



FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA (ITT TELEMÁTICA)

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2009/2010

Profesor responsable :
Sergio Segura de León

Tema 1	Números complejos	1
Tema 2	Sistemas de ecuaciones lineales	3
Tema 3	Inducción y sucesiones numéricas	10
Tema 4	Cálculo de funciones de una variable	14
Tema 5	Integración numérica	18
Tema 6	Cálculo vectorial	20
Tema 7	Series numéricas y de potencias	23
Tema 8	Series de Fourier	26
Tema 9	Transformadas de Fourier	28
Tema 10	Cardinalidad	32
Tema 11	Combinatoria	35
Tema 12	Relaciones, grafos y árboles	40
Tema 13	Introducción a la probabilidad	45
Tema 14	Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias	49
Tema 15	Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales	51

Tema 1

Números complejos

Ejercicio 1.1

Realizar las operaciones indicadas.

- (a) $(2 + 7j) + (3 - j)$ (b) $(1 - j) + (2 + 4j)$ (c) $(1 - j) \cdot (2 + 4j)$
 (d) $(2 + 3j) \cdot (2 - 3j)$ (e) j^2 (f) $\frac{1}{j}$ (g) $\frac{1-j}{1+j^8}$ (h) $\frac{2}{1-3j}$ (i) $\frac{2-(6/\sqrt{3})j}{2+(6/\sqrt{3})j}$
 (j) $(1 + \sqrt{3}j)^3$ (k) $(\sqrt{3} + j^3) \cdot (1 - j)$

Ejercicio 1.2

Hallar el módulo (o magnitud) y el argumento principal (o ángulo de fase) de los siguientes números complejos.

- (a) $2 + 2j$ (b) $-j$ (c) $3j$ (d) -2 (e) $1 + j$ (f) $\frac{1}{j}$ (g) $-1 - j$
 (h) $2 + 5j$ (i) $2 - 5j$ (j) $-2 + 5j$ (k) $-2 - 5j$ (l) $1 + \sqrt{3}j$
 (m) $j(1 + j)$ (n) $\frac{1-\sqrt{3}j}{1+j} \cdot (-1 + j)$

Ejercicio 1.3

Calcular el valor de las siguientes expresiones en forma binaria o rectangular.

- (a) $e^{-j\frac{\pi}{4}}$ (b) $e^{j\frac{\pi}{6}}$ (c) $e^{1+j\frac{\pi}{2}}$ (d) $e^{2\pi j}$ (e) e^{-2+j} (f) e^{2+j} (g) e^{2-j}

Ejercicio 1.4

Expresar los números complejos del problema (2) en forma polar exponencial.

Ejercicio 1.5

Hallar la parte real de los siguientes números complejos.

- (a) $e^{\frac{\pi}{2}j + \frac{\pi}{3}j}$ (b) $e^{2 + \frac{\pi}{4}j}$ (c) $e^{-1 + \frac{\pi}{4}j - \frac{\pi}{2}j}$ (d) $4e^{\frac{25\pi}{4}j}$ (e) $j e^{\frac{11\pi}{5}j}$
 (f) $3e^{j4\pi} + 2e^{j7\pi}$ (g) $6\frac{e^{-j\pi}}{1-j}$ (h) $5e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{j7\frac{\pi}{2}}$ (i) $4e^{j\frac{\pi}{4}} - e^{-j5\frac{\pi}{3}}$
 (j) $-25e^{-j\frac{\pi}{6}} - e^{j11\frac{\pi}{3}}$ (k) $6\frac{e^{-j\pi}}{1-e^{j3\pi}}$

Ejercicio 1.6

Supongamos que las siguientes funciones describen oscilaciones. Escribirlas en la forma $x(t) = \Re C e^{j(\omega t + \phi)}$. (El número complejo $C e^{j\phi}$ se conoce como el fasor correspondiente a $x(t)$.)

- (a) $x(t) = 0.01 \cos 15t$
 (b) $x(t) = 0.04 \sin 12t$
 (c) $x(t) = 0.05 \sin(10t + \pi)$
 (d) $x(t) = \sin(0.4t + \frac{\pi}{4})$
 (e) $x(t) = 0.02 \cos(5t - \frac{\pi}{2})$

Ejercicio 1.7

Escribir las expresiones del problema anterior en la forma $x(t) = \Im C e^{j(\omega t + \phi)}$.

Ejercicio 1.8

Vamos a estudiar un circuito que, si bien puede tener oscilaciones libres cuando se conecta la fuente, éstas desaparecen al cabo de poco tiempo y queda sólo una corriente alterna, corriente que viene determinada por una función periódica. Es éste régimen permanente (o corriente estacionaria) el que estudiaremos aquí. Se dice que nuestro estudio tiene lugar en el dominio de la frecuencia.

Consideremos un circuito en serie que está formado por una fuente de tensión de $v(t) = V \cos \omega t$ voltios, una resistencia de R ohmios y un inductor de L henrios.

- (a) Demostrar que la intensidad de corriente $i(t)$ cumple la ecuación diferencial $L \frac{di}{dt} + Ri = v(t)$.

(b) Si la corriente estacionaria viene dada por $i(t) = \Re(Ie^{j(\omega t + \phi)})$, con $I > 0$, probar que se cumple la siguiente relación entre los fasores del voltaje y de la intensidad: $(j\omega L + R)Ie^{j\phi} = V$. (El número $j\omega L + R$ es la impedancia del circuito.)

(c) Si $V = 6$, $L = 1$, $R = 4$ y $\omega = 2$; demostrar que $I = \frac{3}{\sqrt{5}}$ y $\phi = -\arctan \frac{1}{2}$. Deducir que la corriente estacionaria del circuito es $i(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \cos(2t - \arctan \frac{1}{2})$.

Ejercicio 1.9

Comprobar que las tres raíces cúbicas de 1 son

$$1, \quad \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$$

y que las cinco raíces quintas de 1 vienen dadas por

$$1, \quad \frac{-1 - \sqrt{5} + j\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5} - j\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \\ \frac{-1 + \sqrt{5} + j\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{-1 + \sqrt{5} - j\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ejercicio 1.10

Encontrar todos los valores de las siguientes expresiones.

$$(a) \sqrt{j} \quad (b) \sqrt[3]{27} \quad (c) \sqrt[5]{-32} \quad (d) \sqrt[3]{-64} \quad (e) \sqrt[6]{-64} \quad (f) \sqrt{10\sqrt{5} - 5\sqrt{5}j}$$

Ejercicio 1.11

Calcular el logaritmo principal de los siguientes números complejos.

$$(a) j \quad (b) -1 \quad (c) 1 + j \quad (d) \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad (e) -e \quad (f) \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \quad (g) 1 - j$$

Ejercicio 1.12

Determinar el significado geométrico de las siguientes relaciones.

$$(a) |s| \leq 1. \quad (b) |s - 3 + j| = 4. \quad (c) |s + 2| \geq 3. \quad (d) 1 < |s - 5| < 21. \quad (e) \Re(s) = 1. \\ (f) \Re(s) \geq -2. \quad (g) -\pi < \Im(s) < \pi. \quad (h) 0 < \Re(s) \leq 2. \quad (i) 0 < \Re(js) < 1.$$

Ejercicio 1.13

Probar que la función definida por $f(s) = s + \frac{1}{s}$ transforma la circunferencia $|s| = 2$ en una elipse.

Ejercicio 1.14

Demostrar que la función definida por $f(s) = s/(1 - s)$ transforma el círculo $|s| < 1$ en el semiplano $\Re f(s) > -1/2$.

Ejercicio 1.15

Sea $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ un polinomio. Demostrar que si todos los coeficientes a_i son reales y z es raíz de P , entonces el conjugado \bar{z} es también raíz.

Ejercicio 1.16

Representar el diagrama de ceros y polos de la función definida por $f(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 1}$. Utilizar el diagrama para hallar los valores $f(0)$ y $f(1)$.

Ejercicio 1.17

Representar el diagrama de ceros y polos de la función definida por $f(s) = \frac{(s+1)(s^2+1)}{s^2-2s+2}$ y calcular los valores $f(0)$ y $f(1)$.

Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 2.1

Comprobar que los siguientes vectores son solución de los correspondientes sistemas de ecuaciones.

$$(a) \quad (-1, 3) \text{ de } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$(b) \quad (1, 2) \text{ de } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + -y = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad (-7, -1, 5) \text{ de } \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad (0, 0, 0) \text{ de } \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.2

Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$$

no tiene ninguna solución.

Ejercicio 2.3

Estudiar el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

demostrando que es equivalente a

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

¿Cuál es la solución general?

1 Transformaciones simples y método de eliminación de Gauss

Ejercicio 2.4

Demostrar que se obtienen sistemas equivalentes cuando se realiza cada una de las siguientes transformaciones elementales:

- (a) Se intercambian dos ecuaciones.
- (b) Se multiplica una ecuación por un número distinto de 0.
- (c) Se suma a una ecuación otra ecuación multiplicada por un número.

Ejercicio 2.5

Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x + 5z = 2 \\ -3x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - (1/2)z = -3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

y resolverlo.

Ejercicio 2.6

Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = -3 \\ 0z = 4 \end{cases}$$

y deducir que el sistema es incompatible.

Ejercicio 2.7

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss.

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x + y - z = -2 \\ y + z = 6 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z = 3j \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x + y + z = j \\ x - y - z = 3 - j \\ 2x - y + z = 3 + j \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ -x + y - z = -2 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \quad (h) \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ -x + y - z = -2 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

2 Matrices

Ejercicio 2.8

Efectuar las siguientes operaciones matriciales.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (d) 4 \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 5/8 & -1 \end{pmatrix} \quad (e) -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.9

Comprobar que es posible efectuar las siguientes multiplicaciones y calcular los productos.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{(d)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(e)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{(f)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(g)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} & \text{(h)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \text{(i)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} & \text{(j)} \quad & \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.10

Demostrar las siguientes propiedades del producto de matrices. En este ejercicio $a \in \mathbb{R}$, y A , B y C denotan matrices tales que las operaciones que se indican tienen sentido.

- (a) $(aA)B = a(AB) = A(aB)$.
- (b) $A(BC) = (AB)C$.
- (c) $(A+B)C = AC + BC$.
- (d) $A(B+C) = AB + AC$.

Ejercicio 2.11

Mostrar que el producto de matrices no cumple la ley de la cancelación; es decir:

$$\text{en general } AB = AC \text{ no implica que } B = C.$$

Ejercicio 2.12

Escribir los sistemas de ecuaciones del ejercicio 2.7 en forma matricial.

Ejercicio 2.13

Si A es una matriz cuadrada 2×2 , entonces $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se puede interpretar como una transformación de coordenadas en el plano. Demostrar que

- (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una reflexión respecto de la recta $y = x$.
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una reflexión respecto del eje de abscisas.
- (c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una reflexión respecto del origen de coordenadas.
- (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ es una dilatación en la dirección del eje de abscisas y una contracción en la dirección del eje de ordenadas.
- (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una proyección sobre el eje de abscisas.
- (f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una dilatación uniforme en todas direcciones.

Ejercicio 2.14

Utilizar la interpretación geométrica para hallar las matrices del ejercicio anterior que son invertibles. En caso que lo sean, encontrar la matriz inversa.

Ejercicio 2.15

Comprobar que si una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es tal que $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$, entonces la matriz

$$B = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

cumple que $AB = BA = I$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Qué sucede si $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$?

Ejercicio 2.16

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, demostrar que su inversa viene dada por

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.17

Utilizar el método de eliminación de Gauss para encontrar la inversa de las siguientes matrices.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.18

Probar que si A y B son matrices cuadradas invertibles, entonces se verifica

$$(a) \quad (A^{-1})^{-1} = A \quad \text{y} \quad (b) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Ejercicio 2.19

Verificar la siguiente versión de la ley de la cancelación: si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.

Ejercicio 2.20

Hallar la transpuesta de las siguientes matrices.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.21

Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y A y B son matrices con el mismo número de filas y columnas, entonces

$$(a) \quad (A+B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top} \quad (b) \quad (aA)^{\top} = aA^{\top} \quad (c) \quad (A^{\top})^{\top} = A$$

Ejercicio 2.22

Indicar si las siguientes matrices cuadradas son o no simétricas o antisimétricas.

$$(a) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.23

Probar que para toda matriz cuadrada A se tiene que $A + A^T$ es simétrica y $A - A^T$ es antisimétrica. Deducir que A se puede descomponer como $A = S + T$, con S simétrica y T antisimétrica.

3 Sistemas homogéneos y determinantes**Ejercicio 2.24**

Probar que la solución general de un sistema de ecuaciones compatible es la suma de una solución particular y la solución general del sistema homogéneo asociado.

Ejercicio 2.25

Comprobar que el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

es equivalente a

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = 0 \end{cases} \quad \text{cuando } a_{11} \neq 0$$

y es equivalente a

$$\begin{cases} a_{21}x + a_{22}y = 0 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = 0 \end{cases} \quad \text{cuando } a_{21} \neq 0.$$

Deducir que, en cualquier caso, el sistema dado tiene solución no trivial si, y sólo si, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

Ejercicio 2.26

Razonar como en el ejercicio anterior para mostrar que el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

tiene solución no trivial si, y sólo si,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = 0.$$

Ejercicio 2.27

Evaluar los siguientes determinantes.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad (e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.28

Demostrar que el determinante de una matriz 3×3 coincide con el de su transpuesta.

