dobles y la transformada de Gelfand

En la primera mitad de este capítulo, daremos algunas definiciones básicas y los primeros ejemplos sobre fibrados dobles y la transformada de Gelfand. Además, veremos como ambos aparecen de forma natural en algunas transformaciones integrales conocidas. En la segunda mitad, demostraremos una versión general de la fórmula de Crofton y estudiaremos esta en algunos casos particulares. Para finalizar, utilizaremos la fórmula de Crofton para demostrar la fórmula integral de Cauchy generalizada.

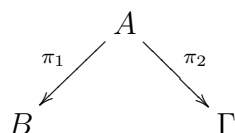
4.1. Fibrados dobles

Ahora, daremos la noción de un objeto con una estructura más rica que la de un simple fibrado, además de algunos ejemplos. Estos objetos aparecen luego de forma natural en algunas transformaciones integrales, en las cuales haremos uso de densidades. Los fibrados dobles fueron introducidos por Gelfand y sus colaboradores en [27].

4.1.1. Nociones básicas.

Veamos primeramente la definición de fibrado doble¹.

Definición 4.1 *Un fibrado doble es un conjunto formado por cinco elementos A , B , Γ , π_1 y π_2 , como indica el diagrama*



los cuales están relacionados de la forma siguiente:

¹Definiciones análogas pueden encontrarse en [30, 40].

- a. tanto $\pi_1 : A \rightarrow B$ como $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- b. la aplicación $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- c. para todo $b \in B$ y para todo $\gamma \in \Gamma$, los conjuntos $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El espacio total de ambos fibrados, A , recibe el nombre de espacio de incidencias. Dos elementos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dirán incidentes si sus respectivas fibras se intersecan, es decir, si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.

He aquí algunos ejemplos de fibrados dobles:

Ejemplo 4.2 En primer lugar, el fibrado doble trivial

$$\begin{array}{ccc} & B \times \Gamma & \\ \pi_B \swarrow & & \searrow \pi_\Gamma \\ B & & \Gamma \end{array}$$

donde π_B y π_Γ son las proyecciones naturales.

Ejemplo 4.3 Sea V un espacio vectorial de dimensión n y consideremos el conjunto de los k -planos afines $H_k(V)$. Si definimos el espacio de incidencias $A := \{(x, \lambda) \in V \times H_k(V) : x \in \lambda\}$ (espacio de incidencias estándar), entonces

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ V & & H_k(V) \end{array}$$

es un fibrado doble, donde π_1 y π_2 son las proyecciones naturales.

Ejemplo 4.4 Sea S^n la esfera n -dimensional (con $n \geq 1$) y sea $(S^n)^*$ el espacio de todos los círculos máximos orientados de S^n (esferas de dimensión $n - 1$). Al igual que antes, si tomamos la relación de incidencia estándar, *i. e.* la pertenencia a un círculo máximo, entonces

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ S^n & & (S^n)^* \end{array}$$

es un fibrado doble. El espacio $(S^n)^*$ se puede identificar con S^n si tenemos en cuenta que los círculos máximos orientados de S^n no son más que la intersección de hiperplanos

orientados de \mathbb{R}^{n+1} con S^n y que cada uno de dichos hiperplanos está determinado por el vector normal unitario compatible con su orientación. Es decir, la aplicación

$$\begin{aligned} (S^n)^* &\rightarrow S^n \\ \pi_y &\mapsto y \end{aligned}$$

donde $\pi_y = \{x \in S^n : x \cdot y = 0\}$ (siendo y el vector unitario que determina la orientación de π_y), es un difeomorfismo. Por tanto

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{A} & \\ \tilde{\pi}_1 \swarrow & & \searrow \tilde{\pi}_2 \\ S^n & & S^n \end{array}$$

con $\tilde{A} = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \cdot y = 0\}$ es un fibrado doble equivalente al anterior.

Ejemplo 4.5 *Fibrado doble de Chern para espacios homogéneos.* Sea G un grupo de Lie, y sean H y K subgrupos cerrados de G . Tomando ahora como espacio de incidencias $A = \{(xH, yK) \in G/H \times G/K : xH \cap yK \neq \emptyset\}$, obtenemos el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ G/H & & G/K. \end{array}$$

El espacio de incidencias se puede identificar con la variedad $G/(H \cap K)$.

4.1.2. La transformada de Gelfand

Con formas diferenciales podíamos definir con facilidad una operación llamada retroacción. Haremos lo mismo con densidades, además de dar otra operación, digamos “opuesta” a la retroacción.

Definición 4.6 Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades de dimensiones m y n respectivamente. Sea Φ una k -densidad sobre N con $k \leq m, n$. Se llama retroacción (del inglés pull-back) de Φ por f a la k -densidad $f^*\Phi$ de M dada por

$$(f^*\Phi)_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \Phi_{f(x)}(Df_x(v_1) \wedge \cdots \wedge Df_x(v_k)),$$

para todo $x \in M$ y para todo $v_1, \dots, v_k \in T_x M$.

Notar que podríamos haber definido la retroacción para $k > m$, pero en ese caso tendríamos trivialmente $f^*\Phi = 0$.

Definición 4.7 Sea $\pi : M \rightarrow N$ un fibrado diferenciable. Sea r la dimensión de las fibras. Si Φ es una k -densidad en M con $k \geq r$, se llama *compresión* (en inglés push-forward) de Φ por π a la $(k - r)$ -densidad $\pi_*\Phi$ de N dada por

$$(\pi_*\Phi)_y(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-r}) = \int_{\pi^{-1}(y)} \Phi_{v_1, \dots, v_{k-r}},$$

para todo $y \in N$ y todo $v_1, \dots, v_{k-r} \in T_y N$ linealmente independientes. El integrando $\Phi_{v_1, \dots, v_{k-r}}$ es una r -densidad sobre la fibra $\pi^{-1}(y)$ que viene dada a su vez por la contracción

$$(\Phi_{v_1, \dots, v_{k-r}})_x = \Phi_x \lrcorner V_1 \wedge \cdots \wedge V_{k-r},$$

para todo $x \in \pi^{-1}(y)$, donde $V_1, \dots, V_{k-r} \in T_x M$ son tales que $D\pi_x(V_i) = v_i$ con $i = 1, \dots, k - r$.

El siguiente resultado nos dice que la definición no es dependiente de la elección de los V_1, \dots, V_{k-r} : puesto que si $W_1, \dots, W_{k-r} \in T_x M$ son tales que $D\pi_x(W_i) = v_i$ para $i = 1, \dots, k - r$ entonces

$$\Phi_x \lrcorner V_1 \wedge \cdots \wedge V_{k-r} = \Phi_x \lrcorner W_1 \wedge \cdots \wedge W_{k-r}$$

en $T_x(\pi^{-1}(y))$.

Lema 4.8 Sean E y F dos espacios vectoriales con dimensiones p y q respectivamente (con $p \geq q$) y sea $\pi : E \rightarrow F$ una aplicación lineal suprayectiva. Si $v_1, \dots, v_q \in F$ son linealmente independientes y $V_1, \dots, V_q, W_1, \dots, W_q \in E$ son tales que $\pi(V_i) = \pi(W_i) = v_i$ para $i = 1, \dots, q$, entonces

$$V_1 \wedge \cdots \wedge V_q \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_{p-q} = W_1 \wedge \cdots \wedge W_q \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_{p-q},$$

para todo $U_1, \dots, U_{p-q} \in \ker \pi$.

Demostración Sean $U_1, \dots, U_{p-q} \in \ker \pi$. Obviamente, si los U_i son linealmente dependientes, no hay gran cosa que demostrar; supongamos pues que estos son linealmente independientes. Por ser π lineal, los V_i y los W_i son linealmente independientes (respectivamente). Además, como π es suprayectiva, cada uno de dichos sistemas es linealmente independiente con respecto del de los U_i . Con esto, tenemos dos bases de E : la base formada por los V_i y los U_i y la base formada por los W_i y los U_i . Luego, dado $i \in \{1, \dots, q\}$ existirán coeficientes $\alpha_1^i, \dots, \alpha_p^i \in \mathbb{R}$ tales que

$$V_i = \alpha_1^i W_1 + \cdots + \alpha_q^i W_q + \alpha_{q+1}^i U_1 + \cdots + \alpha_p^i U_{p-q}.$$

Utilizando nuevamente la hipótesis de proyección y la independencia lineal de los v_i , obtenemos que $\alpha_1^i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, q\}$. Gracias a este hecho, desarrollando el producto exterior de los V_i con los U_i , llegamos a que

$$V_1 \wedge \cdots \wedge V_q \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_{p-q} = W_1 \wedge \cdots \wedge W_q \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_{p-q}$$

tal y como queríamos demostrar. \square

En cierto modo, la compresión de una densidad nos da una densidad que en cada punto tiene el “peso” de la fibra correspondiente. Considerando esto, medir una subvariedad de N con esta nueva densidad es como medir su anti-imagen por π con la densidad original. Eso es lo que afirma con precisión la siguiente afirmación.

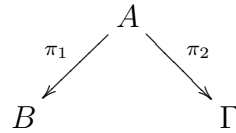
Proposición 4.9 *Sea $\pi : M \rightarrow N$ un fibrado diferenciable en el que las fibras tienen dimensión $r \geq 1$. Sea Φ una k -densidad en M con $k \geq r$. Para toda subvariedad $S \subset N$ de dimensión $k - r$, se tiene*

$$\int_S \pi_* \Phi = \int_{\pi^{-1}(S)} \Phi, \quad (4.1)$$

siempre y cuando alguna de las integrales exista.

Esta proposición se obtiene de forma directa de la definición de compresión de una densidad gracias al teorema de Fubini.

Definición 4.10 *Sea*



un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Si Φ es una k -densidad sobre Γ con $k \geq r$, entonces se llama transformada de Gelfand de Φ a la $(k - r)$ -densidad $\pi_{1} \pi_2^* \Phi$ definida sobre B .*

Ejemplo 4.11 [La transformada de Radon] Sea f una función integrable Lebesgue de \mathbb{R}^n con soporte compacto. La transformada de Radon Rf es una aplicación con valores reales definida en el espacio de los hiperplanos de \mathbb{R}^n y que viene dada por

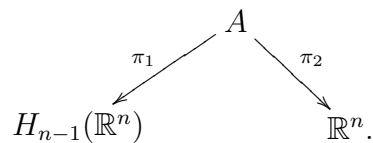
$$Rf(\sigma) := \int_{\sigma} f(x) d\lambda^{n-1}(x) \quad \forall \sigma \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n),$$

donde λ^{n-1} es la medida de Lebesgue $(n - 1)$ -dimensional. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces Rf es una aplicación diferenciable sobre $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos ahora lo que llamaremos la hiperdensidad euclídea ε_{n-1} sobre \mathbb{R}^n : dados $n - 1$ vectores linealmente independientes v_1, \dots, v_{n-1} de \mathbb{R}^n , sea u un vector unitario ortogonal al espacio generado por los anteriores, entonces:

$$\varepsilon_{n-1}(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u)|.$$

Consideremos entonces el fibrado simétrico al del ejemplo 4.3



En este fibrado, las fibras de π_1 tienen dimensión $n - 1$, por tanto, dada una función diferenciable con soporte compacto $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la transformada de Gelfand de $f\varepsilon_{n-1}$ es una función diferenciable sobre $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned}\pi_{1*}\pi_2^*(f\varepsilon_{n-1})(\sigma) &= \int_{\pi_1^{-1}(\sigma)} \pi_2^*(f\varepsilon_{n-1}) \\ &= \int_{\pi_2(\pi_1^{-1}(\sigma))} f\varepsilon_{n-1} \\ &= \int_{\sigma} f d\lambda^{n-1} \\ &= Rf(\sigma).\end{aligned}$$

Ejemplo 4.12 [La transformada de Radon esférica] La transformada de Radon (esférica) es una aplicación $R : \mathcal{C}^\infty(S^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(S^n, \mathbb{R})$ definida por

$$Rf(\xi) := \int_{\xi^\perp \cap S^n} f d\lambda_s^{n-1} \quad \forall \xi \in S^n,$$

donde ξ^\perp es el hiperespacio de \mathbb{R}^n ortogonal a ξ .

Sea Ω la forma de volumen canónica de S^n . Vamos a definir a partir de ella una densidad tal que su restricción a cada gran esfera de S^n corresponda a la medida de Lebesgue $(n-1)$ -dimensional esférica. Dado $\xi \in S^n$, sean $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_\xi S^n$, entonces consideremos la densidad

$$\phi(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = |\Omega(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u)|,$$

donde $u \in T_\xi S^n$ es un vector unitario ortogonal a los anteriores.

Retomemos el fibrado doble del ejemplo 4.4

$$\begin{array}{ccc} & \{(\xi, \eta) \in S^n \times S^n : \xi \cdot \eta = 0\} & \\ \swarrow \pi_1 & & \searrow \pi_2 \\ S^n & & S^n. \end{array}$$

Las fibras de π_1 tienen dimensión $n - 1$, luego para $f \in \mathcal{C}^\infty(S^n)$, la transformada de Gelfand de $f\phi$ es una aplicación diferenciable sobre S^n . Además

$$\begin{aligned}\pi_{1*}\pi_2^*(f\phi)(\xi) &= \int_{\pi_1^{-1}(\xi)} \pi_2^*(f\phi) \\ &= \int_{\eta \in S^n, \xi \cdot \eta = 0} f\phi \\ &= \int_{\xi^\perp \cap S^n} f d\lambda_s^{n-1} \\ &= Rf(\xi).\end{aligned}$$

Ejemplo 4.13 [La transformada del coseno] Denotemos por $\mathcal{C}_e^\infty(S^n)$ el espacio de funciones diferenciables pares sobre la esfera unidad S^n . La transformada del coseno es una aplicación $T : \mathcal{C}_e^\infty(S^n) \rightarrow \mathcal{C}_e^\infty(S^n)$ definida por la fórmula

$$Tf(u) = \int_{\xi \in S^n} |\xi \cdot u| f(\xi) d\lambda_s^n(\xi),$$

donde λ_s^n es la medida esférica de Lebesgue.

