Demostració del teorema d'Ehrenfest

Felip Alàez Nadal

12 de novembre de 2005

El teorema d'Ehrenfest estableix una de les connexions entre la física quàntica i clàssica. Com és sabut, a la física quàntica la posició i el moment d'una partícula no estan, en general, ben definides, sinò que venen descrites per una distribució de probabilitats què depén de la funció d'ones. Sí què està ben definit, però, el valor esperat d'aquests observables.

Ehrenfest, buscant una connexió entre la física quàntica i clàssica, va suposar què, si d'alguna forma havien d'estar relacionats els observables moment i posició amb les magnituts clàssiques del mateix nom, devia ser a través dels valors esperats, doncs tals magnituts prenen valors ben definits. Seguint aquest raonament, va comprovar si els valors esperats de la posició i del moment compleixen la relació $m\frac{d<x>}{dt} =< p >$, anàlogament a la relació clàssica $m\frac{dx}{dt} = p$.

Aquesta relació es pot demostrar si comencem per calcular el valor esperat de l'observable moment:

$< p >= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi^*(x,t)(-\imath\hbar\frac{\partial}{\partial x})\Psi(x,t) = -\imath\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi$

A continuació desenvolupe el valor esperat de la posició, tot tenint en compte l'equació d'Schrödinger:

$\frac{d<x>}{dt} = \frac{d\int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi^* x\Psi}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx[\frac{\partial\Psi*}{\partial t}x\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}x\Psi*] = \frac{\imath}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dx[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^*]x\Psi - [-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi]x\Psi^* = \frac{\imath\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx[-x\Psi\frac{\partial^2\Psi*}{\partial x^2} + x\Psi^*\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2}]$

El primer membre es pot integrar per parts i dona:

$\int_{-\infty}^{+\infty} dxx\Psi\frac{\partial^2\Psi*}{\partial x^2} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}x\Psi|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) = -\Psi^*\frac{\partial}{\partial}(x\Psi)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\Psi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\Psi)$

A aquest pas s'ha integrat dues vegades per parts i s'ha tingut en compte què la funció d'ones s'anul·la als infinits, doncs allí no hi ha probabilitat de trobar la partícula.

Si ara introduïm aquest resultat a la primera integral, obtenim:

$\frac{\imath\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx[-x\Psi\frac{\partial^2\Psi*}{\partial x^2} + x\Psi^*\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2}] = \frac{\imath\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx[-\Psi^*\frac{\partial^2(x\Psi)}{\partial x^2} + x\Psi^*\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2}]$

La derivada parcial que apareix resulta:

$\frac{\partial^2(x\Psi)}{\partial x^2} = 2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + x\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$

Per tant, la integral queda com:

$\frac{\imath\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx[-\Psi^*\frac{\partial^2(x\Psi)}{\partial x^2}+x\Psi^*\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2}] = \frac{\imath\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx[-\Psi^*(2\frac{\partial\Psi}{\partial x}+x\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2})+x\Psi^*\frac{\partial\Psi^2}{\partial x^2}] = -\frac{\imath\hbar}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}$

Si comparem aquest resultat amb el valor esperat per al moment, trobem què:

$m\frac{d<x>}{dt} =< p >$
Com volíem demostrar.