Ejercicio 2.29

Comprobar que la siguiente fórmula es correcta.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.30

Probar las siguientes propiedades generales de los determinantes de matrices 3×3 .

- (a) Un determinante puede desarrollarse respecto a cualquier fila o columna.
- (b) Si en una matriz A se intercambian dos filas (o dos columnas), el determinante de la nueva matriz es $-|A|$.
- (c) Si en una matriz A se multiplican los elementos de una fila (o de una columna) por $a \in \mathbb{R}$, el determinante de la nueva matriz es $a|A|$.
- (d) Si los elementos de dos filas (o dos columnas) son proporcionales, el determinante se anula.
- (e) Si una fila (o columna) se puede expresar como suma de dos filas (o columnas), el determinante puede escribirse como la suma de dos determinantes: el primero en el que en la fila (o columna) correspondiente aparece el primer término de la suma y el segundo en el que aparece el segundo término.
- (f) El valor de un determinante no se altera si a los elementos de una fila (o columna) se les suma un múltiplo de cualquier otra fila (o columna).

Ejercicio 2.31

Calcular, desarrollándolo por una fila o columna, el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 2.32

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ consideremos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

- (a) Desarrollando por la primera fila, probar que $D = |A| \cdot |B|$.
- (b) Sumando a la primera fila las dos últimas multiplicadas por a_{11} y por a_{22} , respectivamente y luego a la segunda fila las dos últimas multiplicadas por a_{21} y por a_{12} , respectivamente; obtener que

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & 0 & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por la primera columna, deducir que $D = |A \cdot B|$.

(c) Concluir que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

4 Dependencia e independencia lineal

Ejercicio 2.33

Demostrar que un sistema homogéneo tiene solución única si, y sólo si, los vectores columna de la matriz del sistema son linealmente independientes y que un sistema homogéneo tiene más de una solución si, y sólo si, una columna es combinación lineal de las restantes.

Ejercicio 2.34

Estudiar si los siguientes grupos de vectores son o no linealmente independientes.

(a) $(1, 3, -1)$, $(2, 0, 1)$ y $(-1, 1, 0)$.

(b) $(3, -1, 2)$, $(0, 1, 3)$ y $(1, 0, 0)$.

(c) $(-1, 2, 0)$, $(1, 3, 2)$ y $(-2, 1, 2)$.

(d) $(1, 3, 5)$, $(-2, 0, 1)$ y $(-1, 3, 6)$.

5 Regla de Cramer

Ejercicio 2.35

Demostrar que si el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

es compatible y determinado, su solución viene dada por las expresiones

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ejercicio 2.36

Utilizar la regla de Cramer para hallar la solución de los sistemas del ejercicio 2.7.

Tema 3

Inducción y sucesiones numéricas

1 Inducción matemática

Ejercicio 3.1

Consideremos la sucesión definida por recurrencia como $a_1 = 1/2$, y $a_{n+1} = (1 + a_n)/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Escribir los primeros términos de la sucesión.
- (b) Si bien la intuición nos asegura que así están definidos todos los términos de la sucesión, ¿hay alguna manera de justificar este hecho?
- (c) Del estudio de los primeros términos se deduce que $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Cómo se puede demostrar esto?

Ejercicio 3.2

Definir recursivamente:

- (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n$.
- (b) 2^n .
- (c) $n!$.
- (d) Si a_1, a_2, \dots, a_n son números reales, definir $\sum_{i=1}^n a_i$.
- (e) Si A_1, A_2, \dots, A_n son conjuntos no vacíos, definir $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Ejercicio 3.3

Demostrar por inducción:

- (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$.
- (b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
- (c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
- (d) $1^2 - 2^2 + \dots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}n(n+1)/2$.
- (e) Si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, entonces $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = (1 - r^{n+1})/(1 - r)$.

Ejercicio 3.4

Probar la fórmula del binomio de Newton: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}.$$

Ejercicio 3.5

Calcular el valor de $e^{jn\pi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; como consecuencia hallar $\cos(n\pi)$.

Ejercicio 3.6

Demostrar que si $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m + n \in \mathbb{N}$ y $mn \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.7

Encontrar una fórmula para cada una de las siguientes sucesiones y demostrarla por inducción.

- (a) Si $A > 0$, se define $a_1 = 1$, $a_{n+1} = Aa_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Se define $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Se define $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.8

Demostrar las siguientes afirmaciones por inducción.

- (a) $2^n > n + 1$ para todo $n \geq 2$.
- (b) $2^n \geq n^2$ para todo $n \geq 4$.
- (c) $n! \geq 2^n$ para todo $n \geq 4$.

Ejercicio 3.9

Un cajero automático proporciona sólo billetes de 20 € y de 50 €. Demostrar que con esos billetes se puede obtener cualquier cantidad mayor o igual que 40 € que sea múltiplo de 10 €.

Ejercicio 3.10

Se define inductivamente la sucesión de Fibonacci: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Demostrar que se cumple

- (a) $1 + F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 (b) $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.11

Se define recursivamente la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + a_{n-1} + 1)$ para todo $n \geq 2$. Demostrar que $a_n \in [1, 2]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.12

Demostrar que todo número natural $n > 1$ o bien es un número primo, o bien se puede expresar como producto de primos.

Ejercicio 3.13

Un robot recorre un plano de modo que en cada movimiento se desplaza hacia el noreste (un paso al norte y uno al este), hacia el noroeste (un paso al norte y uno al oeste), hacia el suroeste (un paso al sur y otro al oeste) o hacia el sureste (un paso al sur y otro al este). Comenzando en el punto $(0, 0)$, ¿puede alcanzar la posición $(1, 0)$? (Modelar el problema como una máquina de estado.)

2 Sucesiones numéricas**Ejercicio 3.14**

Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

- (a) $\frac{5n^3 - 8n^2 + 3}{4n^3 + 2n + 4}$ (b) $\frac{4n^2 - 3n + 4}{5n^4 + 2n^2 - 3}$ (c) $\frac{4n^5 - 8n^2 + 3}{2n^3 + 4n - 5}$ (d) $\frac{\sqrt{n^2 - 3}}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}$
 (e) $\frac{2n + 3}{n + \sqrt[3]{n}}$ (f) $\frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n + 1}}$ (g) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$ (h) $\frac{(\sqrt{2n} + 3)^3 - n^3}{n^2 - 2\sqrt{n^5}}$
 (i) $\frac{\log(n^3 + 1)}{\log(2n^4 + 1)}$ (j) $\frac{\log(n^4 + 4n^3 + 6n^2 - 3n + 2)}{\log(6n^3 + 4n^2 - 5n + 7)}$ (k) $\frac{\log(n^3 + n^2 + 3)}{\log(\sqrt{n} + 1)^n}$.

Ejercicio 3.15

Calcular, mediante el criterio del emparedado, los límites de las sucesiones definidas por:

- (a) $\frac{1}{n} \left[\frac{n}{2} \right]$ (b) $\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$.
 (c) $\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}$
 (d) $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n+n}{\sqrt{n^4+n}}$.
 (e) $\frac{[a] + [2a] + [3a] + \cdots + [na]}{n^2}$, donde $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.16

Hallar todos los límites de subsucesiones de las siguientes sucesiones. (Existen infinitas de subsucesiones, pero sólo hay una cantidad finita de límites que estas subsucesiones pueden tener.)

$$(a) a_n = \sin(2n\pi) \quad (b) a_n = \sin(n\pi/2) \quad (c) a_n = \sin(n\pi) \quad (d) a_n = \sin(n\pi/4).$$

¿Cuáles de estas sucesiones convergen?

Ejercicio 3.17

En este ejercicio se estudia la convergencia de la sucesión definida por $a_n = a^n$, donde $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que

- (a) si $a > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$
- (b) si $a = 1$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$
- (c) si $|a| < 1$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$
- (d) si $a = -1$, la sucesión es acotada y divergente.
- (e) si $a < -1$, la sucesión no es acotada, ni superior ni inferiormente.

Ejercicio 3.18

Calcular los límites de las sucesiones siguientes:

$$(a) \frac{5^n + 2^n}{5^n + 3^n} \quad (b) \frac{2^n + 7}{3^n + (-1)^n} \quad (c) \frac{5^n - 3^n + 1}{5^n + 3^n + 1/n}.$$

Ejercicio 3.19

Evaluar los límites de las siguientes sucesiones:

$$(a) \frac{n}{a^n}, \quad a > 1 \quad (b) \frac{n^2}{a^n}, \quad a > 1 \quad (c) \sqrt[n]{n} \quad (d) \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad (e) \frac{\log n}{n}$$

$$(f) \frac{(\log n)^2}{n} \quad (g) \frac{\log(\log n)}{\log n} \quad (h) \frac{n^2 \log n + \log(\log n)}{n(\log n)^2 + 3} \quad (i) \frac{(\log n)^n}{n^{\log n}}.$$

Ejercicio 3.20

Para una lista de n datos, el algoritmo de la burbuja requiere de $\frac{1}{2}n(n-1)$ comparaciones, mientras que la ordenación por inserción que utiliza bisecciones necesita de aproximadamente $\log_2 n!$. Por su parte, el algoritmo de Williams requiere aproximadamente

$$2 \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \log_2 \left(\frac{n}{k} \right) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \log_2 j$$

comparaciones. ¿Hay alguno que (en cuanto a comparaciones) sea significativamente mejor que los demás?

Ejercicio 3.21

Encontrar, si existe, una fórmula para las siguientes sucesiones recurrentes. Indicar en cada caso si la sucesión es o no convergente.

- (a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n.$
- (b) $a_1 = 1, a_{n+1} = (-1)^n + a_n.$
- (c) $a_1 = 1, a_{n+1} = -a_n/2.$
- (d) $a_1 = 1, a_{n+1} = (-1)^n a_n.$
- (e) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$

Ejercicio 3.22

Estudiar si las siguientes sucesiones definidas por recurrencia son convergentes y, en caso afirmativo, calcular su límite.

- (a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$.
- (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1 + a_n}{1 + 2a_n}$.
- (c) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2a_n + \frac{1}{a_n} + 1}$.
- (d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$.

Ejercicio 3.23

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

- (a) Aplicar inducción para ver que si $0 < x < 1$, entonces $(1 - x^2)^n > 1 - nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Demostrar que $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ para todo $n \geq 2$.
- (c) Deducir que las sucesiones $(a_n)_{n=1}^\infty$ y $(b_n)_{n=1}^\infty$ convergen al mismo límite.
- (d) Comprobar que $\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.24

Calcular los siguientes límites:

$$(a) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \quad (b) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (c) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (d) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Ejercicio 3.25

Partiendo del apartado (c) del ejercicio 23, probar que la sucesión de término general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

es monótona decreciente y de términos positivos. Como consecuencia hallar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

Tema 4

Cálculo de funciones de una variable

1 Continuidad

Ejercicio 4.1

Calcular los siguientes límites laterales.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} [x+1]$, donde $[x]$ denota el mayor entero menor o igual que x .
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} 1 + \frac{|x|}{x}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} [x] + [2-x] - 1$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} 1/(x-1)$.
- (g) $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x-3}{x^2-9}$.
- (h) $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$.
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{3^{1/x} + 1}{3^{1/x} - 1}$.

¿En qué casos existe el correspondiente límite?

Ejercicio 4.2

Calcular los límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2+2}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)x^2 \sin(\frac{1}{1-x})$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$.

Ejercicio 4.3

Demostrar que cuando $a < 0$, se cumple $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ax} \cos x = 0$, y que cuando $a \geq 0$ el límite no existe.

Ejercicio 4.4

Calcular los siguientes límites.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

Ejercicio 4.5

Utilizar los resultados del ejercicio 4 para hallar el valor de los siguientes límites.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1) \sin x}{x^2-2x}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2}) \tan(x)$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-x^3)((x+1)^{\sqrt{2}}-1)}{\log(1+4x)(1-\cos(2x))}$.

Ejercicio 4.6

Calcular los límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x^2}}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$.

Ejercicio 4.7

Estudiar la continuidad de las funciones definidas por:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & x = 0; \\ \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= |x|e^{-|x-1|}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.8

Estudiar la continuidad en el punto $x = 0$ de las funciones definidas por:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & x = 0; \\ x \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & x = 0; \\ \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1} & x \neq 0. \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= \begin{cases} e^x - 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 - \cos x, & x > 0. \end{cases} \\ \text{(d)} \quad f(x) &= \begin{cases} 2, & x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen} x}, & x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

2 Diferenciabilidad**Ejercicio 4.9**

Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en el punto $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= |x - 1|. \\ \text{(b)} \quad f(x) &= |x - 2\sqrt{x} + 2|. \\ \text{(c)} \quad f(x) &= (x - 1)^{1/3}. \\ \text{(d)} \quad f(x) &= (x - 1)^{2/5}. \end{aligned}$$

$$\text{(e)} \quad f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1; \\ 1 - \operatorname{sen}(x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4.10

Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= 1/x. \\ \text{(b)} \quad f(x) &= x^2 \operatorname{sen} x. \\ \text{(c)} \quad f(x) &= e^x \cos x. \\ \text{(d)} \quad f(x) &= e^x \operatorname{sen} x. \\ \text{(e)} \quad f(x) &= xe^x \cos x. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.11

Utilizar la regla de la cadena para hallar las derivadas de

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= e^{2x}. \\ \text{(b)} \quad f(x) &= e^{-x}. \\ \text{(c)} \quad f(x) &= (x^3 - 1)^3. \end{aligned}$$

- (d) $f(x) = \cos^3 x$.
- (e) $f(x) = \cos(x^3)$.
- (f) $f(x) = e^{x^2+2x}$.
- (g) $f(x) = 1/(1 + (\sqrt{x} + 1)^2)$.

