

Geometría integral en espacios de Finsler proyectivos

Fibrados dobles y fórmulas de Crofton

Cédric M. Campos

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de CC. Matemáticas
Universidad de Valencia

30 de marzo de 2006



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Cuerpos Convexos y Centrados y sus Polares

Definition

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un *cuerpo convexo y centrado* es un subconjunto $K \subset V$ compacto, no vacío, convexo y simétrico respecto del 0.

Definition

Sea $K \subset V$ un c.c.c., se llama *cuerpo polar de K* al c.c.c. $K^* \subset V^*$ definido por

$$K^* := \{\xi \in V^* : |\langle \xi, v \rangle| \leq 1 \ \forall v \in K\}.$$



El Funcional de Minkowski

Normas Asociadas a Cuerpos Convexos y Centrados

Definition

Dado un c.c.c. $K \subset V$, se llama *funcional de Minkowski asociado a K* a la aplicación dada por

$$f_K(v) := \inf\{\lambda \geq 0 : v \in \lambda K\} \quad \forall v \in V.$$

Theorem

- 1 Si $K \subset V$ es un c.c.c., f_K es una norma.
- 2 Si f es una norma, $K := f^{-1}([0, 1])$ es un c.c.c. y $f = f_K$.



Ciclos y Cuerpos de Referencia

Esferas Generalizadas

Theorem

Sea $K \subset V$ un c.c.c.

- 1 ∂K es \mathcal{C}^r sii f_K es \mathcal{C}^r
- 2 $K \subset V$ es fuertemente convexo \mathcal{C}^∞ (i. e. $\text{Hess}f_K > 0$) sii $K^* \subset V$ un c.f.c.c. de clase \mathcal{C}^∞ .

Definition

- 1 Un cuerpo de referencia $K \subset V$ es de un c.f.c.c. \mathcal{C}^∞ .
- 2 Un ciclo de referencia $S \subset K$ es la frontera de un cuerpo de referencia.



Ciclos y Cuerpos de Referencia

Esferas Generalizadas

Theorem

Sea $K \subset V$ un c.c.c.

- 1 ∂K es \mathcal{C}^r sii f_K es \mathcal{C}^r
- 2 $K \subset V$ es fuertemente convexo \mathcal{C}^∞ (i. e. $\text{Hess}f_K > 0$) sii $K^* \subset V$ un c.f.c.c. de clase \mathcal{C}^∞ .

Definition

- 1 Un cuerpo de referencia $K \subset V$ es de un c.f.c.c. \mathcal{C}^∞ .
- 2 Un ciclo de referencia $S \subset K$ es la frontera de un cuerpo de referencia.

Nota: K^* y S^* son también de referencia.

Idea: los ciclos son las esferas de este ambiente no euclídeo.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



El Problema Isoperimétrico en Espacios de Minkowski

Optimizando el Volumen

Problem

En un espacio de Minkowski (V, B) , ¿cuál es el cuerpo que tiene mayor volumen fijada el área de su frontera? En otras palabras, ¿existe un cuerpo I tal que

$$\text{volumen}(I) \geq \text{volumen}(K),$$

para todo cuerpo K con $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$?



El Problema Isoperimétrico en Espacios de Minkowski

Optimizando el Volumen

Problem

En un espacio de Minkowski (V, B) , ¿cuál es el cuerpo que tiene mayor volumen fijada el área de su frontera? En otras palabras, ¿existe un cuerpo I tal que

$$\text{volumen}(I) \geq \text{volumen}(K),$$

para todo cuerpo K con $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$?

Nota: el trabajo está centrado en cuerpos de referencia.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - **Medidas**
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Densidades

Definition

Una *k-densidad* en un espacio vectorial V es una aplicación que asocia a cada k -vector descomponible $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ el k -volumen del paralelepípedo formado por los vectores v_1, \dots, v_k de forma homogénea.



Densidades

Definition

Una k -densidad en un espacio vectorial V es una aplicación que asocia a cada k -vector descomponible $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ el k -volumen del paralelepípedo formado por los vectores v_1, \dots, v_k de forma homogénea.

Nota: esta definición se extiende a variedades de forma habitual.



