Valoración de opciones mediante el modelo de Black-Scholes

José Luis Alcaraz Aunión

3 de diciembre de 2010

Resumen

Este trabajo presenta la valoración de opciones usando el modelo de Black-Scholes (BS). Se han analizado opciones call y put cuyo subyacente es el IBEX35 a fecha 2/11/2010 y distintos periodos de vencimiento. Los precios valorados presentan claras diferencias con respecto a los precios de mercado. Según el modelo, las opciones put estarían ligeramente sobre-valoradas mientras que las opciones call estarían significativamente infra-valoradas. La diferencia de precios en ambos casos se justifica, en esencia, por las diferencias de volatilidades.

Las curvas de volatilidades implícitas para opciones put y call, aunque con figuras distintas, indican que el riesgo disminuye cuando aumenta el precio de ejercicio.

1. Tendencia y volatilidad

La tendencia y la volatilidad del activo subyacente (ibex-35) se han estimado asumiendo el modélo básico en el cual los precios tienen un comportamiento logNormal y sus rentabilidades siguen comportamiento normal ($r_t \approx N(\mu, \sigma^2)$). Para el cómputo de estos estimadores se han seleccionado datos diarios del IBEX-35 correspondientes a los cinco últimos años (desde el 2-11-2005 hasta el 2-11-2010) según muestra la figura 1.

La tendencia o rentabilidad media (μ) se obtiene aplicando la siguiente ecuación:

$$\mu_d = \frac{1}{T} \sum_{t}^{T} log(P_t/P_{t-1}), \tag{1}$$

donde P_t yP_{t-1} son los precios del ibex al cierre del día t y t-1, respectivamente. La tendencia anualizada ($\mu_a = \mu_d \times 250$) tiene un valor de $\mu_a = -0{,}006273$. La figura

Figura 1: Precios del ibex en un periodo de 5 años.

2 muestra la rentabilidad diaria y el histograma de la rentabilidad, con una kutosis=8.5 y un coeficiente de asimetría = -0.21. Estos coeficientes, para una distribución normal, deberían tener valores de 3 y 0 respectivamente, lo cual nos hace dudar de la normalidad asumida en la rentabilidad. Aún así mantendremos la hipótesis de normalidad para el desarrollo de este trabajo.

La volatilidad histórica resulta de la desviación estandar de la rentabilidad,

$$\sigma_d = \left(\sum_t^T \frac{(\mu - r_t)^2}{(T-1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

El valor anualizado[1] resulta de $\sigma_a = 0{,}2625$.

2. Valoración de opciones

La ecuación de Black-Scholes para valorar el precio de opciones (sin dividendos) se escribe de la siguiente forma:

[1]La volatilidad diaria se relaciona con la anual en la forma $\sigma_a = \sqrt(250) \times \sigma_d$