Ejercicio 4.12

Consideremos las funciones definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Sabemos que $f(g(x)) = x$ para todo $x \geq 0$. A partir de la derivada de f y suponiendo que existe $g'(x)$ para todo $x > 0$, calcular esta derivada.

3 Integración

Ejercicio 4.13

Sabiendo que, para toda función derivable f cuya derivada es continua, se cumple

$$\int f'(x) dx = f(x) + C,$$

siendo C una constante arbitraria; evaluar $\int 0 dx$ y $\int dx$.

Ejercicio 4.14

Calcular las siguientes integrales.

- (a) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$.
- (b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$.
- (c) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} dx$.
- (d) $\int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx$.
- (e) $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$.

Ejercicio 4.15

Calcular:

- (a) $\int \sin^2 x dx$.
- (b) $\int \cos^2 4x dx$.
- (c) $\int \sin 2x \cos 3x dx$.
- (d) $\int \cos 2x \cos x dx$.

Ejercicio 4.16

Utilizar un cambio de variable para hallar las siguientes integrales.

- (a) $\int \frac{e^x + e^{-2x}}{1+e^x} dx$.
- (b) $\int \frac{\tan^2 x + 3 \tan x}{1+\tan x} dx$.
- (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
- (d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$.
- (e) $\int \frac{dx}{(24x-4x^2-27)^{3/2}}$.

Ejercicio 4.17

Integrar por partes para evaluar las siguientes integrales.

- (a) $\int x \sin 2x dx$.
- (b) $\int x^2 \cos x dx$.
- (c) $\int e^x \sin x dx$.
- (d) $\int x e^x \cos x dx$.

Ejercicio 4.18

Sea f una función derivable tal que su derivada es continua y verifica $f'(x) = af(x)$.

- (a) Si definimos $g(x) = f(x)e^{-ax}$, demostrar que $g'(x) = 0$.
 (b) Deducir que $f(x) = Ce^{ax}$, donde C es una constante arbitraria.

Ejercicio 4.19

Calcular los valores de las siguientes integrales definidas.

- (a) $\int_{-2}^4 (x-1)(x-2) dx$.
 (b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.
 (c) $\int_1^5 e^x \cos x dx$.
 (d) $\int_0^2 f(x) dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
 (e) $\int_0^1 f(x) dx$ donde $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq c; \\ c \frac{1-x}{1-c}, & \text{si } c < x \leq 1; \end{cases}$ siendo c tal que $0 < c < 1$.

Ejercicio 4.20

Encontrar las derivadas de las funciones definidas por

$$(a) f(x) = \int_0^x e^{x^2+t^2} dt \quad (b) f(x) = \int_0^x \cos(x^2+t^2) dt \quad (c) f(x) = \int_x^0 \frac{\sin(x+t)}{t} dt$$

Ejercicio 4.21

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f y g en el intervalo que se indica.

- (a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ en $[0, \pi/4]$.
 (b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x\sqrt{x^2+2}$ en $[0, 1]$.
 (c) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ en $[-1, 1]$.
 (d) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $g(x) = \sin x$ entre el origen y el menor punto de corte positivo.

Ejercicio 4.22

Encontrar el área común a los círculos $x^2 + y^2 = 9$ y $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Ejercicio 4.23

Demostrar que la curva $y = x^3$ descompone en dos partes iguales al triángulo formado por las rectas $y = 7x$, $x = a$ y el eje OX, siendo a la abscisa del punto positivo de intersección de la curva con la recta $y = 7x$.

Ejercicio 4.24

Se considera la parábola $y = \sqrt{2}x^2/a$, donde $a > 0$, y la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Determinar el volumen engendrado por la zona que se encuentra entre el eje OX y las dos curvas, al girar en torno a OX.

Ejercicio 4.25

Calcular el volumen de revolución engendrado, girando alrededor del eje OX, por el área que delimitan las parábolas $y^2 = 2hx$ y $x^2 = 2hy$, con $h > 0$.

Tema 5

Integración numérica

Ejercicio 5.1

En este problema estudiaremos una integral definida que no se puede calcular analíticamente y, consecuentemente, para la que es necesario buscar métodos aproximados.

Consideremos la integral $\int_1^2 e^{-t^2} dt$. Para aproximarla, se divide el intervalo $[1, 2]$ en cuatro partes iguales obteniéndose subintervalos de extremos $t_i = 1 + \frac{i}{4}$, con $0 \leq i \leq 4$.

Sustituir en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ la función $f(t)$ por el valor de la función en el punto medio $f((t_{i-1} + t_i)/2)$ y efectuar la aproximación $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(s) ds \approx (t_i - t_{i-1})f((t_{i-1} + t_i)/2)$. Deducir que

$$\int_1^2 e^{-t^2} dt \approx \frac{1}{4} [e^{-81/64} + e^{-121/64} + e^{-169/64} + e^{-225/64}] = 0.13352.$$

Ejercicio 5.2

Usar la regla del trapecio con $n = 4$ para aproximar $\int_{-1}^2 x^2 dx$.

Ejercicio 5.3

Sea T_n la aproximación a la integral $I = \int_a^b f(x) dx$ que se obtiene dividiendo $[a, b]$ en n subintervalos y aplicando la regla del trapecio. Sabiendo que el error cometido es de la forma $I - T_n = \frac{c}{n^2} + o(\frac{1}{n^k})$, donde $k \geq 3$ y c es una constante que depende de la longitud del intervalo y de la función (pero no de n), probar que la expresión $I - \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$ elimina el término $\frac{c}{n^2}$ y proporciona, pues, una mejor estimación. Hallar el valor concreto de $\frac{4T_{2n} - T_n}{3}$.

Ejercicio 5.4

Calcular aproximadamente la integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

(a) subdividiendo $[0, 1]$ en 10 subintervalos y aplicando la regla del trapecio. Acotar el error.

(b) aplicando la regla de Simpson tomando $2n = 10$. Acotar el error.

Hallar el valor de n que hay que tomar en ambos métodos para obtener el valor de la integral con cuatro cifras decimales exactas.

Ejercicio 5.5

Aplicar la regla de Simpson con $2n = 10$ para aproximar $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. Acotar el error. ¿Cuántos subintervalos necesitaremos para lograr un error menor que 0.00005 usando la regla del trapecio?

Ejercicio 5.6

Utilizar la regla de Simpson, acotando el error, para calcular

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ tomando $2n = 10$.

(b) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ tomando $2n = 4$.

Ejercicio 5.7

Acotar el error que se produce al aproximar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ utilizando tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio para subdivisiones del intervalo $[0, 1]$ en 8 y 16 partes.

Ejercicio 5.8

Un terreno está situado entre una valla rectilínea y un río. La anchura en metros del terreno a una distancia x de uno de los extremos de la valla se denota por y y viene dada por

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Aplicar la regla de Simpson para hallar, aproximadamente, el área del terreno.

Ejercicio 5.9

De una curva se conocen los valores que aparecen en la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.6	0.9	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2

(a) Hallar el valor aproximado del área limitada por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas en $x = 1$ y $x = 9$, aplicando la regla de Simpson.

(b) Averiguar el valor aproximado del volumen engendrado al girar el área del apartado (a) alrededor del eje de abscisas, aplicando la regla de Simpson.

Ejercicio 5.10

Sean $x_0 = a$, $x_1 = \frac{b-a}{2}$ y $x_2 = b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, demostrar que la fórmula de Simpson aplicada en $[a, b]$ es igual a la integral que se obtiene al sustituir f por el polinomio de grado 2 que coincide con f en los puntos x_i , $i = 0, 1, 2$.

Tema 6

Cálculo vectorial

1 Continuidad

Ejercicio 6.1

Hallar el dominio y el rango de las siguientes funciones. ¿Cuál es la gráfica en (a), (d) y (e)?

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- (b) $f(x, y) = \sqrt{x} + 2xy$.
- (c) $f(x, y) = \log(x + y)$.
- (d) $f(x, y) = 2 + 3x + 4y$.
- (e) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Ejercicio 6.2

Calcular los siguientes límites.

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \sqrt{x} + 2xy$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{2xy+x^2}{x^2+xy+y^2}$.
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy+x^2-5}{x^2+xy+y^2+2}$.

Ejercicio 6.3

Aproximarse por rectas para hallar el posible valor del límite de las siguientes funciones.

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$.
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}$.
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(y+1)+y^2}{x^2+y^2}$.
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
- (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+4y^2}$.
- (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2+(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$.

Ejercicio 6.4

Comprobar que al aproximarse por rectas en el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$ se obtiene como único valor el 0. ¿Qué valor se obtiene aproximándose por la curva $y = x^2$?

Ejercicio 6.5

Verificar la existencia de límite en los apartados del problema 3 en que sea posible.

Ejercicio 6.6

Comprobar si las siguientes funciones son o no continuas.

- (a) $f(x, y) = x^3 + 4y^2 - x + 1$, en $(1, 1)$.
- (b) $f(x, y) = \frac{x-y}{y-x^2}$ si $y \neq x^2$ y $f(x, x^2) = 1$, en $(1, 1)$.
- (c) $f(x, y) = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0, y) = 0$, en $(0, 1)$.
- (d) $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$, en $(0, 0)$.
- (e) $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 1$, en $(0, 0)$.

2 Diferenciabilidad

Ejercicio 6.7

Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones.

- (a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ en $(1, 2)$.
- (b) $f(x, y) = \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$ en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.
- (c) $f(x, y) = xe^{x^2y}$ en $(1, \log 2)$.

Ejercicio 6.8

Encontrar la pendiente, en la dirección de los ejes x e y , de la superficie dada por

- (a) $z = x^2 + 2xy + y^3$ en el punto $(1, 2, 13)$.
- (b) $z = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$ en el punto $(1, 2, 1)$.

Ejercicio 6.9

Hallar las siguientes derivadas direccionales.

- (a) $f(x, y) = x + y$ en el punto $(0, 0)$ y en la dirección $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
- (b) $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1, 2)$ y en la dirección $(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$.

Ejercicio 6.10

Consideremos la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

¿Existen las derivadas direccionales en el punto $(0, 0)$? ¿Es continua en ese punto?

Ejercicio 6.11

Comprobar que la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

no es de clase C^1 .

Ejercicio 6.12

Consideremos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

- (a) Estudiar la continuidad en $(0, 0)$.
- (b) Estudiar la existencia de derivadas direccionales en $(0, 0)$.
- (c) Calcular las derivadas parciales en cualquier punto.
- (d) ¿Son las parciales continuas en $(0, 0)$?

Ejercicio 6.13

Sea $f(x, y) = 3x^2 - 4y$.

- (a) Demostrar que es una función de clase C^1 .
- (b) Calcular el gradiente de la función en $(1, 3)$.
- (c) Calcular la derivada direccional en $(1, 3)$ en la dirección $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Ejercicio 6.14

Comprobar que las siguientes funciones son de clase C^1 y calcular las derivadas parciales de la composición $f \circ g$ en los siguientes casos.

- (a) $f(x) = e^x$ y $g(t) = \cos t$ en el punto 0 .

- (b) $f(x) = e^x$ y $g(s, t) = 3s^2 + 2t^3$ en el punto $(0, 0)$.
 (c) $f(x, y) = x^2y - y^2$ y $g(t) = (\sin t, e^t)$ en el punto 0 .
 (d) $f(x, y) = 2xy$ y $g(s, t) = (s^2 + t^2, \frac{s}{t})$ en el punto $(0, 1)$.
 (e) $f(x, y) = 2xe^y$ y $g(s, t) = (s^2 + t^2, \log s)$ en el punto $(1, 0)$.

Ejercicio 6.15

Encontrar las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

- (a) $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ en el punto $(-1, 2)$.
 (b) $f(x, y) = ye^x + x \log y$ en el punto $(0, 1)$.

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en el punto } (0, 0).$$

Ejercicio 6.16

Demostrar que la función definida por $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}}$ verifica la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

en la bola $B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$, de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1.

3 Integración

Ejercicio 6.17

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Interpretar geoméricamente la integral iterada

$$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} dy \, dx.$$

Ejercicio 6.18

Calcular las integrales iteradas de las siguientes funciones.

- (a) $f(x, y) = xy$ en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.
 (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(4, 0)$.
 (c) $f(x, y) = \cos x$ en el cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.
 (d) $f(x, y) = x^2$ en la región limitada por las curvas $y^2 = x$, $y^2 = -x$ e $y = 1$.
 (e) $f(x, y) = x$ en la región situada por encima del eje de abscisas, y limitada por las circunferencias centradas en $(0, 0)$ y con radios 2 y 3 respectivamente.

Ejercicio 6.19

Consideremos la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

- (a) Comprobar que no es continua en el punto $(0, 0)$.
 (b) Calcular las integrales iteradas en el cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

Tema 7

Series numéricas y de potencias

1 Series numéricas

Ejercicio 7.1

Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Ejercicio 7.2

Probar que las siguientes series convergen y calcular su suma.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \quad (c) \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} - \frac{3}{n-1} + \frac{4}{n-2} \right).$$

Ejercicio 7.3

Sabiendo que si $a \neq 1$, entonces $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducir que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge si, y sólo si, $|a| < 1$; en tal caso se cumple que $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$.

