

Examen de Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Plan Telemática

6 de febrero de 2003

DEPARTAMENT ANÀLISI MATEMÀTICA
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Carrer Doctor Moliner 50
46100 Burjassot, Valencia

Poner el nombre y los apellidos **con mayúsculas** en cada hoja
No escribir con lápiz ni con bolígrafo rojo.

Tiempo: 2.30 horas.

Ejercicio 1 (2.5 ptos)

Justificar brevemente si las siguientes afirmaciones son o no ciertas.

- (a) Los números complejos s que cumplen $|s - 2j| = 1$ forman una recta.
- (b) Sea A una matriz 3×3 tal que $|A| = 0$. El sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no se puede resolver por la regla de Cramer.
- (c) Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \geq 2$. Supongamos que $P(2)$ se verifica y que $P(n+1)$ cierta implica que $P(n)$ es verdadera. Entonces $P(n)$ se cumple para todo $n \geq 2$.
- (d) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en 0, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
- (e) Sea $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y consideremos $x_n = n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Con esta subdivisión, la regla del trapecio aproxima el valor de $\int_0^5 f(x) dx$ por

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5).$$

Ejercicio 2 (2.5 ptos)

Consideremos el número complejo $e^{4+j\frac{4\pi}{3}}$.

- (a) Hallar su módulo, su argumento principal y su logaritmo principal.
- (b) Calcular sus raíces cuartas.

Ejercicio 3 (2.5 ptos)

Se define una sucesión por recurrencia como $a_0 = 2$ y $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}})$ para $n \geq 1$.

(a) Comprobar que la función $f: [\sqrt{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, es monótona creciente.

- (b) Probar que la sucesión $(a_n)_{n=0}^\infty$ es monótona y acotada.
- (c) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Como alternativa se pueden seguir los siguientes pasos:

- (a') Demostrar que si $b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$, entonces $a_n = \sqrt{2} \frac{1 + b_n}{1 - b_n}$ para todo $n \geq 0$.
- (b') Probar que $0 < b_0 < 1$ y que la sucesión $(b_n)_{n=0}^\infty$ es monótona y acotada.
- (c') Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y deducir el valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ejercicio 4 (2.5 ptos)

Escribir la región limitada por los gráficos de las funciones definidas por $g_1(x) = \cos x$ y $g_2(x) = \sin x$, donde $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, como una región verticalmente simple.

Evaluar la integral iterada de la función $f(x, y) = \sin x$ en esa región.

SOLUCIÓN

Ejercicio 1 (a) Es falso, los números complejos que cumplen la ecuación forman una circunferencia de centro $2j$ y radio 1.

(b) Es verdadero. En la regla de Cramer cada incógnita se obtiene como un cociente en el que el denominador es el determinante de la matriz del sistema; como el denominador no puede anularse, el determinante no puede ser 0. Esto no significa que el sistema no tenga solución, puede que el sistema sea compatible pero que no se pueda aplicar la regla de Cramer.

(c) Es falso. La demostración por inducción lo que afirma es que si $P(2)$ se verifica y $P(n)$ cierta implica que $P(n+1)$ es verdadera, entonces $P(n)$ se cumple para todo $n \geq 2$.

(d) Es verdadero, porque toda función que es derivable en 0, es continua en 0.

(e) Es falso, la regla del trapecio aproxima a la integral por la fórmula

$$\frac{5-0}{5} \left(\frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{f(5)}{2} \right) = \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{f(5)}{2}.$$

Ejercicio 2 (a) Como $e^{4+j\frac{4\pi}{3}} = e^4 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$, el módulo de $e^{4+j\frac{4\pi}{3}}$ es e^4 y un argumento $\frac{4\pi}{3}$. Sin embargo, no es el argumento principal porque $\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi, \pi]$; el argumento principal es $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$. Por último, su logaritmo principal es

$$\log |e^{4+j\frac{4\pi}{3}}| + j \frac{-2\pi}{3} = 4 - j \frac{2\pi}{3}.$$

(b) Las raíces cuartas de $e^{4+j\frac{4\pi}{3}}$ vienen dadas por la expresión

$$s_i = \sqrt[4]{e^4} e^{\frac{-2\pi + 2\pi(i-1)}{4}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Por tanto, son:

$$s_1 = e e^{\frac{-2\pi}{12}} = e \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right) = e \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right)$$

$$s_2 = e e^{\frac{-2\pi+6\pi}{12}} = e \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = e \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$s_3 = e e^{\frac{-2\pi+12\pi}{12}} = e \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = e \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right)$$

$$s_4 = e e^{\frac{-2\pi+18\pi}{12}} = e \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = e \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Ejercicio 3 (a) Por ser la derivada $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$ positiva cuando $x > \sqrt{2}$, la función f es creciente en el intervalo $[\sqrt{2}, +\infty[$.

(b) Empezaremos viendo que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 0$, con ello habremos probado que la sucesión es acotada inferiormente. Lo demostraremos por inducción.

Paso base: Como $a_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, se cumple para $n = 0$.

Paso de inducción: Suponiendo que se cumple $a_n \geq \sqrt{2}$, vamos a demostrar que $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$. De $a_n \geq \sqrt{2}$, aplicando el apartado anterior, se deduce que $f(a_n) \geq f(\sqrt{2})$. Entonces

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

y se cumple para $n + 1$.

Por inducción, $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 0$ y la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es acotada inferiormente.

Vamos a probar por inducción $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 0$, con lo cual la sucesión es monótona decreciente.

