Técnicas Experimentales
de
Termodinámica

Práctica 10
ONDAS TÉRMICAS

Javier Alcázar Tomás

10.1 INDICE GENERAL

10.0. Portada 1

10.1. Índice 2

10.2. Objetivos 3

10.3. Introducción teórica 3

10.4. Diseño 9

10.4.1. Materiales 9

10.4.2. Descripción del montaje 9

10.4.3. Esquema 10

10.5. Organización de los datos obtenidos 11

10.5.1. Condiciones con las que se realizo la práctica 11

10.5.2. Datos 11

10.5.3. Cálculos y gráficas 13

10.6. Conclusiones 21

10.7. Bibliografía 23

10.8. Apéndice A. Tablas de valores utilizados por KaleidaGraph 24

10.9. Apéndice B. Superposición de los valores iniciales 27

10.10.Apéndice C. Graficas sobre las que se ha realizado el ajuste 29

Práctica nº:	*10*	Título:	*Ondas Térmicas*
Comenzada el día	*12-11-03*	y finalizada el día	*18-11-03*

10.2. Objetivos.

El objetivo que nos hemos fijado en esta práctica es el de calcular la difusividad térmica de un material como el cobre (Cu) utilizando nuestros conocimientos sobre la propagación de las ondas térmicas a lo largo de una barra.

10.3. Introducción teórica.

Si se calienta el extremo de una barra metálica de manera intermitente, la temperatura en un punto dado de la barra realiza oscilaciones periódicas, aproximadamente harmónicas, y que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$t-\bar{t} = A\sin(wt+j) = A\sin(2pNt+j) = A\sin\left(\frac{2pt}{T}+j\right) \qquad (1.1)$$

Siendo $\bar{t}$ la temperatura media en dicho punto, ω la pulsación, N la frecuencia y T el periodo de las oscilaciones de temperatura.

En general, las oscilaciones de la temperatura en dicho punto no obedecen una ley tan simple como la sinusoidal indicada anteriormente. Se demuestra, no obstante, que toda oscilación periódica de periodo T, por complicada que sea, puede considerarse como un resultado de la superposición de oscilaciones armónicas componentes de periodos T, T/2, T/3, etc...(teorema de Fourier)[1]. Es decir,

$$t-\bar{t} = A_1\sin(wt+j_1) + A_2\sin(2wt+j_2) + A_3\sin(3wt+j_3) + ... \qquad (1.2)$$

Las constantes A_1, A_2, A_3, ... son de las amplitudes de las oscilaciones componentes (algunas pueden ser nulas); ω, 2ω, 3ω, ... son las respectivas pulsaciones (que corresponden a los periodos T, T/2, T/3, ...); φ_1, φ_2, φ_3, ... son los ángulos de fase. En general, el numero de términos del desarrollo de Fourier decrece rápidamente con el espacio, a lo largo de la barra, en ser absorbidas rápidamente por los componentes de mayor frecuencia por el medio circundante, y el desarrollo de Fourier se reduce a la vibración fundamental.

La oscilación original de la temperatura del punto O (considerado como origen del espacio x_0=0) se propaga en todas las partículas inmediatas, que presentan también una oscilación de su temperatura que se caracteriza por:

-La amplitud de las oscilaciones decrece al alejarnos de O.

-El valor máximo de la temperatura se consigue en otro punto, P, a la distancia x de O, un cierto tiempo después de haberse asolido dicho máximo en O.

[1] Para mas información sobre análisis de Fourier consultar K. F. Riley, M.P. Hobson and S. J. Vence, 'Mathematical Methods for physics and engineering.' Cambridge University Press. Pg. 327.

La propagación progresiva de la oscilación de la temperatura a los demás puntos de la barra constituye un movimiento ondulatorio que llamamos *onda térmica*.

La perturbación térmica que recorre la barra avanza con cierta velocidad, **u**, que depende de la naturaleza de la barra y del periodo T de las variaciones de temperatura. Al cabo de un cierto tiempo τ, la onda iniciada en O alcanza el punto P, que dista x de O, de modo que el retraso en P es $\Delta\tau$= x/u. Si suponemos que la amplitud A de las oscilaciones de temperatura permanece constante y elegimos convenientemente el instante inicial de modo que para τ = 0 sea máxima la temperatura t correspondiente al punto O, la ecuación de oscilación de τ en O será:

$$t - \bar{t} = A\cos(wt) \qquad (1.3)$$

A una distancia x de O se repetirán los mismos valores de t pero con un retraso x/u y, por lo tanto, la ecuación de la oscilación de temperatura en P será la misma que en O, pero τ estará sustituido por τ-(x/u). En P tendremos, por tanto, que

$$t - \bar{t} = A\cos\left[w\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \qquad (1.4)$$

Expresión que constituye la *ecuación de la onda armónica*.

Mientras la temperatura en O ha realizado una oscilación completa, la onda térmica se habrá propagado una distancia que será igual a uT, que se denomina longitud de onda λ,

$$l = uT \qquad (1.5)$$

Con ello la ecuación de las oscilaciones de la temperatura en las ondas térmicas adopta también la forma

$$t - \bar{t} = A\cos\left[2p\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)\right] \qquad (1.6)$$

que pone de manifiesto que dichas ondas presentan una doble periodicidad: respecto al tiempo con un período T y respecto al espacio con una longitud de onda λ.

En general se cumple que la amplitud de las oscilaciones decrece con la distancia al origen según una ley exponencial dada por la siguiente expresión:

$$A(x) = A(0)e^{-e\,x}, \qquad (1.7)$$

siendo ε el *coeficiente de amortiguamiento* que depende del período T y de las propiedades térmicas del material que constituye la barra. Así resulta una *ecuación general de las ondas térmicas* dada por:

$$t - \bar{t} = A(0)e^{-e\,x}\cos\left[w\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]. \qquad (1.8)$$

ECUACIÓN DE LA CONDUCCIÓN:

La *ecuación de la conducción* es una expresión matemática de la conservación de la energía en una sustancia sólida. Se obtiene realizando un balance de energía en un elemento de volumen del material en el que se está realizando la transferencia de calor por conducción. Dentro del sólido se supone que es despreciable la transferencia de calor por convección y radiación. Las transferencias de calor por unidad de tiempo debidas a la conducción están relacionadas con la

distribución de temperaturas mediante la ley de Fourier.

El balance de energía tiene en cuenta el hecho de que puede generarse energía dentro del material. Los ejemplos típicos de generación de energía interna en un sólido lo constituyen las reacciones químicas que generan calor, o el calor generado como consecuencia de las corrientes eléctricas que pasan a través de una resistencia y el calor generado en las reacciones nucleares.

La forma general de la ecuación de conducción tiene en cuenta el almacenamiento de energía dentro del material. Sabemos a partir de consideraciones termodinámicas que la energía interna de una sustancia aumentará si crece la temperatura de la misma. Por consiguiente, un material sólido puede experimentar un incremento neto de la energía almacenada cuando aumente su temperatura a lo largo del tiempo y una disminución neta si su temperatura disminuye con el tiempo. Si la temperatura del material permanece constante, no puede almacenarse ninguna energía y entonces se dice que existen condiciones de régimen o estado estacionario.