Ejercicio 7.4

Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{3^n}$ converge y calcular su suma.

Ejercicio 7.5

Escribir el número $0.999999 \dots$ (en base 10) como una serie y demostrar que es igual a 1.

Ejercicio 7.6

Comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ejercicio 7.7

Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad (d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{n!} \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Ejercicio 7.8

En este ejercicio vamos a calcular la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

(a) Demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

(b) Fijado $p \in \mathbb{N}$, probar que si $n > p$, se verifica

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \sum_{k=1}^p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{p}\right) \frac{1}{k!}$$

y deducir que $e \geq \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!}$.

(c) Concluir que $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

2 Series de potencias

Ejercicio 7.9

Demostrar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} s^n$ converge si $|s| < 1$ y diverge si $|s| \geq 1$. Calcular su suma cuando sea posible.

Ejercicio 7.10

Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (s-s_0)^n. & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (s-s_0)^n. & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (s-s_0)^n. \\ \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (s-s_0)^n. & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n (s-s_0)^n. & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s-s_0)^n. \\ \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} j^n (s-s_0)^n. & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (s-s_0)^n. & \text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n n^3}{2^n} (s-s_0)^n. \end{array}$$

Ejercicio 7.11

Consideremos una función definida mediante una serie de potencias con radio de convergencia R , $0 < R \leq +\infty$; es decir,

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-s_0)^n \quad \text{cuando } |s-s_0| < R.$$

(a) Sabiendo que la derivada viene dada por

$$f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s-s_0)^{n-1} \quad \text{para todo } |s-s_0| < R,$$

demostrar por inducción que

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (s-s_0)^{n-k} \quad \text{para todo } |s-s_0| < R$$

para todo $k \geq 1$.

(b) Probar que $a_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}$ para todo $n \geq 0$

(c) Deducir que el desarrollo en serie de potencias de la función f es único.

Ejercicio 7.12

Escribir las series de potencias centradas en 0 de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(s) = \frac{1}{1+s}. & \text{(b)} f(s) = \frac{1}{1-s^2}. & \text{(c)} f(s) = \frac{1}{1+s^2}. \\ \text{(d)} f(s) = \frac{s}{s^2-4s+3}. & \text{(e)} f(s) = \frac{s}{1-s-s^2}. & \text{(f)} f(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}. \\ \text{(g)} f(s) = \frac{1}{s^2-s-1}. & \text{(h)} f(s) = \frac{s}{s^3+1}. & \text{(i)} f(s) = \frac{s-1}{s^2+1}. \end{array}$$

Ejercicio 7.13

Hallar las series de potencias centradas en 0 de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(s) = \frac{1}{(1-s)^2}. & \text{(b)} f(s) = \frac{1}{(1+s)^2}. & \text{(c)} f(s) = \frac{1}{(1-s)^3}. \\ \text{(d)} f(s) = \frac{s}{(1-s)^3}. & \text{(e)} f(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}. & \text{(f)} f(s) = \frac{s^2-s-2}{(s-1)^2(s+1)}. \end{array}$$

Ejercicio 7.14

En este problema, vamos a deducir el desarrollo en serie de potencias centradas en 0 de la función exponencial; en otras palabras, vamos a suponer que se cumple $e^s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ y obtendremos los valores de a_n , posteriormente comprobaremos que la serie de potencias definida por esos valores verifica las propiedades fundamentales de la función exponencial.

(a) Partiendo de la propiedad $e^{2s} = (e^s)^2$ y de la unicidad del desarrollo en serie de potencias, probar

$$2^n = \frac{\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}}{a_n} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

(b) Deducir que $a_0 = 1$ y aplicar el principio de inducción completa para ver que

$$a_n = \frac{a_1^n}{n!} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

(c) Utilizando que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, ejercicio 8, deducir que $a_1 = 1$ y, consecuentemente, $a_n = 1$ para todo $n \geq 0$.

(d) Comprobar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ tiene radio de convergencia infinito y que la función definida por $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ verifica que $f(1) = e$ y que $f(s+z) = f(s)f(z)$ para todo $s, z \in \mathbb{C}$.

Se concluye, pues, que $e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!}$ para todo $s \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 7.15

Hallar el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones en el punto 0.

(a) $f(s) = e^{-s}$. (b) $f(s) = e^{js}$. (c) $f(s) = \cos s$. (d) $f(s) = \sin s$.

Ejercicio 7.16

Este ejercicio y el siguiente pretenden mostrar la utilidad de los desarrollos en serie de funciones de variable compleja; en particular, veremos su aplicación a la resolución de algunas ecuaciones en diferencias: el refinamiento de este método conduce a lo que se conoce como la transformada z .

Consideremos un circuito que consta de infinitas mallas M_n , $n \geq 0$, con forma cuadrada y alineadas. En uno de los lados de la malla M_0 está conectada una fuente de tensión continua de V voltios y en los otros tres lados hay sendas resistencias de R ohmios. Las demás mallas tienen cuatro resistencias de R ohmios, una en cada lado. Supondremos que la intensidad de la corriente en M_0 es $i_0 = 1$ y que $V = R$.

- (a) Estudiar M_0 y deducir que la corriente i_1 en M_1 cumple $3i_0 - i_1 = 1$.
- (b) Probar que la corriente i_n en M_n verifica $i_{n+1} - 4i_n + i_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$.
- (c) Hallar la serie de Taylor centrada en 0 de la función $f(s) = \frac{-2s+1}{s^2-4s+1}$.
- (d) Averiguar la corriente en cada malla.

Ejercicio 7.17

Con el fin de producir efectos de sonido, un ingeniero desarrolla un eco en un estudio de grabación: ante una señal de audio $x(n)$, ($n \geq 0$) se obtiene como respuesta grabada la señal $y(0) = x(0)$, $y(n) = x(n) + ay(n-1)$, ($n \geq 1$); siendo $a > 0$.

(a) Si la señal original es $x(0) = \alpha$, $x(n) = 0$, ($n \geq 1$), considerar la función definida por

$$f(s) = \frac{\alpha}{1-as},$$

desarrollarla en serie de Taylor centrada en 0 y deducir la respuesta $y(n)$.

(b) Desarrollar en serie de Taylor centrada en 0 la función definida por

$$f(s) = \frac{\alpha + \beta s}{1-as} = -\frac{\beta}{a} + \frac{\alpha a + \beta}{a} \frac{1}{1-as}$$

y deducir la respuesta $y(n)$ cuando la señal original es $x(0) = \alpha$, $x(1) = \beta$, $x(n) = 0$, ($n \geq 2$).

(Observar que cuando $0 < a < 1$ la amplitud de la señal grabada se amortigua con el tiempo, cuando $a = 1$ no se altera y cuando $a > 1$ la amplitud se hace cada vez mayor.)

Tema 8

Series de Fourier

Ejercicio 8.1

Comprobar si las siguientes funciones son periódicas y, en caso de serlo, calcular su periodo fundamental.

- (a) $f(t) = \sin(\omega t)$.
- (b) $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$.
- (c) $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$.
- (d) $f(t) = \cos(10t) + \cos(10 + \pi)t$.
- (e) $f(t) = (10 \cos t)^2$.
- (f) $f(t) = \sin(t^2)$.

Ejercicio 8.2

Demostrar que si la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ verifica $f(t) = f(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Ejercicio 8.3

Supongamos que $\omega T = 2\pi$.

(a) Demostrar que si $n, m \in \mathbb{Z}$ y $n \neq m$, entonces $\int_0^T e^{jn\omega t} e^{-jm\omega t} dt = 0$. Hallar $\int_0^T e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t} dt$ si $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Demostrar que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$ y $\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0$.

Probar también que $\int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0$ cualesquiera que sean $n, m \in \mathbb{N}$.

Hallar $\int_0^T \sin^2(n\omega t) dt$ y $\int_0^T \cos^2(n\omega t) dt$

Ejercicio 8.4

Sea $\omega T = 2\pi$ y supongamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función T -periódica.

(a) Si $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t}$, demostrar que $F_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jm\omega t} dt$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

(b) Si $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$, comprobar que $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$, que $a_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(m\omega t) dt$ y que $b_m = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(m\omega t) dt$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8.5

Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones.

- (a) $f(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\frac{T}{2} < t < 0; \\ 0, & \text{si } t = 0, \pm \frac{T}{2}; \\ 1, & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2}; \end{cases}$ y $f(t) = f(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $f(t) = t + \sin t$ si $-\pi < t \leq \pi$ y $f(t + 2\pi) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (c) $f(t) = t$ si $-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$ y $f(t) = f(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (d) $f(t) = t$ si $0 \leq t < T$ y $f(t) = f(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (e) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\frac{T}{2} < t < 0; \\ 1, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \end{cases}$ y $f(t) = f(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (f) $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 < t < 0; \\ t, & \text{si } 0 \leq t \leq 2; \end{cases}$ y $f(t) = f(t + 4)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8.6

Supongamos que disponemos de generadores con voltajes de la forma $A_n \sin(nt)$, donde $n \in \mathbb{N}$. ¿Cómo podemos simular que, en un circuito, tenemos una fuente cuyo voltaje de entrada es la onda

$$\text{cuadrada definida por } v(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{si } t = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots; \\ -1, & \text{si } t \in](2k-1)\pi, k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad ?$$

Ejercicio 8.7

Utilizar las propiedades de las funciones pares e impares para hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones. En este problema $u(t)$ denota la función escalón unitario o función de Heaviside, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0; \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

- (a) $f(t) = |t|$ si $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ y $f(t) = f(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $f(t) = t \cos t$ si $-\pi < t < \pi$, $f(\pi) = 0$ y $f(t) = f(t+2\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (c) $f(t) = |4 \sin(2t)|$.
- (d) $f(t) = 4 \cos(2t) [u(t + \frac{\pi}{4}) - u(t - \frac{\pi}{4})]$ si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y $f(t) = f(t+\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (e) $f(t) = u(t + \frac{\delta}{2}) - u(t - \frac{\delta}{2})$ si $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ y $f(t) = f(t+T)$, donde $t \in \mathbb{R}$ y $0 < \delta < T$.
- (f) $f(t) = t^2$ si $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ y $f(t) = f(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (g) $f(t) = e^{|t|}$ si $-1 \leq t \leq 1$ y $f(t) = f(t+2)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8.8

Verificar si la serie de Fourier de las funciones de los problemas 6 y 7 converge a la función dada.

Ejercicio 8.9

Utilizar los resultados del problema 8 para comprobar las siguientes igualdades.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(-1)^{k+1}}{4k(k+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1} \sin(n\pi/2) = \frac{1}{4}$.
- (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
- (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-1}}{1+n^2\pi^2} = \frac{e}{2}$.

Tema 9

Transformadas de Fourier

Ejercicio 9.1

Las funciones no periódicas también pueden expresarse en términos de funciones exponenciales complejas, pero en lugar de series de Fourier con frecuencias discretas $n\omega$, donde ω es la frecuencia fundamental y $n \in \mathbb{N}$, aparecen integrales de Fourier con frecuencias continuas $\omega \in \mathbb{R}$. Veamos cuál es la integral apropiada en un caso simple.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } t = -\frac{1}{2}; \\ 1, & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } t = \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{si } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Para cada $T > 1$, consideremos la función T -periódica definida por $f^T(t) = f(t)$ si $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ y $f^T(t) = f^T(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Hallar $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^T e^{jn\omega t}$, la serie exponencial de Fourier correspondiente a f^T (como siempre, $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

(b) Si $r \neq 0$, considerando cualquier $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{2n\pi}{r} > 1$ y tomando $T = \frac{2n\pi}{r}$, se define $F(r) = T c_n^T$. Por otra parte, se define $F(0) = T c_0^T$. Calcular $F(r)$ y demostrar que es independiente del n escogido.

(c) Comprobar que $F(r) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y f(t) e^{-jrt} dt$.

(d) Demostrar que, para cada $T > 1$, $f^T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega F(n\omega) e^{jn\omega t}$.

(e) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\omega > 0$ tal que $\frac{2\pi}{\omega} > 1$. Justificar que la suma $\sum_{n=-k}^k \omega F(n\omega) e^{jn\omega t}$ es una buena aproximación de la integral $\int_{-k\omega}^{k\omega} F(r) e^{jrt} dr$ cuando ω es pequeño. Deducir que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega F(n\omega) e^{jn\omega t}$ es una buena aproximación de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x F(r) e^{jrt} dt$, cuando ω es pequeño.

(f) Estudiar si es posible que $f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x F(r) e^{jrt} dt$. (Observar que se cumple $f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f^T(t)$.)

1 Integrales impropias

Ejercicio 9.2

Aplicar la regla de Barrow generalizada para determinar si las siguientes integrales impropias convergen o no y, en caso que converjan, calcularlas.

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$
- (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$
- (c) $\int_1^{+\infty} \cos t dt$
- (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$
- (e) $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$
- (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$

Ejercicio 9.3

Averiguar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge.

Ejercicio 9.4

Utilizar el criterio de mayoración para averiguar si las siguientes integrales convergen.

- (a) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/a} dt$, con $a > 0$.

- (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$
- (c) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos t}{t} dt$
- (d) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} dt$
- (e) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$
- (f) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$

Ejercicio 9.5

Probar que la integral $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right| dt$ diverge.

Ejercicio 9.6

Determinar si convergen o no las siguientes integrales.

- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^2+t+1} dt$
- (b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}} dt$
- (c) $\int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2t^5+t^2+7}} dt$

Ejercicio 9.7

Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \operatorname{sen} x dy dx$ e intercambiar el orden de integración para obtener $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi/2$.

