Ampliación Métodos Matemáticos

POR

Javier Alcázar Tomás

Ejercicio 1. Considera la superficie parametrizada $x(u^1,u^2)=(a(1+u^2)\cos u^1, a(1+u^2)\sin u^1, b\,u^1)$.

1. **Demuestra que es una superficie reglada.**
2. **Obten los símbolos de Christoffel.**
3. **Obten la ecuación de las geodésicas.**
4. **Estudia si las curvas coordenadas $u^1=\mathrm{ctt}$ y $u^2=\mathrm{ctt}$ son geodésicas.**

Solución:

Para demostrar que se trata de una superficie reglada tan solo nos sera necesario recordar su definición;

Definición 1. *Dada una familia uniparamétrica de rectas $\{\alpha(t), w(t)\}$, la superficie parametrizada*

$$x(t,v)=\alpha(t)+v\,w(t),\quad t\in I,\quad v\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

*se denomina **superficie reglada**.*

si la superficie parametrizada dada se puede reescribir de esta forma habremos demostrado que se trata de una superficie reglada. Así pues por simple inspección de la superficie parametrizada podemos observar que la podemos escribir como

$$\begin{aligned} x(u^1,u^2) &= (a(1+u^2)\cos u^1, a(1+u^2)\sin u^1, b\,u^1)=\\ &=(a\cos u^1+a\,u^2\cos u^1, a\sin u^1+a\,u^2\sin u^1, b\,u^1)=\\ &=(a\cos u^1, a\sin u^1, b\,u^1)+u^2\,(a\cos u^1, a\sin u^1, 0) \end{aligned} \tag{2}$$

que se adapta a la estructura de la expresión (1) que caracteriza a las superficies regladas, así pues podemos afirmar que *se trata de una superficie reglada*.

A continuación se nos pide que calculemos los símbolos de Christoffel. Sabemos que estos vienen dados por las siguientes expresiones siempre que se cumpla que $g_{12}=g_{21}=0$.

$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}\frac{g_{11,1}}{g_{11}}$	$\Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{11}}$	$\Gamma_{12}^1=\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{11}}$
$\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}\frac{g_{22,2}}{g_{22}}$	$\Gamma_{11}^2=-\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{22}}$	$\Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{22}}$

Tabla 1. Expresión de los símbolos de Christoffel cuando $g_{12}=g_{21}=0$.

Para poder hacer uso de estas expresiones en primer lugar deberemos realizar unos calculos previos. El primero de ellos sera calcular las derivadas parciales primeras respecto cada una de las variables, las designaremos como $x_a(u)=D_a\,x^i\,f_i$, donde el subíndice a indica respecto de que variable hemos realizado la derivación y las f_i son la base, por tanto obtenemos

$$x_1(u)=D_1\,x^i\,f_i=D_1(x^1f_1+x^2f_2+x^3f_3)=(-a\,(1+u^2)\sin u^1, a\,(1+u^2)\cos u^1, b) \tag{3}$$

$$x_2(u)=D_2\,x^i\,f_i=D_2(x^1f_1+x^2f_2+x^3f_3)=(a\cos u^1, a\sin u^1, 0) \tag{4}$$

ahora ya podemos calcular las componentes del tensor métrico, estas vienen dadas por la expresión

$$g_{ij}=<x_i(u), x_j(u)>=<D_i\,x^p(u)\,f_p, D_j\,x^p(u)\,f_p>,\quad i,j=1,2\quad p=1,2,3 \tag{5}$$

los resultados obtenidos después de aplicar (5) son los siguientes

$$g_{11}(u) = < x_1(u), x_1(u) > = a^2\,(1+u^2)^2(\sin^2 u^1 + \cos^2 u^1) + b^2 = a^2\,(1+u^2)^2 + b^2 \tag{6}$$

$$g_{12}(u) = g_{21}(u) = < x_1(u), x_2(u) > = < x_2(u), x_1(u) > = -\,a^2\,(1+u^2)\sin u^1 \cos u^1 + a^2\,(1+u^2)\sin u^1 \cos u^1 = 0 \tag{7}$$

$$g_{22}(u) = < x_2(u), x_2(u) > = a^2\,(\sin^2 u^1 + \cos^2 u^1) = a^2 \tag{8}$$

a continuación deberemos calcular los valores $g_{\mathrm{ij},k}$ cuyo significado aclaramos inmediatamente

$$g_{ij\,,k} = D_k\, g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}. \tag{9}$$