Nociones de Volumen y Área

Definition

Una *noción de k -área* corresponde a una manera de asignar a cada espacio de Minkowski (V^n, B) una k -densidad positiva area_B^k en V satisfaciendo los siguientes axiomas:

- 1 (Normalización) si B es un elipsoide, entonces area_B^k es la k -densidad euclídea estándar;
- 2 (Linealización) si $T : (V, B) \rightarrow (V', B')$ es una isometría entre espacios de Minkowski, entonces $\text{area}_B^k = T^* \text{area}_{B'}^k$;
- 3 (Monotonía) si $B, B' \subset V$ son dos cuerpos de referencia tales que $B \subset B'$, entonces $\text{area}_B^k \geq \text{area}_{B'}^k$;
- 4 (Continuidad) la asignación de area_B^k ha de ser continua respecto de la distancia de Banach-Mazur.

Nociones de Volumen y Área

Definition

- 1 Se llama *noción de volumen de Busemann* a la noción que asocia a cada (V^n, B) la densidad de volumen

$$\text{vol}_B^{\text{Bus}}(v) := \frac{\kappa_n}{\text{vol}(B; v)}, \quad \forall v \in \Lambda^n V.$$

- 2 Análogamente, se llama *noción de volumen de Holmes-Thompson* a la noción dada por

$$\text{vol}_B^{\text{HT}}(v) := \frac{\text{vol}(B^*; v)}{\kappa_n}, \quad \forall v \in \Lambda^n V.$$

Nota: Busemann es constante, i. e. $\text{vol}_B^{\text{Bus}}(B) = \int_B \text{vol}_B^{\text{Bus}} = \kappa_n$.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



La Solución al Problema Isoperimétrico

Theorem

Sea $\Omega \in \Lambda^n V^*$ y sea $\omega \in |\Lambda^{n-1} V^*|$ positiva tal que

$$\mathcal{B} := \{v \in \Lambda^{n-1} V : \omega(v) \leq 1\}$$

es un cuerpo de referencia. Entonces, el cuerpo de referencia

$$I := (i_\Omega(\mathcal{B}))^* \subset V$$

es el isoperimétrico para Ω y ω , i. e. para cualquier otro cuerpo de referencia $K \subset V$ tal que $\text{area}(\partial K) = \text{area}(\partial I)$, tenemos

$$\text{volumen}(K) \leq \text{volumen}(I).$$



Un Ejemplo de Isoperimétrice I

Las Nociones de Busemann y Holmes-Thompson

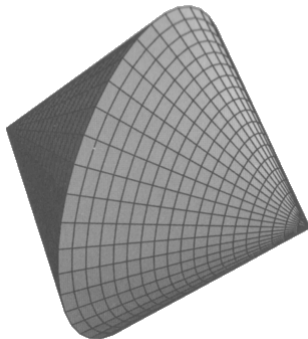


Figura: Bola unidad



Un Ejemplo de Isoperimétrice II

Las Nociones de Busemann y Holmes-Thompson

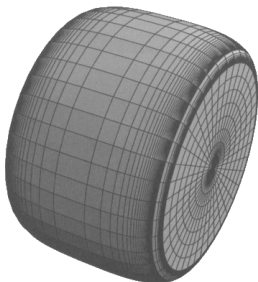


Figura: Busemann

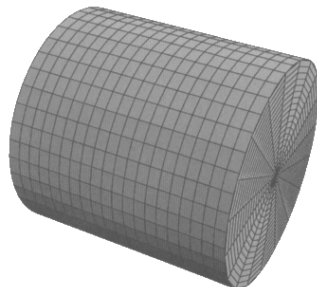


Figura: Holmes-Thompson

* Imágenes extraídas del libro de Thompson.

Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 **Fórmulas integrales**
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



La Fórmula Clásica de Crofton

Theorem (M. W. Crofton, 1868)

Si γ es una curva rectificable en el plano, entonces su longitud viene dada por la fórmula

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_{r \in \mathcal{R}} \#(\gamma \cap r) dr,$$

donde \mathcal{R} es el espacio de rectas afines del plano y dr es una medida invariante bajo la acción del grupo euclídeo.