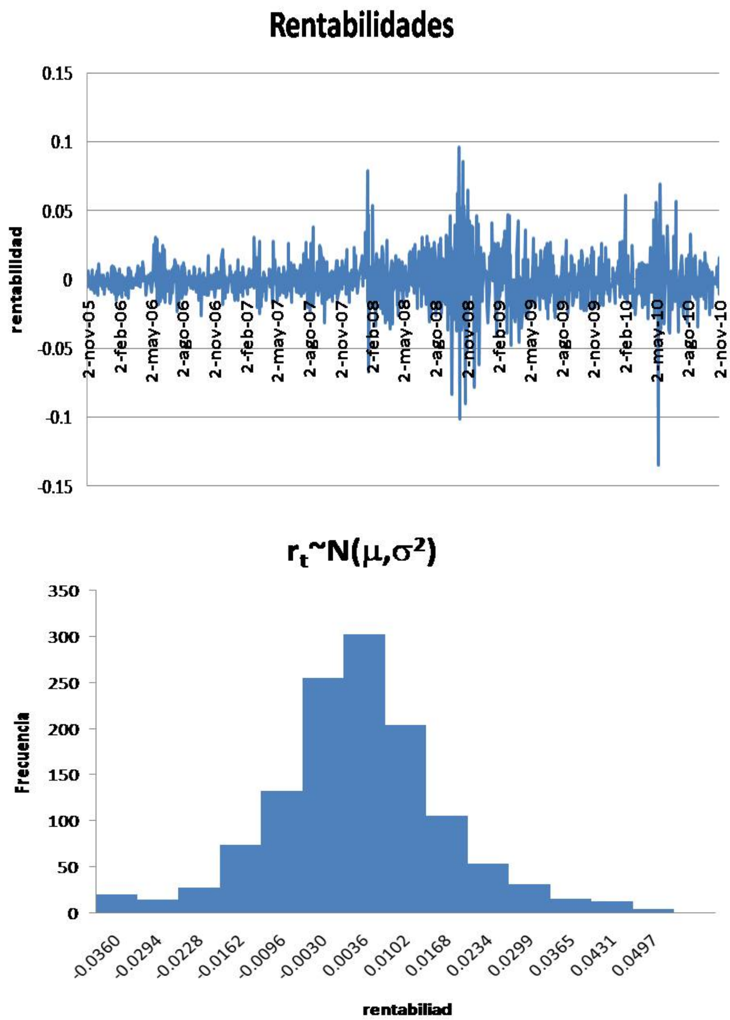

Figura 2: Ditribución de rentabilidades diárias (arriba) e histograma de rentabilidades (abajo).

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-rT} N(d2) \tag{3}$$

$$d1 = \frac{log(S_t)K + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma T} \tag{4}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T} \tag{5}$$

donde los parámetros se identifican como:

- σ: volatilidad del subyacente (considerada constante).
- S_t: valor del subyacente.
- K: Precio del ejerciciio de la opción.

- T: tiempo hasta el vencimiento de la opción.
- r: la rentabilidad libre de riesgo (letras del tesoro).
- $N(d_i)$: función de distribución de probabilidad acumulativa para una distribución normal standard.

Excepto la volatilidad, que ha de estimarse previamente, el resto de parámetros es información disponible en el merdado.

En este trabajo se han valorado precio de opciones Ibex-35 (put y call) correspondientes al día 2-11-2010 y con distintos periodos de vencimiento. El valor del ibex a cierre ese día corresponde a S = 10762. La rentabilidad libre de riesgo resulta de r=0.012128[2][2] y la volatilidad histórica usada es de $\sigma_a = 0{,}2624$ (ver sección anterior). La tabla 3 contiene una pequeña muestra de precios de opciones put y call para dos periodos de vencimiento y distintos precios de ejercicio. La tabla incluye además el check de consistencia put-call parity.

La figura 4 representa los precios de opciones PUT y CALL sobre ibex35 en función del precio de ejercicio[3] para opciones valoradas por nuetro modelo (lineas) y para precios de mercado (puntos). Por un lado se observa que, en el caso de opciones PUT, los precios valorados por el modelo son ligeramente inferiores a los precios PUT de mercado, es decir, las opciones PUT estarían sobre-valoradas. La tendencia contraria se observa en precios de opciones CALL, que estarían significativamente infra-valoradas. En ambos casos, las apreciaciones quedan sujetas a las condiciones de nuestro modelo, que usa una volatilidad estimada (histórica) y constante para el cómputo de cualquier precio de opción.

Por otra parte, la sobre-valoración de opciones PUT podría entenderse si tenemos en cuenta la situación económica actual, donde el inversor apuesta claramente a posiciones bajistas (PUTs). Esta demanda tendría como contra-partida una subida del precio de la opción.

3. Volatilidad Implicita

Se conoce como volatilidad implicita aquella volatilidad que ajusta el precio de la opción al precio de mercado en la ecuación de Black-Scholes ($C_{market} = C(\sigma_i)$). Esta volatilidad depende del precio de ejercicio y del tiempo de vencimiento de la opción.