Ejercicio 9.8

Probar que $\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dy dx = \frac{\pi}{4}$ y que $\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dx dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$.

Deducir que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2 La función escalón unitario

Ejercicio 9.9

Se define u la función escalón unitario, también llamada función de Heaviside, por

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0; \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Las funciones escalonadas surgen de modo natural en el estudio de problemas con discontinuidades, como el cierre de un interruptor o el estudio de pulsos.

Expresar las siguientes funciones sin utilizar la función u y dibujarlas.

- (a) $u(t-2)$.
- (b) $-2u(t)$.
- (c) $u(-t)$.
- (d) $u(t) + u(t-1)$.
- (e) $u(t)u(1-t)$.
- (f) $u(t)u(-1-t)$.
- (g) $u(-t) - 2u(t-2)$.

3 La transformada de Fourier y sus propiedades

Ejercicio 9.10

Hallar la transformada de Fourier de las siguientes funciones. En este problema, $a > 0$.

- (a) $f(t) = u(a+t)u(a-t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a \leq t \leq a; \\ 0, & \text{si } |t| > a. \end{cases}$
- (b) $f(t) = e^{-at}u(t)$.
- (c) $f(t) = e^{-a|t|}$.
- (d) $f(t) = u(\pi+t)u(\pi-t)\operatorname{sen} t = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } -\pi \leq t \leq \pi; \\ 0, & \text{si } |t| > \pi. \end{cases}$

$$(e) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t < a; \\ 0, & \text{si } t = 0; \\ -1, & \text{si } -a < t < 0; \\ 0, & \text{si } |t| \geq a. \end{cases}$$

Ejercicio 9.11

Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier.

(a) **Linealidad:** Si f y g son funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha \mathcal{F}[f](\omega) + \beta \mathcal{F}[g](\omega).$$

(b) **Traslaciones:** Si $g(t) = f(t - t_0)$, entonces $\mathcal{F}[g](\omega) = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[f](\omega)$.

Si $g(t) = e^{j\omega_0 t} f(t)$, entonces $\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - \omega_0)$.

(c) **Cambios de escala:** Si $g(t) = f(at)$ y $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})$.

(d) **Relación con la derivada:** Si existen las transformadas de Fourier de f y f' , entonces $\mathcal{F}[f'](\omega) = j\omega \mathcal{F}[f](\omega)$.

Si existe $\mathcal{F}[f]$, es una función derivable y $\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[-jtf(t)]$.

Ejercicio 9.12

Utilizar las propiedades anteriores para el cálculo de la transformada de Fourier de las siguientes funciones. (Como en el ejercicio 10, $a > 0$.)

(a) $f(t) = e^{-at} \sin t \, u(t)$. (b) $f(t) = e^{-at} \cos t \, u(t)$. (c) $f(t) = e^{-at} \sin(ct) \, u(t)$.

(d) $f(t) = e^{-at} \cos(ct) \, u(t)$. (e) $f(t) = e^{-t^2/2}$. (f) $f(t) = t^n e^{-at} u(t)$.

Ejercicio 9.13

Los pulsos gaussianos son pulsos cuya envolvente es una función gaussiana. Su expresión matemática es $g(t) = \Re(A(t)e^{j\omega_0 t})$, donde

$$A(t) = A \exp \left[-\left(\frac{1 - jk}{2T^2} \right) t^2 \right].$$

(Se dice que T es la anchura del pulso y k es su factor de chirp; cuando $k \neq 0$, la frecuencia del pulso varía con el tiempo.) Calcular $\mathcal{F}[A(t)e^{j\omega_0 t}]$ utilizando que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\left(\frac{1 - jk}{2T^2} \right) t^2 \right] dt = T \sqrt{\frac{2\pi}{1 - jk}}.$$

(En la anterior expresión, $\sqrt{1 - jk}$ denota la raíz cuadrada que tiene parte real positiva, de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - jk}} = \frac{\sqrt{(1 + k^2)^{1/2} + 1} - j\sqrt{(1 + k^2)^{1/2} - 1}}{\sqrt{2(1 + k^2)}} \quad \text{cuando } k > 0.)$$

Ejercicio 9.14

Calcular los siguientes productos de convolución. (Como en el ejercicio 10, $a > 0$.)

(a) $u * u$.

(b) Si $f(t) = u(t+1)u(1-t)$, calcular $f * f$.

(c) Si $f(t) = e^{-at}u(t)$, calcular $f * f$.

(d) Si $f_n(t) = t^n e^{-at}u(t)$ hallar $f_0 * f_n$ y deducir que

$$f_0 * \overset{n+1}{\dots} * f_0 = \frac{f_n}{n!}.$$

(e) Si $f(t) = e^{-t^2/2}$, calcular $f * f$ sabiendo que $\int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\pi/2}$ (ver ejercicio 9.7).

(f) Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a}}$ y $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{t^2}{2b}}$, calcular $f * g$.

Ejercicio 9.15

Probar que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua y $g(t) = nu(t)u(\frac{1}{n} - t)$, entonces

$$(a) \quad (u * (fu))(t) = u(t) \int_0^t f(\tau) dt \quad y \quad (b) \quad g * f(t) = n \int_{t-\frac{1}{n}}^t f(s) ds.$$

Ejercicio 9.16

Hallar la transformada de Fourier del producto de convolución de dos funciones.

Ejercicio 9.17

Aplicar el teorema de convolución para hallar la transformada de Fourier de la función definida por $f(t) = t^n e^{-at} u(t)$.

Ejercicio 9.18

Encontrar la transformada inversa de Fourier de la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2 \frac{\text{sen}(at)}{t}, & \text{si } t \neq 0; \\ 2a, & \text{si } t = 0; \end{cases} \quad \text{donde } a > 0$$

y, como consecuencia, obtener el valor de $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(at)}{t} dt$.

Ejercicio 9.19

Probar que $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](\omega) = 2\pi f(-\omega)$ y deducir que $(\mathcal{F}[f]) * (\mathcal{F}[g]) = 2\pi \mathcal{F}[f \cdot g]$.

Ejercicio 9.20

Aplicar la transformada inversa de Fourier a la función $f(t) = \frac{1}{(a+jt)^2}$, donde $a > 0$.

Ejercicio 9.21

Determinar la transformada de Fourier de la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{si } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

Aplicar los resultados del tema para calcular $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t \cos t - \text{sen } t}{t^3} \right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

Ejercicio 9.22

La dispersión en fibra óptica es el fenómeno por el cual un pulso se deforma a medida que se propaga. En un tipo de dispersión, la dispersión cromática, las distintas componentes espectrales de una señal viajan a diferentes velocidades a través de la fibra. Se puede estudiar la dispersión cromática observando la evolución de un pulso gaussiano.

Supongamos que se transmite por una fibra un pulso definido como $g(0, t) = \Re(A_0(t)e^{j\omega_0 t})$, donde $A_0(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2T_0^2}\right)$. Después de recorrida una distancia z se encuentra que el pulso viene dado por $g(z, t) = \Re(A_z(t)e^{j\omega_0 t})$, donde $A_z(t) = \frac{T_0}{\sqrt{T_0^2 + j\beta_2 z}} \exp\left(\frac{-t^2}{2(T_0^2 + j\beta_2 z)}\right)$. (Como en el ejercicio 9.13, se toma la raíz cuadrada que tiene parte real positiva.)

(a) Demostrar que la anchura del pulso al recorrer una distancia z viene dada por

$$T_z = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2}.$$

(b) Calcular T_z a una distancia de 3600 Km si partimos de una anchura en el origen $T_0 = 200 \text{ ps}$ y $\beta_2 = -22 \text{ ps}^2/\text{Km}$.

(c) En realidad, la expresión para $A_z(t)$ se deduce del hecho de ser la función que cumple $\mathcal{F}[A_z(t)e^{j\omega_0 t}](\omega) = \mathcal{F}[A_0(t)e^{j\omega_0 t}](\omega)e^{-j\beta(\omega)z}$, siendo $\beta(\omega)$ una función que determina la dispersión cromática. Comprobar que se verifica esta relación para $\beta(\omega) = \beta_2(\omega - \omega_0)^2/2$.

Tema 10

Cardinalidad

Ejercicio 10.1

Estudiar si la aplicación definida en cada uno de los siguientes apartados es o no inyectiva y si es o no sobre.

- (a) $f : [1, 5] \cap \mathbb{N} \rightarrow [1, 25] \cap \mathbb{N}; \quad f(x) = x^2$
- (b) $f : [1, 5] \rightarrow [1, 25]; \quad f(x) = x^2$
- (c) $f :]-\infty, +\infty[\rightarrow]-1, 1[; \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
- (d) $f :]0, 1[\rightarrow]-1, 1[; \quad f(x) = \sqrt{x}$
- (e) $f :]-1, 1[\rightarrow]0, 1[; \quad f(x) = x^2$
- (f) $f :]-1, 1[\rightarrow]0, 1[; \quad f(x) = \frac{x+1}{2}$
- (g) $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]; \quad f(x) = \frac{x+1}{2}$
- (h) $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]; \quad f(x) = \frac{x+3}{2}$
- (i) $f : [1, 3] \rightarrow [1, 3]; \quad f(x) = \frac{x+4}{3}$
- (j) $f :]a, b[\rightarrow]0, 1[; \quad f(x) = \frac{x-a}{b-a}$

Ejercicio 10.2

Sean A y B dos conjuntos finitos y consideremos $f : A \rightarrow B$.

- (a) Si f es sobre, entonces $|A| \geq |B|$.
- (b) Si f es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$.
- (c) Si f es biyectiva, entonces $|A| = |B|$.

Ejercicio 10.3

Sean A y B conjuntos finitos tales que $A \cap B = \emptyset$, probar que entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Ejercicio 10.4

Sea B un conjunto finito y sea $A \subset B$. Comprobar que A es finito y $|A| \leq |B|$.

Ejercicio 10.5

Demostrar los siguientes resultados sobre la cardinalidad de la unión de dos conjuntos.

- (a) Si A y B son conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- (b) Si A , B y C son conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

- (c) ¿Cómo se generaliza la anterior fórmula a cuatro conjuntos?

Ejercicio 10.6

Demostrar que para dos conjuntos finitos A y B se cumple $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Ejercicio 10.7

Dados los conjuntos finitos A_1, A_2, \dots, A_n , probar que

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Ejercicio 10.8

En un proceso de producción, un producto pasa por tres controles de calidad. Supongamos que se han producido 1000 piezas de las cuales 4 no han pasado satisfactoriamente ningún control, 7 han superado sólo el primer control, 12 han superado sólo el segundo y 11 sólo el tercero; 969 han pasado tanto el primero como el segundo, 943 tanto el primero como el tercero y 954 tanto el segundo como el tercero.

Determinar el número de piezas que superan todos los controles de calidad.

Ejercicio 10.9

Demostrar que si se escogen 11 números cualesquiera del conjunto $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 20\}$, entonces uno de ellos será un múltiplo par del otro.

Ejercicio 10.10

Probar que si se eligen 7 números del conjunto $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 12\}$, dos de ellos sumarán 13.

Ejercicio 10.11

En todo conjunto de 15 enteros hay dos, x e y de modo que $12|(x - y)$.

Ejercicio 10.12

Demostrar que si se emplean 7 colores para pintar 50 bicicletas, al menos 8 bicicletas serán del mismo color.

Ejercicio 10.13

Sean $A_2 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 40, 2|k, 2 \neq k\}$, $A_3 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 40, 3|k, 3 \neq k\}$
 $A_5 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 40, 5|k, 5 \neq k\}$.

(a) Calcular la cantidad de elementos de cada uno de los conjuntos.

(b) Encontrar la cantidad de números primos menores o iguales que 40. (El 1 no se considera ni primo ni compuesto.)

Ejercicio 10.14

Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$ es inyectiva pero no sobre. Deducir que \mathbb{N} es un conjunto infinito.

Ejercicio 10.15

Considerar las aplicaciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \frac{1 + (-1)^n(2n - 1)}{4}$ y $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$g(n) = \begin{cases} 2n, & \text{si } n > 0; \\ -2n + 1, & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

Comprobar que ambas son inyectivas y concluir que $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Ejercicio 10.16

Sea B un conjunto numerable.

(a) Si $A \subset B$, comprobar que A es finito o numerable.

(b) Si A es infinito y existe una aplicación inyectiva $f : A \rightarrow B$, entonces A es numerable.

Ejercicio 10.17

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(m, n) = 2^m 3^n$. Utilizar la unicidad de la descomposición en factores primos para probar que f es inyectiva. ¿Es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numerable?

Ejercicio 10.18

Probar que si A y B son conjuntos numerables, también lo son $A \cup B$ y $A \times B$.

Ejercicio 10.19

Definir una aplicación inyectiva de \mathbb{Q} en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ y deducir que \mathbb{Q} es numerable.