La Fórmula Clásica de Crofton

Theorem (M. W. Crofton, 1868)

Si γ es una curva rectificable en el plano, entonces su longitud viene dada por la fórmula

$$\text{longitud}(\gamma) = \int_{r \in \mathcal{R}} \#(\gamma \cap r) dr,$$

donde \mathcal{R} es el espacio de rectas afines del plano y dr es una medida invariante bajo la acción del grupo euclídeo.

Nota: la medida dr es independiente de la curva γ elegida.



La Fórmula de Crofton Moderna

El Problema Integral

Problem

Sea B una variedad diferenciable y sea $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de subvariedades de B parametrizadas por una variedad Γ . Dada una medida Φ sobre Γ , ¿existe una medida ϕ sobre B tal que

$$\int_N \phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi,$$

para toda subvariedad $N \subset B$?

- ϕ ha de ser una medida independiente de N .
- $\dim(N) = k = \text{codim}(B_\gamma)$.



La Fórmula de Crofton Moderna

El Problema Integral

Problem

Sea B una variedad diferenciable y sea $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de subvariedades de B parametrizadas por una variedad Γ . Dada una medida Φ sobre Γ , ¿existe una medida ϕ sobre B tal que

$$\int_N \phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi,$$

para toda subvariedad $N \subset B$?

- ϕ ha de ser una medida independiente de N .
- $\dim(N) = k = \text{codim}(B_\gamma)$.



La Fórmula de Crofton Moderna

El Problema Integral

Problem

Sea B una variedad diferenciable y sea $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de subvariedades de B parametrizadas por una variedad Γ . Dada una medida Φ sobre Γ , ¿existe una medida ϕ sobre B tal que

$$\int_N \phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi,$$

para toda subvariedad $N \subset B$?

- ϕ ha de ser una medida independiente de N .
- $\dim(N) = k = \text{codim}(B_\gamma)$.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 **Fórmulas integrales**
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - **Fibrados dobles**
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Motivación para la Definición

La Dualidad entre B y Γ

- 1 Tenemos una variedad B y una familia de subvariedades $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ parametrizadas por una variedad Γ .
- 2 Consideremos el subconjunto $\Gamma_b := \{\gamma \in \Gamma : b \in B_\gamma\}$ para cada $b \in B$ y supongamos que $\{\Gamma_b\}_{b \in B}$ forma una familia de subvariedades en B .
- 3 Consideremos el espacio $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : b \in B_\gamma\}$ o, equivalentemente, $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : \gamma \in \Gamma_b\}$.
- 4 Podemos ver a las proyecciones naturales $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ como fibrados diferenciables.



Motivación para la Definición

La Dualidad entre B y Γ

- 1 Tenemos una variedad B y una familia de subvariedades $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ parametrizadas por una variedad Γ .
- 2 Consideremos el subconjunto $\Gamma_b := \{\gamma \in \Gamma : b \in B_\gamma\}$ para cada $b \in B$ y supongamos que $\{\Gamma_b\}_{b \in B}$ forma una familia de subvariedades en B .
- 3 Consideremos el espacio $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : b \in B_\gamma\}$ o, equivalentemente, $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : \gamma \in \Gamma_b\}$.
- 4 Podemos ver a las proyecciones naturales $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ como fibrados diferenciables.



Motivación para la Definición

La Dualidad entre B y Γ

- 1 Tenemos una variedad B y una familia de subvariedades $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ parametrizadas por una variedad Γ .
- 2 Consideremos el subconjunto $\Gamma_b := \{\gamma \in \Gamma : b \in B_\gamma\}$ para cada $b \in B$ y supongamos que $\{\Gamma_b\}_{b \in B}$ forma una familia de subvariedades en B .
- 3 Consideremos el espacio $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : b \in B_\gamma\}$ o, equivalentemente, $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : \gamma \in \Gamma_b\}$.
- 4 Podemos ver a las proyecciones naturales $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ como fibrados diferenciables.