Consideremos el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^{n+1} \times S^n & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^{n+1} & & S^n \times \mathbb{R}, \end{array}$$

donde $\pi_1(x, \xi) = x$ y $\pi_2(x, \xi) = (\xi, \xi \cdot x)$. Sea Ω la forma de volumen canónica de S^n . Para $f \in \mathcal{C}_e^\infty(S^n)$, la aplicación $\tilde{f}|\Omega \wedge dr|$ (con $\tilde{f}(\xi, r) = f(\xi)$) es una densidad de orden $n+1$ sobre $S^n \times \mathbb{R}$ y, puesto que las fibras de π_1 tienen dimensión n , su transformada de Gelfand es una 1-densidad sobre \mathbb{R}^{n+1} . Dado $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ y un vector unitario cualquiera u , si $(x, \xi) \in \pi_1^{-1}(x)$, entonces $V = (u, 0) \in T_{(x, \xi)}\pi_1^{-1}(x)$ es tal que $(D\pi_1)_{(x, \xi)}(V) = u$ y, por definición, tenemos

$$\pi_{1*}\pi_2^*(\tilde{f}|\Omega \wedge dr|)_x(u) = \int_{\pi_1^{-1}(x)} \pi_2^*(\tilde{f}|\Omega \wedge dr|)_{(x, \xi)} \lrcorner V.$$

Para aligerar las siguientes ecuaciones (en particular, los productos exteriores que en ellas aparecen), tomaremos un sólo vector $W \in T_{(x, \xi)}(\mathbb{R}^{n+1} \times S^n)$ en vez de los n que deberíamos tomar. Observemos que $W = (W_1, W_2)$ con $W_1 \in T_x\mathbb{R}^{n+1}$ y $W_2 \in T_\xi S^n$ y

$$D\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ \xi & x \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \pi_2^*(\tilde{f}|\Omega \wedge dr|)_{(x, \xi)} \lrcorner V(W) &= f(\xi)|\Omega_\xi \wedge dr_{\xi \cdot x}|(D\pi_2(W) \wedge D\pi_2(V)) \\ &= f(\xi)|\Omega_\xi \wedge dr_{\xi \cdot x}|((W_2, \xi \cdot W_1 + x \cdot W_2) \wedge (0, \xi \cdot u)) \\ &= |\xi \cdot u|f(\xi)|\Omega_\xi|(W_2). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el fibrado $\pi : (x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times S^n \mapsto \xi \in S^n$. Notar entonces que $\pi|_{\pi_1^{-1}(x)} : \pi_1^{-1}(x) \simeq S^n$ y $D\pi = (0 \text{ Id})$, por tanto

$$\begin{aligned} \pi_2^*(\tilde{f}|\Omega \wedge dr|)_{(x, \xi)} \lrcorner V(W) &= |\xi \cdot u|f(\xi)|\Omega_\xi|(W_2) \\ &= |\xi \cdot u|f(\xi)|\Omega_\xi|(D\pi(W)) \\ &= \pi^*(|\xi \cdot u|f|\Omega|)_{(x, \xi)}(W) \end{aligned}$$

y finalmente

$$\pi_{1*}\pi_2^*(\tilde{f}|\Omega \wedge dr|)_x(u) = \int_{S^n} |\xi \cdot u|f(\xi)|\Omega|. \quad (4.2)$$

4.2. Las fórmulas de Crofton

4.2.1. Fórmulas de Crofton en fibrados dobles

Supongamos que tenemos una variedad n -dimensional B tal que la familia $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de subvariedades de dimensión $n - k$ de B está parametrizada por otra variedad Γ . Para toda densidad Φ en Γ de orden máximo podemos definir un operador sobre el espacio de las subvariedades de dimensión k de B como sigue

$$S_\Phi(N) = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(B_\gamma \cap N) \Phi,$$

en caso de que la integral exista. Si existe una k -densidad ϕ sobre B , independiente de N , tal que

$$\int_N \phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(B_\gamma \cap N) \Phi, \quad (4.3)$$

se dice que esta ecuación es una fórmula de Crofton.

Lema 4.14 (Fórmula de la coárea) Sean X e Y dos variedades de misma dimensión y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación C^∞ tal que para todo valor regular su número de preimágenes es finito. Dada una densidad Φ de orden máximo sobre Y , se tiene entonces

$$\int_X f^* \Phi = \int_{y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi. \quad (4.4)$$

Teorema 4.15 (Fórmula de Crofton) Sea

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ B & & \Gamma \end{array}$$

un fibrado doble. Sea $n = \dim B$ y $n - k = \dim B_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea Φ una densidad de orden máximo sobre Γ y sea $N \subset B$ una subvariedad de dimensión k tal que la integral

$$\int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi$$

existe. Entonces, dicha integral coincide con el volumen de N con respecto a la transformada de Gelfand de Φ , es decir:

$$\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi. \quad (4.5)$$

Demostración Supongamos por un momento que la integral del primer miembro de la fórmula existe; luego, aplicando el teorema 4.9, bastaría probar

$$\int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi.$$

Sean $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \Phi_\gamma \neq 0\}$ y $A_0 = \{a \in A : (\pi_2^* \Phi)_a \neq 0\}$. Ambos conjuntos son abiertos de Γ y A respectivamente, luego son variedades diferenciables. Es más, puesto que dado $\gamma \in \Gamma$

$$\Phi_\gamma = 0 \iff (\pi_2^* \Phi)_a = 0 \forall a \in \pi_2^{-1}(\gamma),$$

se tiene que $\pi_2|_{A_0} : A_0 \rightarrow \Gamma_0$ sigue siendo un fibrado diferenciable. Por la definición de Γ_0 , tenemos

$$\int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi = \int_{\gamma \in \Gamma_0} \#(N \cap B_\gamma) \Phi.$$

Por la existencia de la integral del primer miembro, existe la del segundo. Por tanto, el conjunto

$$\Delta = \overline{\{\gamma \in \Gamma_0 : \#(N \cap B_\gamma) = \infty\}}$$

tiene medida nula en Γ_0 y

$$\int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi = \int_{\gamma \in \Gamma_0 - \Delta} \#(N \cap B_\gamma) \Phi.$$

Sean ahora $\Gamma' = \Gamma_0 - \Delta$ y $A' = A_0 - \pi_2^{-1}(\Delta)$ abiertos de Γ_0 y A_0 respectivamente y, por ende, variedades diferenciables. Para que $\pi_2|_{A'} : A' \rightarrow \Gamma'$ sea a su vez un fibrado diferenciable, basta ver que $\pi_2(A') = \Gamma'$, lo que es inmediato.

Buscamos aplicar la fórmula de la coárea tomando $X = \pi_1^{-1}(N) \cap A'$, $Y = \Gamma'$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N) \cap A'}$. Hechas estas consideraciones, comprobemos que se cumplen las condiciones del lema. Sean m la dimensión de Γ y r la dimensión de las fibras de π_1 . Por hipótesis, tenemos que la dimensión de las fibras de π_2 es $n - k$, luego

$$n + r = \dim A = m + (n - k) \Rightarrow m = k + r.$$

Así, la dimensión de $\pi_1^{-1}(N)$ coincide con la dimensión de Γ y, puesto que Γ' y A' son subvariedades abiertas, $\dim(\pi_1^{-1}(N) \cap A') = \dim \Gamma'$.

Dado $\gamma \in \Gamma'$ se tiene

$$(\pi_2|_{\pi_1^{-1}(N) \cap A'})^{-1}(\gamma) = \pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma).$$

Por ser π_1 biyectiva sobre las fibras de π_2

$$\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma).$$

Aplicando finalmente la fórmula de la coárea

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi &= \int_{\gamma \in \Gamma'} \#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) \Phi \\
 &= \int_{\pi_1^{-1}(N) \cap A'} \pi_2^* \Phi \\
 &= \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi,
 \end{aligned}$$

puesto que $K = \pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\Delta)$ tiene medida nula en $N_0 = \pi_1^{-1}(N) \cap A_0$. \square

Retomando el ejemplo 4.5, vamos a dar una fórmula de Crofton para fibrados dobles entre espacios homogéneos.

Definición 4.16 Sea $\pi : M \rightarrow N$ un fibrado diferenciable entre variedades homogéneas bajo la acción (a izquierda) de un mismo grupo de Lie G . Se dice que π es equivariante si:

$$L_g \pi = \pi L_g \quad \forall g \in G,$$

donde L_g representa la acción (a izquierda) con respecto al elemento $g \in G$.

Se desprende directamente de la definición que, en un fibrado equivariante, la acción del grupo es un difeomorfismo entre la fibra de un elemento $y \in N$ y la fibra de su trasladado. Es decir, para todo $g \in G$ y para todo $y \in N$

$$L_g : \pi^{-1}(y) \rightarrow \pi^{-1}(L_g y)$$

es un difeomorfismo.

Definición 4.17 Sea M una variedad homogénea bajo la acción (a izquierda) de un grupo de Lie G . Se dice que una k -densidad Φ sobre M es invariante (a izquierda) si:

$$L_g^* \Phi = \Phi \quad \forall g \in G.$$

Si x_0 es un punto fijo, entonces las densidades invariantes sobre M están determinadas por los valores que toman en $T_{x_0} M$. Es más, puesto que las densidades de orden máximo en espacios vectoriales se diferencian por un factor, las densidades invariantes de orden máximo sobre M se diferencia también en un factor constante.

Lema 4.18 Sea $\pi : M \rightarrow N$ un fibrado equivariante bajo la acción (a izquierda) de un grupo de Lie G y sean Φ y Ψ densidades invariantes sobre M y N respectivamente, entonces:

- a. $\pi^* \Psi$ es una densidad invariante;

b. si la compresión está bien definida para Φ , entonces $\pi_*\Phi$ es invariante.

Demostración Para obtener el resultado para la retroacción de Ψ , basta con aplicar las definiciones

$$L_g^*(\pi^*\Psi) = (L_g\pi)^*\Psi = (\pi L_g)^*\Psi = \pi^*(L_g^*\Psi) = \pi^*\Psi,$$

y ya tenemos a demostrado.

Sea r la dimensión de las fibras de π y sea k un entero positivo tal que $k + r$ sea el orden de Φ . Sea $y \in N$ y sean $v_1, \dots, v_k \in T_y N$, se tiene

$$(L_g * \pi_* \Phi)_y(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = (\pi_* \Phi)_{L_g y}(DL_g v_1 \wedge \dots \wedge DL_g v_k).$$

Aplicando la propia definición de la compresión

$$(\pi_* \Phi)_{L_g y}(DL_g v_1 \wedge \dots \wedge DL_g v_k) = \int_{\pi^{-1}(L_g y)} \Phi_{DL_g v_1, \dots, DL_g v_k}.$$

Supongamos cierto por un momento que $\Phi_{DL_g v_1, \dots, DL_g v_k} = (L_{g^{-1}}^* \Phi)_{v_1, \dots, v_k}$; luego, como $L_{g^{-1}} : \pi^{-1}(L_g y) \rightarrow \pi^{-1}(y)$ es un difeomorfismo, tenemos que

$$\begin{aligned} (L_g^* \pi_* \Phi)_y(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= \int_{\pi^{-1}(L_g y)} (L_{g^{-1}}^* \Phi)_{v_1, \dots, v_k} \\ &= \int_{\pi^{-1}(y)} \Phi_{v_1, \dots, v_k} \\ &= (\pi_* \Phi)_y(v_1 \wedge \dots \wedge v_k). \end{aligned}$$

Así, b queda demostrada.

Veamos pues que nuestra suposición anterior es cierta. Para simplificar y facilitar la lectura, supondremos $k = 2$ y $r = 1$. Puesto que $\Phi_{DL_g v}$ es una 1-densidad sobre $\pi^{-1}(L_g y)$, dado $x \in \pi^{-1}(L_g y)$ tomemos $w \in T_x \pi^{-1}(L_g y)$. Por otra parte, sea $V \in T_x M$ tal que $D\pi V = DL_g v$ y definamos $U = DL_{g^{-1}} V$; tenemos entonces (gracias a la equivalencia de π) que $D\pi U = v$. Hecho todo esto, y recordando la definición de esta densidad contraída, obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi_{DL_g v}(w) &= \Phi(V \wedge w) = L_g^* \Phi(U \wedge DL_g^{-1} w) \\ &= (L_g^* \Phi)_v(DL_{g^{-1}} w) = L_{g^{-1}}^*((L_g^* \Phi)_v)(w) \\ &= L_{g^{-1}}^*(\Phi_v)(w). \end{aligned}$$

Por tanto el lema queda demostrado. \square

Tenemos ahora las herramientas necesarias para demostrar un teorema debido a Chern que nos da la correspondiente fórmula de Crofton para espacios homogéneos.

Teorema 4.19 *Sea G un grupo de Lie, sean H y K subgrupos cerrados de G y consideremos el fibrado doble*

$$\begin{array}{ccc} & G/(H \cap K) & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ G/H & & G/K, \end{array}$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones naturales. Sea n la dimensión de G/H y $n - k$ la dimensión de las fibras de π_1 . Si G/K admite una densidad invariante de orden máximo Φ y H es compacto, entonces existe una k -densidad invariante ϕ sobre G/H tal que para toda subvariedad $N \subset G/H$ de dimensión k se tiene

$$\int_N \phi = \int_{yK \in G/K} \#(N \cap B_{yK}) \Phi.$$

Es más, $\phi = \pi_{1*} \pi_2^* \Phi$.

