

Ortonormalitat de la part temporal de les solucions estacionàries de l'equació de Schrödinger

Felip Alàez Nadal

14 de novembre de 2005

Suposant que l'equació de Schrödinger admet una solució del tipus: $\Psi(x, t) = \psi(x)\theta(t)$ S'aplega a que $\psi(x)$ ha d'acomplir la següent equació: $H\psi(x) = E\psi(x)$ On H és l'operador hamiltonià i E l'energia de la partícula.

Tenint en compte que $\psi(x) \in L^*(-\infty, +\infty)$, és immediat adonar-se de que aquesta és una equació de vectors propis. Aleshores ens preguntem sobre si és possible que les solucions obteses per a diferents E siguin ortonormals. La resposta és afirmativa. Demostrem-ho:

E és l'energia de la partícula, la qual pren només valors reals. Açò ens permet fer ús d'un teorema de l'àlgebra operacional que afirma que, si els valors propis d'un operador són reals, eixe operador és hermític. L'operador H és, per tant, hermític. (Teorema I)

Els operadors hermítics, però, són normals (Teorema II). Podem fer ús aleshores d'un teorema (Teorema III) que assegura que, donats dos valors propis λ_1, λ_2 diferents, d'un operador A normal, els vectors propis corresponents són ortogonals. Per tant, les ψ_i obteses per a diferents E_i són ortogonals. Per últim, només ens queda aplicar el mètode de Gram-Schmidt per a normalitzar-les. Una vegada fer açò: $\langle \psi_i^a | \psi_j^a \rangle = \delta_{ij}$ On amb ψ_i^a em referisc al vector propi convenientment normalitzat.

Com volíem demostrar.

A continuació demostre els teoremes dels quals faig ús:

Preliminar 1 *Siga A un endomorfisme normal de l'espai vectorial E de dimensió arbitrària. Si $|v\rangle$ és un vector propi d' A amb valor propi λ , també ho és d' A^* amb valor propi λ^* .*

No demostraré aquest teorema degut a la seua extensió. Pot trobar-se a qualsevol llibre d'àlgebra lineal.

Teorema 1 Siga A un endomorfisme hermític de l'espai vectorial de dimensió arbitrària E . Llavors, els seus valors propis són reals, i viceversa.

→ Siga $|v\rangle$ un vector propi corresponent al valor propi λ .

Aleshores:

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle \rightarrow A^*|v\rangle = \lambda^*|v\rangle \rightarrow \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$$

← si λ real implica A hermític:

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle \rightarrow A^*|v\rangle = \lambda^*|v\rangle \rightarrow (A - A^*)|v\rangle = (\lambda - \lambda^*)|v\rangle = 0 \rightarrow A = A^*$$

Com volíem demostrar.

Teorema 1 Un operador hermític és normal.

Demostració:

Siga $A = A^*$ un operador hermític. Aleshores $AA = AA \rightarrow AA^* = A^*A$ com volíem demostrar.

Teorema 1 Siga A un endomorfisme normal de l'espai vectorial de dimensió arbitrària E . Si $|v_1\rangle = |v_2\rangle$ són vectors propis d' A amb valors propis diferents λ_1, λ_2 , aleshores són ortogonals.

$$\langle A^*v_1|v_2\rangle = \langle \lambda_1^*v_1|v_2\rangle = \lambda_1 \langle v_1|v_2\rangle$$

$$\langle A^*v_1|v_2\rangle = \langle v_1|\lambda_2v_2\rangle = \lambda_2 \langle v_1|v_2\rangle$$

Restant aquestes dues expressions:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1|v_2\rangle \rightarrow \langle v_1|v_2\rangle = 0$$

Com volíem demostrar.