Recordar por último que dichos valores aparecian en la definición de los propios símbolos de Christoffel;

Definición 2. *Símbolos de Christoffel*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\, g^{m\,s}[-\,g_{ij\,,s} + g_{s\,i\,,j} + g_{j\,s\,,i}]. \tag{10}$$

Calculemos pues los $g_{\mathrm{ij},k}$ que necesitamos para el cálculo que tenemos entre manos. Los valores que obtenemos son los siguientes

$$g_{11,1} = 0 \tag{11}$$

$$g_{22,1} = 0 \tag{12}$$

$$g_{22,2} = 0 \tag{13}$$

$$g_{11,2} = 2a^2(1+u^2) \tag{14}$$

ahora ya estamos en condiciones de aplicar las expresiones de la Tabla 1, puesto que como observamos en la expresión (7) se cumple la condición para poder hacer uso de ellas en este problema en particular. Así pues obtenemos que

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\frac{g_{11,1}}{g_{11}} = \frac{1}{2}\frac{0}{a^2\,(1+u^2)^2 + b^2} = 0 \tag{15}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\,\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{11}} = -\,\frac{1}{2}\frac{0}{a^2\,(1+u^2)^2 + b^2} = 0 \tag{16}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}_{11,2}}{\mathrm{g}_{11}} = \frac{1}{2}\frac{2a^2(1+u^2)}{a^2\,(1+u^2)^2 + b^2} = \frac{a^2(1+u^2)}{a^2\,(1+u^2)^2 + b^2} \tag{17}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{g_{22,2}}{g_{22}} = \frac{1}{2}\frac{0}{a^2} = 0 \tag{18}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\,\frac{1}{2}\frac{2a^2(1+u^2)}{a^2} = -\,\frac{a^2(1+u^2)}{a^2} = -\,(1+u^2) \tag{19}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{0}{a^2} = 0 \tag{20}$$

Continuaremos obteniendo la ecuación de las geodésicas, para ello recordemos como se definen;

Definición 3. *Las ecuaciones de las geodésicas son ecuaciones diferenciales de segundo orden que se definen como*

$$\ddot{u}^m + \Gamma_{rs}^m\, \dot{u}^r\, \dot{u}^s = 0, \qquad m = 1, 2 \tag{21}$$

realicemos pues el cálculo explicito:

Para $m = 1$

$$\ddot{u}^1 + \Gamma_{11}^1\, \dot{u}^1\, \dot{u}^1 + \Gamma_{12}^1\, \dot{u}^1\, \dot{u}^2 + \Gamma_{21}^1\, \dot{u}^2\, \dot{u}^1 + \Gamma_{22}^1\, \dot{u}^2\, \dot{u}^2 = 0 \tag{22}$$

teniendo en cuenta que $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$

$$\begin{aligned} \ddot u^1 + \Gamma^1_{11}\,\dot u^1\,\dot u^1 + 2\Gamma^1_{12}\,\dot u^1\,\dot u^2 + \Gamma^1_{22}\,\dot u^2\,\dot u^2 &= 0 \\ \ddot u^1 + 0\cdot(\dot u^1)^2 + 2\,\frac{a^2(1+u^2)}{a^2\,(1+u^2)^2+b^2}\,\dot u^1\,\dot u^2 + 0\cdot\dot u^2\,\dot u^2 &= 0 \\ \ddot u^1 + 2\,\frac{a^2(1+u^2)}{a^2\,(1+u^2)^2+b^2}\,\dot u^1\,\dot u^2 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

y para $m=2$

$$\begin{aligned} &\ddot u^2 + \Gamma^2_{11}\,\dot u^1\,\dot u^1 + \Gamma^2_{12}\,\dot u^1\,\dot u^2 + \Gamma^2_{21}\,\dot u^2\,\dot u^1 + \Gamma^2_{22}\,\dot u^2\,\dot u^2 = 0 \\ &\ddot u^2 + \Gamma^2_{11}\,\dot u^1\,\dot u^1 + 2\Gamma^2_{12}\,\dot u^1\,\dot u^2 + \Gamma^2_{22}\,\dot u^2\,\dot u^2 = 0 \\ &\ddot u^2 - (1+u^2)(\dot u^1)^2 + 2\cdot 0\,\dot u^1\,\dot u^2 + 0\cdot(\dot u^2)^2 = 0 \\ &\ddot u^2 - (1+u^2)(\dot u^1)^2 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