Demostración Basta aplicar el teorema 4.15 recordando que

$$G/(H \cap K) \simeq \{(xH, yK) \in G/H \times G/K : xH \cap yK \neq \emptyset\}$$

y que, por el lema 4.18, la transformada de Gelfand de Φ es invariante. \square

4.2.2. Los espacios clásicos.

Sea E uno de los tres espacios clásicos: el elíptico, el euclídeo o el hiperbólico, entonces E es homogéneo bajo la acción de su respectivo grupo de isometrías, G . Si consideramos el espacio de todas las subvariedades k -dimensionales completas y totalmente geodésicas, el cuál denotaremos (como ya venimos haciendo) $H_k(E)$, y consideramos también el espacio estándar de incidencias entre E y $H_k(E)$,

$$A = \{(x, \lambda) \in E \times H_k(E) : x \in \lambda\},$$

obtenemos un fibrado doble donde los tres espacios son homogéneos bajo la acción de G y donde las proyecciones son equivariantes.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ E & & H_k(E) \end{array}$$

Veremos que las densidades invariantes en estos espacios son únicas salvo factor constante. Por tanto, dada una densidad Φ_k invariante en $H_k(E)$, su transformada de Gelfand $\pi_{1*} \pi_2^* \Phi_k$ será una constante veces la densidad estándar de E .

Definición 4.20 Sea V un espacio vectorial de dimensión n . Dado $k \leq n$, se llama grassmanniana de orden k de V , que denotaremos $G_k(V)$, al conjunto de subespacios k -dimensionales de V :

$$G_k(V) = \{\pi \leq V : \dim \pi = k\}.$$

Se puede dotar a la grassmanniana de orden k de V de una estructura diferenciable, para ello vamos a seguir el siguiente proceso: en primer lugar, vamos a ver que $G_k(V)$ es biyectivo a un cierto espacio cociente. En segundo lugar, veremos que este cociente está recubierto por ciertos conjuntos U_α que están a su vez en biyección con $\mathbb{R}^{(n-k)k}$. Luego, a través de estas biyecciones, tanto $G_k(V)$ como el espacio cociente se pueden considerar variedades \mathcal{C}^∞ de dimensión $(n-k)k$.

Fijada una base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de V , todo k -plano $\pi \in G_k(V)$ puede ser representado por una matriz A de orden $n \times k$ formada por los coeficientes de una de sus bases en la base e . Una matriz B representará al mismo k -plano si y sólo si existe una matriz invertible² T de orden k tal que $B = A \cdot T$. Es decir, tenemos que

$$G_k(V) \simeq M(n \times k, k)/GL(k), \quad (4.6)$$

donde $M(n \times k, k)$ es el conjunto de matrices de orden $n \times k$ y rango k y $GL(k)$ es el grupo general lineal (matrices regulares de orden k).

Supongamos por un momento que las k primeras filas de una matriz $A \in M(n \times k, k)$ son linealmente independientes. Entonces existirá una única matriz P en la misma clase de equivalencia que A con la siguiente estructura

$$P = \begin{pmatrix} Id_k \\ Z \end{pmatrix},$$

donde Z es una matriz $(n-k) \times k$. El conjunto formado por este tipo de matrices (y por tanto el de sus respectivas clases de equivalencia) está en biyección con $\mathbb{R}^{(n-k)k}$, con lo que hemos obtenido una aplicación X que nos lleva un subconjunto U de $M(n \times k, k)/GL(k)$ en $\mathbb{R}^{(n-k)k}$.

En un caso más general, sea $\alpha \in \mathbb{N}^k$ un multi-índice con $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n$. Una matriz $A \in M(n \times k, k)$ con las filas $\{\alpha_i\}$ linealmente independientes posee una representación única P_α en la que dichas filas forman la matriz identidad. Las filas restantes forman una matriz Z_α que determina al igual que antes una aplicación X_α de un dominio U_α en $\mathbb{R}^{(n-k)k}$. Dichos dominios recubren $M(n \times k, k)/GL(k)$, con lo que podemos utilizar las aplicaciones asociadas X_α para definir una estructura \mathcal{C}^∞ sobre el espacio cociente $M(n \times k, k)/GL(k)$. Y como ya enunciábamos anteriormente, podemos ver a través de (4.6) a la grassmanniana de orden k de V como una variedad diferenciable de dimensión $(n-k)k$.

Es posible realizar un proceso similar íntegramente en grupos de Lie y, dada su importancia, vamos a detallarlo aquí. Sea $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V que fijaremos.

² T es la matriz de cambio de base.

Mediante e podemos ver las k primeras columnas de una matriz del grupo general lineal $GL(n)$ como los coeficientes de una base de un k -plano en la base e y las restantes $n - k$ filas como las de una base de un $(n - k)$ -plano complementario. Consideremos ahora al subgrupo cerrado de $GL(n)$

$$\left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} : B \in GL(k), C \in GL(n - k) \right\},$$

el cual es canónicamente isomorfo a $GL(k) \times GL(n - k)$. Dos matrices $M, \tilde{M} \in GL(n)$ representarán al mismo k -plano $\pi \in G_k(V)$ (i. e. las k -primeras filas de cada matriz son coeficientes en e de bases de π) si y solamente si existe una matriz³ $A \in GL(k) \times GL(n - k)$ tal que $\tilde{M} = M \cdot A$. Así pues tenemos la siguiente identificación

$$G_k(V) \simeq GL(n)/(GL(k) \times GL(n - k)). \quad (4.7)$$

Puesto que el grupo general lineal $GL(n)$ es un grupo de Lie y $GL(k) \times GL(n - k)$ es un subgrupo cerrado de este, la biyección (4.7) confiere a $G_k(V)$ una estructura de variedad diferenciable homogénea.

En caso de tener un producto escalar en V , se puede demostrar de forma similar que

$$G_k(V) \simeq O(n)/(O(k) \times O(n - k)), \quad (4.8)$$

donde $O(n)$ es el grupo ortogonal (matrices ortogonales). Hay que decir que tanto (4.6), como (4.7), como (4.8), dan a $G_k(V)$ la misma estructura diferenciable. Una de las ventajas que tiene ver a $G_k(V)$ como una de estas variedades homogéneas⁴ es que se hace fácil comprobar que $G_k(V)$ y $G_{n-k}(V^*)$ (o $G_k(V)$ y $G_{n-k}(V)$ si se posee un producto escalar) son canónicamente difeomorfas.

Definición 4.21 Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $k \leq n$, se llama *grassmanniana de M a la variedad diferenciable*:

$$G_k(TM) = \bigcup_{x \in M}^{\circ} G_k(T_x M).$$

La construcción de la estructura diferenciable de la grassmanniana de una variedad diferenciable es análoga a la construcción de la variedad tangente o la variedad cotangente. Al igual que se hace con estas variedades, se puede llegar a definir un fibrado conocido como fibrado de Grassmann.

³Al igual que antes A es la matriz de cambio de base, siéndolo también las submatrices B y C para las respectivas bases.

⁴Existen otras relaciones de este tipo, además de sus equivalentes para espacios complejos en los que basta reemplazar al grupo ortogonal por el grupo unitario.

La acción de un grupo G sobre una variedad M induce una acción en las grassmanianas de M . Sea $(x, \pi) \in G_k(TM)$ y sean $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ tales que $\pi = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Suponiendo que la acción de G actúa a izquierdas, dado $g \in G$

$$L_g(x, \pi) = (L_g x, \langle DL_g v_1, \dots, DL_g v_k \rangle).$$

Esta acción está bien definida ya que DL_g es un isomorfismo lineal de $T_x M$ en $T_{L_g x} M$ para todo $x \in M$.

Lema 4.22 *Sea M una variedad diferenciable sobre la que actúa un grupo G . Sea $B \subset G_k(TM)$ una subvariedad invariante tal que G actúa transitivamente sobre B . Sean Φ y Ψ dos k -densidades invariantes sobre M , siendo Ψ no idénticamente nula. Existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in M$ y $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ generan un plano en B , entonces*

$$\Phi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = c \cdot \Psi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k).$$

Demostración Sean $x, y \in M$, $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ y $w_1, \dots, w_k \in T_y M$ como en el enunciado, es decir, existen dos k -planos vectoriales $\pi = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ y $\sigma = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ tales que $(x, \pi), (y, \sigma) \in B$. Por la hipótesis de transitividad, existe $g \in G$ tal que

$$(x, \pi) = L_g(y, \sigma),$$

luego

$$x = L_g y \quad \text{y} \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle DL_g w_1, \dots, DL_g w_k \rangle.$$

Puesto que la dimensión de π es k , la dimensión de $\Lambda^k \pi$ es 1 y existe una constante no nula λ tal que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \lambda \cdot DL_g w_1 \wedge \dots \wedge DL_g w_k.$$

Con esto y por ser las densidades invariantes

$$\begin{aligned} \Phi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= \lambda \cdot L_g^* \Phi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) \\ &= \lambda \cdot \Phi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) \\ \Psi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= \lambda \cdot \Psi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k). \end{aligned}$$

Como G actúa transitivamente sobre B y Ψ es una densidad invariante no idénticamente nula, entonces no puede ser nula en ningún punto de B y existen valores c_{x, v_1, \dots, v_k} y c_{y, w_1, \dots, w_k} tales que

$$\begin{aligned} \Phi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= c_{x, v_1, \dots, v_k} \cdot \Psi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ \Phi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) &= c_{y, w_1, \dots, w_k} \cdot \Psi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} c_{x, v_1, \dots, v_k} \cdot \Psi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= \Phi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ &= \lambda \cdot \Phi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) \\ &= \lambda \cdot c_{y, w_1, \dots, w_k} \cdot \Psi_y(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) \\ &= c_{y, w_1, \dots, w_k} \cdot \Psi_x(v_1 \wedge \dots \wedge v_k). \end{aligned}$$

Por tanto c_{x, v_1, \dots, v_k} es independiente del punto x y los vectores v_1, \dots, v_k . □

Notar que cuando M es uno de los tres espacios clásicos, entonces el grupo de isometrías G actúa transitivamente sobre toda la grassmanniana $G_k(TM)$.

El siguiente resultado es debido a Chern ([20]). Cabe destacar que, con las herramientas obtenidas hasta ahora, la demostración de este teorema se hace trivial.

Teorema 4.23 *Sea E uno de los tres espacios clásicos, siendo n su dimensión, y sea G el grupo de isometrías correspondiente. Si H_{n-k} (con $1 \leq k < n$) denota el espacio de subvariedades $(n-k)$ -dimensionales completas y totalmente geodésicas de E y Φ_{n-k} es una densidad invariante sobre H_{n-k} , entonces existe una constante c que depende solamente de n , k y de la normalización de Φ_{n-k} tal que para toda subvariedad k -dimensional $N \subset E$ se tiene que*

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_{n-k}} \#(N \cap \gamma) \Phi_{n-k}. \quad (4.9)$$

Ejemplo 4.24 Dada una curva γ de tipo \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R}^n , se tiene

$$\text{longitud}(\gamma) = \frac{1}{k_{n-1}} \int_{\lambda \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \#(\lambda \cap \gamma) \Phi_{n-1},$$

donde k_{n-1} y Φ_{n-1} son una constante y una densidad (resp.) que determinaremos más adelante.

Consideremos el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

donde $H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)$ representa el espacio de hiperplanos orientados de \mathbb{R}^n , A es el espacio de incidencias estándar y π_1 y π_2 son las proyecciones naturales. Dado $\sigma \in H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)$, este se puede asociar unívocamente con el par $(\xi, r) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ tal que

- ξ es normal a σ y tiene la co-orientación de este;
- $x \in \sigma$ si y sólo si $\xi \cdot x = r$.

Notar que, de este modo, los pares (ξ, r) y $(-\xi, -r)$ determinan el mismo plano pero con orientación opuesta y, por ello, $H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)$ es un doble recubrimiento del espacio de los hiperplanos afines no-orientados de \mathbb{R}^n , $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

Por lo anterior, el espacio de incidencias A puede ser representado por

$$\{(x, \xi, r) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R} : \xi \cdot x = r\}.$$

Puesto que la aplicación $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \rightarrow (x, \xi, \xi \cdot x) \in A$ es un difeomorfismo, el fibrado anterior es equivalente al siguiente

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n \times S^{n-1} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^n & & S^{n-1} \times \mathbb{R}, \end{array}$$

donde $\pi_1(x, \xi) = x$ y $\pi_2(x, \xi) = (\xi, \xi \cdot x)$.

Sea Ω la forma de volumen canónica de S^{n-1} (proveniente de la euclídea), definimos la densidad de orden máximo sobre $S^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$\Phi_{n-1}^+ = |\Omega \wedge dr|,$$

la cual es invariante bajo la acción del grupo euclídeo. Por tanto, existirá una constante c tal que

$$\text{longitud}(\gamma) = c \int_{\gamma} \pi_{1*} \pi_2^* \Phi_{n-1}^+,$$

para toda curva γ de \mathbb{R}^N . De igual forma que obtuvimos (4.2), se llega a que

$$(\pi_{1*} \pi_2^* \Phi_{n-1}^+)_x(v) = \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \cdot |\Omega|.$$

Es fácil ver que la aplicación

$$v \mapsto \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \cdot |\Omega|$$

es una norma. Es más, salvo un coeficiente constante, es la norma euclídea. Concretamente, para $u \in S^{n-1}$, se puede demostrar⁵

$$\int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot u| \cdot |\Omega| = 2k_{n-1},$$

donde k_{n-1} es el volumen de la esfera unidad $(n-1)$ -dimensional. En el caso particular en que γ es un segmento del tipo $[0, u]$ con $u \in S^{n-1}$, tendríamos

$$1 = \text{longitud}([0, u]) = c \int_0^1 \left(\int_{S^{n-1}} |\xi \cdot tu| \cdot |\Omega| \right) dt = 2k_{n-1} \cdot c$$

Finalmente, obtenemos

$$\text{longitud}(\gamma) = \frac{1}{2k_{n-1}} \int_{\lambda \in H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)} \#(\lambda \cap \gamma) \Phi_{n-1}^+,$$

o equivalentemente

$$\text{longitud}(\gamma) = \frac{1}{k_{n-1}} \int_{\lambda \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \#(\lambda \cap \gamma) \Phi_{n-1},$$

donde Φ_{n-1} es la densidad sobre $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ que proviene de Φ_{n-1}^+ .