Los problemas de transferencia térmica se clasifican en varias categorías muy amplias de acuerdo con las variables de que dependa la temperatura. Si la temperatura es independiente del tiempo, el problema se denomina en *estado o régimen estacionario.* Si la temperatura es una función del tiempo, el problema se clasifica como *no estacionario o transitorio.* Los problemas se clasifican también por el número de dimensiones de las coordenadas de que dependa la temperatura. Si la temperatura es función de una sola coordenada, se dice que el problema es *monodimensional. Si* la temperatura es función de dos o tres dimensiones coordenadas, entonces se dice que es un problema *bi o tridimensional,* respectivamente. Si la temperatura es una función del tiempo y de la dirección x en coordenadas rectangulares, o sea $T = T(x, t)$, el problema se clasifica como *monodimensional y transitorio. Si* $T = T(r,q)$ en coordenadas cilíndricas, el problema se clasifica como *bidimensional y estacionario.*

La expresión tridimensional de la ecuación de conducción resulta ser entonces

$$k\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\dot{q}=r\,c\frac{\partial t}{\partial t} \quad (1.9)$$

Es importante comprender bien el significado físico de cada término de la ecuación [1.9]. Los tres primeros términos del primer miembro de la ecuación representan la cantidad neta de calor que entra en el volumen de control por conducción en la unidad de tiempo y por unidad de volumen. El último término de dicho miembro es la cantidad de energía generada en la unidad de tiempo y por unidad de volumen en el interior del volumen de control. El segundo miembro de la ecuación [1.9] representa el aumento de la energía interna en la unidad de tiempo en el interior del citado volumen y por unidad del mismo. Todos los términos tienen dimensiones de energía por unidad de tiempo y de volumen. Por tanto, cada término emplea las unidades [W/m^3] en el sistema SI de unidades.

La ecuación [1.9] suele utilizarse en la forma

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=\frac{1}{D}\frac{\partial t}{\partial t} \quad (1.10)$$

en donde la difusividad térmica a es un grupo de propiedades del material, que se define como

$$D=\frac{k}{r\,c} \quad (1.11)$$

La difusividad térmica tiene unidades de [m^2/s].

Rara vez se requiere determinar la distribución de temperaturas en el interior de un material sólido resolviendo la ecuación de conducción en la forma de la ecuación [1.10]. La resolución de la ecuación [1.10] exigiría considerar sus derivadas parciales de modo que no resulta ser problema sencillo. En la mayoría de los problemas se pueden hacer hipótesis simplificativas que nos permitan eliminar algunos términos de la ecuación de conducción, y así es frecuente poder reducir la complejidad del problema y de la solución resultante. A continuación estudiaremos algunos casos especiales de la ecuación de conducción y en secciones posteriores de este mismo capítulo se considerarán algunos ejemplos de estos casos especiales.

Si la temperatura de un material no es una función del tiempo, el problema se considera como *estacionario* y el material es incapaz de almacenar energía. La forma estacionaria de una ecuación de conducción tridimensional en coordenadas rectangulares resulta ser entonces

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0 \quad (1.12)$$

Si además de ser un problema estacionario, no existe generación de energía interna en el material, la ecuación de conducción puede simplificarse aún más dando

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0 \quad (1.13)$$

La ecuación 1.13 se conoce con el nombre de *ecuación de Laplace y* aparece en diversas disciplinas científicas.

En el caso de conducción estacionaria sin generación, de calor y en un problema puramente monodimensional en el que la temperatura es solo función de la coordenada x, la ecuación de conducción puede reducirse todavía a

$$\frac{d^2 t}{dx^2}=0 \quad (1.14)$$

Aplicada a nuestro caso se reduce a

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}=\frac{rc}{k}\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{1}{D}\frac{\partial t}{\partial t} \quad (1.15)$$

siendo D =kc/ρc la *difusividad térmica* del material que constituye la barra.

Si para el punto O, escogido como origen de las ondas (x = 0), la oscilación de temperatura es de la forma

$$t-\bar{t}=A\cos(wt) \quad (1.16)$$

la integración de la ecuación (1.15) conduce a

$$t-\bar{t}=Ae^{-ex}\cos\left[w\left(t-\frac{x}{u}\right)\right] \quad (1.17)$$

siendo el coeficiente de amortiguamiento

$$e = \sqrt{\frac{w}{2D}} \quad (1.18)$$

y la velocidad de propagación de las ondas

$$u = \sqrt{2Dw} \quad (1.19)$$

Experimentalmente se puede obtener ε, el coeficiente de amortiguamiento, a partir de la relación:

$$A(x) = A(0)e^{-ex} \quad (1.20)$$

y, por lo tanto, podemos calcular la difusividad D del material, a partir de:

$$D = \frac{k}{r\,c} = \frac{w}{2e^{2}} \quad (1.21)$$

y, conocidos ρ (densidad) y c (calor específico), podemos calcular el coeficiente de conductividad calorífica k_c:

$$k = r\,cD \quad (1.22)$$

Análogamente, a partir de la expresión de la velocidad de propagación, resulta

$$D = \frac{u^2}{2w} = \frac{u^2 T}{4p} \quad (1.23)$$

Información que nos proporciona la difusividad:

La difusividad térmica, caracteriza la velocidad de propagación de una onda térmica en un material. El numerador de la expresión que nos da la difusividad térmica está relacionado con la capacidad de un material para transmitir el calor, mientras que el denominador está relacionado con su capacidad para acumularlo. Así, un material con un coeficiente de difusividad térmica grande indica que el medio es más apto para transmitir energía por conducción que para almacenarla. Por el contrario, un almacenador de energía debe tener un valor de difusividad pequeño.

Termistores:

Los termómetros de resistencia que usan como propiedad termométrica la resistencia de un semiconductor se llaman termistores. Se llaman termistores PTC (positive temperature coefficient) aquellos que aumentan su resistencia con la temperatura y NTC (negative temperature coefficient) los que disminuyen la resistencia con la temperatura. Los más conocidos son los NTC.

Para los termistores NTC, la ley de variación de la resistencia con la temperatura es de tipo exponencial y tiene la forma:

$$R = Ae^{\frac{B}{T}} \quad (1.24)$$

donde A y B son dos constantes características del termistor que dependen de su forma y del

material de que esté hecho y T es la temperatura absoluta. Su coeficiente de temperatura, α, se puede expresar como:

$$a = \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{dT}\right) = \frac{d\ln R}{dT} = -\frac{B}{T^2} \quad (1.25)$$

El valor de B oscila entre 800 y 6000K y el de A entre 1000 y 100.000 Ω, aproximadamente, según el tipo de termistor. Para un termistor con un valor de B de 3600 K y midiendo a temperaturas alrededor de 300 K (27 °C), el valor de a sería de - 0,04 o sea del 4%, lo que indica que, alrededor de 300 K, el termistor cambia su resistencia con la temperatura en un valor igual a 4% R (cada grado representa una variación de temperatura del cuatro por ciento de la resistencia medida).

Los termistores debido a que no están fabricados con elementos puros (suelen estar hechos de cerámica mezclada con óxidos metálicos a base de manganeso, níquel, hierro y cobalto) no son fácilmente intercambiables ni entre los del mismo_ tipo, ya que no presentan la misma respuesta entre , si frente a la temperatura. Envejecen fácilmente y hay que someterlos a calibrados periódicos. Poseen una gran sensibilidad y la gran ventaja de su tamaño que puede llegar a ser muy pequeño (existen termistores llamados de perla de tamaño inferior a 1 mm de diámetro). Se utilizan para temperaturas entre -100 y 400 °C. Deben usarse, para la medida de su resistencia, intensidades de corriente muy pequeñas para evitar el efecto de auto caldeo.