Ejercicio 10.20

Considerar la siguiente lista de números reales comprendidos entre 0 y 1.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.\mathbf{2}8096133550664\dots \\
 x_2 &= 0.\mathbf{36}322314513405\dots \\
 x_3 &= 0.95\mathbf{7}88399500865\dots \\
 x_4 &= 0.181\mathbf{2}5877954618\dots \\
 x_5 &= 0.4159\mathbf{3}265253527\dots \\
 x_6 &= 0.02112\mathbf{1}47591501\dots \\
 x_7 &= 0.729615\mathbf{8}5844858\dots \\
 x_8 &= 0.6308479\mathbf{4}475253\dots \\
 x_9 &= 0.04188732\mathbf{1}39432\dots \\
 x_{10} &= 0.309540862\mathbf{8}0989\dots \\
 x_{11} &= 0.481582309\mathbf{4}7473\dots \\
 x_{12} &= 0.30195503018\mathbf{3}24\dots \\
 x_{13} &= 0.044153708658\mathbf{3}2\dots \\
 x_{14} &= 0.8268770215038\mathbf{8}\dots \\
 x_{15} &= 0.52000000000000\dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Consideremos los números cuya representación decimal empieza por

$$0.48135427536121\dots, \quad 0.51156427356212\dots \quad \text{o} \quad 0.51999999999999\dots$$

y que han sido definidos según el procedimiento diagonal de Cantor. Discutir si pueden estar o no en esta lista.

Ejercicio 10.21

Supongamos que tenemos una lista de números reales comprendidos entre 0 y 1 representados en su desarrollo decimal:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.\mathbf{a}_1^1 a_1^2 a_1^3 a_1^4 a_1^5 a_1^6 a_1^7 a_1^8 a_1^9 \dots \\
 x_2 &= 0.a_2^1 \mathbf{a}_2^2 a_2^3 a_2^4 a_2^5 a_2^6 a_2^7 a_2^8 a_2^9 \dots \\
 x_3 &= 0.a_3^1 a_3^2 \mathbf{a}_3^3 a_3^4 a_3^5 a_3^6 a_3^7 a_3^8 a_3^9 \dots \\
 x_4 &= 0.a_4^1 a_4^2 a_4^3 \mathbf{a}_4^4 a_4^5 a_4^6 a_4^7 a_4^8 a_4^9 \dots \\
 x_5 &= 0.a_5^1 a_5^2 a_5^3 a_5^4 \mathbf{a}_5^5 a_5^6 a_5^7 a_5^8 a_5^9 \dots \\
 x_6 &= 0.a_6^1 a_6^2 a_6^3 a_6^4 a_6^5 \mathbf{a}_6^6 a_6^7 a_6^8 a_6^9 \dots \\
 x_7 &= 0.a_7^1 a_7^2 a_7^3 a_7^4 a_7^5 a_7^6 \mathbf{a}_7^7 a_7^8 a_7^9 \dots \\
 x_8 &= 0.a_8^1 a_8^2 a_8^3 a_8^4 a_8^5 a_8^6 a_8^7 \mathbf{a}_8^8 a_8^9 \dots \\
 x_9 &= 0.a_9^1 a_9^2 a_9^3 a_9^4 a_9^5 a_9^6 a_9^7 a_9^8 \mathbf{a}_9^9 \dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

donde $a_i^j \in [0, 9] \cap \mathbb{Z}$.

Definir un número real $x \in]0, 1[$ que no esté en esa lista y deducir que el conjunto $]0, 1[$ no es numerable.

Ejercicio 10.22

Considerar un intervalo abierto acotado $]a, b[$, con $a \neq b$, y definir una aplicación biyectiva de $]0, 1[$ en $]a, b[$. Probar que todo intervalo abierto acotado no degenerado es no numerable.

Ejercicio 10.23

Demostrar que no son numerables ni \mathbb{R} ni ningún intervalo abierto no acotado. ¿Qué se puede decir de su cardinal?

Tema 11

Combinatoria

1 Variaciones y permutaciones

Ejercicio 11.1

Sean A y B conjuntos finitos no vacíos con cardinales $|A| = m$ y $|B| = n$. Denotemos por $F(A, B)$ el conjunto de todas las aplicaciones de A en B . Demostrar que $|F(A, B)| = n^m$.

Ejercicio 11.2

Utilizar el ejercicio anterior para deducir que si $|A| = m$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^m$.

Ejercicio 11.3

¿De cuántas maneras diferentes puede rellenarse la columna de una quiniela que tiene 14 partidos?

Ejercicio 11.4

Una llave se fabrica haciendo incisiones de profundidad variable en ciertas posiciones de una llave virgen. Si hay 8 profundidades posibles, ¿cuántas posiciones se necesitan para fabricar un millón de llaves diferentes?

Ejercicio 11.5

Partiendo de un alfabeto de 26 letras, ¿cuántas palabras (pronunciables o no) de 3 letras se pueden escribir?

Ejercicio 11.6

¿Cuántas matrículas diferentes pueden fabricarse si cada matrícula de automóvil consta de un número de cuatro cifras y de una palabra de tres letras?

Ejercicio 11.7

Según el protocolo TCP-IP, cada dirección en internet viene dada por 4 números de 0 a 255, por ejemplo, 147.156.124.111 junto con unas reglas de lo que significa cada número ¿Cuántas direcciones diferentes se pueden asignar?

Ejercicio 11.8

Sean A y B conjuntos finitos no vacíos con cardinales $|A| = m$ y $|B| = n$, donde $n \geq m$. Denotemos por $F_i(A, B)$ el conjunto de todas las aplicaciones inyectivas de A en B . Demostrar que

$$|F_i(A, B)| = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1).$$

Ejercicio 11.9

¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden hacer con un alfabeto de 26 letras si la única restricción es que ninguna letra pueda aparecer más de una vez?

Ejercicio 11.10

Un identificador de etiqueta para un programa de ordenador consta de una letra seguida por un número de tres cifras. Si no se permiten repeticiones, ¿cuántos identificadores distintos de etiqueta será posible tener?

Ejercicio 11.11

Tras una carrera, el podio lo componen los ganadores de las medallas de oro, plata y bronce. Si en una carrera participan diez atletas, ¿cuántos podios posibles hay?

Ejercicio 11.12

¿En cuantas formas pueden asignarse ocho trabajadores a ocho tareas diferentes?

Ejercicio 11.13

Sea A un conjunto finito no vacío y denotemos por $F_b(A, A)$ el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de A en A .

- (a) Comprobar que $F_b(A, A) = F_i(A, A)$.
- (b) Demostrar que si $|A| = n$, entonces $|F_b(A, A)| = n!$.

Ejercicio 11.14

Sea $A = \{a, b, c\}$; escribir todas las permutaciones posibles de A .

Ejercicio 11.15

¿Cuántas palabras de siete letras pueden formarse con las letras del nombre EULOGIA?

2 Relaciones de equivalencia y particiones

Ejercicio 11.16

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y consideremos una aplicación $f : A \rightarrow B$. Se define la siguiente relación en A : los elementos a_1 está relacionado con a_2 si $f(a_1) = f(a_2)$; escribiremos $a_1 Ra_2$. Demostrar que se cumple.

- (a) aRa para todo $a \in A$.
- (b) Si $a_1 Ra_2$, entonces $a_2 Ra_1$.
- (c) Si $a_1 Ra_2$ y $a_2 Ra_3$, entonces $a_1 Ra_3$.

Ejercicio 11.17

Sea A el conjunto de empleados de una compañía. Se define en A la relación: dos empleados están relacionados si cobran el mismo sueldo. Demostrar que es una relación de equivalencia.

Ejercicio 11.18

Discutir si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas o transitivas.

- (a) En \mathbb{N} la relación definida por: mRn si $m < n$.
- (b) En \mathbb{N} la relación definida por: mRn si $m \leq n$.
- (c) En \mathbb{N} la relación: mRn si n divide a m .
- (d) En las rectas de un plano la relación: $r_1 Rr_2$ si r_1 es paralela a r_2 .
- (e) En las rectas de un plano la relación: $r_1 Rr_2$ si r_1 es perpendicular a r_2 .
- (f) En los triángulos de un plano la relación: $T_1 RT_2$ si T_1 es semejante a T_2 .

Ejercicio 11.19

Demostrar que las siguientes relaciones son de equivalencia e intentar determinar sus clases y el conjunto cociente.

- (a) La relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definida por: $(m, n)R(m', n')$ si $mn' = nm'$.
- (b) La relación en \mathbb{Z} definida por: mRn (m es congruente con n , mod 7) si 7 divide a $m - n$.
- (c) En los autobuses municipales la relación: aRb si a hace el mismo recorrido que b .
- (d) En un conjunto de programas, la relación: pRq si p realiza las mismas tareas que q .
- (e) En un conjunto de mis cromos la relación: cRd si c tiene impresa la misma figura que d .

Ejercicio 11.20

Sea A un conjunto finito con cardinal $n \geq 1$. Demostrar que sólo hay una partición de A en n clases y sólo una partición en 1 clase.

Ejercicio 11.21

Sea A un conjunto finito con cardinal $n \geq 1$. Denotamos por $S(n, k)$ el número de particiones de A en k clases. Demostrar que si $2 \leq k \leq n - 1$ se cumple

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k).$$

(Los números $S(n, k)$ se conocen como números de Stirling.)

Ejercicio 11.22

Comprobar que

- (a) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$, con $n \geq 2$.
- (b) $S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}$, con $n \geq 3$.
- (c) $S(n, 4) = \frac{1}{6}(4^{n-1} - 1) - \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^{n-1})$, con $n \geq 4$.

3 Combinaciones**Ejercicio 11.23**

Sea A un conjunto finito tal que $|A| = n$. Demostrar:

- (a) El número de subconjuntos de A que tienen cardinal 0 es 1.
- (b) El número de subconjuntos de A que tienen cardinal n es 1.
- (c) Si $n \geq 1$, el número de subconjuntos de A con cardinal 1 es n .

Ejercicio 11.24

Sea A un conjunto finito con $|A| = n$ y denotemos por $\binom{n}{k}$ el número de subconjuntos distintos de A que tienen k elementos. Comprobar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad 0 \leq k \leq n.$$

(Los números $\binom{n}{k}$ se conocen como coeficientes binomiales o como números combinatorios.)

Ejercicio 11.25

Demostrar la identidad de Pascal: si $1 \leq k \leq n - 1$, entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Ejercicio 11.26

Probar por inducción sobre n que si $0 \leq k \leq n$, entonces $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejercicio 11.27

Una delegación de 4 estudiantes se selecciona para acudir a una convención en representación de su centro. Si hay 12 estudiantes elegibles, ¿de cuántas maneras se puede escoger la delegación?

Ejercicio 11.28

Demostrar que la cantidad de números binarios de n cifras que contienen k ceros es $\binom{n}{k}$.

Ejercicio 11.29

¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados? ¿Cuál es el polígono regular que tiene tantas diagonales como lados?

Ejercicio 11.30

Un granjero compra 3 vacas, 2 cerdos y 4 gallinas a un comerciante que dispone de 6 vacas, 5 cerdos y 8 gallinas. ¿Cuántas selecciones puede hacer el granjero?

Ejercicio 11.31

Demostrar que si $1 \leq k \leq n$, entonces

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} \quad (b) \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Ejercicio 11.32

Probar, mediante un argumento combinatorio, la fórmula del binomio de Newton: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ejercicio 11.33

Comprobar las siguientes igualdades:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (b) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Ejercicio 11.34

Probar la identidad de Vandermonde: si $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$, entonces

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j}.$$

Ejercicio 11.35

Sea A un conjunto finito cuyo cardinal es $|A| = n$. Demostrar que el número de selecciones no ordenadas de k elementos de A , permitiendo repeticiones, es $\binom{n+k-1}{k}$.

Ejercicio 11.36

En una emisora de radio, el ganador de un concurso elige 3 discos compactos de la lista de los 10 de mayor éxito. ¿De cuántas maneras puede escoger el ganador si se permiten repeticiones?

Ejercicio 11.37

Fijado $n \in \mathbb{N}$, demostrar que el número de sucesiones de longitud k de enteros no negativos (n_1, n_2, \dots, n_k) que cumplen la ecuación $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ es igual a $\binom{n+k-1}{n}$.

Ejercicio 11.38

Sea A un conjunto finito de cardinal n . Comprobar que el número de particiones ordenadas de A en 2 clases de manera que la primera tenga n_1 elementos y la otra n_2 es $\binom{n}{n_1}$, que es $\binom{n}{n_2}$.

Ejercicio 11.39

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 9 posesiones entre 2 herederos de modo que al más joven le correspondan 4 y al mayor 5?

Ejercicio 11.40

Sea A un conjunto finito tal que $|A| = n$. Se denota por $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ el número de particiones de A en k clases de modo que la primera clase tenga n_1 elementos, la segunda n_2 , ..., y la k -ésima n_k . Demostrar que

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Ejercicio 11.41

Calcular

$$(a) \quad \binom{6}{3, 2, 1} \quad (b) \quad \binom{8}{4, 2, 2, 0} \quad (c) \quad \binom{10}{5, 3, 2, 1} \quad (d) \quad \binom{9}{5, 2, 2}.$$

Ejercicio 11.42

En una clase con 12 estudiantes se reparten 3 tipos diferentes de exámenes. ¿De cuántas maneras se pueden repartir si cada examen tiene 4 copias?

Ejercicio 11.43

Encontrar el número de palabras distinguibles de 11 letras que puede formarse con las letras de la palabra MISSISSIPPI.

Ejercicio 11.44

Probar que si $n = n_1 + n_2 + n_3$ y $n_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3$, entonces

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, n_3} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, n_3} + \binom{n-1}{n_1, n_2, n_3-1}.$$

Si alguno de los n_i se anula, ¿cómo se puede poner $\binom{n}{n_1, n_2, n_3}$ como suma de términos de la forma $\binom{n-1}{k_1, k_2, k_3}$? y ¿cuántos términos aparecen?