⁵Fórmula de la proyección de Cauchy (2.13).

4.3. Morfismos de fibrados dobles

Definición 4.25 Sean $B' \xleftarrow{\pi'_1} A' \xrightarrow{\pi'_2} \Gamma'$ y $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ dos fibrados dobles, se llama morfismo de fibrados dobles a un diagrama conmutativo de fibrados

$$\begin{array}{ccccc} B' & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & \Gamma' \\ \rho_B \downarrow & & \rho_A \downarrow & & \rho_\Gamma \downarrow \\ B & \xleftarrow{\pi_1} & A & \xrightarrow{\pi_2} & \Gamma \end{array}$$

con ρ_B , ρ_A y ρ_Γ proyecciones diferenciables.

En cierto modo, podemos ver el fibrado inferior como una subestructura del superior, una especie de “sub-fibrado”. Veamos un ejemplo sencillo que motiva por sí mismo la definición.

Ejemplo 4.26 Sean $\lambda \in H_k(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda' \in H_{n-p}(\mathbb{R}^n)$ con $k - p > 0$, generalmente λ y λ' se cortan en un plano afín $(k - p)$ -dimensional. Sean

$$\Gamma' = \{(\lambda, \lambda') \in H_k(\mathbb{R}^n) \times H_p(\mathbb{R}^n) : \dim(\lambda \cap \lambda') = k - p\},$$

y

$$A' = \{(x, \lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^n \times \Gamma' : x \in \lambda \cap \lambda'\}.$$

Y consideremos las aplicaciones

$$\rho(\lambda, \lambda') = \lambda \cap \lambda' \quad \forall (\lambda, \lambda') \in \Gamma',$$

y

$$\mu(x, \lambda, \lambda') = (x, \lambda \cap \lambda') \quad \forall (x, \lambda, \lambda') \in A'.$$

Entonces, el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & \Gamma' \\ \text{id} \downarrow & & \mu \downarrow & & \rho \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi_1} & A_{k-p} & \xrightarrow{\pi_2} & H_{k-p}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

es un morfismo de fibrados dobles, donde las proyecciones son las habituales, así como A_{k-p} .

Una pregunta natural que surge al estudiar este objeto es saber como actúa la transformada de Gelfand en los diferentes niveles. La respuesta nos la brinda el siguiente teorema:

Teorema 4.27 *Sea*

$$\begin{array}{ccccc} B' & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & \Gamma' \\ \rho_B \downarrow & & \rho_A \downarrow & & \rho_\Gamma \downarrow \\ B & \xleftarrow{\pi_1} & A & \xrightarrow{\pi_2} & \Gamma \end{array}$$

un morfismo de fibrados dobles tal que para todo punto $a \in A$, la aplicación π'_2 restringida a la fibra $\rho_A^{-1}(a)$ es un difeomorfismo en la fibra $\rho_\Gamma^{-1}(\pi_2(a))$. Si Φ es una densidad sobre Γ' , entonces

$$\rho_{B*}\pi'_{1*}(\pi'_2)^*\Phi = \pi_{1*}\pi_2^*\rho_{\Gamma*}\Phi,$$

siempre y cuando cada miembro de esta última igualdad esté bien definido.

Demostración Puesto que $\rho_B \circ \pi'_1 = \pi_1 \circ \rho_A$, tenemos que $\rho_{B*}\pi'_{1*} = \pi_{1*}\rho_{A*}$. Luego, hay que probar que $\pi_{1*}\rho_{A*}(\pi'_2)^*\Phi = \pi_{1*}\pi_2^*\rho_{\Gamma*}\Phi$, y bastará con

$$\rho_{A*}(\pi'_2)^*\Phi = \pi_2^*\rho_{\Gamma*}\Phi.$$

Ahora, y al igual que en demostraciones anteriores, supondremos las dimensiones de forma conveniente para facilitar la lectura. Sean $a \in A$ y $v \in T_a A$, sean $a' \in \rho_A^{-1}(a)$ y $v' \in T_{a'} A'$ tal que $D\rho_A(v') = v$, y sea $\xi \in T_{a'} \rho_A^{-1}(a)$. Tenemos

$$((\pi'_2)^*\Phi)_{a'} \rfloor_{v'}(\xi) = ((\pi'_2)^*(\Phi \rfloor_{D\pi'_2(v')}))_{a'}(\xi),$$

por tanto

$$\begin{aligned} (\rho_{A*}(\pi'_2)^*\Phi)_a(v) &= \int_{\rho_A^{-1}(a)} ((\pi'_2)^*\Phi)_{a'} \rfloor_{v'} \\ &= \int_{\rho_A^{-1}(a)} (\pi'_2)^*(\Phi \rfloor_{D\pi'_2(v')}) \\ &= \int_{\rho_\Gamma^{-1}(\pi_2(a))} \Phi \rfloor_{D\pi'_2(v')} \\ &= (\rho_{\Gamma*}\Phi)_{\pi_2(a)}(D\pi_2(v)). \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\rho_\Gamma \circ \pi'_2 = \pi_2 \circ \rho_A$, se tiene que $D\rho_\Gamma D\pi'_2 = D\pi_2 D\rho_A$, de donde

$$D\rho_\Gamma D\pi'_2(v') = D\pi_2 D\rho_A(v') = D\pi_2(v),$$

luego

$$(\rho_{A*}(\pi'_2)^*\Phi)_a(v) = (\rho_{\Gamma*}\Phi)_{\pi_2(a)}(D\pi_2(v)) = (\pi_2^*\rho_{\Gamma*}\Phi)_a(v).$$

□

Estamos ahora en disposición de demostrar las fórmulas integrales de Cauchy generalizadas. Empecemos con la más sencilla.

Teorema 4.28 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta de clase C^∞ , entonces:

$$\text{area}(S) = \frac{\pi^2}{2} \int_{\lambda \in H_2(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda \cap S) d\mu(\lambda), \quad (4.10)$$

donde μ es la medida invariante estándar de $H_2(\mathbb{R}^3)$.

Demostración Como vimos en el ejemplo 4.24, Φ_2 es una densidad invariante sobre $H_2(\mathbb{R}^3)$. Es más, esta densidad es la que nos da la medida μ . En el espacio producto $H_2(\mathbb{R}^3) \times H_2(\mathbb{R}^3)$ tenemos pues la densidad producto $\Phi_2 \star \Phi_2$. Sea Δ el subconjunto de pares (λ, λ') tal que $\dim(\lambda \cap \lambda') \neq 1$. Este subconjunto tiene medida nula para la medida producto. Finalmente, sea $\Gamma = (H_2(\mathbb{R}^3) \times H_2(\mathbb{R}^3)) \setminus \Delta$ y consideremos el fibrado

$$\rho : \Gamma \rightarrow H_1(\mathbb{R}^3),$$

donde $\rho(\lambda, \lambda') = \lambda \cap \lambda'$. Este fibrado es equivariante bajo la acción del grupo euclídeo y $\Phi_2 \star \Phi_2$ es una densidad invariante, por tanto, gracias al lema 4.18, $\rho_*(\Phi_2 \star \Phi_2)$ también es una densidad invariante.

Consideremos ahora el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^3 & & H_1(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

donde A , π_1 y π_2 son los elementos habituales. Considerando la superficie S y la densidad $\rho_*(\Phi_2 \star \Phi_2)$, por el teorema 4.23, existe una constante c_1 tal que

$$\text{area}(S) = c_1 \int_{\delta \in H_1(\mathbb{R}^3)} \#(\delta \cap S) \rho_*(\Phi_2 \star \Phi_2).$$

Utilizando ahora la proposición 4.9, el teorema de Fubini y nuevamente la fórmula de Crofton (4.9),

$$\begin{aligned} \text{area}(S) &= c_1 \int_{(\lambda, \lambda') \in \Gamma} \#(\lambda \cap \lambda' \cap S) \Phi_2 \star \Phi_2 \\ &= c_1 \int_{\lambda' \in H_2(\mathbb{R}^3)} \left(\int_{\lambda \in H_2(\mathbb{R}^3)} \#(\lambda \cap (\lambda' \cap S)) \Phi_2 \right) \Phi_2 \\ &= c_1 c_2 \int_{\lambda' \in H_2(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda' \cap S) \Phi_2, \end{aligned}$$

para cierta constante c_2 independiente de S .

Sea $c = c_1 c_2$, vamos a calcular en un caso concreto la integral

$$\int_{\lambda \in H_2(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda \cap S) \Phi_2,$$

para así determinar el valor de c . Sea S la esfera unidad S^2 . Volviendo nuevamente al ejemplo 4.24, el espacio $H_2^+(\mathbb{R}^3) = S^2 \times \mathbb{R}$ es un doble recubrimiento de $H_2(\mathbb{R}^3)$, luego

$$\int_{\lambda \in H_2(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda \cap S) \Phi_2 = \frac{1}{2} \int_{\lambda \in H_2^+(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda \cap S) \Phi_2^+,$$

donde $\Phi_2^+ = |\Omega \wedge dr|$, siendo Ω la forma de volumen canónica de la esfera. Un plano orientado $\lambda = (\xi, r) \in S^2 \times \mathbb{R}$ corta con la esfera S^2 si y sólo si $|r| \leq 1$, y entonces

$$\text{longitud}(\lambda \cap S^2) = 2\pi\sqrt{1-r^2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\lambda \in H_2^+(\mathbb{R}^3)} \text{longitud}(\lambda \cap S) \Phi_2^+ &= \int_{\xi \in S^2} \left(\int_{-1}^1 2\pi\sqrt{1-r^2} dr \right) |\Omega| \\ &= 8\pi^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-r^2} dr \\ &= 4\pi^3 \end{aligned}$$

y

$$c = \frac{4\pi^3}{2\text{area}(S^2)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

□

Teorema 4.29 *Sea B uno de los tres espacios clásicos: el elíptico, el euclídeo o el hiperbólico, y sea G el respectivo grupo de isometrías. Sea Γ_p , con $1 \leq p < n = \dim B$, el espacio de las subvariedades p -dimensionales completas y totalmente geodésicas de B , y sea Φ_p una densidad de orden máximo (medida) en Γ_p . Sea k un entero tal que $1 \leq k < n$ y $k + p > n$, entonces existe una constante c que depende solamente de n , k , p y de la normalización de Φ_p , tal que para toda subvariedad compacta k -dimensional $N \subset B$, se tiene*

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in \Gamma_p} \text{vol}_{k+p-n}(\gamma \cap N) \Phi_p. \quad (4.11)$$

Demostración Sea Γ' el espacio de pares de $\Gamma_p \times \Gamma_{2n-k-p}$ que se cortan transversalmente. El conjunto de pares que no lo hacen tiene medida nula en el espacio producto para la medida producto. Sea A' es espacio de incidencias estándar entre B y Γ' , y sea A_{n-k} el equivalente para B y Γ_{n-k} . Consideremos ahora el morfismo de fibrados dobles siguiente

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & \Gamma' \\ \text{id} \downarrow & & \rho_A \downarrow & & \rho_\Gamma \downarrow \\ B & \xleftarrow{\pi_1} & A_{n-k} & \xrightarrow{\pi_2} & \Gamma_{n-k} \end{array}$$

donde $\rho_\Gamma(\gamma, \lambda) = \gamma \cap \lambda$ y $\rho_A(x, \gamma, \lambda) = (x, \gamma \cap \lambda)$. Este morfismo satisface la hipótesis del teorema 4.27 y, por tanto, $\pi_{1*}\pi_2^*\rho_{\Gamma*} = \text{id}_*\pi_{1*}'(\pi_2')^* = \pi_{1*}'(\pi_2')^*$.

Por otro lado, se puede ver fácilmente que ρ_Γ es equivariante bajo la acción de G sobre Γ' y Γ_{n-k} , entonces la densidad $\rho_{\Gamma*}(\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p})$ es invariante en Γ_{n-k} y, por el lema 4.22, existirá una constante c_1 tal que

$$\Phi_{n-k} = c_1 \cdot \rho_{\Gamma*}(\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p}).$$

Utilizando ahora a fórmula de Crofton (4.9) y el teorema de Fubini, para ciertas constantes c_2 y c_3 , se tiene

$$\begin{aligned} \text{vol}_k(N) &= c_2 \int_N \pi_{1*}\pi_2^*\Phi_{n-k} \\ &= c_1 c_2 \int_N \pi_{1*}\pi_2^*\rho_{\Gamma*}(\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p}) \\ &= c_1 c_2 \int_N \pi_{1*}'(\pi_2')^*(\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p}) \\ &= c_1 c_2 \int_{\Gamma'} \#(N \cap \gamma \cap \lambda) \Phi_p \star \Phi_{2n-k-p} \\ &= c_1 c_2 \int_{\Gamma_p} \left(\int_{\Gamma_{2n-k-p}} \#((N \cap \gamma) \cap \lambda) \Phi_{2n-k-p} \right) \Phi_p \\ &= \frac{c_1 c_2}{c_3} \int_{\Gamma_p} \text{vol}_{k+p-n}(N \cap \gamma) \Phi_p. \end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Geometría integral de espacios Finsler proyectivos

Todo producto escalar induce una norma, pero el contrario no es cierto. Un espacio de Finsler es una abstracción de una variedad riemanniana en la que carecemos de un producto escalar en el tangente, pero tenemos una norma. Estudiaremos en este capítulo el caso particular de los espacios de Finsler proyectivos, espacios modelados sobre \mathbb{R}^n para los cuales las rectas son las geodésicas.