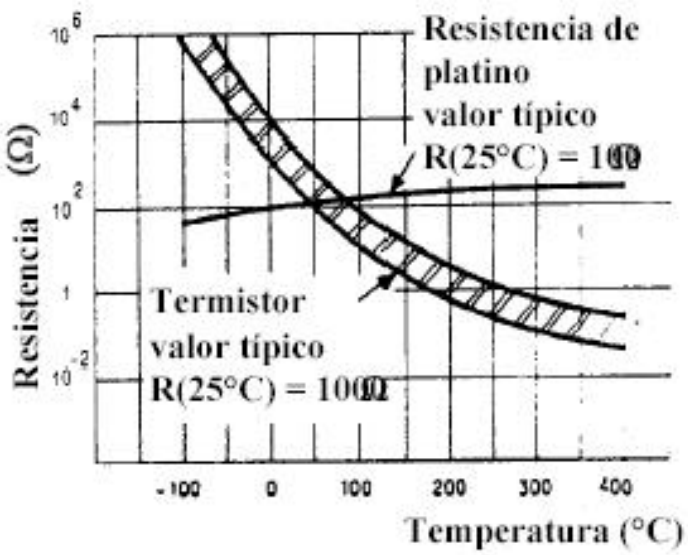


Figura 1. En la figura adjunta mostramos la diferente respuesta de un termómetro de resistencia de platino y de un termistor típicos.

10.4. Diseño .

10.4.1. Materiales.

(a) Termómetro.

(b) Barra de cobre (Cu) [Pureza no especificada].Las medidas[2] de la barra medidas a temperatura ambiente, es decir, sin que el sistema de calefacción este en funcionamiento son:

- L=50 cm.
- D=15 mm.

(c) Combinador construido por dos temporizadores de 9V.

(d) Termistor de perla de unos 1.7 ± 0.1 kΩ a 25 ºC.

(e) Polímetro METEX M-4630 (Utilizado como ohmímetro).

(f) Cronometro estándar.

(g) Sistema de calefacción 15W [JBC 14S (230V ~ 11W)].

(h) Soporte de metacrilato.

(i) Material aislante para la barra de cobre (Cu).

(j) Material informatico:

-Hardware:

- Ordenador PC estándar e impresora del Lab. Termodinámica.

-Software:

- KaleidaGraph (tm) 3.51 Synergy Software, copyright 1986-2001.

(k) Temporizador.

10.4.2. Descripción del montaje.

En este apartado vamos a describir detalladamente todos los pasos necesarios para el desarrollo de esta practica.

En primer lugar deberemos proveernos de un temporizador, ya que el sistema de calefacción deberá estar en funcionamiento con varias horas de antelación al momento de realizar las mediciones. De este modo nos aseguraremos que la temperatura de la barra es constante y por lo tanto tengamos la condición de régimen estacionario que habíamos mencionado en la introducción teórica.

[2] Se considerara que el error de todas ellas es 0.001 m.

El montaje consta de un soporte de metacrilato en el cual tendremos colocada la barra del material que queramos estudiar (en nuestro caso el cobre(Cu)). Dicha barra tiene las siguientes características: su longitud es de 50 cm y tiene un diámetro de 15 mm. Además con el fin de poder realizar las medidas correspondientes se caracteriza por presentar una serie de orificios cilíndricos de 2.5 mm de diámetro y 5 mm de profundidad cada 4 cm. Todas estas mediciones han sido realizadas cuando el sistema de calefacción no se encontraba conectado, es decir, la barra se encontraba a la temperatura ambiente.

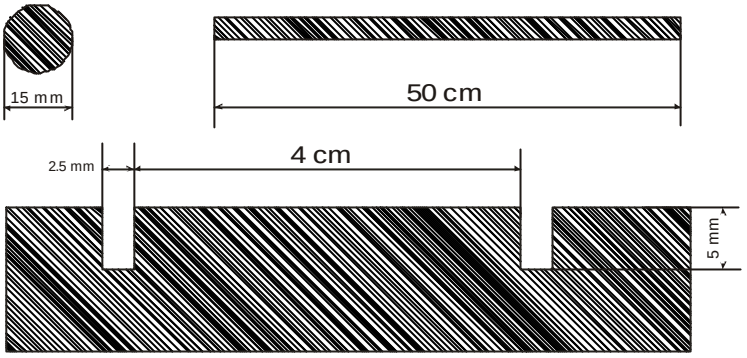


Figura 2. Esquema de la barra con sus correspondientes medidas.

La barra de cobre la envolveremos mediante un material aislante de 5 mm de grosor, así evitaremos las perdidas de flujos de calor por convención y radiación.

En uno de los extremos de la barra colocaremos el sistema de calefacción de 15 W, que controlado mediante un combinador constituido por dos temporizadores alimentados a 9 V, que se encargara de suministrar calor durante un periodo de 75 segundos y luego se anulara durante los próximos 75 segundos. Este proceso se repetirá ininterrumpidamente.

A continuación llevaremos a cabo las medidas, la primera de ellas la realizaremos en el segundo orificio de la barra, es decir, el que esta situado a 8 cm del extremo en el cual estamos aplicando la calefacción. Para ello colocaremos el termistor de perla en el orificio y deberemos registrar las lecturas de la resistencia que nos indica el ohmimetro en intervalos de 10 segundos durante 600 segundos. Estos intervalos los controlaremos haciendo uso del cronometro.

Es importante que las medidas se comiencen a realizar a partir del momento en el cual se aplica la calefacción (se enciende el piloto (LED) rojo del que esta provisto el combinador).

Este mismo proceso lo deberemos realizar en el cuarto orificio situado a 8 cm del anterior y a 16 cm del extremo de la barra. A este cuarto orificio lo llamaremos punto P y al segundo punto O.

Una vez tengamos todos los valores de las resistencias en esos puntos deberemos comenzar su tratamiento informático. Para ello haremos uso del software KaleidaGraph 3.51, disponible en los PC del laboratorio de termodinámica.

El primer paso que realizaremos cuando hayamos introducido los datos en el programa será representar las resistencias en el eje de ordenadas y el tiempo en el de abcisas (tanto las correspondientes al punto O como al P) y comprobar si los puntos se distribuyen en la grafica de forma que se ajustan a una función trigonométrica periódica (seno o coseno). Si se ajustan satisfactoriamente ya podremos proceder a realizar los cálculos para obtener los resultados deseados. Por el contrario si observamos que podrían presentar un mejor ajuste es recomendable que hagamos una segunda tanda de mediciones en dicho orificio. Obviamente nos quedaremos con las medidas que mejor ajuste presenten.

Por ultimo es aconsejable que realicemos la lectura de los termómetros que hay disponibles en el laboratorio para conocer en que condiciones de temperatura y humedad hemos realizado la experiencia.