Motivación para la Definición

La Dualidad entre B y Γ

- 1 Tenemos una variedad B y una familia de subvariedades $\{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ parametrizadas por una variedad Γ .
- 2 Consideremos el subconjunto $\Gamma_b := \{\gamma \in \Gamma : b \in B_\gamma\}$ para cada $b \in B$ y supongamos que $\{\Gamma_b\}_{b \in B}$ forma una familia de subvariedades en B .
- 3 Consideremos el espacio $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : b \in B_\gamma\}$ o, equivalentemente, $A := \{(b, \gamma) \in B \times \Gamma : \gamma \in \Gamma_b\}$.
- 4 Podemos ver a las proyecciones naturales $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ como fibrados diferenciables.



Fibrados Dobles

Definition

Un *fibrado doble* es una estructura del tipo $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$, cumpliendo:

- 1 $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- 2 $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- 3 para todo $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$, $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El conjunto A se llama *espacio de incidencias* y dos puntos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dicen *incidentes* si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.



Fibrados Dobles

Definition

Un *fibrado doble* es una estructura del tipo $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$, cumpliendo:

- 1 $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- 2 $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- 3 para todo $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$, $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El conjunto A se llama *espacio de incidencias* y dos puntos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dicen *incidentes* si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.



Fibrados Dobles

Definition

Un *fibrado doble* es una estructura del tipo $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$, cumpliendo:

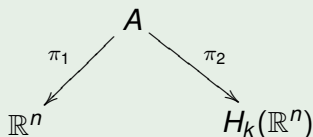
- 1 $\pi_1 : A \rightarrow B$ y $\pi_2 : A \rightarrow \Gamma$ son fibrados diferenciables;
- 2 $\pi_1 \times \pi_2 : A \rightarrow B \times \Gamma$ es una subvariedad regular;
- 3 para todo $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$, $B_\gamma := \pi_1(\pi_2^{-1}(\gamma)) \subset B$ y $\Gamma_b := \pi_2(\pi_1^{-1}(b)) \subset \Gamma$ son subvariedades.

El conjunto A se llama *espacio de incidencias* y dos puntos $b \in B$ y $\gamma \in \Gamma$ se dicen *incidentes* si $\pi_1^{-1}(b) \cap \pi_2^{-1}(\gamma) \neq \emptyset$.



Un Ejemplo en el Espacio de k -Planos

Example

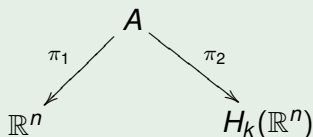


- $H_k(\mathbb{R}^n)$ espacio de k -planos afines
- $A = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times H_k(\mathbb{R}^n) : x \in \lambda\}$
- π_i proyecciones naturales



Un Ejemplo en el Espacio de k -Planos

Example



- $H_k(\mathbb{R}^n)$ espacio de k -planos afines
- $A = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times H_k(\mathbb{R}^n) : x \in \lambda\}$
- π_i proyecciones naturales

Nota: este ejemplo subyace en la transformada de Radon.



Transformaciones de Densidades

La Retroacción

Definition

Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sea $\Psi \in \mathcal{D}^k(N)$, se define la *retroacción de Ψ por f* como

$$(f^*\Psi)_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \Psi_{f(x)}(Df_x v_1 \wedge \cdots \wedge Df_x v_k).$$



Transformaciones de Densidades

La Retroacción

Definition

Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y sea $\Psi \in \mathcal{D}^k(N)$, se define la *retroacción de Ψ por f* como

$$(f^*\Psi)_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \Psi_{f(x)}(Df_x v_1 \wedge \cdots \wedge Df_x v_k).$$

Idea: asignar a cada punto $x \in M$ la medida de su imagen, $f(x) \in N$, teniendo en cuenta la deformación.



Transformaciones de Densidades

La Compresión

Definition

Sea $g : M \rightarrow N$ un fibrado diferenciable y sea r la dimensión de sus fibras. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(M)$ (con $k \geq r$), se define la *compresión* de Φ por g como

$$(g_*\Phi)_y(w_1 \wedge \cdots \wedge w_{k-r}) := \int_{g^{-1}(y)} \Phi_x \rfloor v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-r},$$

donde $Dg_x V_i = w_i$.