5.1. Espacios de Finsler

5.1.1. Métricas Finsler.

Una métrica Finsler sobre una variedad diferenciable M equivale a asociar a cada punto $x \in M$ una métrica de Minkowski sobre el espacio tangente $T_x M$ de forma diferenciable con respecto a x .

Definición 5.1 Sea M^n una variedad diferenciable. Una métrica Finsler es una aplicación $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

- a. $F \in C^\infty(TM \setminus \Theta)$, donde Θ es la sección nula de TM ;
- b. F es positivamente homogénea de grado 1 en la componente tangencial, i. e. dados $x \in M$ y $v \in T_x M$, entonces:

$$F(x, t \cdot v) = |t| \cdot F(x, v), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

- c. para todo punto $x \in M$, el conjunto dado por:

$$B_x M := \{v \in T_x M : F(x, v) \leq 1\}$$

es un cuerpo cuadráticamente convexo y suave en $T_x M$.

Gracias a las propiedades b y c, $F_x = F(x, \cdot)$ es una norma en $T_x M$ (la norma generada por $B_x M$ ha de coincidir con F_x). Es más, F es una 1-densidad sobre M . Recordemos que, por ser $B_x M$ cuadráticamente convexo, su polar $B_x^* M \subset T_x^* M$ también es un cuerpo cuadráticamente convexo y C^∞ y que, por definición, el hessiano de F_x es definido positivo en cada punto.

Los ejemplos más sencillos de métricas Finsler pueden ser una métrica de Minkowski en un espacio vectorial tal que la esfera unidad es un ciclo de referencia o una métrica riemanniana.

Definición 5.2 Un espacio de Finsler es un par (M, F) , donde F es una métrica Finsler sobre la variedad diferenciable M .

Un espacio de Finsler es infinitesimalmente un espacio de Minkowski. La estructura de Minkowski en cada espacio tangente cambia suavemente con respecto al punto base.

5.1.2. Espacios de Finsler proyectivos.

La métrica de un espacio Finsler no nos ofrece un método directo de medir la distancia entre dos puntos de la variedad, sin embargo si nos permite medir la tasa de cambio cuando vamos de un punto a otro. Para definir la distancia entre dos puntos, vamos a seguir un proceso de marcha atrás, definiendo primero la longitud de curvas y a partir de ello, la distancia entre puntos.

Definición 5.3 Sea (M, F) un espacio de Finsler y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un camino¹ de clase C^∞ . Se define la longitud del camino γ como el valor de la integral:

$$\text{longitud}(\gamma) := \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_\gamma F. \quad (5.1)$$

Puesto que F es homogénea de grado 1, esta definición no depende de la parametrización. Ahora tenemos un método conciso para medir el trayecto entre dos puntos dependiendo del camino elegido. Es natural pues definir la distancia entre dos puntos como el trayecto más corto posible.

Definición 5.4 Dado un espacio de Finsler (M, F) , sean $x, y \in M$. Definimos la distancia entre x e y como el ínfimo de las longitudes de los arcos uniendo x e y , i. e.

$$\text{dist}(x, y) := \inf\{\text{longitud}(\gamma) : \gamma \text{ es un arco uniendo } x \text{ e } y\}. \quad (5.2)$$

Definición 5.5 En un espacio de Finsler (M, F) , un arco uniendo $x, y \in M$ es un segmento geodésico si para todo otro arco δ uniendo x e y , se tiene que:

$$\text{longitud}(\delta) \geq \text{longitud}(\gamma).$$

¹Hacemos referencia aquí a una subvariedad inmersa de dimensión 1. Identificaremos con γ , la propia parametrización y el arco que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

Los segmentos geodésicos son aquellas subvariedades de dimensión 1 que minimizan el problema variacional

$$\gamma \mapsto \int_{\gamma} F.$$

Definición 5.6 En un espacio de Finsler (M, F) , un curva de M definida en un intervalo abierto I es una curva geodésica si localmente es un segmento geodésico, i. e. para todo $t_0 \in I$ existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $t_1, t_2 \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$, el arco $\gamma([t_1, t_2])$ es un segmento geodésico.

Nos son de particular interés las métricas Finsler sobre \mathbb{R}^n para las cuales las curvas geodésicas son las rectas afines de \mathbb{R}^n .

Definición 5.7 Una métrica Finsler sobre \mathbb{R}^n se dice proyectiva si para ella las curvas geodésicas son exactamente las rectas afines de \mathbb{R}^n .

El 4ij problema de Hilbert trata de determinar y estudiar dichas métricas Finsler. Un primer resultado en esta dirección es debido a Hamel, un estudiante de Hilbert.

Teorema 5.8 (Hamel) Para una métrica Finsler F sobre \mathbb{R}^n , las rectas afines minimizan el problema variacional $\gamma \mapsto \int_{\gamma} F$ si y sólo si F satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial v_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial v_i}, \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n. \quad (5.3)$$

Ejemplo 5.9 [Espacios de Minkowski] Ya vimos en la sección 3.1.2 que las geodésicas del espacio de Minkowski (\mathbb{R}^n, B) , eran las rectas afines si ∂B era estrictamente convexo. Por tanto, las normas de \mathbb{R}^n tales que la bola unidad asociada es un cuerpo cuadráticamente convexo, son métricas Finsler proyectivas.

Ejemplo 5.10 [La construcción de Busemann-Pogorelov] Sea Φ una densidad de volumen sobre el espacio de hiperplanos afines $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, definimos la función distancia entre x e y como la medida del conjunto de hiperplanos que cortan el segmento \overline{xy} , es decir:

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) := \int_{\lambda \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \#(\overline{xy} \cap \lambda) \Phi.$$

Definimos entonces la longitud de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rectificable, mediante la expresión:

$$\widehat{\text{longitud}}(\gamma) := \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{l_P} \widehat{\text{dist}}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})),$$

donde $P = \{t_i : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{l_P} = b\}$ es una buena partición del intervalo $[a, b]$, es decir $\gamma \in C^\infty([a, b] \setminus P)$, y donde $|P|$ es el diámetro de dicha partición. Con

la notación empleada, queremos hacer resaltar que las funciones aquí definidas no son (a priori) iguales a las dadas en (5.2) y (5.1), ya que unas vienen definidas a partir de un métrica Finsler y las otras no.

La función $\widehat{\text{dist}}$ es obviamente simétrica y positiva, anulándose si y sólo si la distancia es medida entre puntos iguales. Por tanto, para que la función $\widehat{\text{dist}}$ sea realmente una distancia, falta comprobar la desigualdad triangular. En un principio, no tenemos control sobre la densidad elegida y no podemos asegurar que la desigualdad se cumpla. Supongamos pues que sí lo hace y que además es desarguesiana:

$$z \in \overline{xy} \Leftrightarrow \widehat{\text{dist}}(x, y) = \widehat{\text{dist}}(x, z) + \widehat{\text{dist}}(z, y).$$

Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva rectificable uniéndolos y sea P una buena partición de $[a, b]$. Por la desigualdad triangular,

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) \leq \sum_{i=1}^{l_P} \widehat{\text{dist}}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})),$$

por tanto

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) \leq \widehat{\text{longitud}}(\gamma)$$

y así

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) \leq \inf \{ \widehat{\text{longitud}}(\gamma) : \gamma \text{ es un arco uniendo } x \text{ e } y \}.$$

Pero es inmediato ver que $\widehat{\text{dist}}(x, y) = \widehat{\text{longitud}}(\overline{xy})$, luego

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) = \inf \{ \widehat{\text{longitud}}(\gamma) : \gamma \text{ es un arco uniendo } x \text{ e } y \}.$$

Definamos ahora la función:

$$F(x, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \widehat{\text{dist}}(x, x + tv),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Se puede comprobar que entonces F_x define una norma en \mathbb{R}^n , pero para que esta fuera una métrica Finsler, deberíamos verificar que es diferenciable con respecto al punto base y que las $(n-1)$ -esferas $F_x^{-1}(1)$ son ciclos de referencia. Suponiendo esto último, tenemos una métrica Finsler para la cual la longitud del segmento \overline{xy} es

$$\widehat{\text{longitud}}(\overline{xy}) = \int_{\overline{xy}} F$$

y para cualquier curva γ en \mathbb{R}^n

$$\widehat{\text{longitud}}(\gamma) = \int_{\gamma} F.$$

Es decir que estas definiciones coinciden con las anteriormente dadas (dejaremos de distinguirlas), por lo que las rectas afines de \mathbb{R}^n son geodésicas para la métrica F . Es más,

son las únicas geodésicas: si γ es una geodésica (no recta) uniendo dos puntos x e y , para algún tiempo t_0 , el punto $\gamma(t_0)$ no pertenece al segmento \overline{xy} . Si consideramos la descomposición de γ en dos arcos γ_1 y γ_2 tales que γ_1 une x con $\gamma(t_0)$ y γ_2 une $\gamma(t_0)$ con y , utilizando la propiedad desarguesiana:

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, y) &= \text{longitud}(\gamma) \\ &= \text{longitud}(\gamma_1) + \text{longitud}(\gamma_2) \\ &\geq \text{dist}(x, \gamma(t_0)) + \text{dist}(\gamma(t_0), y) \\ &> \text{dist}(x, y), \end{aligned}$$

contradicción. Por tanto, F es una métrica Finsler proyectiva.

Calculemos ahora una nueva expresión para la métrica F . Recordemos antes de nada que teníamos la siguiente representación para el espacio de hiperplanos orientados de \mathbb{R}^n , $H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) = S^{n-1} \times \mathbb{R}$, el cual es un doble recubrimiento de $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Considerando $\Phi^+ = \pi^* \Phi$, donde $\pi : H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ es la proyección canónica, tenemos:

$$\text{dist}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\lambda \in H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)} \#(\overline{xy} \cap \lambda) \Phi^+.$$

Dado $\xi \in S^{n-1}$, el hiperplano orientado $(\xi, r) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$ interseca al segmento $\overline{x(x+tv)}$ si $\xi \cdot x \leq r \leq \xi \cdot (x+tv)$ (cuando $\xi \cdot v > 0$ o si $\xi \cdot (x+tv) \leq r \leq \xi \cdot x$ (cuando $\xi \cdot v < 0$). Por otra parte, como ya vimos en 2.15, existe una función $\nu : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de clase \mathcal{C}^∞ tal que $\Phi_{(\xi, r)}^+ = \nu(\xi, r) |\Omega \wedge dr|_{(\xi, r)}$, donde Ω es la forma de volumen estándar de S^{n-1} . Utilizando esto y el teorema de Fubini, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{dist}(x, x+tv) &= \int_{\lambda \in H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)} \#(\overline{xy} \cap \lambda) \Phi^+ \\ &= \int_{\xi \in S^{n-1}, \xi \cdot v > 0} \left(\int_{\xi \cdot x}^{\xi \cdot (x+tv)} \nu(\xi, r) dr \right) |\Omega| + \\ &\quad \int_{\xi \in S^{n-1}, \xi \cdot v < 0} \left(\int_{\xi \cdot (x+tv)}^{\xi \cdot x} \nu(\xi, r) dr \right) |\Omega|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} \cdot \text{dist}(x, x+tv) &= \int_{\xi \in S^{n-1}, \xi \cdot v > 0} (\xi \cdot v) \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega| - \\ &\quad \int_{\xi \in S^{n-1}, \xi \cdot v < 0} (\xi \cdot v) \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega| \\ &= \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega|. \end{aligned}$$

Es decir que la métrica F admite la representación integral:

$$F(x, v) = \frac{1}{2} \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega|,$$

donde Ω es la forma de volumen estándar de S^{n-1} y $\nu : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función par de clase \mathcal{C}^∞ . Este resultado es general. En efecto, Pogorelov y Szabó demostraron

Teorema 5.11 (Pogorelov [38], Szabó [49]) *Sea F una métrica Finsler proyectiva sobre \mathbb{R}^n . Entonces, existe una aplicación \mathcal{C}^∞ y par $\nu : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, no necesariamente positiva, tal que*

$$F(x, v) = \frac{1}{2} \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega|, \quad (5.4)$$

donde Ω es la forma de volumen estándar de S^{n-1} .

5.1.3. Volúmenes en espacios de Finsler.

Todo espacio de Finsler es infinitesimalmente un espacio de Minkowski, por lo tanto es lógico querer definir una noción de volumen (o de área) sobre espacios de Finsler tal que este objeto sea compatible con la definición de noción de volumen (o de área) sobre espacios de Minkowski. Supongamos que tenemos una noción de volumen para un espacio de Minkowski (ver sección 3.2). Entonces, para un espacio de Finsler (M, F) tenemos en cada tangente $T_x M$, con $x \in M$, una densidad positiva de orden máximo $\phi_x : \Lambda^n T_x M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Si ϕ_x depende suavemente del punto base $x \in M$, entonces tenemos una densidad de volumen sobre M , más concretamente queremos lo siguiente:

Definición 5.12 *Una noción de volumen para espacios de Finsler es una manera de asignar a cada espacio de Finsler (M, F) una densidad de volumen vol_F sobre M satisfaciendo:*

- a. (Normalización) *si F es una métrica riemanniana, entonces la densidad de volumen vol_F es la densidad de volumen euclídea estándar²;*
- b. (Isometría) *si $i : (M, F) \rightarrow (N, L)$ es una isometría entre espacios de Finsler³, entonces $i^* \text{vol}_L = \text{vol}_F$;*
- c. (Monotonía) *si F y L son dos métricas Finsler sobre M tales que $F \leq L$, entonces $\text{vol}_F \leq \text{vol}_L$.*
- d. (Continuidad) *la aplicación que asigna a cada norma F_x en $T_x M$, la norma vol_{F_x} en $\Lambda^n T_x M$ es continua con respecto a la distancia de Banach-Mazur;*

²i. e. $\text{vol}_{F_x}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$ para cualquier base ortonormal de $T_x M$.