10.4.3. Esquema.

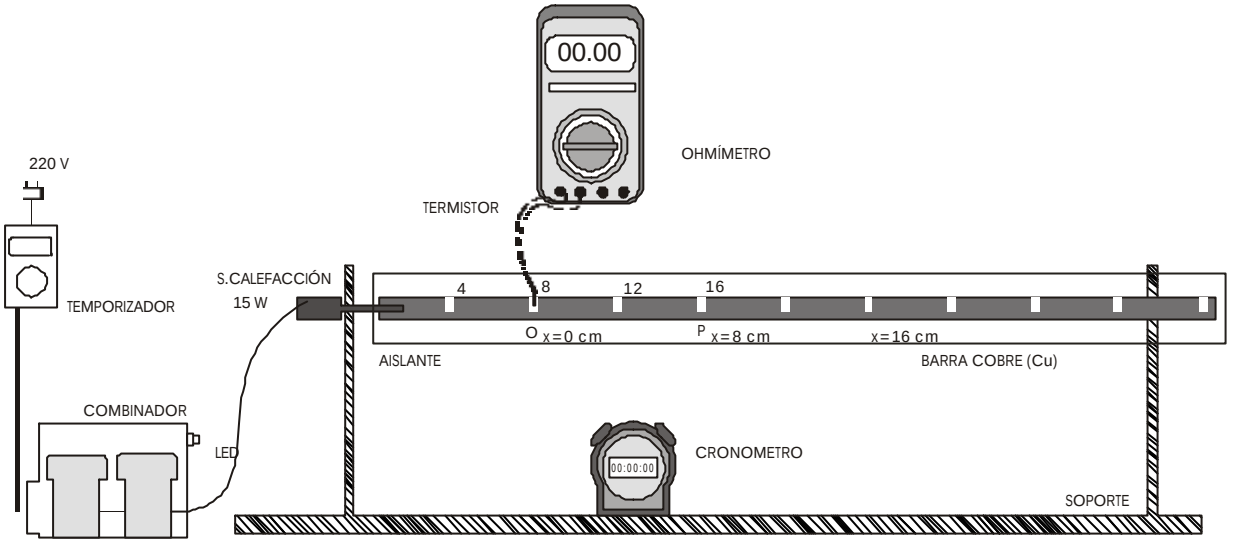


Figura 3. Esquema del montaje completo. Se indican todos los elementos relevantes de que consta.

10.5. Organización de los datos obtenidos.

10.5.1. Condiciones con las que se realizo la practica.

Haciendo uso del termómetro seco y húmedo de que esta provisto el laboratorio calculamos la temperatura y la humedad ambiental. A continuación se adjuntan los valores registrados:

$$t_s = 22.0 \pm 0.5^o C$$

$$t_h = 18.0 \pm 0.5^o C$$

la humedad relativa la obtendremos calculando la diferencia entre t_s-t_h y luego buscando la humedad asociada tal como se indica en la tabla de que esta provista el termómetro. Se obtiene

$$H_r = 65\%$$

10.5.2. Datos.

A continuación se adjunta una tabla en donde se recogen las medidas realizadas en la experiencia, tanto las correspondientes al punto O como al P a lo largo de 600 segundos. En lo que sigue R_8 hará referencia al valor de la resistencia en el punto O situado a 8 cm del extremo donde se aplica la calefacción. Análogamente R_{16} se referirá a la resistencia del punto P (16 cm).

Tabla I. Medidas de la resistencia en los puntos O y P a lo largo de 600 segundos.

Tiempo (s) $\varepsilon(t) = \pm 1$ s	Resistencia $R_8(\Omega)$ $\varepsilon(R_8) = \pm 1\ \Omega$	Resistencia $R_{16}(\Omega)$ $\varepsilon(R_{16}) = \pm 1\ \Omega$	Tiempo (s) $\varepsilon(t) = \pm 1$ s	Resistencia $R_8(\Omega)$ $\varepsilon(R_8) = \pm 1\ \Omega$	Resistencia $R_{16}(\Omega)$ $\varepsilon(R_{16}) = \pm 1\ \Omega$
0	504	511	310	495	498
10	508	513	320	501	502
20	508	515	330	506	505
30	504	516	340	510	507
40	498	516	350	508	509
50	492	515	360	503	512
60	485	512	370	496	512
70	480	508	380	489	508
80	475	506	390	483	507
90	469	503	400	477	504
100	469	498	410	472	501
110	473	497	420	468	499
120	478	495	430	469	498
130	486	495	440	474	496
140	492	497	450	481	496
150	497	500	460	487	496
160	502	503	470	493	497
170	507	506	480	498	498
180	508	508	490	504	502
190	505	510	500	508	505
200	500	510	510	508	507
210	495	509	520	506	509
220	488	508	530	500	510
230	483	507	540	494	509
240	477	504	550	488	508
250	472	502	560	482	507
260	469	498	570	476	505
270	472	497	580	472	502
280	477	496	590	470	498
290	483	495	600	473	497
300	488	496			

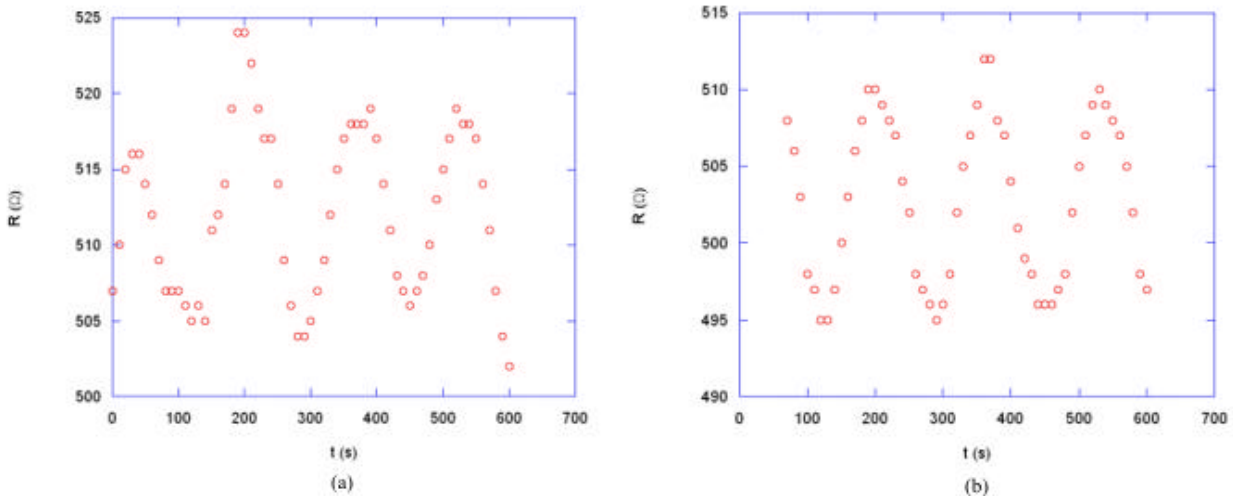
Debemos hacer notar que las medidas correspondientes a R_{16} que aparecen en la tabla corresponden a una segunda tanda de medidas sobre dicho punto ya que las primeras[3] no se ajustaban a la función periódica (seno o coseno) tanto como lo que cabía esperar. Por lo cual decidimos realizar una nueva serie de medidas.

A continuación nos ha parecido interesante incluir las representaciones graficas de las que nos hemos ayudado para desechar una de las series de medidas que teníamos para el punto P.