Transformaciones de Densidades

La Compresión

Definition

Sea $g : M \rightarrow N$ un fibrado diferenciable y sea r la dimensión de sus fibras. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(M)$ (con $k \geq r$), se define la *compresión de Φ por g* como

$$(g_*\Phi)_y(w_1 \wedge \cdots \wedge w_{k-r}) := \int_{g^{-1}(y)} \Phi_x \rfloor v_1 \wedge \cdots \wedge v_{k-r},$$

donde $Dg_x V_i = w_i$.

Idea: asignar a cada punto $y \in N$ el peso de su fibra $g^{-1}(y)$.



Transformaciones de Densidades

La Transformada de Gelfand

Definition

Sea $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(\Gamma)$ (con $k \geq r$), se llama *transformada de Gelfand de Φ* a la densidad

$$\pi_{1*} \pi_2^* \Phi \in \mathcal{D}^{k-r}(B).$$



Transformaciones de Densidades

La Transformada de Gelfand

Definition

Sea $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ un fibrado doble tal que las fibras de π_1 tienen dimensión $r \geq 1$. Sea $\Phi \in \mathcal{D}^k(\Gamma)$ (con $k \geq r$), se llama *transformada de Gelfand de Φ* a la densidad

$$\pi_{1*}\pi_2^*\Phi \in \mathcal{D}^{k-r}(B).$$

Idea: la transformada de Gelfand asigna a cada punto $b \in B$ el peso de los $\gamma \in \Gamma$ incidentes con él.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 **Fórmulas integrales**
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - **Fórmulas de Crofton**
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



La Fórmula de Crofton Moderna

Theorem (Fórmula de Crofton)

Sea $B \xleftarrow{\pi_1} A \xrightarrow{\pi_2} \Gamma$ un fibrado doble y sea Φ una densidad de orden máximo sobre Γ . Si $N \subset B$ es una subvariedad tal que $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma)$, entonces:

$$\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi,$$

siempre y cuando la segunda integral exista.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

Sean X e Y variedades de dimensión n y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ con $\#(f^{-1}(y)) < \infty$ c.p.t. $y \in Y$. Dada $\Phi \in \mathcal{D}^n(Y)$, se tiene

$$\int_X f^* \Phi = \int_{y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

- 1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$
- 2 Aplicar la fórmula de la coárea:
 - $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
 - $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
 - $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{?}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$

2 Aplicar la fórmula de la coárea:

- $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
- $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
- $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$

2 Aplicar la fórmula de la coárea:

- $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
- $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
- $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

- 1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$
- 2 Aplicar la fórmula de la coárea:
 - $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
 - $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
 - $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

- 1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$
- 2 Aplicar la fórmula de la coárea:
 - $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
 - $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
 - $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

- 1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$
- 2 Aplicar la fórmula de la coárea:
 - $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
 - $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
 - $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Prueba de La Fórmula de Crofton Moderna

Una Consecuencia de la Fórmula de la Coárea

Lemma (Fórmula de la coárea)

$$\int_X f^* \Phi = \int_{Y \in Y} \#(f^{-1}(y)) \Phi.$$

Demostración de la fórmula de Crofton moderna.

- 1 Fubini: $\int_N \pi_{1*} \pi_2^* \Phi = \int_{\pi_1^{-1}(N)} \pi_2^* \Phi \stackrel{!}{=} \int_{\gamma \in \Gamma} \#(N \cap B_\gamma) \Phi?$
- 2 Aplicar la fórmula de la coárea:
 - $X = \pi_1^{-1}(N)$, $Y = \Gamma$ y $f = \pi_2|_{\pi_1^{-1}(N)}$.
 - $\dim(N) = \text{codim}(B_\gamma) \Rightarrow \dim(\pi_1^{-1}(N)) = \dim(\Gamma)$.
 - $\#(\pi_1^{-1}(N) \cap \pi_2^{-1}(\gamma)) = \#(N \cap B_\gamma)$.



