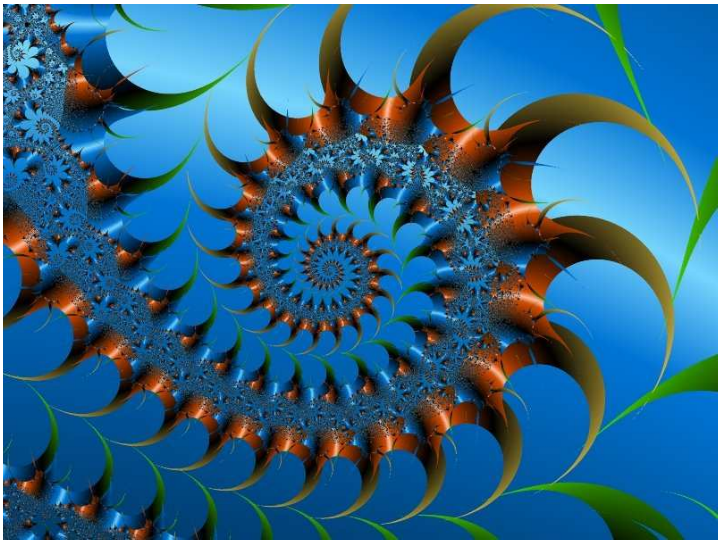
Práctica 1 de aproximación numérica $\LaTeX$

Juan Miguel Ribera Puchades

4 de abril de 2007



Índice

1. Ejercicio 1

El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 1 seguidamente basándonos en la sucesión $\{b_n\}$:

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + b_n^2} - 1}{b_n} \tag{1}$$

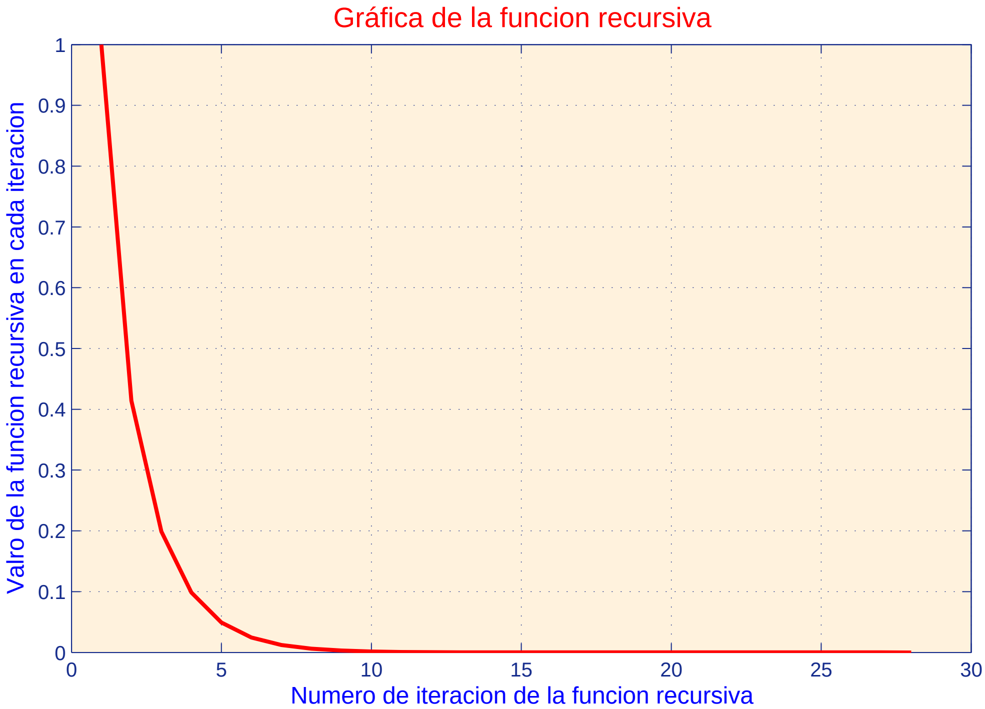
1.1. Apartado a

Para comprobar que el $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ se le puede mostrar al lector la gráfica de la sucesión variando sobre los diferentes valores de la n.

Una cosa muy importante que remarcar es también que la iteración número 28 de la sucesión nos proporciona un valor nulo, por tanto la iteración siguiente no será un número, es decir, que a partir de la iteración 29 la sucesión no tiene sentido. Esto probablemente se produzca a causa de el posible error de cancelación que se produce al restar un valor muy proximo a uno con el número uno. Como el lector podrá ver, en la tabla de valores de la derecha se observa como el error de cancelación provoca que en la iteración 28 el valor de la sucesión sea nulo.

1	1.00000000000000
2	0.41421356237310
3	0.19891236737966
4	0.09849140335716
5	0.04912684976947
6	0.02454862210892
7	0.01227246237957
8	0.00613600015762
9	0.00306797120141
10	0.00153398199107
11	0.00076699054434
12	0.00038349521587
13	0.00019174760077
14	0.00009587379991
15	0.00004793690019
16	0.00002396844882
17	0.00001198421810
18	0.00000599211221
19	0.00000299606379
20	0.00000149802805
21	0.00000074897889
22	0.00000037443290
23	0.00000018679996
24	0.00000009271672
25	0.00000004550255
26	0.00000001951931
27	0.00000001137564
28	0

Para observar mejor como se comporta la sucesión el lector puede ver en esta gráfica como evoluciona en cada iteración.



Matemáticamente se puede observar también utilizando el siguiente teorema:

Teorema 1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene un punto de acumulación.*

O la variante:

Teorema 2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito monótono y acotado de números reales tiene límite.*

Por tanto si vemos que la sucesión 1 es positiva y además decreciente, tendremos que convergerá.