³ i es un difeomorfismo y además $i^* L = F$.

El volumen de Busemann.

En el capítulo §3 (sección §3.2.1) hemos descrito la noción de volumen de Busemann para espacios de Minkowski, extendamos pues dicha noción de volumen a espacios de Finsler. Para definir la noción de volumen de Busemann para espacios de Finsler, dado un espacio de Finsler (M, F) , tomemos en cada espacio tangente $T_x M$ la siguiente densidad de volumen:

$$\phi^{\text{Bus}}(x, v) := \frac{\kappa_n}{\text{vol}(B_x M; v)}, \quad \forall v \in \Lambda^n T_x M \setminus \{0\}, \quad (5.5)$$

donde $B_x M$ es la bola unidad para F_x en $T_x M$ y $\text{vol}(B_x M; v)$ es su volumen con respecto a la única densidad vectorial $|\Omega|$ sobre $T_x M$ tal que $|\Omega|(v) = 1$. Si v es nulo, entonces definimos el valor de $\phi^{\text{Bus}}(x, 0)$ por cero. La densidad ϕ^{Bus} depende suavemente del punto base y, por tanto, es una densidad de volumen de clase \mathcal{C}^∞ sobre la variedad M . El volumen de Busemann del espacio de Finsler M es entonces

$$\text{vol}^{\text{Bus}}(M) := \int_M \phi^{\text{Bus}}, \quad (5.6)$$

si la integral existe.

Notar que todo espacio de Finsler es un espacio métrico y, por ello, la medida de Hausdorff puede ser definida sobre este tipo de espacios. Se puede demostrar que de hecho la noción de volumen de Busemann y la medida de Hausdorff coinciden.

El volumen de Holmes-Thompson.

La noción de volumen de Holmes-Thompson sobre espacios de Minkowski fue definida como la *dual* de la noción de Busemann (ver sección 3.2.1). Si (M^n, F) es un espacio de Finsler, se define la densidad de volumen de Holmes-Thompson como

$$\phi^{\text{HT}}(x, v) := \frac{\text{vol}(B_x^* M; v)}{\kappa_n}, \quad \forall v \in \Lambda^n T_x M \setminus \{0\}, \quad (5.7)$$

donde $B_x^* M \subset T_x^* M$ es el dual del cuerpo convexo $B_x M \subset T_x M$ y $\text{vol}(B_x^* M, v)$ su volumen con respecto a $|v|$. Si $v = 0$, entonces $\phi^{\text{HT}}(x, 0) := 0$. La densidad ϕ^{HT} es de clase \mathcal{C}^∞ y el volumen de Holmes-Thompson del espacio de Finsler (M, F) se define por

$$\text{vol}^{\text{HT}}(M) := \int_M \phi^{\text{HT}}, \quad (5.8)$$

siempre y cuando la integral exista.

5.1.4. Áreas en espacios de Finsler.

Recordar que una noción de volumen para espacios de Minkowski inducía una noción de área. Aquí consideraremos de forma análoga una noción área para espacios de Finsler

como la inducida por alguna noción de volumen para espacios de Finsler. Notar que si (M^n, F) es un espacio de Finsler y $N \subset M$ es una subvariedad inmersa k -dimensional, entonces N es un espacio de Finsler en sí mismo teniendo por métrica la restricción de F a N . Definimos la k -área de N como el volumen del espacio de Finsler $(N, F|_N)$.

El área de Busemann de N puede ser obtenida mediante la integral

$$\text{area}_k^{\text{Bus}}(N) := \int_N \phi_k^{\text{Bus}}, \quad (5.9)$$

donde

$$\phi_k^{\text{Bus}}(x, v) := \frac{\kappa_k}{\text{vol}(B_x M \cap E; v)}, \quad \forall v \in \Lambda_d^k T_x M \setminus \{0\}, \quad (5.10)$$

siendo $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ y $E = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Análogamente, el área de Holmes-Thompson de N puede ser obtenida mediante la integral

$$\text{area}_k^{\text{HT}}(N) := \int_N \phi_k^{\text{HT}}, \quad (5.11)$$

donde

$$\phi_k^{\text{HT}}(x, v) := \frac{\text{vol}((B_x M \cap E)^*; v)}{\kappa_k}, \quad \forall v \in \Lambda_d^k T_x M \setminus \{0\}, \quad (5.12)$$

siendo de la misma forma $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ y $E = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

5.2. Fórmulas de Crofton

Entre las dos nociones de área y volumen descritas en la sección anterior, solamente la de Holmes-Thompson parecen tener utilidad en geometría integral. En esta sección, daremos una prueba completa de la formula de Crofton para espacios de Finsler proyectivos mediante el uso de las nociones de Holmes-Thompson. Puesto que un espacio de Minkowski es un caso particular de espacio de Finsler proyectivo (cuando la bola unidad es suave y cuadráticamente convexa), tendremos como consecuencia una formula de Crofton para espacios de Minkowski. Una aplicación interesante de las técnicas de fibrados dobles es, como veremos, la posibilidad de probar una versión generalizada de la formula integral de Cauchy.

5.2.1. Fórmulas de Crofton para espacios de Finsler proyectivos.

Teorema 5.13 *Sea F una métrica Finsler proyectiva en \mathbb{R}^n y sea k un entero tal que $1 \leq k \leq n-1$. Entonces, existe una densidad de orden máximo (una medida con signo) Φ_{n-k} sobre el espacio $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ de los $(n-k)$ -planos de \mathbb{R}^n tal que para cualquier subvariedad inmersa $N \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k , se tiene*

$$\text{area}_k^{\text{HT}}(N) = \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \#(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}. \quad (5.13)$$

En la construcción de Pogorelov del ejemplo 5.10, hemos visto de cerca la relación existente entre el caso $k = 1$ y la métrica de Finsler.

Demostración Primero trataremos el caso $k = 1$. Puesto que por hipótesis F es una métrica Finsler proyectiva, existe una densidad de orden máximo Φ_{n-1} en $H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\text{dist}(x, y) = \int_{\lambda \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \#(\overline{xy} \cap \lambda) \Phi_{n-1},$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Considerando el espacio de los hiperplanos orientados $H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)$ y el doble recubrimiento canónico $\rho : H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, sea la densidad de orden máximo $\Phi_{n-1}^+ = \rho^* \Phi_{n-1}$ entonces obtenemos la versión *orientada* de la ecuación anterior

$$\text{dist}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\lambda \in H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)} \#(\overline{xy} \cap \lambda) \Phi_{n-1}^+.$$

Tal y como vimos en 5.10, $\Phi_{n-1}^+ = \nu |\Omega \wedge dr|$, donde $\nu : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación par de clase \mathcal{C}^∞ , y

$$F(x, v) = \frac{1}{2} \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $v \in T_x \mathbb{R}^n$, donde Ω es la forma de volumen estándar de la esfera S^{n-1} . De forma análoga a como obtuvimos (4.2), se obtiene que

$$F = (\pi_1^+)_* (\pi_2^+)^* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right),$$

sobre el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A_{n-1}^+ & \\ \pi_1^+ \swarrow & & \searrow \pi_2^+ \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

donde A_{n-1}^+ es el espacio de incidencias estándar.

Consideremos ahora el morfismo de fibrados dobles siguiente

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi_1^+} & A_{n-1}^+ & \xrightarrow{\pi_2^+} & H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) \\ id \downarrow & & \mu \downarrow & & \rho \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi_1} & A_{n-1} & \xrightarrow{\pi_2} & H_{n-1}(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad (5.14)$$

donde A_{n-1} es el espacio de incidencias estándar sobre el fibrado doble correspondiente y $\mu : A_{n-1}^+ \rightarrow A_{n-1}$ es tal que $\mu(x, \lambda^+) = (x, \rho(\lambda^+))$. Utilizando la propiedad 4.27 para morfismos de fibrados dobles, obtenemos que

$$F = \pi_{1*} \pi_2^* \rho_* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right) = \pi_{1*} \pi_2^* \Phi_{n-1},$$

ya que $\rho_* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right) = \Phi_{n-1}$. Por la fórmula de Crofton para fibrados dobles (ver teorema 4.15), llegamos al resultado deseado:

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_{\gamma} F = \int_{\lambda \in H_{n-1}(\mathbb{R}^n)} \#(\gamma \cap \lambda) \Phi_{n-1},$$

para cualquier curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^∞ .

Para el caso $k > 1$, realizaremos la siguiente construcción: consideremos el espacio

$$H_{n-1}^k = \overbrace{H_{n-1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times H_{n-1}(\mathbb{R}^n)}^{k \text{ veces}}$$

y sea en este espacio el subconjunto

$$\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in H_{n-1}^k : \dim(\lambda_1 \cap \cdots \cap \lambda_k) > n - k\},$$

i. e. Δ es el subconjunto de los k -planos que no están en posición genérica. Consideremos ahora el fibrado

$$\rho_{n-k} : H_{n-1}^k \setminus \Delta \rightarrow H_{n-k}(\mathbb{R}^n),$$

dado por

$$\rho_{n-k}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := \lambda_1 \cap \cdots \cap \lambda_k,$$

para todo $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in H_{n-1}^k \setminus \Delta$. La idea es trabajar con la densidad producto

$$\Phi^k = \overbrace{\Phi_{n-1} \times \cdots \times \Phi_{n-1}}^{k \text{ veces}}$$

en el espacio producto H_{n-1}^k , y con su compresión mediante la proyección ρ_{n-k} :

$$\bar{\Phi}_{n-k} = (\rho_{n-k})_* \Phi^k.$$

Nuestro objetivo será demostrar que, salvo un factor constante, $\bar{\Phi}_{n-k}$ es la densidad anunciada en el teorema. \square

Lema 5.14 Sea F una métrica Finsler proyectiva en \mathbb{R}^n y sea $\nu : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación par de clase \mathcal{C}^∞ tal que

$$F(x, v) = \frac{1}{2} \int_{\xi \in S^{n-1}} |\xi \cdot v| \nu(\xi, \xi \cdot x) |\Omega|$$

para todo $x, v \in \mathbb{R}^n$, donde Ω es la forma de volumen estándar de S^{n-1} . Entonces, en el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A_{n-k} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-k}(\mathbb{R}^n), \end{array} \quad (5.15)$$

tenemos

$$\pi_{1*}\pi_2^*\bar{\Phi}_{n-k}(x;v) = \frac{1}{2^k} \int_{\xi \in (S^{n-1})^k} |\xi \cdot v| \prod_{i=1}^k \nu(\xi_i, \xi_i \cdot x) |\Omega|^k,$$

para todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ y todo k -vector descomponible $v \in \Lambda_d^k T_x \mathbb{R}^n$.

Demostración En primer lugar, recordemos que en el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A_{n-1}^+ & \\ \pi_1^+ \swarrow & & \searrow \pi_2^+ \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n), \end{array}$$

tenemos

$$F = (\pi_1^+)_*(\pi_2^+)^* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right),$$

donde $\Phi_{n-1}^+ = \nu|\Omega \wedge dr|$. Vamos a construir un morfismo de fibrados dobles similar al del diagrama (5.14), añadiendo un tercer nivel de hiperplanos orientados. Consideremos el espacio

$$(H_{n-1}^+)^k = \overbrace{H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n)}^{k \text{ veces}},$$

y definamos en él el subconjunto

$$\Delta^+ = \{(\lambda_1^+, \dots, \lambda_k^+) \in H_{n-1}^{+k} : \dim(\lambda_1^+ \cap \cdots \cap \lambda_k^+) > n - k\}.$$

Consideremos entonces el siguiente diagrama de morfismos de fibrados dobles:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\bar{\pi}_1^+} & (A_{n-1}^+)^k & \xrightarrow{\bar{\pi}_2^+} & (H_{n-1}^+)^k \setminus \Delta^+ \\ \downarrow id & & \downarrow \mu^k & & \downarrow \rho^k \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\bar{\pi}_1} & A_{n-1}^k & \xrightarrow{\bar{\pi}_2} & H_{n-1}^k \setminus \Delta \\ \downarrow id & & \downarrow \mu_{n-k} & & \downarrow \rho_{n-k} \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi_1} & A_{n-1} & \xrightarrow{\pi_2} & H_{n-1}(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad (5.16)$$

donde los espacios de incidencias son

$$\begin{aligned} (A_{n-1}^+)^k &= \{(x, \lambda_1^+, \dots, \lambda_k^+) \in \mathbb{R}^n \times ((H_{n-1}^+)^k \setminus \Delta^+) : x \in \lambda_1^+ \cap \cdots \cap \lambda_k^+\}, \\ A_{n-1}^k &= \{(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^n \times (H_{n-1}^k \setminus \Delta) : x \in \lambda_1 \cap \cdots \cap \lambda_k\}, \\ A_{n-1} &= \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times H_{n-1}(\mathbb{R}^n) : x \in \lambda\}, \end{aligned}$$

y las proyecciones vienen dadas por

$$\begin{aligned}\rho^k : (\lambda_1^+, \dots, \lambda_k^+) &\in (H_{n-1}^+)^k \setminus \Delta^+ \mapsto (\rho(\lambda_1^+), \dots, \rho(\lambda_k^+)) \in H_{n-1}^k \setminus \Delta, \\ \rho_{n-k} : (\lambda_1, \dots, \lambda_k) &\in H_{n-1}^k \setminus \Delta \mapsto \lambda_1 \cap \dots \cap \lambda_k \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n), \\ \mu^k : (x, \lambda_1^+, \dots, \lambda_k^+) &\in (A_{n-1}^+)^k \mapsto (x, \rho(\lambda_1^+), \dots, \rho(\lambda_k^+)) \in A_{n-1}^k, \\ \mu_{n-k} : (x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) &\in A_{n-1}^k \mapsto (x, \lambda_1 \cap \dots \cap \lambda_k) \in A_{n-k},\end{aligned}$$

siendo $\rho : H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ el doble recubrimiento natural.