Claramente podemos observar que la distribución de los puntos en la primera de las graficas (1ª medida) es mas desordenada y además presenta un mayor conjunto de puntos que se

[3] Los valores obtenidos en la primera de las mediciones permanecen registrados en el cuaderno de laboratorio por si fuera necesaria su posterior consulta.

alejan del comportamiento del resto. Por el contrario en la segunda grafica (2ª medida) sucede todo lo contrario aunque también advertimos que algunos puntos se alejan del comportamiento del resto.



Gráfica 1. La gráfica (a) corresponde a la primera de las medidas sobre el punto P y la (b) corresponde a la segunda serie de valores obtenidos. Claramente se observa una distribución más homogénea de puntos en (b).

En el apéndice A se han incluido las tablas de los valores que hemos utilizado con KaleidaGraph para los cálculos posteriores, ya que algunos puntos han sido enmascarados por no ser representativos[4], de este modo mejoramos los resultados posteriores.

El apéndice B es una grafica donde se superponen los valores que hemos admitido para los cálculos posteriores, nos sirve para estar seguros de que los valores que hemos eliminado nos han proporcionado una mejora y tener una visión inicial de los resultados.

10.5.3. Cálculos y graficas.

Antes de introducirnos de lleno en los cálculos será interesante que esbozáramos que es lo que queremos obtener. En primer lugar realizaremos una representación grafica, colocaremos en el eje de ordenadas la diferencia entre el valor de R y la media de todos los valores ($R-\overline{R}$) y en el de abcisas el tiempo, para los puntos O y P.

Una vez tengamos la grafica representada realizaremos el ajuste a una función periódica (seno o coseno). De este modo obtendremos: los valores de la amplitud en los puntos O y P, la fase inicial de O y P, y el valor de la frecuencia ω en dichos puntos.

Ahora solo nos quedara hacer uso de las expresiones de la introducción teórica para calcular; el desfase de la onda térmica entre los dos puntos, al que llamaremos β, el coeficiente de amortiguamiento, ε, la velocidad de propagación de la onda térmica, u, y por ultimo calcularemos la difisividad (D) del cobre (Cu), a partir del coef. de amortiguamiento y a partir de la velocidad de propagación. Por ultimo compararemos los valores obtenidos para la difusibilidad con el obtenido de forma teórica a partir de datos tabulados.

[4] Valores sombreados en las tablas del apéndice A.

Empecemos con la represtación grafica para ello deberemos construir la siguiente tabla, en ella hemos calculado $R-\overline{R}$ en donde $\overline{R}$ es el valor medio de los valores de R calculado con KaleidaGraph [Functions/Statistics] obteniendo:

para el punto O, $\overline{R} = 489.10 \pm 1.7449$

y para el punto P, $\overline{R} = 502.81 \pm 0.72109$

Por otro lado el error que deberemos asignar a $R-\overline{R}$ vendrá dado por $\varepsilon(R)+\varepsilon(\overline{R})$, esta expresión es valida para los dos puntos. Obtenemos:

para O, $\varepsilon(R_8 - \overline{R}) = 1+1.7=2.7\ \Omega$

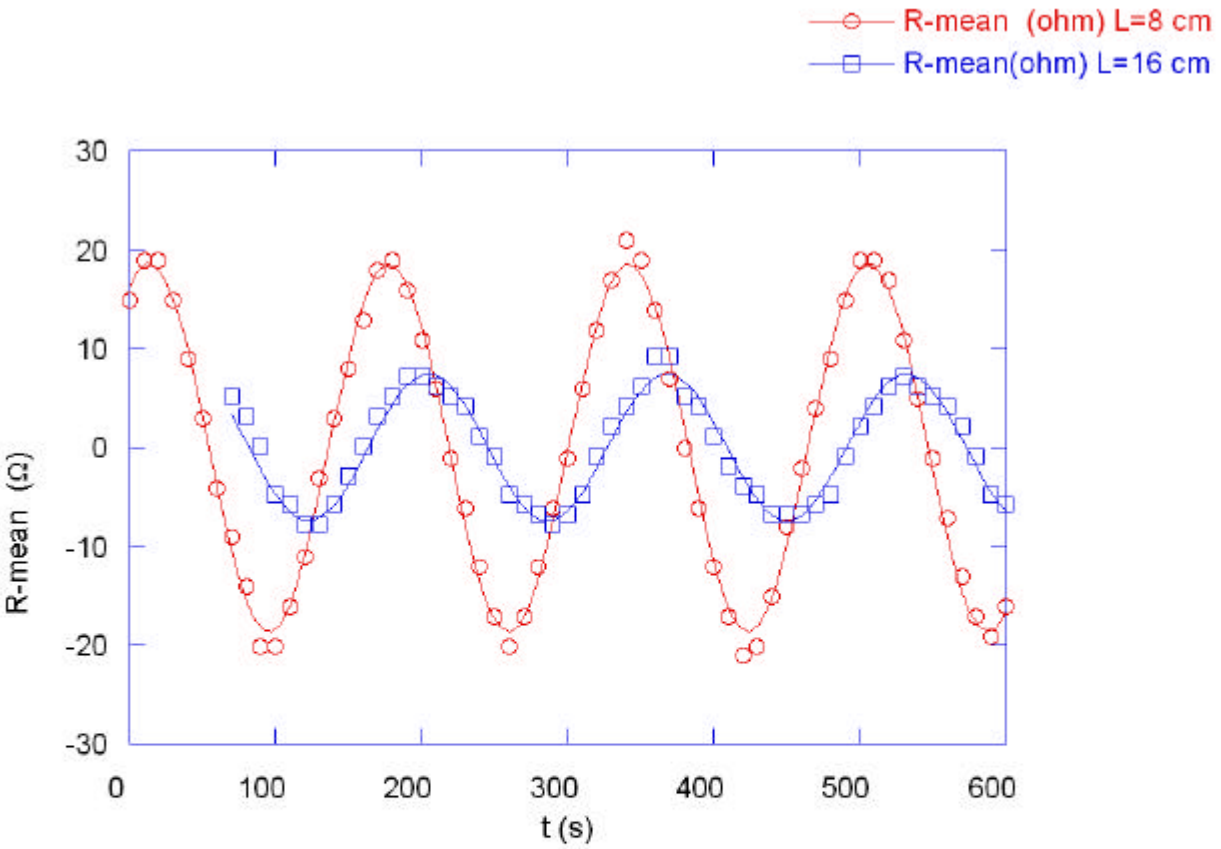
y para P, $\varepsilon(R_{16} - \overline{R}) = 1+0.7=1.7\ \Omega$

y dando el error con una sola cifra significativa quedan como hemos indicado en la tabla.

Tabla II. Valores para la representación grafica que nos servirá para calcular varios parámetros.