Ejercicio 11.45

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, probar que entonces

$$(a + b + c)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3},$$

donde la suma se toma sobre todas las tríadas de enteros no negativos (n_1, n_2, n_3) que cumplen $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Obtener el resultado análogo partiendo de k números reales a_1, a_2, \dots, a_k (enunciar el teorema multinomial)

Ejercicio 11.46

Calcular

$$\frac{1}{k!} \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

si la suma se toma sobre todas las sucesiones (n_1, n_2, \dots, n_k) tales que

- (a) $n_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, 2, \dots, k$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.
 (b) $n_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Ejercicio 11.47

En este ejercicio vamos a aplicar la combinatoria a un problema de compresión de datos: ¿cuántos bits se necesitan para especificar una lista de n enteros de $[0, 2n] \cap \mathbb{Z}$ (los enteros se pueden repetir en la lista)?

(a) Si se almacenan los números en base 2, calcular el número de bits necesarios para almacenar cada número; ¿cuántos bits se requieren para los n enteros de la lista?

(b) Demostrar que hay un total de $\binom{3n}{n}$ listas de n enteros en $[0, 2n]$ y aplicar la solución del ejercicio 3.39 para encontrar un tipo de almacenamiento que utilice sólo $3n$ bits.

Tema 12

Relaciones, grafos y árboles

1 Relaciones y digrafos

Ejercicio 12.1

En el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 6\}$ se considera la relación de divisibilidad: nRm si n divide a m .

- (a) Escribir la lista de todos los pares ordenados que forman la relación.
- (b) Hallar la matriz de adyacencia de la relación.
- (c) Representar la relación mediante un digrafo.

Ejercicio 12.2

Hallar las matrices de adyacencia de las siguientes relaciones de $A = \{a, b, c, d\}$ en $B = \{1, 2, 3\}$.

- (a) $\{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$
- (b) $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
- (c) $\{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$

Ejercicio 12.3

Representar las relaciones del ejercicio anterior por medio de digrafos.

Ejercicio 12.4

Representar el digrafo de cada una de las relaciones binarias en el conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ cuyas matrices de adyacencia son las siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(g)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(h)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Indicar cuáles son reflexivas, cuáles simétricas y cuáles transitivas.

Ejercicio 12.5

Dar criterios para reconocer las propiedades de reflexividad y simetría de una relación cuando viene dada

- (a) Por su lista de pares ordenados.
 - (b) Por la matriz de adyacencia.
 - (c) Por el digrafo.
- ¿Qué se puede decir de la transitividad en los apartados (a) y (c)?

Ejercicio 12.6

En un conjunto de personas consideremos las relaciones *paterna* y *filial* definidas por: pR_1q si p es padre/madre de q y pR_2q si p es hijo/a de q .

- (a) ¿Qué relación es $R_1 \circ R_1$?
- (b) ¿Qué relación es $R_2 \circ R_2$?
- (c) ¿Cuál es la relación $R_2 \circ R_1$?
- (d) ¿A qué es equivalente la relación $R_1 \circ R_2$?

Ejercicio 12.7

Sea A un conjunto finito y sea R una relación binaria definida sobre él. Considerando la relación $R^2 = R \circ R$; demostrar que la relación R es transitiva si, y sólo si, $R^2 \subset R$.

Ejercicio 12.8

Evaluar el producto booleano de las siguientes matrices.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 12.9

Sea A un conjunto finito y sea R una relación binaria definida sobre él que tiene la matriz $M = (m_{ij})$ como matriz de adyacencia. Probar que la matriz de adyacencia de la relación R^2 es $M \odot M = (m_{ij}^2)$. Deducir que la relación R es transitiva si, y sólo si, $m_{ij}^2 = 1$ implica que $m_{ij} = 1$.

Ejercicio 12.10

Sea R una relación en el conjunto A . Probar que la relación R^n viene dada por

$$\{(a, b) | \text{hay un camino de longitud } n \text{ desde } a \text{ hasta } b\}.$$

Ejercicio 12.11

Demostrar que una relación R es transitiva si, y sólo si, para toda trayectoria de longitud $n \geq 2$ que une dos puntos existe también una trayectoria de longitud 1.

Ejercicio 12.12

Sea $M = (m_{ij})$ la matriz de adyacencia de un digrafo y denotemos por $M^n = (m_{ij}^n)$ la potencia n -ésima de M . Demostrar que m_{ij}^n es igual al número de caminos distintos de longitud n para ir del vértice i al vértice j .

Ejercicio 12.13

Supongamos que una empresa dispone de un sistema de comunicación por cable que enlaza seis estaciones. Cada estación está situada en una de las siguientes ciudades: Madrid (1), Barcelona (2), Valencia (3), Sevilla (4), Zaragoza (5) y Bilbao (6). Las conexiones son seis y enlazan los siguientes pares de estaciones: Madrid-Valencia, Madrid-Zaragoza, Madrid-Sevilla, Barcelona-Valencia, Barcelona-Zaragoza y Zaragoza-Bilbao.

- (a) Escribir la matriz de adyacencia $M = (m_{ij}^{(1)})$ y calcular M^2 y M^3 .
- (b) Encontrar, por medio de rutas que utilicen la menor cantidad de estaciones intermedias, el número de formas posibles que hay de enlazar las estaciones de Madrid-Barcelona, Barcelona-Sevilla, Sevilla-Bilbao y Bilbao-Valencia.

2 Introducción a los grafos simples y árboles

Ejercicio 12.14

Representar el grafo simple (V, E) que viene dado por $V = \{A, B, C, D\}$ y por

$$E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}\}.$$

Ejercicio 12.15

Mi pareja y yo damos una fiesta en casa, invitando a 4 matrimonios amigos. Al llegar algunos de los invitados se dan la mano para saludarse y otros no, aunque nadie da la mano a su pareja. Antes de empezar la cena pido a todos que escriban en un papel a cuantas personas han dado la mano y que me lo entreguen; al mirar las respuestas compruebo que hay 9 respuestas diferentes. ¿A cuántas personas ha dado la mano mi pareja?

Ejercicio 12.16

Denotando por $\delta(v)$ el grado del vértice v , demostrar que la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Deducir que el número de vértices impares es par.

Ejercicio 12.17

¿Pueden corresponder las siguientes listas a los grados de todos los vértices de un grafo? En caso afirmativo, dar una representación de un grafo de estas características.

(a) 2, 2, 2, 3. (b) 2, 2, 4, 4, 4. (c) 1, 2, 2, 3. (d) 1, 2, 3, 4.

Ejercicio 12.18

Consideremos grafos con n vértices: denotando el grafo completo por K_n , el lineal por L_n , el cíclico por C_n y el discreto por D_n . Hallar los n tales que

- (a) $L_n = D_n$.
- (b) $K_n = C_n$.
- (c) $C_n = L_n$.

Ejercicio 12.19

Sean $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Representar de dos maneras diferentes el grafo (V, E) . Indicar el grado de los cuatro vértices.

Ejercicio 12.20

Encontrar un isomorfismo entre los grafos definidos por las siguientes listas de adyacencias.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	1	2	3	4	5	0	1	0	2	6
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g	5	0	1	2	3	4	4	3	5	7
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h	7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

Ejercicio 12.21

Probar que si dos grafos son isomorfos, entonces tienen el mismo número de vértices y el mismo número de aristas.

Ejercicio 12.22

Sean los grafos G_1 y G_2 y, para cada $k \geq 0$, denotamos por $n_i(k)$ el número de vértices de G_i con grado k ($i = 1, 2$). Demostrar que si G_1 y G_2 son isomorfos, entonces $n_1(k) = n_2(k)$.

Ejercicio 12.23

Comprobar que hay 4 grafos no isomorfos con 3 vértices y 11 grafos no isomorfos con 4 vértices. Representarlos e indicar los que sean conexos.

Ejercicio 12.24

Según un conocido manual hay dos tipos de viajeros: los turistas y los aventureros. Los turistas quieren visitar cada lugar una sola vez y volver rápidamente al punto de partida; los aventureros prefieren atravesar los caminos una vez en cualquier dirección y no les importa empezar y acabar el recorrido en puntos diferentes. Supongamos que los lugares de interés especial de un territorio junto con los caminos que los unen forman un grafo. Estudiar si pueden hallarse rutas convenientes para los dos tipos de viajeros en cada una de las siguientes islas.

(a) El grafo de los lugares de interés de Michick tiene como matriz de adyacencia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) El grafo de los lugares de interés de Wickich es el de la matriz de adyacencia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La matriz de adyacencia del grafo de los lugares de interés de Mickich es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12.25

Probar que un grafo conexo con n vértices, $n \geq 2$, es euleriano si, y sólo si, todo vértice tiene grado par.

Ejercicio 12.26

Aplicar el algoritmo de Fleury para construir un ciclo de Euler para el grafo que tiene la siguiente lista de adyacencias.

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	a	a	c	e	a	e
c	c	b	c	f	g	e	g
d		d		g		f	
g		e		h		h	

Ejercicio 12.27

Consideremos un grafo con n vértices, $n \geq 3$. Demostrar que si el grado de todos sus vértices es mayor o igual que $n/2$, entonces el grafo es hamiltoniano. Dar un ejemplo de un grafo hamiltoniano en el que existan vértices con grado menor que $n/2$.

Ejercicio 12.28

Dado G un grafo simple, sea G' el grafo dado al que se le ha añadido una arista entre dos vértices de G . Comprobar que $\gamma(G') \geq \gamma(G) - 1$. Deducir que todo grafo simple $G = (V, E)$ cumple

$$\gamma(G) \geq |V| - |E|.$$

Ejercicio 12.29

Demostrar que para un grafo simple $G = (V, E)$ las siguientes condiciones son equivalentes.

- (1) G es conexo y $|E| = |V| - 1$.
- (2) G es conexo y quitando cualquier arista queda un grafo no conexo.
- (3) Existe un único camino simple entre dos vértices de G .
- (4) G es conexo y no contiene ciclos.

Ejercicio 12.30

Encontrar el producto $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} \times \{+, -\}$ construyendo el diagrama de árbol adecuado.

Ejercicio 12.31

Representar el diagrama de árbol de las permutaciones de $\{a, b, c\}$.

Ejercicio 12.32

Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos aplicaciones de clase C^1 ; denotaremos $z = f(x, y)$ y $(x, y) = g(u, v)$. Representar el diagrama de árbol del cálculo de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ que se obtiene al aplicar la regla de la cadena.

Ejercicio 12.33

Los equipos A y B juegan un torneo de baloncesto. El equipo que primero gane tres partidos, gana el torneo. Hallar todas las posibilidades en que el torneo se puede desarrollar.

Ejercicio 12.34

Demostrar que la altura de un árbol m -ario con raíz y ℓ hojas es mayor o igual que $\log_m \ell$.

Ejercicio 12.35

Supongamos que tenemos $r \geq 3$ monedas indistinguibles en su apariencia, etiquetadas como $1, 2, 3, \dots, r$. Sabemos que una de las monedas es falsa (y es demasiado ligera o demasiado pesada). Demostrar que se necesitan, al menos, $\lceil \log_3(2r) + 1 \rceil$ pesadas en una balanza para descubrir qué moneda es la falsa y si es más ligera o más pesada. Diseñar un procedimiento para el caso $r = 3$ que utilice el mínimo número de pesadas; ¿es posible un procedimiento similar para $r = 4$?

Ejercicio 12.36

Probar que cualquier algoritmo de ordenación que se base en comparar los items, necesitará, al menos, $\log_2 n!$ comparaciones para ordenar n items. Aplicar la fórmula de Stirling para aproximar $\log_2 n!$ cuando n es grande.

Tema 13

Introducción a la probabilidad

Ejercicio 13.1

Identificar el espacio muestral en los siguientes experimentos aleatorios.

- (a) Lanzar dos monedas.
- (b) Lanzar un dado.
- (c) Lanzar una moneda hasta que aparezca una cara y entonces contar el número de lanzamientos efectuados.
- (d) Registrar el tiempo de espera (redondeado en minutos) entre el paso de dos trenes consecutivos.
- (e) Registrar la vida de cada uno de tres componentes electrónicos.

Ejercicio 13.2

Se extraen dos bolas de una bolsa que contiene 3 bolas blancas (a, b y c) y 2 rojas (d y e). Identificar el espacio muestral y los siguientes sucesos.

- (a) No se ha extraído ninguna bola blanca.
 - (b) Se ha extraído una bola blanca.
 - (c) Se han extraído dos bolas blancas.
 - (d) Se ha extraído una bola roja.
- ¿Cuáles de ellos son excluyentes?

Ejercicio 13.3

Escribir todos los sucesos posibles que se pueden obtener al lanzar dos monedas.

Ejercicio 13.4

Sea Ω un espacio muestral finito y sea P una probabilidad en el espacio $(\Omega, \mathcal{S}(\Omega))$. Demostrar que

- (a) si A_1, A_2, \dots, A_n son sucesos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

- (b) si A y B son dos sucesos cualesquiera, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (c) si A y B son dos sucesos, $A \subset B$ implica $P(A) \leq P(B)$.
- (d) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ para todo $A \in \mathcal{S}(\Omega)$.
- (e) $P(\emptyset) = 0$.

Ejercicio 13.5

Se lanzan simultáneamente cinco monedas legales. Hallar la probabilidad del suceso A: se obtiene por lo menos una cara.

