

Relaciones Binarias

22 de febrero de 2002

Recordemos la definición de Relación Binaria, que es conocida de álgebra.

1 DEFINICIÓN

*Dado un conjunto A , una **Relación Binaria** R sobre A es cualquier subconjunto de $A \times A$.*

Por tanto, dado que R es un conjunto, podremos hablar de los elementos de R , que serán pares de la forma (a, b) donde con a y b son elementos de A . Recordemos que también se dice que un elemento a está relacionado con otro b si y sólo si el par (a, b) pertenece a R , y se denota por aRb . A lo largo de estas notas utilizaremos indistintamente ambas notaciones, es decir, $aRb \equiv (a, b) \in R$.

En la asignatura de álgebra se estudiaron las Relaciones Binarias desde un punto de vista abstracto. En estas notas no nos centraremos tanto en su definición ni en el estudio de los tipos de relaciones existentes (de equivalencia, de orden, etc) como en la manera de obtener algunas de sus propiedades. Empezaremos viendo algunas formas de representar Relaciones y algunas definiciones que permitirán estudiar sus propiedades.

1. Digrafo de una Relación

Una Relación matemática es una formalización del concepto de relación en la vida real. Por ejemplo, podemos considerar, el conjunto de todos los ordenadores de un laboratorio y decir que el ordenador x está relacionado con el ordenador y si existe un cable de red que va del ordenador x al ordenador y . En este caso, la manera más simple de representar esta relación será por medio de algún diagrama en el que se refleje la estructura de la red del laboratorio. Si en este diagrama representamos cada ordenador con un icono y cada cable de red con un línea el hecho de que el ordenador x esté relacionado con el y queda reflejado por la existencia de una línea entre el icono del ordenador x y el del y .

Vamos a formalizar este concepto y a definir el **Digrafo** de una relación.

2 DEFINICIÓN

*Dado un conjunto A finito y una Relación Binaria R sobre A , llamaremos **Digrafo** de R a la representación gráfica resultante de representar los elementos de A mediante puntos, a los que llamaremos vértices o nodos, junto con flechas que van del nodo a_i al nodo a_j siempre que $a_i R a_j$ y a las que llamaremos arcos o lados.*

Observemos que para que esta definición tenga sentido práctico es necesario que el cardinal de A sea finito.

2. Matriz de Adyacencia

Otra manera de representar la relación del laboratorio puede ser una tabla. Si construimos una tabla de doble entrada y asignamos una fila y una columna a cada ordenador podemos representar la relación marcando las casillas cuyas coordenadas correspondan a un par de ordenadores conectados.

Si bien esta representación es menos visual y resulta más difícil observar la relación representada de un vistazo, veremos que es mucho más potente desde el punto de vista de la programación.

3 DEFINICIÓN

*Dada una Relación R sobre un conjunto finito A , llamaremos **Matriz de Adyacencia** de R a la matriz booleana $M = (m_{ij})$ definida por*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{sii } a_i R a_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall a_i, a_j \in A$$

A continuación definimos el **grado interno** y el **grado externo** de un elemento $a \in A$ que nos dan información sobre este elemento en la Relación.

4 DEFINICIÓN

Sea A un conjunto finito y R una relación sobre A . Dado $a \in A$ definimos:

Grado interno de a como $|\{b \in A : (b, a) \in R\}|$

Grado externo de a como $|\{b \in A : (a, b) \in R\}|$

En definitiva, los grados interno y externo de un elemento $a \in A$ nos indican cuantos elementos $b \in A$ están relacionados con él y con cuantos elementos está él relacionado, respectivamente.

Podemos observar que el grado interno de un elemento a coincide con el número de arcos que acaban en el punto que representa a a y el grado externo con el número de arcos que sale de él.

Es fácil comprobar también que el grado interno de un elemento $a_i \in A$ es el número de unos que aparecen en la columna i -ésima de la matriz de adyacencia de una relación y que el grado externo es el número de unos que aparecen en la fila i -ésima.

Si tenemos una Relación R sobre un conjunto A puede ser muy útil disponer de métodos que nos den propiedades de R tales como la simetría, la reflexividad o la transitividad. Las dos primeras propiedades son fáciles de obtener, tanto a partir del Digrafo como de la Matriz de Adyacencia de R .

EJERCICIO 1 Explicar la relación existente entre las propiedades reflexiva y simétrica de una Relación Binaria y

a) su Matriz de Adyacencia.

b) su Digrafo.

Sin embargo, decidir si una relación es o no transitiva es un problema cuya solución es bastante menos evidente. Recordemos que una relación R se dice que es transitiva si siempre que aRb y bRc se cumple que aRc . En el caso del Digrafo esto se puede expresar de la siguiente manera: siempre que se pueda llegar de un nodo a a un nodo c recorriendo dos arcos, existe un arco que va directamente del nodo a al nodo c .

La pregunta que se plantea a continuación y que trataremos de contestar es ¿de qué manera podemos saber si una relación es transitiva a partir de su matriz de Adyacencia?

EJEMPLO 1 Considérese la relación sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dada por medio de su matriz de adyacencia M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En casos en los que el conjunto sobre el que se establece la relación sea grande, será muy difícil decidir si cumple la propiedad de la transitividad.

Para llegar a un método que nos permita resolver este problema vamos a definir la Relación Binaria R^2 a partir de R .

5 DEFINICIÓN

Sea A un conjunto finito y R una Relación Binaria sobre él. Definimos la Relación R^2 sobre A de la siguiente manera:

$$xR^2y \iff \exists z \in A : xRz \wedge zRy$$

Esta Relación está compuesta por aquellos elementos de $A \times A$ entre los que existe un *intermediario* para la relación R . Pero la transitividad dice precisamente que si entre dos elementos existe un *intermediario* para R entonces están relacionados. Por tanto podemos relacionar la transitividad de R con esta definición.