Tiempo (s) $\varepsilon(t) = \pm 1$ s	Resistencia R_8-media(Ω) $\varepsilon(R_8\text{-m})=\pm 3\ \Omega$	Resistencia R_{16}-media(Ω) $\varepsilon(R_{16}\text{-m})=\pm 1.7\Omega$	Tiempo (s) $\varepsilon(t) = \pm 1$ s	Resistencia R_8-media(Ω) $\varepsilon(R_8\text{-m})=\pm 3\ \Omega$	Resistencia R_{16}-media(Ω) $\varepsilon(R_{16}\text{-m})=\pm 1.7\Omega$
0	14.9	14.9	310	5.9	-4.82
10	18.9	18.9	320	11.9	-0.82
20	18.9	18.9	330	16.9	2.18
30	14.9	14.9	340	20.9	4.18
40	8.9	8.9	350	18.9	6.18
50	2.9	2.9	360	13.9	9.18
60	-4.1	-4.1	370	6.9	9.18
70	-9.1	5.18	380	-0.1	5.18
80	-14.1	3.18	390	-6.1	4.18
90	-20.1	0.18	400	-12.1	1.18
100	-20.1	-4.82	410	-17.1	-1.82
110	-16.1	-5.82	420	-21.1	-3.82
120	-11.1	-7.82	430	-20.1	-4.82
130	-3.1	-7.82	440	-15.1	-6.82
140	2.9	-5.82	450	-8.1	-6.82
150	7.9	-2.82	460	-2.1	-6.82
160	12.9	0.18	470	3.9	-5.82
170	17.9	3.18	480	8.9	-4.82
180	18.9	5.18	490	14.9	-0.82
190	15.9	7.18	500	18.9	2.18
200	10.9	7.18	510	18.9	4.18
210	5.9	6.18	520	16.9	6.18
220	-1.1	5.18	530	10.9	7.18
230	-6.1	4.18	540	4.9	6.18
240	-12.1	1.18	550	-1.1	5.18
250	-17.1	-0.82	560	-7.1	4.18
260	-20.1	-4.82	570	-13.1	2.18
270	-17.1	-5.82	580	-17.1	-0.82
280	-12.1	-6.82	590	-19.1	-4.82
290	-6.1	-7.82	600	-16.1	-5.82
300	-1.1	-6.82			

La representación grafica que obtenemos es la siguiente:



y = m1*sin(m2*m0+m3)		
	Value	Error
m1	18,65	0,20755
m2	0,038284	6,9227e-05
m3	1,057	0,023802
Chisq	79,469	NA
R	0,99643	NA

Ajuste para O (L=8 cm)

y = m1*sin(m2*m0+m3)		
	Value	Error
m1	7,4235	0,20972
m2	0,038399	0,00016853
m3	-0,00018381	0,062245
Chisq	58,148	NA
R	0,98027	NA

Ajuste para P (L=16 cm)

Gráfica 2. Superposición de la onda térmica en el punto O con la del punto P. Se puede observar el fenómeno de disminución de la amplitud de la onda térmica a lo largo de la barra. también se adjuntan los datos correspondientes a los dos ajustes que hemos realizado, para O y para P.

Como podemos observar el ajuste lo hemos realizado a la función siguiente

$$R - \bar{R} = A\sin(wt + j) \quad (1.26)$$

en donde identificando las variables vemos que

Tabla III. Resumen de los resultados obtenidos en el ajuste.

	Punto O	**Punto P**
A = m1 (W)	18.6 ± 0.2	7.4 ± 0.2
w = m2 (rad/s)	(38.28 ± 0.07)×10^{-3}	(38.4 ± 0.2)×10^{-3}
j = m3 (rad)	1.06 ± 0.02	(-0.02 ± 6.00) ×10^{-2}

Seguidamente ya podemos pasar a realizar el resto de cálculos que se apoyan en los valores obtenidos en el ajuste anterior.

En primer lugar calcularemos el desfase temporal de la onda térmica entre los dos puntos donde hemos realizado las mediciones, para ello haremos uso de la expresión

$$R - \bar{R} = A\sin(wt + j) \quad (1.27)$$

para calcular el valor de t en el punto O y en el P cuando R- $\bar{R}$ sea cero, de modo que:

para el punto O:

$$0 = 7.4\sin(0.0384t - 0.0002) \quad (1.28)$$

de donde

$$t = \frac{1.06}{0.03828} = 27.690s \quad (1.29)$$

para el punto P:

$$0 = 18.6\sin(0.03828t + 1.06) \quad (1.30)$$

de donde

$$t = \frac{0.0002}{0.0384} = 0.0052s \quad (1.31)$$

por lo tanto el desfase vendrá dado por

$$b = \left|-27.690 - 0.005\right| = \left|-27.695\right| = 27.7s$$
$$b = 27.7s \quad (1.32)$$

ahora deberemos calcular el error asociado al tiempo para el punto O y el P. Luego calcularemos el de β, que será simplemente la suma de los dos anteriores. Por lo tanto

$$t = \frac{j}{w}$$

$$e(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial j}\cdot e(j)\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial w}\cdot e(w)\right)^2} = \quad (1.33)$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{w}\cdot e(j)\right)^2 + \left(\frac{-j}{w^2}\cdot e(w)\right)^2}$$

de modo que para O tendremos:

$$e(t_O) = 0.5249s \quad (1.34)$$

y para P:

$$e(t_P) = 1.5625s \quad (1.35)$$

entonces el error de β es:

$$e(b) = e(t_O) + e(t_P)$$
$$e(b) = 0.5 + 1.6 = 2.1s \quad (1.36)$$

Por tanto el desfase entre los dos puntos será

$$\boxed{b = 27.7 \pm 2.1s} \quad (1.37)$$

Otro de los aspectos importantes era el calculo de coeficiente de amortiguamiento de la onda térmica. Para ello partiremos de la expresión

$$A_P = A_O e^{-ex} \quad (1.38)$$

de donde aislaremos ε, tal como mostramos a continuación

$$\ln A_P = \ln A_O e^{-ex}$$
$$\ln A_P = \ln(A_O e^{-ex}) = \ln A_O + \ln e^{-ex}$$
$$\ln A_P - \ln A_O = -ex \quad (1.39)$$
$$\frac{-1}{x}(\ln A_P - \ln A_O) = e$$

de modo que si substituimos los valores correspondientes obtenemos

$$\frac{-1}{0.08}(\ln 7.4 - \ln 18.6) = e = 11.5280\frac{1}{m} \quad (1.40)$$
$$e = 11.5m^{-1}$$

por otra parte el error asociado tiene la siguiente expresión

$$e(e) = \sqrt{\left(\frac{\partial e}{\partial x}\cdot e(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial A_P}\cdot e(A_P)\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial A_O}\cdot e(A_O)\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{x^2}(\ln A_P - \ln A_O)\cdot e(x)\right)^2 + \left(\frac{-1}{xA_P}\cdot e(A_P)\right)^2 + \left(\frac{1}{xA_O}\cdot e(A_O)\right)^2} = \quad (1.41)$$
$$= \{substituyendo\} =$$
$$e(e) = 0.3809m^{-1}$$

por tanto el coeficiente de amortiguamiento obtenido es

$$\boxed{e = 11.5 \pm 0.4m^{-1}} \quad (1.42)$$

Ahora otro aspecto importante como es la velocidad de propagación de la onda térmica a lo largo de la barra de cobre. Para dicho calculo haremos uso de la siguiente expresión

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (1.43)$$

donde x_2-x_1=d(OP) y τ es el tiempo donde se da un máximo o mínimo de la onda en el punto correspondiente[5] o del valor cero de la oscilación de la temperatura. Nosotros hemos utilizado los tiempos donde se da el valor cero de la oscilación de la temperatura (resistencia), lo hemos hecho para poder reutilizar el valor de β, ya que $\beta = \tau_2 - \tau_1$ de modo que substituyendo en (1.43) obtenemos

$$u = \frac{0.08}{27.7} = 2.888\times10^{-3}\ m/s \quad (1.44)$$

el error de esta magnitud vendrá dado por

$$e(u) = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot e(x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot e(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial b}\cdot e(b)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{b}\cdot e(x_2)\right)^2 + \left(\frac{-1}{b}\cdot e(x_1)\right)^2 + \left(\frac{-(x_2-x_1)}{b^2}\cdot e(t_2)\right)^2} = \quad (1.45)$$

$$= \{substituyendo\} =$$

$$e(u) = 2.2483\times10^{-4}\ m/s$$

para el calculo de este error hemos supuesto que los profesores encargados de medir la distancia entre los orificios utilizaron una cinta métrica con una sensibilidad de 0.001 m.