[2]Letras del tesoro a 12 meses (2.363 % TAE) transformada en rentabilidad continua r= log(1+r).
[3]Hemos usado opciones con el mismo tiempo de vencimiento, T=0.056 años.

		CALL		PUT		PUT-CALL PARITY	
T	K	market	Black-Scholes	market	Black-Scholes	Ct + K*exp(-rt)	Pt + St
0.056	10400	406	486.97	117	117.81	10879.91	10879.91
0.056	10500	337	419.53	148	150.30	10912.40	10912.40
0.056	10700	217	301.92	229	232.56	10994.66	10994.66
0.056	10800	169	252.03	280	282.60	11044.70	11044.70
0.056	10900	127	208.06	338	338.56	11100.66	11100.66
0.136	10200	675	757.89	207	178.98	10941.08	10941.08
0.136	10600	413	507.99	345	328.42	11090.52	11090.52
0.136	10300	604	689.84	236	210.77	10972.87	10972.87
0.136	10400	537	625.45	269	246.21	11008.31	11008.31
0.136	10500	473	564.81	305	285.41	11047.51	11047.51
0.136	10700	357	455.01	389	375.28	11137.38	11137.38
0.136	11000	219	318.93	551	538.71	11300.81	11300.81
0.136	11100	182	280.94	613	600.54	11362.64	11362.64

Figura 3: Tabla de precios de opciones ibex (información extraida de MEFF[1]).

La volatilidad en el modelo de Black-Scholes se asume constante, sin embargo, se observa una variación de volatilidad en función del precio de ejercicio y tiempo de vencimiento para cada opción. La figura 5 muestra la curva de la volatilidad implícita[4] en función del precio de ejercicio de opciones PUT para dos tiempos de vencimiento distintos (colores). Esta curva se conoce como volatility skew[3], donde la volatilidad decrece a medida que aumenta el precio de ejercicio. Se observa un mínimo alrededor del precio del subyacente (at the money). El riego de la opción es mayor para opciones donde $K < S_0$ (opciones put muy *out of the money*) que para opciones donde $K > S_0$ (opciones put *in the money*).

La figura 6 muestra de nuevo la volatilidad implicita en función de los precios de ejercicio, ahora para opciones call. En este caso la curva tiene una tendencia contraria a la anterior (5). Ahora el máximo de la curva está en torno al precio del subyacente . Opciones call *out of the money* ($K > S_0$) tienen menos riesgo que opciones call *in the*

[4]Las volatilidades implícitas se han calculado mediante el método de bisección.

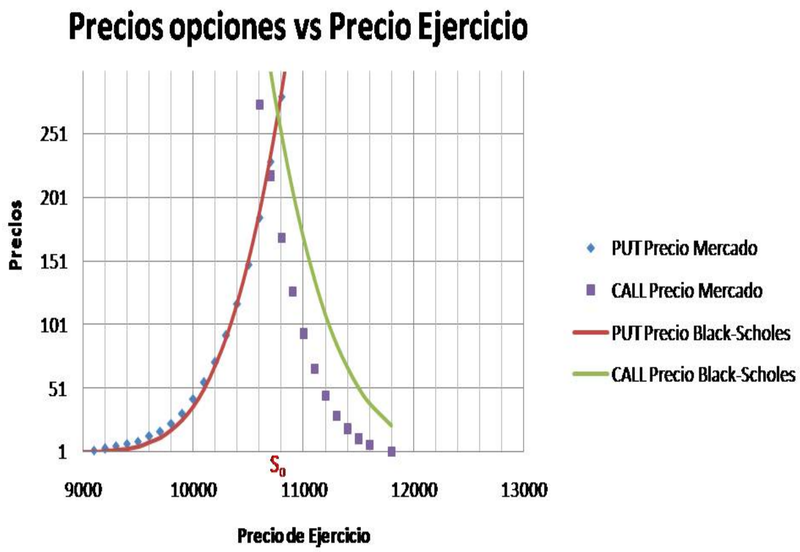

Figura 4: Precios de opciones respecto a precios de ejercicio para opciones PUT y CALL con el mismo tiempo de vencimiento (T=0.056 años).

money $(K < S_0)$.