6 PROPIEDAD

Si R es transitiva $R^2 \subseteq R$.

DEMOSTRACIÓN.

Por la definición de R^2

$$(x, y) \in R^2 \Rightarrow \exists z \in A : xRz \wedge zRy$$

y por la definición de transitividad

$$\exists z \in A : xRz \wedge zRy \Rightarrow xRy \Rightarrow (x, y) \in R$$

□

Ahora supongamos que $R^2 \subseteq R$. Esto quiere decir que si dos elementos están R^2 -relacionados, entonces también están R -relacionados. Y esto es precisamente la definición de transitividad de R . Por tanto tenemos también que

7 PROPIEDAD

Si $R^2 \subseteq R$, entonces R es transitiva.

DEMOSTRACIÓN.

Inmediata.

□

Al demostrar las propiedades 6 y 7 hemos demostrado el siguiente enunciado:

8 PROPIEDAD

R es transitiva $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$.

DEMOSTRACIÓN.

$\Rightarrow$) Por la Propiedad 6.

$\Leftarrow$) Por la Propiedad 7.

□

Este resultado nos da una nueva manera de buscar la transitividad de R sin tener que recurrir directamente a la definición. Pero para poder utilizarla necesitamos poder expresarlo en términos de las Matrices de Adyacencia, que son la representación habitual de las relaciones en un computador. Si trasladamos esta propiedad a las Matrices de Adyacencia de R y de R^2 tenemos el siguiente resultado:

9 COROLARIO

Si $M = (m_{ij})$ es la Matriz de Adyacencia de R y $M' = (m'_{ij})$ la de R^2 , entonces R es transitiva si y sólo si

$$m'_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN.

Por la definición de Matriz de Adyacencia

$$R^2 \subseteq R \Leftrightarrow \forall i, j, m'_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1$$

y por la propiedad 8 queda demostrado el enunciado.

□

EJERCICIO 2 Demostrar la equivalencia utilizada en la demostración anterior:

$$R^2 \subseteq R \Leftrightarrow \forall i, j, m'_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1.$$

Ahora ya podemos utilizar la Matriz de Adyacencia de R^2 para decidir si R es o no transitiva pero hasta el momento no hemos hablado de cómo obtener dicha matriz. Además sería muy interesante que el cálculo de esta matriz se pudiera hacer a partir de la matriz de R . Al fin y al cabo ¿para qué tantas vueltas a las matrices si después vamos a tener que utilizar las relaciones directamente?

Denotemos por $M = (m_{ij})$ la matriz de adyacencia de R y por $M' = (m'_{ij})$ la Matriz de Adyacencia de R^2 . Que la entrada ij de la Matriz M' valga uno es equivalente a que exista elemento $a_k \in A$ tal que $a_i R a_k$ y $a_k R a_j$ o, en términos de la matriz M , a que exista un índice k tal que $m_{ik} = 1$ y $m_{kj} = 1$.

Es decir, $m'_{ij} = 1$ siempre que sea verdadera la siguiente expresión:

$$(m_{i1} = 1 \wedge m_{1j} = 1) \vee (m_{i2} = 1 \wedge m_{2j} = 1) \vee \dots \vee (m_{in} = 1 \wedge m_{nj} = 1)$$

y será 0 en otro caso. Si cuando una entrada vale 1 decimos que es cierta y cuando vale 0 decimos que es falsa podemos directamente expresarlo como

$$m'_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (m_{ik} \wedge m_{kj}) \quad (1)$$

Como consecuencia de esto, podemos decir que la Matriz de Adyacencia de R^2 se obtiene de la Matriz de Adyacencia de R por medio de la fórmula (1).

Vamos a terminar este punto generalizando la expresión (1) para definir una operación ente matrices booleanas. Observemos que la expresión que hemos obtenido es similar al producto ordinario de matrices reales sustituyendo el producto de números por la conjunción lógica $\wedge$ y la suma por la disyunción lógica $\vee$.

10 DEFINICIÓN

Definimos el producto de matrices booleanas, y lo denotaremos por $\odot$, a la operación consistente en realizar el producto ordinario de matrices sustituyendo el producto de números por la conjunción lógica $\wedge$ y la suma por la disyunción lógica $\vee$.

Es decir, dadas dos matrices booleanas A y B , definimos $C = A \odot B$ como la matriz booleana que tiene por entradas

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge b_{kj}) \quad (2)$$

Por tanto, utilizando la operación que acabamos de definir, la relación encontrada entre la Matriz de Adyacencia M de asociada a R y la Matriz de Adyacencia M' asociada a R^2 podemos expresarla como

$$M' = M \odot M \quad (3)$$

o, compactando más la notación, como $M' = M^2$.

A partir de esto, tenemos como consecuencia inmediata del Corolario 9 el siguiente enunciado:

11 PROPIEDAD

Si $M = (m_{ij})$ es la Matriz de Adyacencia de R y $M' = M \odot M = (m'_{ij})$, entonces R es transitiva si y sólo si

$$m'_{ij} = 1 \Rightarrow m_{ij} = 1.$$

Este enunciado nos proporciona ya una manera sencilla de determinar si una relación de equivalencia R sobre un conjunto A es o no transitiva, utilizando únicamente su Matriz de Adyacencia M .

Continuaremos viendo algunas propiedades del producto de matrices booleanas y extenderemos la relación encontrada entre este producto y las Relaciones Binarias.

12 PROPIEDAD

El producto de matrices booleanas es asociativo, es decir

$$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C.$$

EJERCICIO 3 Demostrar la propiedad 12.