por lo tanto las ecuaciones de las geodésicas son

$$\ddot u^1 + 2\,\frac{a^2(1+u^2)}{a^2\,(1+u^2)^2+b^2}\,\dot u^1\,\dot u^2 = 0 \tag{25}$$

y

$$\ddot u^2 - (1+u^2)(\dot u^1)^2 = 0 \tag{26}$$

Por último vamos a estudiar si las curvas coordenadas $u^1 = \text{ctt}$ y $u^2 = \text{ctt}$ son geodésicas. Para ello en primer lugar consideraremos que $u^1 = \text{ctt}$ e imponiendo esta condición en las expresiones (25) y (26) tenemos que

$$u^1 = \text{ctt} \;\rightarrow\; \ddot u^2 = 0 \;\rightarrow\; u^2 = \lambda x + \mu, \tag{27}$$

es decir, todas las curvas coordenadas que cumplan

$$\begin{aligned} u^1 &= \text{ctt} \\ u^2 &= \lambda x + \mu \end{aligned} \tag{28}$$

son geodésicas.

Ahora si consideramos u^2=ctt y procedemos de igual forma que con anterioridad llegamos a

$$\tag{29}$$

es decir, todas las curvas coordenadas que cumplan

$$\begin{aligned} u^1 &= -1 \\ u^2 &= \text{ctt} \end{aligned} \tag{30}$$

son geodésicas.

Por último es interesante que realicemos una representación gráfica de la superficie que hemos estudiado. A continuación mostramos algunas de las representaciones obtenidas

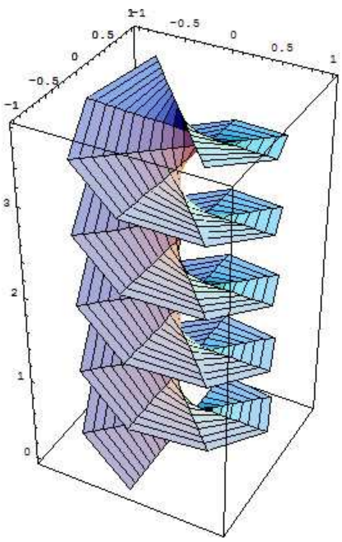

Figura 1. Representación de la superficie parametrizada con Mathematica. Para ello hemos utilizado la instrucción **ParametricPlot3D[{u Sin[t], u Cos[t], t/3}, {t, 0, 15}, {u, -1, 1}]**.

otra a modo más artístico es la siguiente

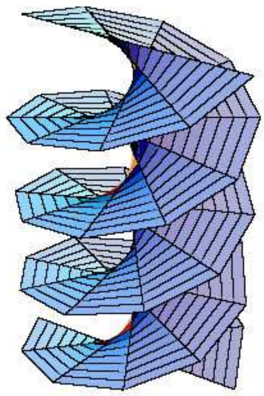

Figura 2. Representación de la superficie parametrizada con Mathematica.

Nota 4. A modo de observación indicar que si realizamos un pequeño cambio de variable las expresiones que obtenemos se simplifican considerablemente y no son tan engorrosas de manipular en los calculos. El cambio es el siguiente

$$(1+u^1)=\frac{\phi_2}{a} \tag{31}$$

y

$$u^2=\phi_1 \tag{32}$$

Para finalizar es interesante que calculemos la K_G de dicha superficie, aunque no se pida en el enunciado. Para ello deberemos realizar algunos cálculos adicionales y además hacer uso de los resultados obtenidos con anterioridad. Para empezar deberemos recordar la defineción de curvatura gaussiana;

Definición 5. *La curvatura gaussiana la definimos como*

$$K_G=k_1\,k_2=\frac{\det(K_{ij}(u))}{\det(g_{ij}(u))} \tag{33}$$

por lo tanto empezaremos por realizar el calculo de la matriz $K_{ij}(u)$ para ello deberemos recordar la expresión en coordenadas de las componentes del tensor curvatura;