La Fórmula en Espacios Homogéneos

Theorem (S.-S. Chern, 1942)

Sea G un grupo de Lie, sean $H, K \subset G$ subgrupos cerrados y consideremos el fibrado doble

$$G/H \xleftarrow{\pi_1} G/(H \cap K) \xrightarrow{\pi_2} G/K,$$

donde π_i son las proyecciones naturales. Sea n la dimensión de G/H y $n - k$ la dimensión de las fibras de π_2 . Si $\Phi \in \mathcal{D}(G/K)$ es invariante, entonces $\pi_{1}\pi_2^*\Phi \in \mathcal{D}^k(G/H)$ es invariante y, para toda k -subvariedad $N \subset G/H$,*

$$\int_N \pi_{1*}\pi_2^*\Phi = \int_{yK \in G/K} \#(N \cap B_{yK})\Phi.$$

La Fórmula en Espacios Clásicos

Theorem (Fórmula de Crofton para espacios clásicos)

Sea E^n uno de los tres espacios clásicos, G el grupo de isometrías correspondiente y H_{n-k} (con $1 \leq k < n$) el espacio de las $(n-k)$ -subvariedades completas y totalmente geodésicas de E . Si $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ es invariante, entonces existe una constante $c = c(n, k, \Phi_{n-k})$ tal que para toda k -subvariedad $N \subset E$ se tiene que

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_{n-k}} \#(N \cap \gamma) \Phi_{n-k}.$$



La Fórmula en Espacios Clásicos

Theorem (Fórmula de Crofton para espacios clásicos)

Sea E^n uno de los tres espacios clásicos, G el grupo de isometrías correspondiente y H_{n-k} (con $1 \leq k < n$) el espacio de las $(n-k)$ -subvariedades completas y totalmente geodésicas de E . Si $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ es invariante, entonces existe una constante $c = c(n, k, \Phi_{n-k})$ tal que para toda k -subvariedad $N \subset E$ se tiene que

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_{n-k}} \#(N \cap \gamma) \Phi_{n-k}.$$

Ejemplo: para la densidad estándar sobre el espacio de hiperplanos de \mathbb{R}^n , $c = \frac{1}{\kappa_{n-1}}$.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 **Fórmulas integrales**
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - **Fórmulas de Cauchy**
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



La Fórmula de Cauchy

Theorem (Fórmula de Cauchy)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta de clase C^∞ , entonces:

$$\text{area}(S) = \frac{\pi^2}{2} \int_{\lambda \in H_2} \text{longitud}(\lambda \cap S) d\mu(\lambda),$$

donde μ es la medida invariante estándar de H_2 .



La Fórmula de Cauchy Generalizada

Theorem (Fórmula de Cauchy generalizada)

Sea E^n uno de los tres espacios clásicos, G el grupo de isometrías correspondiente y H_p (con $1 \leq p < n$) el espacio de las p -subvariedades completas y totalmente geodésicas de E . Sea k un entero tal que $1 \leq k < n$ y $k + p > n$, si $\Phi_p \in \mathcal{D}(H_p)$ es invariante, entonces existe una constante $c = c(n, p, k, \Phi_p)$ tal que para toda k -subvariedad compacta $N \subset E$ se tiene

$$\text{vol}_k(N) = c \int_{\gamma \in H_p} \text{vol}_{k+p-n}(\gamma \cap N) \Phi_p.$$



Demostración de la Fórmula de Cauchy

Ideas Generales

Demostración.

$$\begin{array}{ccccc}
 \textcircled{1} & E & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & H' \\
 & \text{id} \downarrow & & \rho_A \downarrow & & \rho_H \downarrow \\
 & E & \xleftarrow{\pi_1} & A_{n-k} & \xrightarrow{\pi_2} & H_{n-k}
 \end{array}$$

- $H' = \{(\gamma, \lambda) \in H_p \times H_{2n-k-p} : \dim(\gamma \cap \lambda) = n - k\}$
- A y A' son los espacios incidentes estándares.
- Todas las proyecciones son las naturales.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \pi_{1*} \pi_2^* \Phi_{n-k} &= C \cdot \pi_{1*} \pi_2^* \rho_{H*} (\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p}) \\
 &= C \cdot \pi'_{1*} (\pi'_2)^* (\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p})
 \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Aplicar Crofton, Fubini y nuevamente Crofton.