Referencias

[1] http://www.meff.es/aspx/Financiero/DescargaFicheros.aspx?id=esp.

[2] http://www.tesoro.es.

[3] John C. Hull. *Options, Futures and other derivatives*. Pearson Education, 2003.

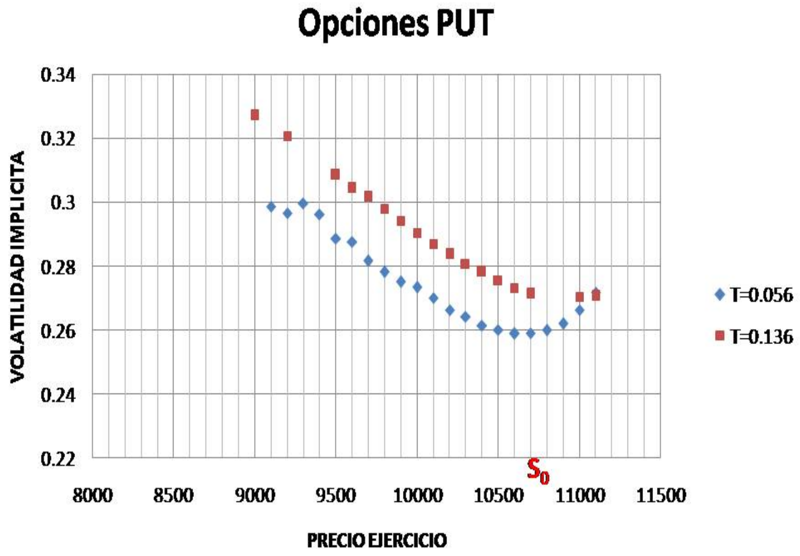

Figura 5: Volatilidad implícita en funcion de los precios de ejercicio para dos tiempos de vencimiento distintos (colores) correspondientes a opciones PUT.

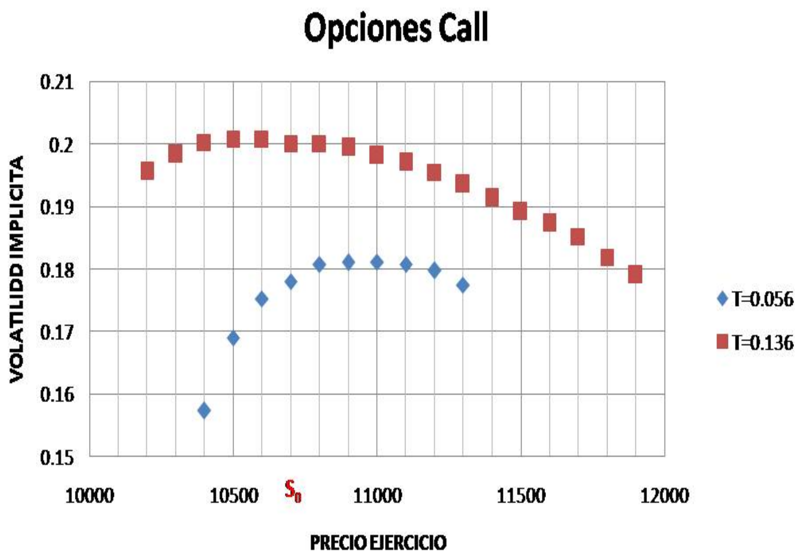

Figura 6: Volatilidad implícita en funcion de los precios de ejercicio para dos tiempos de vencimiento distintos (colores) correspondientes a opciones CALL.