Por lo tanto el valor que obtenemos para la velocidad de propagación de la onda térmica es de:

$$\boxed{u = (2.9\pm 0.2)\times10^{-3}\ m/s} \quad (1.46)$$

Por ultimo nos disponemos a calcular la difusividad térmica del cobre. Esta la calcularemos por dos métodos diferentes, uno de ellos hace uso del coeficiente de amortiguamiento y el otro de la velocidad de propagación.

A continuación haremos el calculo de difusividad a partir del coef. de amortiguamiento, la denotaremos por D_e, para ello utilizamos la expresión

$$D_e = \frac{w}{2e^2} \quad (1.47)$$

de modo que si substituimos los valores tenemos que

$$D_e = \frac{0.04}{2(11.5)^2} = 1.51228\times10^{-4}\ m^2/s \quad (1.48)$$

el error del cual viene dado por

$$e(D_e) = \sqrt{\left(\frac{\partial D_e}{\partial w}\cdot e(w)\right)^2 + \left(\frac{\partial D_e}{\partial e}\cdot e(e)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2e^2}\cdot e(w)\right)^2 + \left(\frac{-w}{e^3}\cdot e(e)\right)^2} = \quad (1.49)$$

$$= \{substituyendo\} =$$

$$= e(D_e) = 1.0547\times10^{-5}\ m^2/s$$

[5] Dichos tiempos los podemos obtener a partir de la inspección de los valores de las tablas.

por lo tanto el valor que obtenemos para la difusividad es

$$\boxed{D_e = (1.51 \pm 0.10) \times 10^{-4}\ m^2/s} \quad (1.50)$$

Ahora calcularemos la difusividad a partir de la velocidad de propagación de la onda térmica, la denotaremos por D_u, para ello haremos uso de la expresión

$$D_u = \frac{u^2}{2w} \quad (1.51)$$

substituyendo tendremos que

$$D_u = \frac{(2.9 \times 10^{-3})^2}{2 \cdot 0.04} = 0.000105\, m^2/s \quad (1.52)$$
$$D_u = 1.05 \times 10^{-4}\, m^2/s$$

y su error será

$$e(D_u) = \sqrt{\left(\frac{\partial D_u}{\partial u} \cdot e(u)\right)^2 + \left(\frac{\partial D_u}{\partial w} \cdot e(w)\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{u}{w} \cdot e(u)\right)^2 + \left(\frac{-u^2}{2w^2} \cdot e(w)\right)^2} = \quad (1.53)$$
$$= \{substituyendo\} =$$
$$= e(D_u) = 1.4509 \times 10^{-5}\, m^2/s$$

por tanto el valor de la difusividad obtenido de este modo será

$$\boxed{D_u = (1.05 \pm 0.14) \times 10^{-4}\ m^2/s} \quad (1.54)$$

también puede ser interesante calcular el valor medio de la difusividad, por tanto haciendo uso de los resultados (1.50) y (1.54) tenemos que

$$\bar{D} = \frac{D_e + D_u}{2} = \frac{(1.51 + 1.05) \times 10^{-4}}{2} = 1.28 \times 10^{-4}\, m^2/s \quad (1.55)$$
$$\bar{D} = 1.28 \times 10^{-4}\, m^2/s$$

procediendo de igual modo para los errores llegaremos a

$$\boxed{\bar{D} = (1.28 \pm 0.12) \times 10^{-4}\ m^2/s} \quad (1.56)$$

El próximo paso que deberemos realizar es el calculo teórico de la difusividad del cobre, para ello haremos uso de la expresión

$$D = \frac{k_c}{rc} \quad (1.57)$$

en donde k_c es el coeficiente de conductividad calorífica, c el calor especifico y por ultimo ρ es la densidad.

Para realizar este calculo teórico habrá que hacer algunas aclaraciones. La primera de ellas es el echo de desconocer la pureza de la barra, así pues el valor ρ tendrá esa incertidumbre. Por

otro lado esta la conductividad calorífica que depende de la temperatura y por tanto necesitaremos los valores de las constantes A y B de la expresión (1.24) para poder calcular a que temperatura se encuentra la barra. Sin estos valores nos veremos obligados a realizar una aproximación.

Si consideramos que la pureza del cobre que forma la barra es del 100% y que la barra se encuentra a una temperatura de unos 305.15 K (la temperatura del laboratorio era de 22ºC mas unos 10ºC que puede proporcionar el sistema de calefacción), tenemos los siguientes valores:

Densidad (t=20ºC)[6]: $\rho^7 = 8933\ kg/m^3$.

Calor especifico (t=20ºC): $c^8 = 383\ J/(kg\ K)$.

Conductividad calorífica o térmica (t=32ºC): $k_c{}^9 = 400.5\ W/(m\ K)$.

Para conseguir este ultimo valor hemos tenido que realizar una interpolación. A continuación mostramos el proceso.

Tabla IV. Tabla de los valores tomados de David R.Lide, *'CRC Handbook of chemistry and physics.'*.

T (K)	**K_c (W/m K)**
300	401
350	396

Aplicando la expresión

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad (1.58)$$

donde T = y y k_c = x, por lo tanto obtenemos

$$y(x) = 401 + \frac{396 - 401}{350 - 300} \cdot (305.15 - 300) = \quad (1.59)$$
$$= 400.485 \cong 400.5\, W/m \cdot K$$

por lo tanto

$$k_c = 400.5\, W/m \cdot K \quad (1.60)$$

el error asociado a este valor lo despreciamos ya que las otras magnitudes utilizadas no tienen ninguno asociado. también debido a que es un calculo aproximado.

Ahora solo nos queda sustituir los valores de estas magnitudes en la expresión (1.57) y así obtener el valor teórico de la difusividad del cobre. Por tanto

$$D = \frac{k_c}{r\,c} = \frac{400.5\, W/m \cdot K}{8933\, kg/m^3 \cdot 383\, J/kg \cdot K} = \left\{ W = J/s \right\} = 1.17 \cdot 10^{-4}\, m^2/s \quad (1.61)$$

[6] No nos ha sido posible encontrala para la temperatura estimada.
[7] Valor tomado de Tabla-E pag.501 de F.Kreith, W.Z. Black, *'La transmission del calor. Principios fundamentals'*.
[8] Ver fuente de la densidad.Nota 5.
[9] Valor obtenido a partir de los datos de David R.Lide, *'CRC Handbook of chemistry and physics.'*.

por lo tanto

$$\boxed{D = 1.17 \cdot 10^{-4}\, m^2/s} \quad (1.62)$$

Un valor teórico valido también seria

$$\boxed{D = 1.14 \cdot 10^{-4}\, m^2/s} \quad (1.63)$$

encontrado en la bibliografía utilizada[10].

En el siguiente apartado analizamos todos los resultados obtenidos con anterioridad.