Positiva
Se cumple que es positiva porque si $b_n > 0 \to b_{n+1} > 0$ y se puede comprobar fácilmente

Decreciente
Para estudiar que es decreciente podemos ver que la diferencia de un término y el siguiente es mayor que cero. Es decir:

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} > 0 &\iff \frac{\sqrt{1+b_{n-1}^2}-1}{b_{n-1}} - \frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n} > 0 \\ &\iff b_n\left(\sqrt{1+b_{n-1}^2}-1\right) > b_{n-1}\left(\sqrt{1+b_n^2}-1\right) \\ &\iff \sqrt{1+b_{n-1}^2}-1 > \frac{b_{n-1}}{b_n}\left(\sqrt{1+b_n^2}-1\right) \\ &\iff \sqrt{1+b_{n-1}^2} > 1 + \frac{b_{n-1}}{b_n}\left(\sqrt{1+b_n^2}-1\right) \end{aligned}$$

Usando por tanto que $b_n > 0$ tenemos que se cumple la desigualdad, y por tanto $b_n - b_{n+1} > 0$. En conclusión, tenemos que cumple las dos hipótesis del teorema de Teorema de Bolzano-Weierstrass 2 y por tanto tiene límite. Suponiendo que $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ Veamos ahora cual es ese limite:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}-1}{\alpha} &\implies \alpha^2 = \sqrt{1+\alpha^2}-1 \\ &\implies \alpha^2+1 = \sqrt{1+\alpha^2} \\ &\implies (\alpha^2+1)^2 = 1+\alpha^2 \\ &\implies \alpha^2+1 = 1 \\ &\implies \alpha^2 = 0 \\ &\implies \alpha = 0 \end{aligned}$$

Luego con esto hemos probado y comprobado que el limite de la sucesión 1 es 0.

1.2. Apartado b

Según lo mostrado en el apartado anterior podemos afirmar que esta sucesión no es numéricamente estable ya que, a causa de la cancelación catastrófica ($\sqrt{1+b_{n-1}^2}-1$) en la iteración 28 se produce una división entre cero que además de no estar definida nos proporciona la información de que el error aumenta en cada iteración hasta un valor immesurable.

Otro problema visible en el algoritmo 1 es la división entre valores muy próximos a cero que producen que el error aumente considerablemente ya que al dividir cualquier elemento por un número que cada vez se hace más pequeño el elemento inicial aumenta.

Luego estos dos motivos nos llevan a afirmar que esta sucesión no es numéricamente estable.

1.3. Apartado c

Para buscar un programa que calcule la sucesión recurrente de otra forma podemos optar por multiplicar arriba y abajo por el conjugado. Por tanto tendremos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n} &= \frac{\left(\sqrt{1+b_n^2}-1\right)\left(\sqrt{1+b_n^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+b_n^2}+1\right)b_n} \\ &= \frac{1+b_n^2-1}{\left(\sqrt{1+b_n^2}+1\right)b_n} \\ &= \frac{b_n}{\sqrt{1+b_n^2}+1}\end{aligned} \tag{2}$$

Es decir, el cambio de sucesión recurrente a sido el siguiente:

$$b_{n+1}=\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n} \Longleftrightarrow b_{n+1}=\frac{b_n}{\sqrt{1+b_n^2}+1}$$

Además, en este apartado se pide calcular el valor de la sucesión equivalente a 1 en la iteración 30. Cabe recordar que 1 no estaba definida a partir del valor 28 ya que se dividía entre 0. Luego si calculamos mediante la sucesión recursiva 2 el programa matlab nos queda:

$$
\begin{gathered}
b_1 = 1{,}00000000000000 \\
b_2 = 0{,}41421356237310 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{29} = 0{,}00000000146292 \\
b_{30} = 0{,}00000000073146
\end{gathered}
$$

El lector puede ver aquí el programa implementado en el Matlab:

```
t = [];
b = 1;
n = 1;
t = [t; b];
for n = 1 : 30
    b = ( b / (sqrt(1 + b^2) + 1));
    t = [t; b];
end
 r = t
```

1.4. Apartado d

Tenemos que este algoritmo 2 antes presentado es estable por diferentes motivos:

1. Con el nuevo algoritmo de cálculo equivalente a 1 tenemos dos diferencias importantes. La primera es que no se produce ninguna cancelación catastrófica al no restar valores en todo el algoritmo; mientras que la segunda ventaja es que tampoco dividimos entre valores próximos al cero ya que el denominador cumple $\sqrt{1+b_n^2}+1>2$ en cualquier valor de b_n.

2. Porque si usamos un programa de cálculo como es matlab nos queda que la función nunca se anula, a diferencia del algoritmo inicial 1.

3. Usando el mismo programa se puede ver también que la recurrencia no acaba ya que esta definida para cualquier n $\in \mathbb{N}$.

Luego, por tanto, ya tenemos la alternativa estable propuesta en este apartado

2. Ejercicio 2

El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 2 seguidamente basándonos en las siguientes funciones:

$$q_1(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

$$q_2(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{4}$$

$$q_3(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{5}$$

Que nos servirán para aproximarnos a la derivada de la función:

$$f(x) = e^x \tag{6}$$

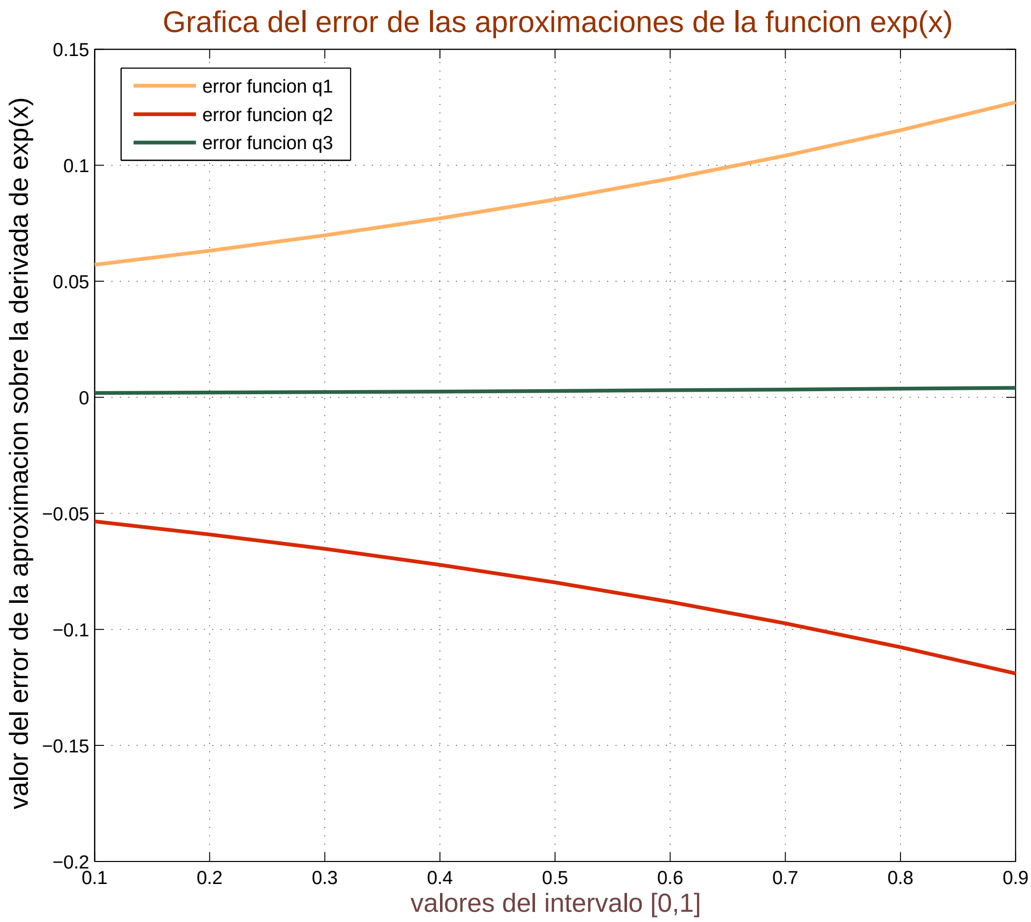
2.1. Apartado a

En este primer apartado se nos pide que aproximemos la función 6 en el intervalo $[0,1]$ con $h = 0{,}1$. Presento al lector una tabla con los valores que toman las aproximaciones y con los valores reales de la derivada de 6.

	Aproximación 3	Aproximación 4	Aproximación 5	Derivada de 6
x = 0.1	1.16231840084522	1.05170918075648	1.10701379080085	1.10517091807565
x = 0.2	1.28456049415833	1.16231840084522	1.22343944750178	1.22140275816017
x = 0.3	1.41965890065267	1.28456049415833	1.35210969740550	1.34985880757600
x = 0.4	1.56896573058858	1.41965890065267	1.49431231562063	1.49182469764127
x = 0.5	1.73397529690381	1.56896573058858	1.65147051374619	1.64872127070013
x = 0.6	1.91633907079968	1.73397529690381	1.82515718385174	1.82211880039051
x = 0.7	2.11788221021991	1.91633907079968	2.01711064050979	2.01375270747048
x = 0.8	2.34062182664482	2.11788221021991	2.22925201843237	2.22554092849247
x = 0.9	2.58678717302096	2.34062182664482	2.46370449983289	2.45960311115695

Tabla de valores de aproximaciones a 16

Otra forma de mostrar la solución más clara es mostrar las diferencia entre las aproximaciones 3 , 4 y 5 y la depravada de la función 6 (que es ella misma). Como podemos ver en la siguiente gráfica.



De esta gráfica el lector puede apreciar algunas matizaciones importantes.

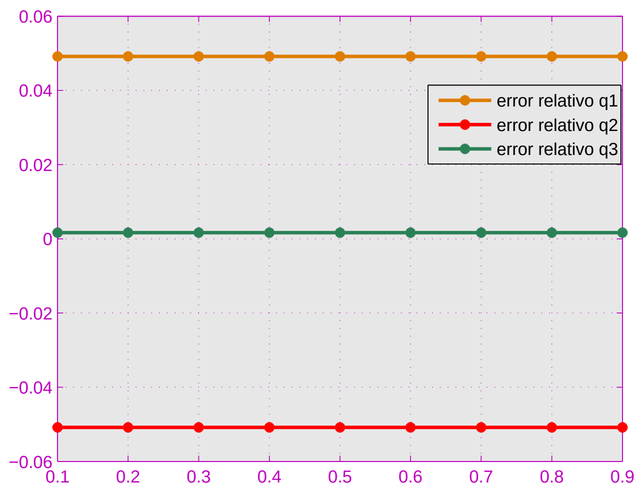
1. Se puede ver que la aproximación 3 tiene error positivo, es decir, que se aproxima superiormente a la derivada de 6. Análogo para la aproximación 4 aunque en este caso se aproxima inferiormente.

2. Otro dato importante es observar que cuando calculamos en valor de la aproximación 3 en x, coincide con el valor de la aproximación 4 en $x + 0{,}1$

3. La gráfica nos muestra además que la aproximación 5 es muy buena, en comparación con las otras dos, ya que nos proporciona un valor muy aproximado a la derivada de 6.

4. Cabe destacar también que el error absoluto aumenta cuando mayor es el valor de la x en las tres aproximaciones (aunque en 5 con menor grado por estar mas próxima).

5. Podemos ver además que el error relativo en el cálculo de las aproximaciones es estable, es decir, que siempre hay el mismo error relativo. Como se puede ver en esta gráfica.