Paso base: $a_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2} < 2 = a_0$, y así se cumple para $n = 0$.

Paso de inducción: Supongamos que se cumple para n ; es decir, que $a_{n+1} \leq a_n$ y vamos a demostrar que se cumple para $n + 1$; es decir, que $a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Teniendo en cuenta que la función f es creciente, $a_{n+1} \leq a_n$ implica que

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{2}{a_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = a_{n+1}.$$

Por inducción, $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \geq 0$.

(c) Por el teorema de la convergencia monótona, la sucesión es convergente. Sea $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. De la relación $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ para todo $n \geq 0$, tomando límites se obtiene $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$. Además, $a_n \geq \sqrt{2}$ implica que $\ell \geq \sqrt{2}$. Por tanto,

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{\ell} \implies \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{\ell} \implies \frac{1}{2}\ell^2 = 1 \implies \ell^2 = 2 \implies \ell = \pm\sqrt{2}.$$

Como $\ell \geq \sqrt{2}$, se concluye que $\ell = \sqrt{2}$; en otras palabras, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$.

(a') De $b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$, se sigue que $a_n b_n + \sqrt{2} b_n = a_n - \sqrt{2}$ y que $\sqrt{2} b_n + \sqrt{2} = a_n - a_n b_n$; esto es,

$$\sqrt{2}(1 + b_n) = a_n(1 - b_n).$$

Observar que si $b_n = 1$, entonces $a_n - \sqrt{2} = a_n + \sqrt{2}$ y resulta que $-\sqrt{2} = \sqrt{2}$ lo que es imposible. Luego $b_n \neq 1$ y podemos dividir por $1 - b_n$. Por tanto, $a_n(1 - b_n) = \sqrt{2}(1 + b_n)$ implica que

$$a_n = \sqrt{2} \frac{1 + b_n}{1 - b_n}.$$

(b') Se tiene que $b_0 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$. Por una parte, $2 - \sqrt{2} < 2 + \sqrt{2}$ implica que $b_0 < 1$, por otra, $2 - \sqrt{2} > 0$ y $2 + \sqrt{2} > 0$ con lo cual $b_0 > 0$.

A continuación calcularemos b_{n+1} :

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2}}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) + \sqrt{2}} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n} - 2\sqrt{2}}{a_n + \frac{2}{a_n} + 2\sqrt{2}} = \frac{a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n}{a_n^2 + 2 + 2\sqrt{2}a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{(a_n + \sqrt{2})^2} = b_n^2.$$

Luego se verifica

$$b_1 = b_0^2 \implies 0 < b_1 < b_0 < 1 \quad b_2 = b_1^2 \implies 0 < b_2 < b_1 < 1 \quad b_3 = b_2^2 \implies 0 < b_3 < b_2 < 1 \dots$$

Veamos, por inducción que $0 < b_{n+1} < b_n < 1$ para todo $n \geq 0$.

Paso base: ya hemos visto antes que $0 < b_1 < b_0 < 1$.

Paso de inducción: supongamos que $0 < b_{n+1} < b_n < 1$. De $b_{n+2} = b_{n+1}^2$ se deduce que $0 < b_{n+2} < b_{n+1}$ y así $0 < b_{n+2} < b_{n+1} < 1$. Luego se verifica para $n + 1$.

Por inducción se tiene que $0 < b_{n+1} < b_n < 1$ para todo $n \geq 0$. Por tanto, la sucesión $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 0.

(c') Aplicando el teorema de la convergencia monótona resulta que la sucesión $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ converge. Sea $l = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. De la igualdad $b_{n+1} = b_n^2$ para todo $n \geq 0$, se deduce que $l = l^2$, con lo cual

$l = 0$ ó $l = 1$. Como $b_0 < 1$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente, resulta que $l \neq 1$ y se concluye que $l = 0$. Como consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \frac{1 + b_n}{1 - b_n} = \sqrt{2} \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \sqrt{2}.$$

Ejercicio 4 Para escribir la región como verticalmente simple, lo que hemos de averiguar es qué función es mayor en el intervalo. Veamos primero los puntos de corte de las dos curvas:

$$\sin x = \cos x \iff \tan x = 1 \iff x = k\pi + \arctan 1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Así pues, en el intervalo $[\pi/4, 5\pi/4]$, las gráficas de las dos funciones sólo se cortan en los extremos. Como ambas funciones son continuas y $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0 = \cos \frac{\pi}{2}$, se cumple que $\sin x \geq \cos x$ para todo $x \in [\pi/4, 5\pi/4]$.

Por tanto, la región, escrita como verticalmente simple, es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos x \leq y \leq \sin x, \pi/4 \leq x \leq 5\pi/4\}.$$

La integral iterada es, pues,

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\sin x} \sin x \, dy \, dx &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x \int_{\cos x}^{\sin x} dy \, dx \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x (\sin x - \cos x) \, dx \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin^2 x \, dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Vamos a calcular las dos integrales por separado.

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin^2 x \, dx &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} - \left[\frac{\sin(2x)}{4} \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) - \left(\frac{\sin(5\pi/2)}{4} - \frac{\sin(\pi/2)}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x \cos x \, dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{\sin(2x)}{2} \, dx = - \left[\frac{\cos(2x)}{4} \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = - \left(\frac{\cos(5\pi/2)}{4} - \frac{\cos(\pi/2)}{4} \right) = 0.$$

Se concluye que el valor de la integral iterada es

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\sin x} \sin x \, dy \, dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin^2 x \, dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$