Ejercicio 13.6

Un aparato automático de control de presión contiene tres tubos electrónicos. El aparato no trabajará a menos que todos los tubos estén operativos. Si la probabilidad de que falle cada tubo durante un intervalo es de 0.05, ¿cuál será la probabilidad correspondiente de que falle el aparato?

Ejercicio 13.7

Dos circuitos contienen tres componentes eléctricos: P , Q y R ; los del circuito (1) están colocados en paralelo y los del circuito (2) en serie. En un determinado intervalo de tiempo, las probabilidades de que fallen P , Q y R son p , q y r , respectivamente.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que se estropee el circuito (1)?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se estropee el circuito (2)?

Ejercicio 13.8

Se sabe que en un lote de 100 microprocesadores, 5 son defectuosos.

- (a) Si se elige un microprocesador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
- (b) Si se eligen (sin reemplazamiento) dos microprocesadores al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?
- (c) Se eligen (sin reemplazamiento) dos microprocesadores al azar. Dado que el primero es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también lo sea?

Ejercicio 13.9

Demostrar que si A y B son sucesos independientes, entonces también \bar{A} y B son independientes, y también lo son A y \bar{B} .

Ejercicio 13.10

Consideremos una familia determinada y los sucesos A: que la familia tenga niños de los dos sexos, y B: que la familia tenga como máximo un niño.

- (a) Demostrar que A y B son independientes si la familia tiene tres niños.
- (b) Comprobar que A y B son dependientes si la familia tiene dos niños.

Ejercicio 13.11

Se lanzan dos monedas y consideramos los tres siguientes sucesos:

A = sale cara en la primera moneda

B = sale cara en la segunda moneda

C = sale cara exactamente en una moneda

Comprobar que los sucesos son independientes dos a dos, pero los tres no son independientes.

Ejercicio 13.12

Supongamos que los sucesos E_1 y E_2 forman una partición del espacio muestral Ω y consideremos otro suceso A .

- (a) Demostrar que $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2)$.
- (b) Deducir el Teorema de Bayes:

$$P(E_1|A) = \frac{P(A|E_1)P(E_1)}{P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2)}.$$

- (c) Escribir los apartados anteriores en el caso de que el espacio muestral se divida en tres sucesos excluyentes.

Ejercicio 13.13

Tenemos un lote de bombillas distribuidos en tres cajas. La caja **1** contiene 10 bombillas de las cuales 4 son defectuosas. La caja **2** tiene 6 bombillas de las que 1 es defectuosa. La caja **3** tiene 8 bombillas con 3 defectuosas. Elegimos una caja al azar y después seleccionamos aleatoriamente una bombilla.

- (a) Representar el proceso mediante un diagrama de árbol.
- (b) Calcular la probabilidad de que una bombilla sea defectuosa.

Ejercicio 13.14

Una caja contiene cinco microprocesadores de los cuales se sabe que dos son defectuosos. Se controlan los microprocesadores uno tras otro hasta encontrar los dos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso acabe en el segundo control? ¿Y en el tercero?

Ejercicio 13.15

Se sabe que el 4% de un lote de componentes es defectuoso. Los componentes se controlan en la línea de producción con una probabilidad de 0.9 de detectar un componente defectuoso. También se sabe que en un 2% de los casos un componente no defectuoso pasa la prueba como defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que un componente que pase la prueba como defectuoso lo sea realmente?

Ejercicio 13.16

Se lanzan un par de dados legales. Escribir el espacio muestral, así como los rangos (los valores que puede tomar) y la distribución de probabilidad de las siguientes variables aleatorias.

- (a) La suma de los resultados de los dos lanzamientos.
- (b) El mínimo de los resultados de los dos lanzamientos.

Ejercicio 13.17

Explicar si la sucesión definida por

$$p_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

se puede considerar una función de probabilidad. En caso afirmativo, definiendo $P(X = n) = p_n$, calcular $P(X \geq 6)$.

Ejercicio 13.18

Una caja contiene seis componentes de los que dos son defectuosos. Se van eligiendo (sin reemplazamiento) componentes aleatoriamente hasta que se llega a uno defectuoso. Encontrar la función de probabilidad del número de componentes sacados de la caja.

Ejercicio 13.19

Supongamos que la variable aleatoria X tiene distribución exponencial con función de densidad de probabilidad dada por $f(t) = 1.5e^{-1.5t}u(t)$. Encontrar las siguientes probabilidades.

- (a) $P(0 < X < 1)$. (b) $P(X < 0)$. (c) $P(X \geq 1)$. (d) $P(X \leq 1)$. (e) $P(X < 2)$.

Ejercicio 13.20

La variable aleatoria X que mide el número de partículas radiactivas que detecta un contador geiger en un determinado intervalo tiene una distribución de Poisson:

$$P(X = \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

donde λ es un parámetro que caracteriza la radiactividad del material. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 o más partículas choquen en el intervalo considerado?

Ejercicio 13.21

Hallar la media y la varianza de las siguientes variables aleatorias discretas.

- (a) La variable tiene como función de probabilidad $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ y $f(2) = \frac{1}{4}$.
- (b) La variable tiene como función de probabilidad $f(0) = 0.512$, $f(1) = 0.384$, $f(2) = 0.096$ y $f(3) = 0.008$.
- (c) La variable es el número de caras en el lanzamiento de una moneda legal.

Ejercicio 13.22

Hallar la media y la varianza de la variable aleatoria que tiene como función de densidad de probabilidad la definida por $f(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}$.

Ejercicio 13.23

Calcular el parámetro A para que las siguientes funciones definan densidades de probabilidad. Una vez calculada, evaluar su media y su varianza.

- (a) $f(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}$ si $x \in [0, 1]$ y $f(x) = 0$ en el resto.
- (b) $f(x) = A\sqrt{16 - x^2}$ si $x \in [-4, 4]$ y $f(x) = 0$ en el resto.
- (c) $f(x) = A(1 - x^2)$ si $x \in [-1, 1]$ y $f(x) = 0$ en el resto.

Ejercicio 13.24

Sea X una variable aleatoria que tiene media μ y varianza σ^2 . Demostrar que la variable aleatoria $Y = (X - \mu)/\sigma^2$ tiene media 0 y varianza 1.

Ejercicio 13.25

Se supone que las llamadas a un teléfono de información gratuito ocurren de modo que el tiempo entre llamadas sigue una distribución exponencial con una media entre llamadas de 20 minutos. Sea X la variable aleatoria del tiempo entre dos llamadas.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llamadas entre en el intervalo de una hora?
- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una llamada en un intervalo de un cuarto de hora?

Ejercicio 13.26

Sabiendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$, calcular el valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad \text{y de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Ejercicio 13.27

La vida X de una clase de batería para automóvil está normalmente distribuída con una media 4 años y una varianza de 1 año. Si el fabricante desea garantizarla por 3 años, ¿qué porcentaje de baterías tendrá que reemplazar?

Ejercicio 13.28

Un fabricante sabe que las resistencias que produce siguen una distribución normal con media $\mu = 150 \Omega$ y varianza 25Ω . ¿Qué porcentaje estará entre 148Ω y 152Ω ? ¿Y entre 140Ω y 160Ω ?

Ejercicio 13.29

Sea f la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X . Supongamos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)z^n$ tiene radio de convergencia mayor que 1 y denotemos $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)z^n$.

- (a) Demostrar que $E[X] = g'(1)$ y $\text{Var}[X] = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$.
- (b) Encontrar la función generatriz de las distribuciones binomial y de Poisson.

Tema 14

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ejercicio 14.1

Indicar el orden de las ecuaciones diferenciales siguientes.

- (a) $(\sin t)(x'')^3 - x^2 = e^t$.
- (b) $x''' + xt = \cos t$.
- (c) $(x')^2 + x^2 = 1$.

Ejercicio 14.2

Comprobar que las siguientes funciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

- (a) $x(t) = \sin t + \cos t$ es solución de $x'' + x = 0$.
- (b) $x(t) = e^t$ es solución de $x' - x = 0$.
- (c) $x(t) = -16t^2 + 14t + 30$ es solución de $x'' + 32 = 0$.
- (d) $x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds$ es solución de $x' = 2tx + 1$.
- (e) $x(t) = 2e^{-t}$ es solución de $x'' - x = 0$.
- (f) $x(t) = e^t$ es solución de $x'' - x = 0$.

Ejercicio 14.3

En este problema estudiaremos la corriente que se origina en un circuito cuando se conecta una fuente continua. Habitualmente se dice que nuestra discusión tiene lugar en el dominio del tiempo.

Consideremos un circuito en serie formado por una fuente de tensión continua de v_0 voltios, que se conecta en el instante $t = 0$, una resistencia de R ohmios y un inductor de L henrios de inductancia.

- (a) Deducir que la intensidad de corriente del circuito cumple $L \frac{di}{dt} + Ri = v_0$.
- (b) Si la corriente inicial es $i_0 = 0$, comprobar que $i(t) = \frac{v_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ es solución.
- (c) En general, si la corriente inicial es arbitraria i_0 , comprobar que la solución es

$$i(t) = \frac{v_0}{R} + (i_0 - \frac{v_0}{R}) e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Ejercicio 14.4

Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones y posteriormente hallar la solución particular que verifique la condición inicial que se indica.

- (a) $2xx' = t^2 + t$ ($x(0) = 1$).
- (b) $(t^2 + 4)x' = xt$ ($x(0) = 2$).
- (c) $t^2x' = x$ ($x(1) = 0$).
- (d) $3e^t \tan x + (2 - e^t) \frac{x'}{\cos^2 x} = 0$ ($x(1) = \frac{\pi}{4}$).
- (e) $\cos^{-1} txx' = \tan t$ ($x(0) = 1$).
- (f) $x'\sqrt{1-t^2} = \frac{-t}{x}$ ($x(0) = 2$).
- (g) $e^t x' = \frac{t+2}{x}$ ($x(0) = 1$).

Ejercicio 14.5

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones de primer orden.

- (a) $tx' - 2x = t^2$.
- (b) $x' + 2tx = 2te^{-t^2}$.
- (c) $x' + \frac{x}{t} = 3t + 4$.
- (d) $x' + tx = -t$.

Ejercicio 14.6

Demostrar que la solución particular de la ecuación $x' - 2x = e^{-t^2}$ que verifica la condición inicial $x(0) = 0$ viene dada por

$$x(t) = \int_0^t e^{2(t-\tau)} e^{-\tau^2} d\tau.$$

1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes**Ejercicio 14.7**

Demostrar que, en cada apartado, las funciones son linealmente independientes.

- (a) $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$ y $x_4(t) = t^3$.
- (b) $x_1(t) = e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = e^{\mu t}$, donde $\lambda \neq \mu$.
- (c) $x_1(t) = \sin \lambda t$ y $x_2(t) = \cos \lambda t$, siendo $\lambda \neq 0$.
- (d) $x_1(t) = e^t \sin t$ y $x_2(t) = e^t \cos t$.
- (e) $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = te^t$ y $x_3(t) = e^{2t}$.

Ejercicio 14.8

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas.

- (a) $x'' - 4x = 0$.
- (b) $x'' + 3x' + x = 0$.
- (c) $x'' = x' + x$.
- (d) $x''' + 2x'' - x' - 2x = 0$.
- (e) $x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$.
- (f) $x'' + x = 0$.
- (g) $x'' + x' + x = 0$.
- (h) $x'' + 6x' + 12x = 0$.
- (i) $x''' - 2x'' + 5x' = 0$.
- (j) $x''' + 2x'' + x' = 0$.
- (k) $x''' - 6x'' + 12x' - 8x = 0$.
- (l) $x^{(5)} + 2x''' + x' = 0$.
- (m) $x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' + x' - 2x = 0$.

Ejercicio 14.9

Encontrar la solución particular de los apartados (a), (b), (c), (f), (g) y (h) del ejercicio anterior que verifican las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$.

Ejercicio 14.10

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas.

- (a) $x'' + 3x' = 3$.
- (b) $x^{(4)} - 2x'' + x = t + 2$.
- (c) $x^{(4)} - x'' = t + 2$.
- (d) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t$.
- (e) $x''' - x'' = 12t^2 + 6t$.
- (f) $x^{(4)} - x'' = t + 2$.

Ejercicio 14.11

Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función polinómica de grado menor o igual que 2. Probar que la solución particular de la ecuación $x'' + x = f$ que cumple las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ viene dada por

$$x_p(t) = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Tema 15

Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

1 Ecuación de ondas

Ejercicio 15.1

Aplicar el cambio de variable $\xi = x - ct$ y $\eta = x + ct$ para obtener la solución de la ecuación de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que verifica las siguientes condiciones iniciales.

- (a) $u(x, 0) = e^x$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin x$.
- (b) $u(x, 0) = \log(1 + x^2)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 4 + x$.

Ejercicio 15.2

Hallar la solución de los siguientes problemas no homogéneos.

- (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2$, $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.
- (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2$, $u(x, 0) = x$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.

Ejercicio 15.3

Resolver los siguientes problemas, considerando primero soluciones con las variables separadas: $u(x, t) = X(x)T(t)$ y utilizando después el desarrollo en serie de Fourier de una función impar y 2L-periódica.

- (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin(\pi x/L)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, y con condiciones de frontera $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$.
- (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = x(L-x)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, y con condiciones de frontera $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$.
- (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, y con condiciones de frontera $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$.

Ejercicio 15.4

Aplicar la transformada de Fourier en la variable x para convertir la ecuación de ondas en una ecuación diferencial ordinaria y deducir la solución genérica de la ecuación de ondas.