Gráfica de errores relativos para 6

2.2. Apartado b

En el segundo apartado se nos pide calcular el orden del error de las aproximaciones 3, 4 y 5 para la función 6. Para ello utilizaremos el desarrollo del polinomio de Taylor en cada una de ellas. Previamente calculamos el polinomio de Taylor de $f(x+h)$ y $f(x-h)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \tag{7}$$

$$f(x+h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \tag{8}$$

Luego tenemos que las aproximaciones 3, 4 y 5 nos quedarían:

$$\begin{aligned} q_1(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\simeq \frac{f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) - f(x)}{h} \\ &= f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} q_2(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} &\simeq \frac{f(x) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x)}{h} \\ &= f'(x) - \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} q_3(h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &\simeq \frac{f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x)}{h} \\ &= f'(x) + \frac{h^2}{3!}f'''(x) \end{aligned} \tag{11}$$

Luego tenemos que el orden numérico del error en cada aproximación :

9 Se puede ver que la aproximación 3 tiene error positivo del orden de $0{,}5hf''(x)$ aunque consideramos que es un error de orden 1 (ya que la variable h está elevada a la potencia 1).

10 Se puede ver que la aproximación 3 tiene error negativo del orden de $0{,}5hf''(x)$ aunque consideramos que es un error de orden 1 (ya que la variable h está elevada a la potencia 1).

11 Se puede ver que la aproximación 5 tiene error del orden de $\frac{h^2}{3!}f'''(x)$ aunque consideramos que es un error de orden 2 (ya que la variable h está elevada a la potencia 2).

2.3. Apartado c

En este tercer apartado se nos pide que analicemos el error de las aproximaciones y comprobemos proporcionalidades con $f''(x)$ y $f'''(x)$.

Para ello, usaremos los cálculos del apartado anterior.

9 Sabemos que la aproximación 3 tiene error positivo del orden de $0{,}5hf''(x)$. Veamos que es proporcional a $f''(x)$ siendo ε el error :

$$\frac{\varepsilon}{f''(x)} = \frac{0{,}5hf''(x)}{f''(x)} = 0{,}5h \tag{12}$$

Es decir, el error es proporcional a $f''(x)$ con una constante de proporcionalidad de $0{,}5h$.

10 Sabemos que la aproximación 4 tiene error negativo del orden de $-0{,}5hf''(x)$. Veamos que es proporcional a $f''(x)$ siendo ε el error :

$$\frac{\varepsilon}{f''(x)} = \frac{-0{,}5hf''(x)}{f''(x)} = -0{,}5h \tag{13}$$

Es decir, el error es proporcional a $f''(x)$ con una constante de proporcionalidad de $-0{,}5h$.

11 Sabemos que la aproximación 5 tiene error del orden de $\frac{h^2}{3}f'''(x)$. Veamos que es proporcional a $f'''(x)$ siendo ε el error :

$$\frac{\varepsilon}{f''(x)} = \frac{\frac{h^2}{3!}f'''(x)}{f'''(x)} = \frac{h^2}{3!} \tag{14}$$

Es decir, el error es proporcional a $f'''(x)$ con una constante de proporcionalidad de $\frac{h^2}{3}$.

3. Ejercicio 3

El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 3 seguidamente basándonos en las siguientes funciones 3, 4 y 5 del ejercicio anterior . Que nos servirán para aproximarnos a la derivada de la función:

$$f(x) = \cos(x) \tag{15}$$

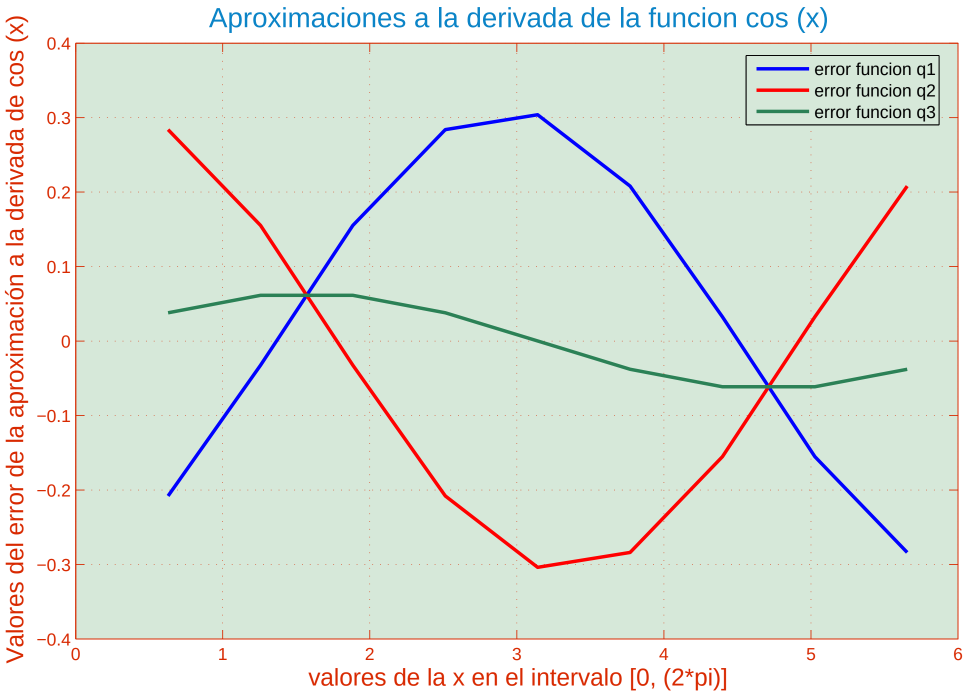
3.1. Apartado a

En este primer apartado se nos pide que aproximemos la función 15 en el intervalo $[0, 2\pi]$ con $h = 2\pi/10$. Aquí le presento al lector una tabla con los valores que toman las aproximaciones y además con los valores reales de la derivada de 15.