Demostración de la Fórmula de Cauchy

Ideas Generales

Demostración.

$$\begin{array}{ccccc}
 \textcircled{1} & E & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & H' \\
 & \text{id} \downarrow & & \rho_A \downarrow & & \rho_H \downarrow \\
 & E & \xleftarrow{\pi_1} & A_{n-k} & \xrightarrow{\pi_2} & H_{n-k}
 \end{array}$$

- $H' = \{(\gamma, \lambda) \in H_p \times H_{2n-k-p} : \dim(\gamma \cap \lambda) = n - k\}$
- A y A' son los espacios incidentes estándares.
- Todas las proyecciones son las naturales.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \pi_{1*} \pi_2^* \Phi_{n-k} &= C \cdot \pi_{1*} \pi_2^* \rho_{H*} (\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p}) \\
 &= C \cdot \pi'_{1*} (\pi'_2)^* (\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p})
 \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Aplicar Crofton, Fubini y nuevamente Crofton.



Demostración de la Fórmula de Cauchy

Ideas Generales

Demostración.

$$\begin{array}{ccccc}
 \textcircled{1} & E & \xleftarrow{\pi'_1} & A' & \xrightarrow{\pi'_2} & H' \\
 & \text{id} \downarrow & & \rho_A \downarrow & & \rho_H \downarrow \\
 & E & \xleftarrow{\pi_1} & A_{n-k} & \xrightarrow{\pi_2} & H_{n-k}
 \end{array}$$

- $H' = \{(\gamma, \lambda) \in H_p \times H_{2n-k-p} : \dim(\gamma \cap \lambda) = n - k\}$
- A y A' son los espacios incidentes estándares.
- Todas las proyecciones son las naturales.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \pi_{1*} \pi_2^* \Phi_{n-k} &= c \cdot \pi_{1*} \pi_2^* \rho_{H*} (\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p}) \\
 &= c \cdot \pi'_{1*} (\pi'_2)^* (\Phi_p \star \Phi_{2n-k-p})
 \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Aplicar Crofton, Fubini y nuevamente Crofton.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Métricas Finsler

Métricas Infinitesimalmente Minkowskianas

Definition

Sea M^n una variedad diferenciable. Una *métrica Finsler* es una aplicación $F : TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

- 1 $F \in \mathcal{C}^\infty(TM \setminus \Theta)$, donde Θ es la sección nula de TM ;
- 2 F_x es una norma no-degenerada en $T_x M$ para todo $x \in M$.

Example

- 1 En un espacio de Minkowski (V, B) tal que B es \mathcal{C}^∞ y fuertemente convexa, $F_x(v) := \|v\|_B$.
- 2 En una variedad riemanniana (M, g) , $F_x(v) := \sqrt{g_x(v, v)}$.

Espacios de Finsler Proyectivos

Espacios Geodésicamente Rectos

- 1 $\text{longitud}(\gamma) := \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt = \int_\gamma F$
- 2 $\text{dist}(x, y) := \inf\{\text{longitud}(\gamma) : \gamma \text{ es un arco uniendo } x \text{ e } y\}$

Definition

*Un métrica Finsler Proyectiva es una métrica Finsler F sobre \mathbb{R}^n para la cual las rectas son las únicas geodésicas para la distancia asociada. Al para (\mathbb{R}^n, F) se le dice *espacio de Finsler proyectivo*.*

Example

Un espacio de Minkowski (V, B) tal que B es \mathcal{C}^∞ y fuertemente convexa.



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Fórmula de Crofton en Espacios Finsler Proyectivos

La Representación de Busemann-Pogorelov y la Noción de Holmes-Thompson

Theorem

Sea (\mathbb{R}^n, F) un espacio de Finsler proyectivo. Existe una densidad $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ (con $1 \leq k \leq n-1$) tal que, para cualquier k -subvariedad $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\text{area}_k^{HT}(N) = \int_{\lambda \in H_{n-k}} \#(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$



Fórmula de Crofton en Espacios Finsler Proyectivos

La Representación de Busemann-Pogorelov y la Noción de Holmes-Thompson

Theorem

$$\text{area}_k^{HT}(N) = \int_{\lambda \in H_{n-k}} \#(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$

Demostración.

Caso $k = 1$ Representación de Pogorelov nos da Φ_{n-1} .