Definición 6. *Dado un $u\in U\subset\mathbb{R}/p=x(u)$ de modo que la expresión en coordenadas viene dada por $\tilde{K}_{ij}(u)=K_{ij}\circ x(u)$. Así pues la expresión en coordenadas la obtenemos mediante*

$$K_{ij}(u)=-<N_i(u),x_j(u)>=-<D_i\,N(u),D_j\,x(u)> \tag{34}$$

Teorema 7. *K_{ij} es simétrico, por lo tanto se cumple que*

$$K_{ij}=K_{ji} \tag{35}$$

así pues el calculo se reduce a:

$$K_{11}(u)=-<N_1(u),x_1(u)>=<N,x_{11}> \tag{36}$$

$$K_{21}(u)=-<N_2(u),x_1(u)>=<N,x_{21}> \tag{37}$$

$$K_{12}(u)=-<N_1(u),x_2(u)>=<N,x_{12}> \tag{38}$$

$$K_{22}(u)=-<N_2(u),x_2(u)>=<N,x_{22}> \tag{39}$$

para ello deberemos calcular las derivadas segundas de la superficie parametrizada dada, que son las siguientes

$$x_{11}(u) = (-a(1+u^2)\cos u^1, -a(1+u^2)\sin u^1, 0) \tag{40}$$

$$x_{12}(u) = (-a\sin u^1, a\cos u^1, 0) \tag{41}$$

$$x_{21}(u) = (-a\sin u^1, a\cos u^1, 0) \tag{42}$$

$$x_{22}(u) = (0,0,0) \tag{43}$$

ahora ya solo nos queda por calcular el valor de N para poder hacer uso de las expresiones (36) a la (39). Recordemos pues la expresión coordenada de N.

Definición 8. *Esta se define como* $\tilde{N}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \widetilde{N} = N \circ x, u \in U$. *Abusando de la notación su cálculo se reduce a*

$$N(u) = \frac{x_1(u) \wedge x_2(u)}{|x_1(u) \wedge x_2(u)|} \tag{44}$$

que pertenece a las funciones $C^\infty(U)$.

empezaremos por el cálculo del producto vectorial

$$x_1(u) \wedge x_2(u) = (-ab\sin u^1, ab\cos u^1, -a^2(1+u^2)) \tag{45}$$

y a continuación su norma

$$\left|x_1(u) \wedge x_2(u)\right| = a\sqrt{a^2(1+u^2)^2 + b^2} \tag{46}$$

llevando las expresiones (45) y (46) a la (44) obtenemos que

$$N(u) = \frac{(-ab\sin u^1, ab\cos u^1, -a^2(1+u^2))}{a\sqrt{a^2(1+u^2)^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2(1+u^2)^2+b^2}}(-b\sin u^1, b\cos u^1, -a(1+u^2)) \tag{47}$$

ya estamos en condiciones pues de aplicar las expresiones {(36)-(39)}, y los resultados que obtenemos son los siguientes

$$K_{11} = 0 \tag{48}$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{ab}{\sqrt{a^2(1+u^2)^2+b^2}} \tag{49}$$

$$K_{22} = 0 \tag{50}$$

ahora calcularemos los determinantes $\det(g_{ij}(u))$ y $\det(\mathrm{K_{i\ j}(u)})$. Los resultados que obtenemos son

$$\det(g_{ij}(u)) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2(1+u^2)^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2(a^2(1+u^2)^2+b^2) \tag{51}$$

$$\det(\mathrm{K_{i\ j}(u)}) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{ab}{\sqrt{a^2(1+u^2)^2+b^2}} \\ \frac{ab}{\sqrt{a^2(1+u^2)^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2b^2}{a^2(1+u^2)^2+b^2} \tag{52}$$

que si los llevamos a la expresión (33) obtendremos la curvatura gaussiana

$$K_G = k_1 k_2 = \frac{\det(K_{ij}(u))}{\det(g_{ij}(u))} = \frac{-\frac{a^2b^2}{a^2(1+u^2)^2+b^2}}{a^2(a^2(1+u^2)^2+b^2)} = -\frac{a^2b^2}{a^2[a^2(1+u^2)^2+b^2]^2} \tag{53}$$

con lo que damos por finalizado el ejercicio.

Bibliografía.

Manfredo P.do Carmo 1976 *Geometría diferencial de curvas y superficies* (Alianza Editorial).

Miguel Portilla 2005 *Apuntes de clase*.