	Aproximación 3	Aproximación 4	Aproximación 5	Derivada de15
x = $\pi/5$	-0.7957747154594	-0.3039588939177	-0.5498668046886	-0.5877852522924
x = $2\pi/5$	-0.9836316430834	-0.7957747154594	-0.8897031792714	-0.9510565162951
x = $3\pi/5$	-0.7957747154594	-0.9836316430834	-0.8897031792714	-0.9510565162951
x = $4\pi/5$	-0.3039588939177	-0.7957747154594	-0.5498668046886	-0.5877852522924
x = π	0.3039588939177	-0.3039588939177	-0.0000000000000	-0.0000000000000
x = $6\pi/5$	0.7957747154594	0.3039588939177	0.5498668046886	0.5877852522924
x = $7\pi/5$	0.9836316430834	0.7957747154594	0.8897031792714	0.9510565162951
x = $8\pi/5$	0.7957747154594	0.9836316430834	0.8897031792714	0.9510565162951
x = $9\pi/5$	0.3039588939177	0.7957747154594	0.5498668046886	0.5877852522924

Tabla de valores de aproximaciones a 15

Otra forma de mostrar la solución más clara es mostrar las diferencia entre las aproximaciones 3 , 4 y 5 y la derivada de la función 15 (que es $f'(x) = -\sin(x)$). Como podemos ver en la siguiente gráfica.



De esta gráfica el lector puede apreciar algunas matizaciones importantes.

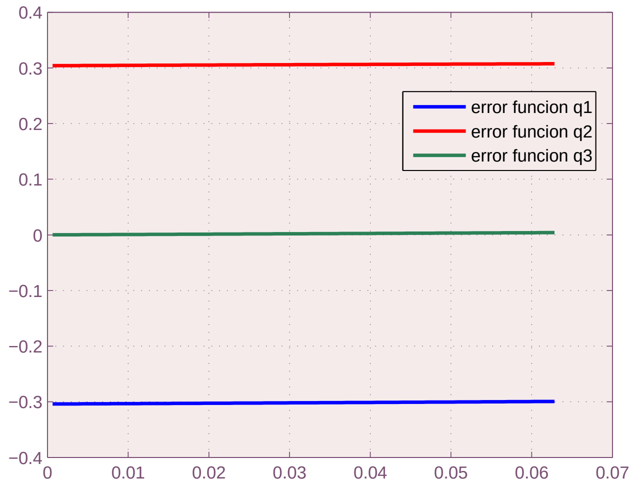
1. Se puede ver claramente que hay dos puntos donde las aproximaciones a la derivada tienen el mismo valor a la vez (uno de ellas cercano a $\pi/2$ y el otro cercano a $3\pi/2$) siendo en el primero de ellos el error positivo y en el otro negativo

2. Otro dato importante es observar que cuando calculamos en valor de la aproximación 3 en x, coincide con el valor de la aproximación 4 en $x + 2\pi/10$

3. A diferencia del ejercicio anterior, la aproximación 5 no es tan buena ya que en algunos intervalos (por ejemplo $[1{,}25, 1{,}75]$ las aproximaciones 3 y 4 son más buenas.

4. Cabe destacar también que en π la aproximación 5 nos da el valor exacto de la derivada (que es cero), sin embargo las otras aproximaciones 3 y 4 nos proporcionan el error máximo y mínimo respectivamente.

Vamos a ver ahora que es lo que pasa si nos aproximamos en los extremos de la función 15, es decir, en $x = 0$ y en $x = 2\pi$.



Errores en la aproximación a derivada de 15

En esta tabla podemos ver que cuando nos acercamos a cero las aproximaciones 3, 4 tienen un error bastante grande (de valor 0,3, que, considerando que el valor máximo que puede tomar la derivada de 15 la diferencia es bastante considerable). Sin embargo, la aproximación 5 nos proporciona el resultado exacto de la derivada de la función; este tema será tratado en el siguiente apartado.

El resultado anterior es análogo para el caso de $x = 2\pi$ por ser el mismo grado se cumplen las mismas condiciones.

3.2. Apartado b

En el segundo apartado se nos pide calcular el orden del error de las aproximaciones 3, 4 y 5 para la función 15. Para ello utilizaremos el desarrollo del polinomio de Taylor calculado anteriormente en el ejercicio 2 donde teníamos el desarrollo de $f(x+h)$ 7 y el de $f(x-h)$ 8.

Al igual que antes tenemos que las aproximaciones quedarían de la siguiente forma:

$$q_1(h) = f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\ldots \equiv -\sin(x)+\frac{h}{2}(-\cos(x))+\frac{h^2}{3!}\sin(x)\ldots$$

$$q_2(h) = f'(x)-\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\ldots \equiv -\sin(x)-\frac{h}{2}(-\cos(x))+\frac{h^2}{3!}\sin(x)\ldots$$

$$q_3(h) = f'(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\ldots \equiv -\sin(x)+\frac{h^2}{3!}\sin(x)\ldots$$

Luego tenemos que el orden numérico del error en cada aproximación :

Aproximaciónq1 Se puede ver que la aproximación 3 tiene error negativo del orden de $0{,}5h\,(-\cos(x))$ aunque consideramos que es un error de orden 1 (ya que la variable h está elevada a la potencia 1). Aunque, si nos fijamos en el valor del error de 3 en los puntos $x = 0$ y en $x = 2\pi$ podemos ver que el error en ese valor es el mínimo, ya que es el valor máximo que toma $(\cos(x))$; luego tenemos que en estos extremos el error es del orden de $2\pi/10 * 0{,}5 * (-\cos(0)) = -\pi/10 \simeq -0{,}31$.

Aproximación q2 Se puede ver que la aproximación 4 tiene error positivo del orden de $0{,}5h\,(\cos(x))$ aunque consideramos que es un error de orden 1 (ya que la variable h está elevada a la potencia 1). Aunque, al igual que en el apartado anterior si nos fijamos en el valor del error de 4 en los puntos $x = 0$ y en $x = 2\pi$ podemos ver que el error en ese valor es el máximo, ya que es el valor máximo que toma $(\cos(x))$; luego tenemos que en estos extremos el error es del orden de $-2\pi/10 * 0{,}5 * (-\cos(0)) = \pi/10 \simeq 0{,}31$.