Recordemos que tenemos $\bar{\Phi}_{n-1} = \rho_* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right)$, por tanto

$$\rho_*^k \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right)^k = \Phi^k,$$

y que también teníamos que $\bar{\Phi}_{n-k} = (\rho_{n-k})_* \Phi^k$. Luego, a través de los morfismos del diagrama (5.16) llegamos a que

$$\pi_{1*} \pi_2^* \bar{\Phi}_{n-k} = \bar{\pi}_{1*} \bar{\pi}_2^* \Phi^k = (\bar{\pi}_1^+)_* (\bar{\pi}_2^+)^* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right).$$

Por otra parte, $H_{n-1}^+(\mathbb{R}^n) = S^{n-1} \times \mathbb{R}$, y por tanto el fibrado doble

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{\bar{\pi}_1^+} (A_{n-1}^+)^k \xrightarrow{\bar{\pi}_2^+} (H_{n-1}^+)^k \setminus \Delta^+$$

es equivalente al fibrado doble

$$\mathbb{R}^n \xleftarrow{\bar{\pi}_1^+} (S^{n-1})^k \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{\pi}_2^+} (S^{n-1})^k \times \mathbb{R}^k \setminus \Delta', \quad (5.17)$$

donde

$$\Delta' = \{(\xi_1, \dots, \xi_k, r_1, \dots, r_k) \in (S^{n-1})^k \times \mathbb{R}^k : \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k = 0\}$$

y las proyecciones $\bar{\pi}_1^+, \bar{\pi}_2^+$ vienen dadas por

$$\bar{\pi}_1^+(a) := x \quad \text{y} \quad \bar{\pi}_2^+(a) := (\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_1 \cdot x, \dots, \xi_k \cdot x),$$

para todo $a = (\xi_1, \dots, \xi_k, x) \in (S^{n-1})^k \times \mathbb{R}^n$. Ahora, tenemos una estructura adecuada para poder calcular $(\bar{\pi}_1^+)_* (\bar{\pi}_2^+)^* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right)$ a través del fibrado doble (5.17). Para ello, tengamos en cuenta que $\Phi_{n-1}^+ = \nu |\Omega \wedge dr|$. Entonces,

$$(\Phi_{n-1}^+)_b^k = \Pi_{i=1}^k \nu(\xi_i, r_i) |\Omega^k \wedge (dr)^k|,$$

para todo punto $b = (\xi_1, \dots, \xi_k, r_1, \dots, r_k) \in (S^{n-1})^k \times \mathbb{R}^k$. Sean $v_1, \dots, v_k \in T_x \mathbb{R}^n$ y sean $V_1, \dots, V_k \in T_a (S^{n-1})^k \times \mathbb{R}^n$ tales que

$$V_i = (0, \dots, 0, v_i) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Tenemos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $(D\bar{\pi}_1^+)_a(V_i) = v_i$. Si completamos el sistema anterior de vectores con el sistema $X_1, \dots, X_{(n-1)k} \in T_a(\bar{\pi}_1^+)^{-1}(x)$, puesto que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ tenemos

$$(D\bar{\pi}_2^+)_a(V_i) = (0, \dots, 0, \xi_1 \cdot v_i, \dots, \xi_k \cdot v_i),$$

obtenemos de forma directa que

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{\pi}_2^+)^* (\nu \otimes \dots \otimes \nu |\Omega^k \wedge (dr)^k|) \right]_a (X_1, \dots, X_{(n-1)k}, V_1, \dots, V_k) = \\ & = |\det(\xi_i \cdot v_j)_{1 \leq i, j \leq k}| \cdot \prod_{i=1}^k \nu(\xi_i, \xi_i \cdot x) \cdot |\Omega|^k(X_1, \dots, X_{(n-1)k}). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que la contracción de $(\bar{\pi}_2^+)^*(\Phi_{n-1}^+)^k$ con V_1, \dots, V_k restringida a la fibra $T_a(\bar{\pi}_1^+)^{-1}(x)$ es

$$\begin{aligned} & \left[(\bar{\pi}_2^+)^* (\nu \otimes \dots \otimes \nu |\Omega^k \wedge (dr)^k|) \right]_a \downarrow (V_1, \dots, V_k) = \\ & = |\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_k| \cdot \prod_{i=1}^k \nu(\xi_i, \xi_i \cdot x) \cdot |\Omega|^k. \end{aligned}$$

Si recordamos ahora la definición de compresión 4.7 y observamos que $(\bar{\pi}_1^+)^{-1}(x) \simeq (S^{n-1})^k$, llegamos a que

$$(\bar{\pi}_1^+)_*(\bar{\pi}_2^+)^* \left(\frac{1}{2} \Phi_{n-1}^+ \right)^k (x; v) = \frac{1}{2^k} \int_{\xi \in (S^{n-1})^k} |\xi \cdot v| \prod_{i=1}^k \nu(\xi_i, \xi_i \cdot x) |\Omega|^k,$$

□

Demostración [del Teorema 5.13, continuación.] En el integrando de la ecuación (2.14) del teorema 2.30, podemos reconocer la expresión obtenida en el lema anterior para la densidad $\pi_{1*}\pi_2^*\bar{\Phi}_{n-k}$, con $K = B_x\mathbb{R}^n$ y $\Phi = \nu_x|\Omega|$, siendo $\nu_x(\xi) = \nu(\xi, \xi \cdot x)$ para todo $\xi \in S^{n-1}$. Por tanto, para una cierta constante $c \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\text{area}(\pi_{E_v}(B_x^*\mathbb{R}^n); v) = c \cdot \pi_{1*}\pi_2^*\bar{\Phi}_{n-k}(x; v).$$

Aplicando ahora la definición de k -area de Holmes-Thompson vista en la relación (5.12), la k -densidad de Holmes-Thompson y la k -densidad $\pi_{1*}\pi_2^*\bar{\Phi}_{n-k}$ han de coincidir salvo por un factor constante, *i. e.*

$$\phi_k^{\text{HT}} = c \cdot \pi_{1*}\pi_2^*\bar{\Phi}_{n-k}.$$

Finalmente, tomando en $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ la densidad de volumen $\Phi_{n-k} := c \cdot \bar{\Phi}_{n-k}$, a través del fibrado doble (5.15), la fórmula de Crofton afirma que para toda subvariedad inmersa $N \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\text{area}_k^{\text{HT}}(N) = \int_N \phi_k^{\text{HT}} = \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \#(N \cap \lambda) \Phi_{n-k},$$

lo que concluye la demostración del teorema. □

5.2.2. Fórmulas integrales de Cauchy generalizadas.

Teorema 5.15 Sea F una métrica Finsler proyectiva en \mathbb{R}^n . Sea k un entero tal que $1 \leq k \leq n-2$. Sea $N \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie compacta. Si Φ_{n-k} es la densidad de $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ dada en el teorema 5.13, entonces existe una constante $c_{n,k}$ que depende únicamente de n y k tal que

$$\text{area}_{n-1}^{HT}(N) = c_{n,k} \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \text{area}_{n-k-1}^{HT}(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}. \quad (5.18)$$

Demostración Basta considerar el siguiente morfismo de fibrados dobles

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\bar{\pi}_1} & A_{n-k}^{k+1} & \xrightarrow{\bar{\pi}_2} & H_{n-k}^{k+1} \setminus \Delta \\ \text{id} \downarrow & & \mu \downarrow & & \rho \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi_1} & A_1 & \xrightarrow{\pi_2} & H_1(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

donde los espacios que aparecen son

$$\begin{aligned} H_{n-k}^{k+1} &= H_{k+1}(\mathbb{R}^n) \times H_{n-k}(\mathbb{R}^n), \\ \Delta &= \{(\lambda_1, \lambda_2) \in H_{n-k}^{k+1} : \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) > 1\}, \\ A_{n-k}^{k+1} &= \{(x, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times (H_{n-k}^{k+1} \setminus \Delta) : x \in \lambda_1 \cap \lambda_2\}, \\ A_1 &= \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times H_1(\mathbb{R}^n) : x \in \lambda\} \end{aligned}$$

y las proyecciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \rho : (\lambda_1, \lambda_2) \in H_{n-k}^{k+1} \setminus \Delta &\mapsto \lambda_1 \cap \lambda_2 \in H_1(\mathbb{R}^n), \\ \mu : (x, \lambda_1, \lambda_2) \in A_{n-k}^{k+1} &\mapsto (x, \lambda_1 \cap \lambda_2) \in A_1. \end{aligned}$$

Sean ahora Φ_1, Φ_{k+1} y Φ_{n-k} las respectivas densidades de orden máximo de $H_1(\mathbb{R}^n)$, $H_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ y $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$, para las cuales tenemos las fórmulas de Crofton del teorema 5.13. Se comprueba que existe una constante c que depende únicamente de n y k tal que

$$\Phi_1 = \rho_*(c \cdot \Phi_{k+1} \star \Phi_{n-k}).$$

Utilizando la propiedad de la transformada de Gelfand para el morfismos de fibrados dobles descrito arriba, obtenemos

$$\pi_{1*} \pi_2^* \Phi_1 = \bar{\pi}_{1*} \bar{\pi}_2^* (c \cdot \Phi_{k+1} \star \Phi_{n-k})$$

y por tanto, aplicando la fórmula de Crofton para fibrados dobles (ver teorema 4.15),

tenemos

$$\begin{aligned}
\text{area}_{n-1}^{HT}(N) &= \int_{\lambda \in H_1(\mathbb{R}^n)} \#(N \cap \lambda) \Phi_1 \\
&= \int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi_1 \\
&= \int_N \bar{\pi}_{1*} \bar{\pi}_2^* (c \cdot \Phi_{k+1} \star \Phi_{n-k}) \\
&= c \int_{(\lambda_1, \lambda_2) \in H_{n-k}^{k+1} \setminus \Delta} \#(N \cap \lambda_1 \cap \lambda_2) \Phi_{k+1} \star \Phi_{n-k} \\
&= c \int_{(\lambda_1, \lambda_2) \in H_{n-k}^{k+1}} \#(N \cap \lambda_1 \cap \lambda_2) \Phi_{k+1} \star \Phi_{n-k} \\
&= c \int_{\lambda_2 \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\lambda_1 \in H_{k+1}(\mathbb{R}^n)} \#((N \cap \lambda_2) \cap \lambda_1) \Phi_{k+1} \right) \Phi_{n-k} \\
&= c \int_{\lambda_2 \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \text{area}_{n-k-1}^{HT}(N \cap \lambda_2) \Phi_{n-k},
\end{aligned}$$

ecuación en la que reconocemos la fórmula deseada. \square

5.3. Densidades proyectivas y de Crofton en \mathbb{R}^n

El cuarto problema de Hilbert es un problema clásico del cálculo variacional: determinar todas las 1-densidades de \mathbb{R}^n para las cuales las rectas afines son minimales. Más generalmente, puede preguntarse para qué k -densidades (con $1 \leq k \leq n-1$), los k -planos afines son extremales (o incluso mínimos) del problema variacional asociado a una k -densidad ϕ :

$$N \mapsto \int_N \phi,$$

para subvariedades inmersas de dimensión k . Este cuestión ya fue considerada por Busemann y Gelfand. El artículo [28], de Gelfand y Smirnov, trata de arrojar algo de luz sobre el asunto.

Definición 5.16 Una k -densidad ϕ sobre \mathbb{R}^n , con $1 \leq k \leq n-1$, es una densidad de Crofton si existe una densidad de orden máximo Φ sobre el espacio $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ de $(n-k)$ -planos de \mathbb{R}^n tal que, para toda subvariedad inmersa $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\int_N \phi = \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \#(N \cap \lambda) \Phi. \quad (5.19)$$

La densidad (medida) Φ se llama la medida generadora de ϕ .

Las densidades de Crofton sobre \mathbb{R}^n son precisamente aquellas que forman el rango de la transformada de Gelfand sobre el fibrado doble

$$\begin{array}{ccc} & A_{n-k} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-k}(\mathbb{R}^n). \end{array} \quad (5.20)$$

Definición 5.17 Una k -densidad ϕ sobre \mathbb{R}^n , con $1 \leq k \leq n-1$, es una densidad proyectiva si todos los k -planos de \mathbb{R}^n son extremos del problema variacional

$$N \mapsto \int_N \phi,$$

donde $N \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad inmersa de dimensión k .

Si una densidad de Crofton posee una medida generadora positiva, por un razonamiento geométrico sencillo, se demuestra que dicha densidad ha de ser necesariamente proyectiva.

Teorema 5.18 Sea ϕ una k -densidad de Crofton sobre \mathbb{R}^n tal que su medida generadora es una medida positiva. Entonces, todos los k -planos de \mathbb{R}^n son mínimos para el problema variacional asociado a ϕ .

Demostración Sea D un dominio contenido en un k -plano y sea D' una subvariedad inmersa k -dimensional de \mathbb{R}^n tal que D y D' coinciden en sus fronteras, i. e. $\partial D = \partial D'$. Cualquier $(n-k)$ -plano que corta a D , también corta a D' , pero para D ese corte es generalmente sólo en un punto. Y puesto que la medida generadora Φ de ϕ es positiva, tenemos

$$\int_D \phi = \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \#(D \cap \lambda) \Phi \leq \int_{\lambda \in H_{n-k}(\mathbb{R}^n)} \#(D' \cap \lambda) \Phi = \int_{D'} \phi.$$

□

Teorema 5.19 Toda densidad de Crofton es proyectiva.

Para poder demostrar este resultado, vamos a ver primero que una densidad de Crofton tiene una representación integral particular. Con esa representación, veremos que una densidad de Crofton satisface unas ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema variacional estudiado y que caracterizan las densidades proyectivas.