Caso $k > 1$

- 1 Considerar H_{n-1}^k , un morfismo y Φ_{n-1}^k .
- 2 Representación similar al caso $k = 1$.
- 3 Definición de Holmes-Thompson.



Fórmula de Cauchy en Espacios Finsler Proyectivos

Theorem

Sea (\mathbb{R}^n, F) un espacio de Finsler proyectivo. Existe una densidad $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ (con $1 \leq k \leq n-2$) y una constante $c_{n,k}$ tales que, para cualquier hipersuperficie $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\text{area}_{n-1}^{HT}(N) = c_{n,k} \int_{\lambda \in H_{n-k}} \text{area}_{n-k-1}^{HT}(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$



Fórmula de Cauchy en Espacios Finsler Proyectivos

Theorem

Sea (\mathbb{R}^n, F) un espacio de Finsler proyectivo. Existe una densidad $\Phi_{n-k} \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ (con $1 \leq k \leq n-2$) y una constante $c_{n,k}$ tales que, para cualquier hipersuperficie $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\text{area}_{n-1}^{HT}(N) = c_{n,k} \int_{\lambda \in H_{n-k}} \text{area}_{n-k-1}^{HT}(N \cap \lambda) \Phi_{n-k}.$$

Demostración.

- 1 Misma idea que las otras fórmulas de Cauchy.
- 2 La constante viene dada por el uso de Holmes-Thompson en todas las partes implicadas. □



Sumario

- 1 El problema isoperimétrico
 - Cuerpos convexos y centrados
 - El problema
 - Medidas
 - La solución
- 2 Fórmulas integrales
 - La Fórmula Clásica de Crofton
 - Fibrados dobles
 - Fórmulas de Crofton
 - Fórmulas de Cauchy
- 3 Espacios de Finsler proyectivos
 - Definición
 - Fórmulas de Crofton y de Cauchy
 - Densidades de Crofton y proyectivas



Densidades de Crofton

Definition

Una densidad $\phi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq k \leq n-1$, es *una densidad de Crofton* si existe una densidad $\Phi \in \mathcal{D}(H_{n-k})$ tal que, para toda k -subvariedad $N \subset \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\int_N \phi = \int_{\lambda \in H_{n-k}} \#(N \cap \lambda) \Phi.$$

La densidad Φ se llama *la medida generadora de ϕ* .



Densidades Proyectivas

Definition

Una densidad $\phi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq k \leq n-1$, es *una densidad proyectiva* si todos los k -planos de \mathbb{R}^n son extremos del problema variacional

$$N \mapsto \int_N \phi,$$

donde $N \subset \mathbb{R}^n$ es una k -subvariedad.



Las Densidades de Crofton Son Proyectivas

Theorem

Toda densidad de Crofton es proyectiva.

Demostración.

- 1 Las densidades de Crofton tienen una representación integral determinada.
- 2 Las densidades proyectivas están caracterizadas por un sistema de EDPs particular obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional.
- 3 La representación integral de las densidades de Crofton cumplen el sistema de EDPs.



Resumiendo...

- Hemos presentado una **fórmula explícita para el isoperimétrica** en espacios de Minkowski.
- Hemos dado una **generalización de la fórmula de Cauchy-Crofton**.
- Hemos visto **fórmulas no clásicas de Cauchy-Crofton** en espacios de Finsler.
- Por hacer/ver
 - generalizaciones no simétricas en espacios de Minkowski/Finsler;
 - teoremas para la noción de Busemann u otras;
 - la fórmula de Cauchy para espacios de Finsler para subvariedades cualesquiera.



Cosas que leer I



J. C. Álvarez Paiva and E. Fernandes.

Crofton formulas in projective Finsler spaces.

Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., 4:91–100
(electronic), 1998.



S.-S. Chern.

On integral geometry in Klein spaces.

Ann. of Math. (2), 43:178–189, 1942.



I. M. Gelfand and M. M. Smirnov.

Lagrangians satisfying Crofton formulas, Radon transforms,
and nonlocal differentials.

Adv. Math., 109(2):188–227, 1994.



Cosas que leer II



A. C. Thompson.

Minkowski geometry, volume 63 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*.

Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