Aproximación q3 Se puede ver que la aproximación 5 tiene error del orden de $h^2/3!\sin(x)$ aunque consideramos que es un error de orden 2 (ya que la variable h está elevada a la potencia 2). Aunque esta aproximación en los extremos es muy buena ya que cuando 15 se aproxima a $x = 0$ y en $x = 2\pi$ tenemos que el error depende del sin del valor que estemos calculando (en los extremos de 0 y 2π donde el $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$). Luego cuando calculamos el error nos da que $(2\pi/10)^2\,(1/6)\sin(0) = (2\pi/10)^2\,(1/6)\sin(2\pi) = 0$. Luego 5 nos da el valor exacto en $x = 0$ y en $x = 2\pi$.

3.3. Apartado c

En este tercer apartado se nos pide que analicemos el error de las aproximaciones y comprobemos proporcionalidades con $f''(x)$ y $f'''(x)$.

Pero usando el ejercicio 2 en el apartado 3 hemos visto que las aproximaciones son proporcionales a las segundas (y terceras derivadas para 5) para cualquier punto donde sea derivable la función. Y en este ejercicio la función 15 es derivable en cualquier punto.

Cabe destacar simplemente la importancia de este resultado en el cálculo del error de las aproximaciones en los extremos ya que es donde se producen los errores máximos (como pasa con 3 y 4) y también donde tenemos la aproximación exacta (en el caso de 5).

4. Ejercicio 4

El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 4 seguidamente basándonos en las siguientes funciones 3, 4 y 5 del ejercicio 2 . Que nos servirán para aproximarnos a la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos(x)} \tag{16}$$

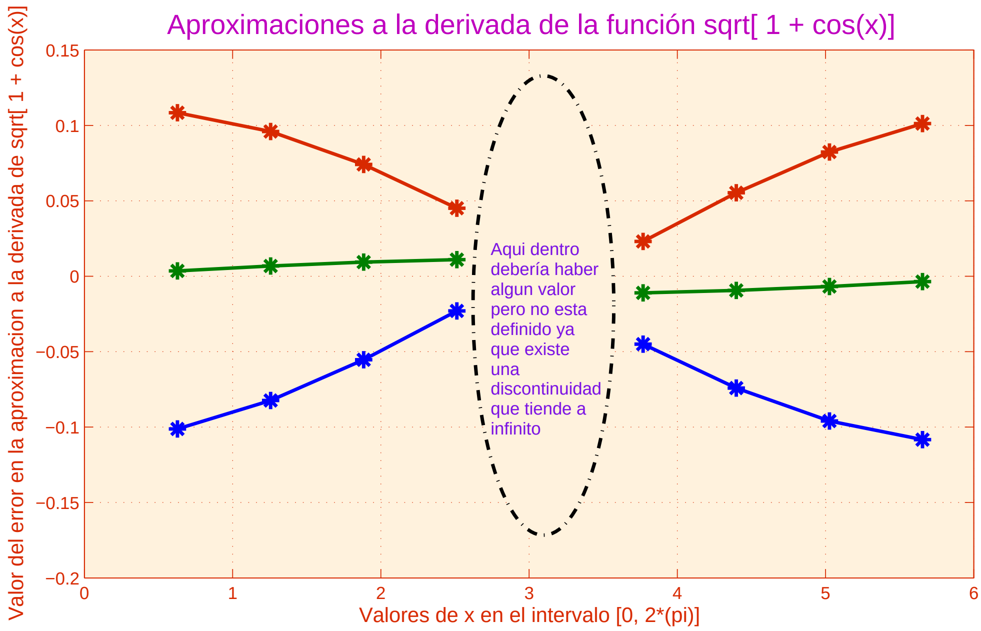
4.1. Apartado a

En este primer apartado se nos pide que aproximemos la función 16 en el intervalo $[0, 2\pi]$ con $h = 2\pi/10$. Aquí le presento al lector una tabla con los valores que toman las aproximaciones y además con los valores reales de la derivada de 16.

	Aproximación 3	Aproximación 4	Aproximación 5	Derivada de16
x = $\pi/5$	-0.3197012478097	-0.1101615423726	-0.2149313950912	-0.2185080122244
x = $2\pi/5$	-0.4979463676217	-0.3197012478097	-0.4088238077157	-0.4156269377774
x = $3\pi/5$	-0.6274490275746	-0.4979463676217	-0.5626976975981	-0.5720614028176
x = $4\pi/5$	-0.6955326050139	-0.6274490275746	-0.6614908162942	-0.6724985119639
x = π	0.6955326050139	-0.6955326050139	-0.000000000000	$-\infty$
x = $6\pi/5$	0.6274490275746	0.6955326050139	0.6614908162942	0.6724985119639
x = $7\pi/5$	0.4979463676217	0.6274490275746	0.5626976975981	0.5720614028176
x = $8\pi/5$	0.3197012478097	0.4979463676217	0.4088238077157	0.4156269377774
x = $9\pi/5$	0.1101615423726	0.3197012478097	0.2149313950912	0.2185080122244

Tabla de valores de aproximaciones a 16

Otra forma de mostrar la solución más clara es mostrar las diferencia entre las aproximaciones 3 , 4 y 5 y la derivada de la función 16 (que es $f'(x) = \frac{1}{2}\left((1+\cos(x))^{-0,5}\right)(-\sin(x))$). Como podemos ver en la siguiente gráfica.



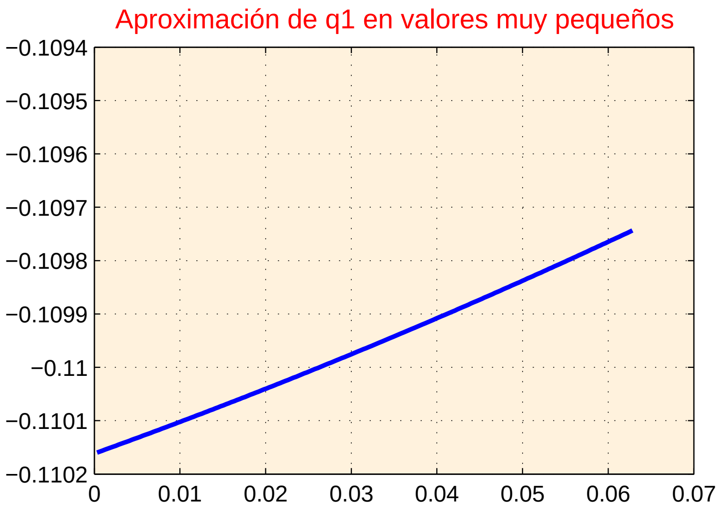
De esta gráfica el lector puede apreciar algunas matizaciones importantes.