Es importante notar que si ϕ es una k -densidad de Crofton sobre \mathbb{R}^n , entonces existe una densidad de orden máximo Φ^+ sobre H_{n-k}^+ tal que, para toda subvariedad inmersa $N \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión k , se tiene

$$\int_N \phi = \frac{1}{2} \int_{\lambda \in H_{n-k}^+(\mathbb{R}^n)} \#(N \cap \lambda) \Phi^+.$$

Considerando el doble recubrimiento $\rho : H_{n-k}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$, la densidad Φ^+ no es más que la retroacción por la proyección ρ de la medida generadora de ϕ .

Consideremos ahora la versión orientada del fibrado (5.20):

$$\begin{array}{ccc} & A_{n-k}^+ & \\ \pi_1^+ \swarrow & & \searrow \pi_2^+ \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-k}^+(\mathbb{R}^n). \end{array} \quad (5.21)$$

Es posible dar una nueva expresión para el espacio de incidencias A_{n-k}^+ . Denotemos por S_k^n a la intersección de la esfera euclídea unidad de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ con el cono de Grassmann de los k -covectores descomponibles $\Lambda_d^k(\mathbb{R}^n)^*$. Hay una manera simple de identificar todo punto de S_k^n con los elementos de la grassmanniana $G_{n-k}^+(\mathbb{R}^n)$ de los subespacios lineales de \mathbb{R}^n de dimensión $n - k$. A todo punto $\xi \in S_k^n$, se le asocia el subespacio lineal

$$E_\xi := \ker \xi_1 \cap \cdots \cap \ker \xi_k,$$

orientado de la siguiente manera: dada una base (u_1, \dots, u_{n-k}) de E , complétese hasta obtener una base orientada $(u_1, \dots, u_{n-k}, v_1, \dots, v_k)$ de \mathbb{R}^n . Diremos que E está positivamente orientado si $\xi \cdot v > 0$ y negativamente orientado en caso contrario.

El fibrado doble orientado (5.21) puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} & S_k^n \times \mathbb{R}^n & \\ \tilde{\pi}_1 \swarrow & & \searrow \tilde{\pi}_2 \\ \mathbb{R}^n & & H_{n-k}^+(\mathbb{R}^n), \end{array} \quad (5.22)$$

donde, para todo $(\xi, x) \in S_k^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(\xi, x) &:= x \\ \tilde{\pi}_2(\xi, x) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : \xi \rfloor (y - x) \equiv 0\}, \end{aligned}$$

estando la orientación de $\tilde{\pi}_2(\xi, x)$ dada de la misma manera que la de E_ξ . Un cálculo inmediato nos lleva a obtener que, si $\Phi^+ = \rho^* \Phi$ (siendo Φ una densidad de orden máximo cualquiera de $H_{n-k}(\mathbb{R}^n)$), la retroacción de Φ por $\tilde{\pi}_2$ a S_k^n puede ser escrita como sigue

$$(\tilde{\pi}_2^* \Phi)_{(\xi, x)} = \nu(\tilde{\pi}_2(\xi, x)) |\Omega \wedge \xi|, \quad (5.23)$$

donde Ω es la forma de volumen euclídea estándar de S_k^n y $\nu : H_{n-k}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación par de clase C^∞ (i. e. si λ_1 y λ_2 representan al mismo $(n - k)$ -plano con orientación contraria, $\nu(\lambda_1) = \nu(\lambda_2)$).

La construcción anterior nos facilitará la demostración del siguiente resultado:

Lema 5.20 Si ϕ es una k -densidad de Crofton sobre \mathbb{R}^n , con $1 \leq k \leq n-1$, entonces existe una aplicación par $\nu : H_{n-k}^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que ϕ admite la siguiente representación integral:

$$\phi(x; v) = \int_{\xi \in S_k^n} |\xi \cdot v| \nu(\tilde{\pi}_2(\xi, x)) |\Omega|, \quad (5.24)$$

para todo $v \in \Lambda_d^k(\mathbb{R}^n)$, donde Ω es la forma de volumen estándar de S_k^n .

Demostración Puesto que ϕ es una densidad de Crofton, entonces $\phi = \tilde{\pi}_{1*} \tilde{\pi}_2^* \Phi^+$ a través del fibrado doble (5.22), donde Φ^+ es la retroacción de la medida generadora de ϕ . Dado un punto $(\xi, x) \in S_k^n \times \mathbb{R}^n$, sean $V_1, \dots, V_k \in T_{(\xi, x)}(S_k^n \times \mathbb{R}^n)$ tales que ⁴

$$V_i = (0, v_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Entonces $(D\tilde{\pi}_1)_{(\xi, x)} V_i = v_i$. Gracias a (5.23), es inmediato observar que la restricción de $(\tilde{\pi}_2^* \Phi)_{(\xi, x)} \rfloor (V_1, \dots, V_k)$ a la fibra $\tilde{\pi}_1^{-1}(x) \simeq S_k^n$ tiene la forma

$$(\tilde{\pi}_2^* \Phi)_{(\xi, x)} \rfloor (V_1, \dots, V_k) = |\xi \cdot v| \nu(\tilde{\pi}_2(\xi, x)) |\Omega|$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \phi(x; v) &= \int_{\xi \in S_k^n} (\tilde{\pi}_2^* \Phi)_{(\xi, x)} \rfloor (V_1, \dots, V_k) \\ &= \int_{\xi \in S_k^n} |\xi \cdot v| \nu(\tilde{\pi}_2(\xi, x)) |\Omega|. \end{aligned}$$

□

Un estudio de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema variacional que estamos tratando nos ofrece una caracterización de las densidades proyectivas.

Lema 5.21 (Gelfand y Smirnov, [28]) Una k -densidad ϕ sobre \mathbb{R}^n , con $1 \leq k \leq n-1$, es proyectiva si y solamente si satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x^l} + \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n v_p^i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial v_p^l} = 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.25)$$

Demostración Consideremos el problema variacional asociado al problema

$$S(N) \mapsto \int_N \phi,$$

⁴Notar que $T_{(\xi, x)}(S_k^n \times \mathbb{R}^n) = T_\xi S_k^n \times \mathbb{R}^n$.

donde N es una subvariedad inmersa de \mathbb{R}^n de dimensión k . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este problema variacional son

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x^l} \left(x(t); \frac{\partial x}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t^k} \right) + \sum_{p=1}^k \frac{\partial}{\partial t^p} \left(\frac{\partial \phi}{\partial v_p^l} \left(x(t); \frac{\partial x}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t^k} \right) \right) = 0,$$

con $l = 1, 2, \dots, n$, siendo $x(t) = (x^1(t^1, \dots, t^k), \dots, x^n(t^1, \dots, t^k))$ una parametrización de N . Si desarrollamos los términos de estas ecuaciones, entonces el sistema se puede reescribir como:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x^l} + \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t^p} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial v_p^l} + \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^p \partial t^j} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_j^i \partial v_p^l} = 0, \quad (5.26)$$

con $l = 1, 2, \dots, n$.

Supongamos que ϕ es una k -densidad proyectiva y sea N una subvariedad con la parametrización $x(t) = A \cdot t + B$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ matrices constantes (*i. e.* N es un k -plano afín). Necesariamente N ha de satisfacer las ecuaciones anteriores, esto implica que

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x^l} + \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^n v_p^i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial v_p^l} = 0, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n.$$

Recíprocamente, supongamos que ϕ satisface las ecuaciones (5.25), entonces las subvariedades N con una parametrización del tipo $x(t) = A \cdot t + B$ claramente satisfacen (5.26), por lo cual son extremales del problema variacional asociado a ϕ . \square

Demostración [Teorema 5.19] Utilizando la representación integral para densidades de Crofton (5.24) y derivando bajo el signo de la integral, se muestra que, para una densidad de Crofton dada, esta satisface las ecuaciones (5.25) y, por tanto, es una densidad proyectiva. \square

Bibliografía

- [1] J. C. Alvarez, I. M. Gelfand, and M. Smirnov. Crofton densities, symplectic geometry and Hilbert's fourth problem. In *The Arnold-Gelfand mathematical seminars*, pages 77–92. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [2] J. C. Álvarez Paiva and E. Fernandes. Gelfand transforms and crofton formulas. To appear.
- [3] J. C. Álvarez Paiva and E. Fernandes. Crofton formulas in projective Finsler spaces. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 4:91–100 (electronic), 1998.
- [4] J. C. Álvarez Paiva and E. Fernandes. Fourier transforms and the Holmes-Thompson volume of Finsler manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (19):1031–1042, 1999.
- [5] W. Blaschke. Räumliche variationsprobleme mit symmetrischer transversalitätsbedingung. *Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 68:50–55, 1916.
- [6] W. Blaschke. *Vorlesungen über Integralgeometrie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955. 3te Aufl.
- [7] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theorie der konvexen Körper*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Berichtigter Reprint.
- [8] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [9] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [10] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.

- [11] H. Busemann. The isoperimetric problem in the Minkowski plane. *Amer. J. Math.*, 69:863–871, 1947.
- [12] H. Busemann. The isoperimetric problem for Minkowski area. *Amer. J. Math.*, 71:743–762, 1949.
- [13] H. Busemann. The foundations of Minkowskian geometry. *Comment. Math. Helv.*, 24:156–187, 1950.
- [14] H. Busemann. The geometry of Finsler spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:5–16, 1950.
- [15] H. Busemann. *The geometry of geodesics*. Academic Press Inc., New York, N. Y., 1955.
- [16] H. Busemann. Geometries in which the planes minimize area. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 55:171–189, 1961.
- [17] H. Busemann. Problem IV: Desarguesian spaces. In *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974)*, pages 131–141. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
- [18] H. Busemann and C. M. Petty. Problems on convex bodies. *Math. Scand.*, 4:88–94, 1956.
- [19] A. L. Cauchy. Mémoire sur la rectification des courbes et la quadratures des surfaces courbes. 22:3–15, 1850.
- [20] S.-S. Chern. On integral geometry in Klein spaces. *Ann. of Math.* (2), 43:178–189, 1942.
- [21] S.-S. Chern. On the kinematic formula in integral geometry. *J. Math. Mech.*, 16:101–118, 1966.
- [22] A. Colesanti and D. Hug. Hessian measures of semi-convex functions and applications to support measures of convex bodies. *Manuscripta Math.*, 101(2):209–238, 2000.
- [23] M. W. Crofton. On the theory of local probability. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 158:181–199, 1868.
- [24] E. Fernandes. Double fibrations : a modern approach to integral geometry and crofton formulas in projective finsler spaces. Master’s thesis, Université catholique de Louvain, 2002.

- [25] R. J. Gardner. *Geometric tomography*, volume 58 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [26] I. M. Gelfand, S. G. Gindikin, and M. I. Graev. Integral geometry in affine and projective spaces. In *Current problems in mathematics, Vol. 16 (Russian)*, pages 53–226, 228. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1980.
- [27] I. M. Gelfand, M. I. Graev, and Z. J. Šapiro. Differential forms and integral geometry. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(2):24–40, 1969.
- [28] I. M. Gelfand and M. M. Smirnov. Lagrangians satisfying Crofton formulas, Radon transforms, and nonlocal differentials. *Adv. Math.*, 109(2):188–227, 1994.
- [29] P. M. Gruber and J. M. Wills, editors. *Handbook of convex geometry. Vol. A, B*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.
- [30] V. Guillemin and S. Sternberg. Some problems in integral geometry and some related problems in microlocal analysis. *Amer. J. Math.*, 101(4):915–955, 1979.
- [31] R. D. Holmes and A. C. Thompson. n -dimensional area and content in Minkowski spaces. *Pacific J. Math.*, 85(1):77–110, 1979.
- [32] R. Howard. The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 106(509):vi+69, 1993.
- [33] J. M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [34] J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [35] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [36] Y. Matsushima. *Differentiable manifolds*, volume 9 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1972. Translated from the Japanese by E. T. Kobayashi.
- [37] F. Morgan. The cone over the Clifford torus in \mathbf{R}^4 is Φ -minimizing. *Math. Ann.*, 289(2):341–354, 1991.
- [38] A. V. Pogorelov. *Hilbert's fourth problem*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1979. Translated by Richard A. Silverman, Scripta Series in Mathematics.

- [39] H. Poincaré. *Calcul des probabilités*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1987. Reprint of the second (1912) edition.
- [40] E. T. Quinto. Topological restrictions on double fibrations and Radon transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81(4):570–574, 1981.
- [41] J. Radon. über eine besondere art ebener konvexer kurven. *Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 68:131–134, 1916.
- [42] G. Robertson. Crofton formulae and geodesic distance in hyperbolic spaces. *J. Lie Theory*, 8(1):163–172, 1998.
- [43] H. Rund. *The differential geometry of Finsler spaces*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 101. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [44] L. A. Santaló. On the fundamental kinematic formula of integral geometry in spaces of constant curvature. *Math. Notae*, 18:79–94 (1962), 1962.
- [45] L. A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. With a foreword by Mark Kac, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 1.
- [46] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [47] R. Schneider. Crofton formulas in hypermetric projective Finsler spaces. *Arch. Math. (Basel)*, 77(1):85–97, 2001. Festschrift: Erich Lamprecht.
- [48] R. Schneider and J. A. Wieacker. Integral geometry in Minkowski spaces. *Adv. Math.*, 129(2):222–260, 1997.
- [49] Z. I. Szabó. Hilbert’s fourth problem. I. *Adv. in Math.*, 59(3):185–301, 1986.
- [50] A. C. Thompson. *Minkowski geometry*, volume 63 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [51] J. A. Thorpe. *Elementary topics in differential geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1979 original.
- [52] W. Weil. Centrally symmetric convex bodies and distributions. *Israel J. Math.*, 24(3-4):352–367, 1976.
- [53] W. Weil. Centrally symmetric convex bodies and distributions. II. *Israel J. Math.*, 32(2-3):173–182, 1979.