10.6. Conclusiones.

En la sección anterior hemos obtenido una serie de resultados que vamos a comentar con detalle a continuación.

Los primeros resultados que hemos obtenido han sido los correspondientes al ajuste de las dos series de puntos, que habíamos representado gráficamente, a una función sinusoidal. Como se puede observar en la grafica el ajuste que se ha obtenido ha sido notable y esto se refleja en los coeficientes de correlación obtenidos para los ajustes (R = 0.99 (O) y R = 0.98 (P)).

Del ajuste anterior hemos obtenido una serie de valores correspondientes a las siguientes magnitudes; amplitud (A), frecuencia angular (ω), y fase inicial (φ). Lo único que nos llama la atención es que el valor del error de la fase inicial de la onda en el punto P es bastante mayor al propio valor de la fase. Este hecho no nos causara ningún problema grave posterior, tan solo incidirá en aumentar considerablemente el error asociado a b y por lo tanto el asociado al desfase temporal de la onda entre los puntos O y P.

El siguiente resultado que hemos obtenido ha sido el correspondiente al desfase temporal de la onda entre los dos puntos (O y P). Este resultado se ajusta a lo que debíamos esperar y tan solo volver a reseñar el hecho de que el error asociado es tal vez mayor de lo deseado debido a lo comentado en el párrafo anterior.

también es interesante mencionar que podemos ver como la amplitud (A) de la onda térmica decae a lo largo de la longitud de la barra.

Hasta ahora hemos obtenido cuatro resultados importantes que seria recomendable expresar en una tabla para poder localizarlos fácilmente.

Tabla V. Resumen de los resultados obtenidos.

Punto	Amplitud A(W)	Frev.angular w (rad/s)	Fase inicial j (rad)	Desfase entre O y P, b (s)
O	18.6 ± 0.2	(38.28 ± 0.07)×10^{-3}	1.06 ± 0.02	27.7±2.1
P	7.4 ± 0.2	(38.4 ± 0.2)×10^{-3}	(-0.02 ± 6.00) ×10^{-2}	

[10] Manuel Zamora Carranza, 'Un estudio de los sistemas termodinámicos.',Ed. Universidad de Sevilla 1998 (Manuales universitarios), pág.

A partir de esta tabla hemos deducido otra serie de magnitudes que nos eran de gran interés en esta practica. Los resultados obtenidos a priori parecen validos ya que están dentro de los valores razonables y además los errores asociados a dichos valores son pequeños.

Otro motivo por el cual podemos mostrar confianza en los valores obtenidos es el echo de que los valores obtenidos para la difusividad del cobre tanto a partir del coeficiente de amortiguamiento como de la velocidad de propagación de la onda se aproximan al valor de la difusividad del cobre calculado teóricamente a partir de la expresión $D=k_c/\rho\ c$.

Aun así nos ha parecido interesante introducir esta tabla en donde se realiza una comparación con los resultados obtenidos por A.Bodas, V.Gandía y E.López-Baeza. Es la siguiente:

Tabla VI. Comparación de los resultados obtenidos con los de López-Baeza y cia.

Magnitudes	López-Baeza y cia.	Magnitudes	Nosotros
e (m^{-1})	13.2 ± 0.7	**e (m^{-1})**	11.5 ± 0.4
v (m/s)	$(3.1 \pm 0.2)\times 10^{-3}$	**u (m/s)**	$(2.9 \pm 0.2)\times 10^{-3}$
k_ε (m^2/s)	$(1.13 \pm 0.12)\times 10^{-4}$	**D_ε (m^2/s)**	$(1.51 \pm 0.10)\times 10^{-4}$
k_v (m^2/s)	$(1.21 \pm 0.16)\times 10^{-4}$	**D_v (m^2/s)**	$(1.05 \pm 0.14)\times 10^{-4}$
` k (m^2/s)	$(1.17 \pm 0.14)\times 10^{-4}$	**` D (m^2/s)**	$(1.28 \pm 0.12)\times 10^{-4}$

Nota 1. Se ha mantenido la nomenclatura utilizada por cada grupo de trabajo.

En lo referente a la comparación de la difusividad para el cobre obtenida experimentalmente con la teórica, decir que a partir de los valores tabulados hemos obtenido $D = 1.17\times 10^{-4}$ m^2/s que es un valor que se acerca bastante a los que hemos obtenido experimentalmente. A excepción del de D_ε que se aleja del valor esperado.

Por otra parte un valor mas aproximado para la difusividad del cobre es el que podemos obtener del articulo de A.Bodas, V.Gandía y E.López-Baeza. Dicho valor es de:

$$D = 1.020\times 10^{-4}\ m^2/s$$

Que ha sido obtenido por la variación periódica del calentamiento por medio de laser modulado sinusoidalmente[11].

A la vista del análisis de los datos obtenidos podemos concluir que los resultados obtenidos son satisfactorios.

Para finalizar podríamos resumir en dos apartados los efectos observados en la practica:

(a) La amplitud de las oscilaciones decrece al alejarnos de O.

[11] W.Czarnetzki, M.Wandelt and W.Roetzel, 'Thermal wave analysis for measurements of thermal difusivity', Proceedings of the Joint Conference 1996: IEEE Instrumentation and Measurament Technology Conference and IMEKO Technical Committee 7, Brusseles, Belgium, 4-6 June 1996 (IEEE, New York, 1996), pp.1195.

(b) El valor máximo de la temperatura se alcanza en otro punto, P, a la distancia x de O, un cierto tiempo después de que se haya alcanzado dicho máximo en O, es decir, hay un retraso de la onda.

10.7. Bibliografía.

F.Kreith, W.Z. Black, *'La transmission del calor. Principios fundamentals'*,Ed. Alhambra (1983), pág.40-65, Tabla E-1(501,502), Tabla E-2(503).

Fran K.P. Incropera, David P.D. Witt, *'Fundamentos de la transferencia del calor.'*, Ed. Pearson (Prentice Hall) [4ª edicion 1999], pág. 49-60.

José Aguilar Peris, *'Curso de termodinámica.'*, Ed. Alhambra Universidad (2001), pág.449-456.

A.Bodas, V.Gandía, E. López-Baeza, *'An undergraduate experiment on the propagation of termal waves.'*, 1998 American Association of Physics Teachers, Am. J. Phys. 66(6), June 1998.

María Jesús Hernández, *'Apuntes de Tecnicas experimentales de termodinámica.'*, Tema II, pág.6 y Tema IV.

David R.Lide, *'CRC Handbook of chemistry and physics.'*, 2^{on} edition 2001-2002, pp.12-221 to 223.

P.A. Tipler, *'Fisica'*, Ed. Reverté S.A (3ª edición 1995), pág.519.

Departamento de termodinámica (Universidad de Valencia), *'Manual del laboratorio de técnicas experimentales de termodinámica(2003-2004).'*, pág. 10-1 a 10-4.

G.L. Squires, *'Fisica practica.'*, Ed. McGraw-Hill(1972).

José Antonio Manzanares, *'El lenguaje de la física experimental.'*

John R. Taylor, *'An introduction to Error Analysis.'*, University Science Books (California) [Second edition].

10.8. Apéndice A.

Tablas de valores utilizados por KaleidaGraph.

10.9. Apéndice B.

Superposición de los valores iniciales.

10.10.Apéndice C.

Gráficas sobre las que se ha realizado el ajuste.