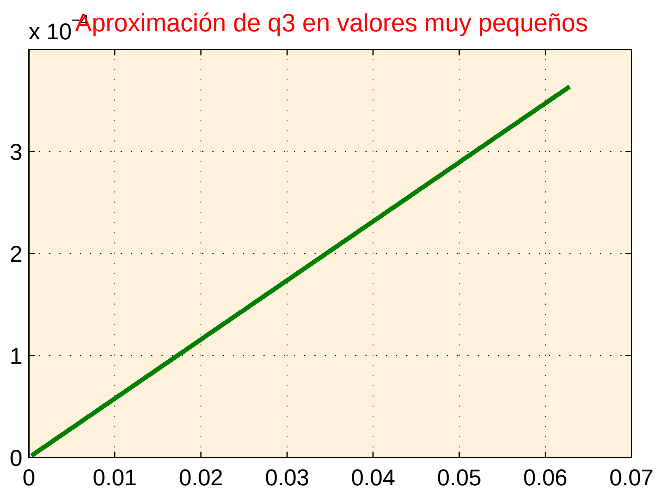
1. Se puede ver que la aproximación 3 tiene error positivo, es decir, que se aproxima superiormente a la derivada de 16. Análogo para la aproximación 4 aunque en este caso se aproxima inferiormente.

2. Otro dato importante es observar que cuando calculamos en valor de la aproximación 3 en x, coincide con el valor de la aproximación 4 en $x + 2\pi/10$

3. La gráfica nos muestra además que la aproximación 5 es muy buena, en comparación con las otras dos, ya que nos proporciona un valor muy aproximado a la derivada de 16.

4. Cabe destacar también que en $x = 0$ las aproximaciones no están definidas pero como muestran estas gráficas el error de 3 se aproxima mucho a $-0{,}1102\ldots$ mientras que el error en 5 disminuye hasta casi no existir.





5. Luego los errores son bastante uniformes menos cuando $x = \pi$ donde la derivada de la función 16 no está definida (ya que dividimos entre cero).

4.2. Apartado b

En el segundo apartado se nos pide calcular el orden del error de las aproximaciones 3, 4 y 5 para la función 16. Para ello utilizaremos el desarrollo del polinomio de Taylor calculado anteriormente en el ejercicio 2 donde teníamos el desarrollo de $f(x+h)$ 7 y el de $f(x-h)$ 8.

Al igual que antes tenemos que las aproximaciones quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_1(h) &= f'(x) + \frac{h}{2} f''(x) + \ldots \\ &\equiv \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{1+\cos(x)}} + \frac{h\left((\cos(x))^2 + 2(\cos(x)) + 1\right)}{8\sqrt{(\cos(x)+1)^3}} + \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

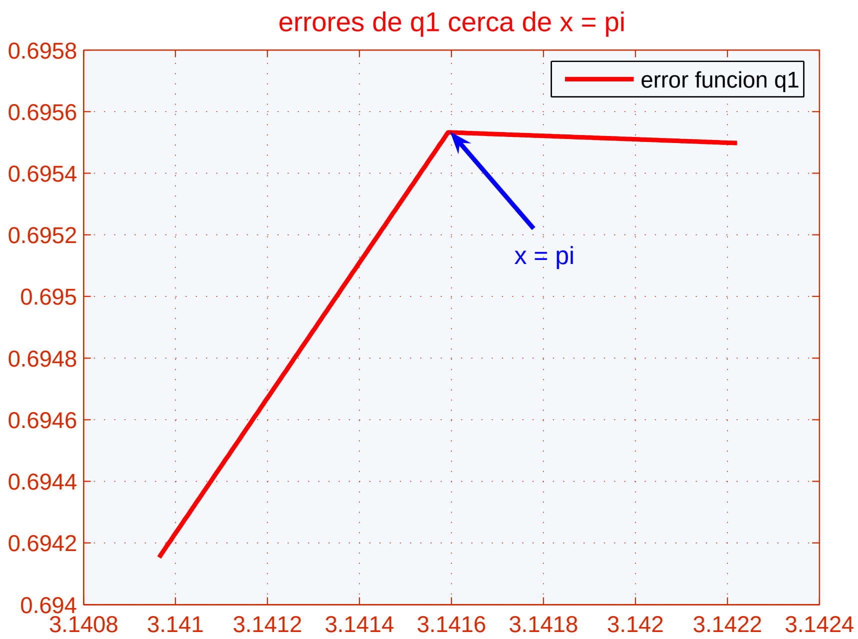
$$\begin{aligned} q_2(h) &= f'(x) - \frac{h}{2} f''(x) + \ldots \\ &\equiv \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{1+\cos(x)}} - \frac{h\left((\cos(x))^2 + 2(\cos(x)) + 1\right)}{8\sqrt{(\cos(x)+1)^3}} + \ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Y además el q_3 nos queda:

$$\begin{aligned} q_3(h) &= f'(x) + \frac{h^2}{3!} f'''(x) + \ldots \\ &\equiv \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{1+\cos(x)}} + \frac{h^2 \sin(x)}{48\sqrt{\cos(x)+1}} + \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Luego tenemos que el orden numérico del error en cada aproximación :

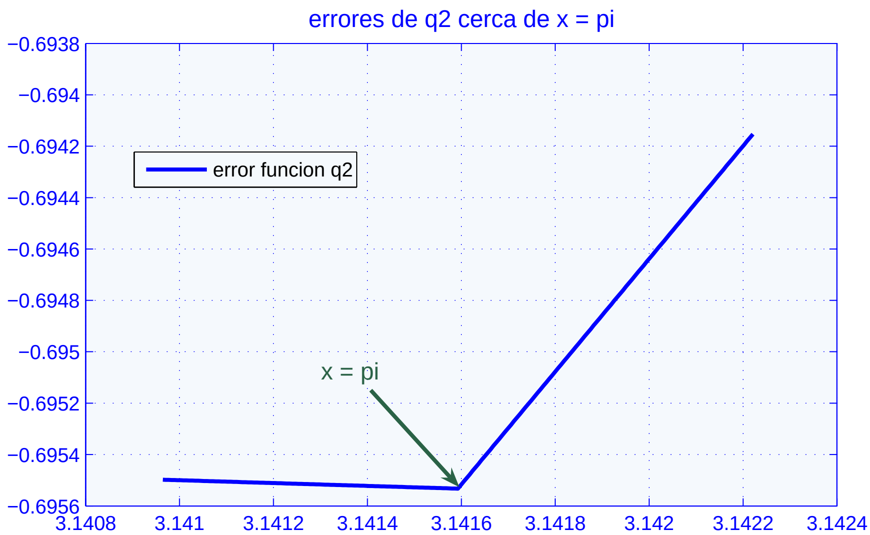
Aproximaciónq1 Se puede ver que la aproximación 3 tiene error positivo del orden de 17 aunque consideramos que es un error de orden 1 (ya que la variable h está elevada a la potencia 1). Aunque, si nos fijamos en el valor del error de 3 en el punto $x = \pi$ podemos ver que el error varía en las cercanías como muestra la siguiente gráfica, considerando siempre que la función no es derivable en $x = \pi$



Como muestra la gráfica en el cálculo del error cercano a $x = \pi$ se puede ver que hace una pequeña variación si se aproxima por la derecha o si se aproxima por la izquierda aunque el límite sea el mismo. Esto es debido sobretodo a la raíz del denominador que hay en el error del cálculo ya que además la fórmula es inestable porque calculamos la raíz de numeros cercanos al cero.

En conclusión, la aproximación 3 de la función 16 en el punto $x = \pi$ no es muy buena ya que tenemos un error absoluto de 0,69 que es muy grande.

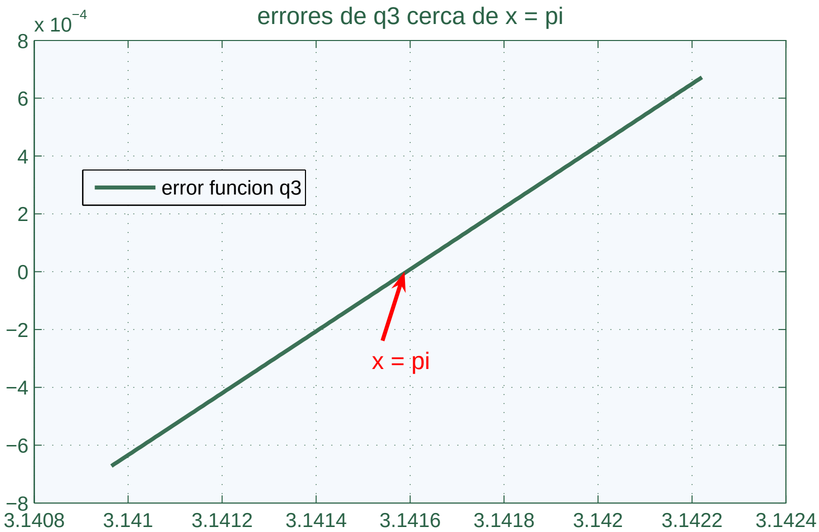
Aproximación q2 Se puede ver que la aproximación 4 tiene error negativo del orden de 18 aunque consideramos que es un error de orden 1 (ya que la variable h está elevada a la potencia 1). Aunque, si nos fijamos en el valor del error de 4 en el punto $x = \pi$ podemos ver que el error varía en las cercanías como muestra la siguiente gráfica, considerando siempre que la función no es derivable en $x = \pi$



Como muestra la gráfica en el cálculo del error cercano a $x = \pi$ se puede ver que hace una pequeña variación si se aproxima por la derecha o si se aproxima por la izquierda aunque el límite sea el mismo. Esto es debido sobretodo a la raíz del denominador que tiene un posible error del cálculo ya que además la fórmula es inestable porque calculamos la raíz de numeros cercanos al cero.

En conclusión, la aproximación 4 de la función 16 en el punto $x = \pi$ no es muy buena ya que tenemos un error absoluto de 0,69 que es muy grande.

Aproximación q3 Se puede ver que la aproximación 5 tiene error variable del orden de 19 aunque consideramos que es un error de orden 2 (ya que la variable h está elevada a la potencia 2). Aunque, si nos fijamos en el valor del error de 5 en el punto $x = \pi$ podemos ver que el error varía en las cercanías como muestra la siguiente gráfica, considerando siempre que la función no es derivable en $x = \pi$.



Como muestra la gráfica en el cálculo del error cercano a $x = \pi$ se puede ver que se aproxima uniformemente al cero, esto quiere decir que cuando nos aproximamos al valor $x = \pi$ la aproximación 5 disminuye el error respecto a la derivada de la función en los valores cercanos a $x = \pi$ y por lo tanto es una aproximación bastante buena.

En conclusión, la aproximación 5 de la función 16 en el punto $x = \pi$ es muy buena ya que tenemos un error absoluto de nulo.

4.3. Apartado c

En este tercer apartado se nos pide que analicemos el error de las aproximaciones y comprobemos proporcionalidades con $f''(x)$ y $f'''(x)$.

Pero usando el ejercicio 2 en el apartado 3 hemos visto que las aproximaciones son proporcionales a las segundas (y terceras derivadas para 5) para cualquier punto donde sea derivable la función. Y en este ejercicio la función 16 es derivable en cualquier punto menos en $x = \pi$.

Aunque en el caso de $x = \pi$ podemos aproximarnos mucho usando el Matlab y cogiendo valores muy próximos que además cumplen las propiedades de ser proporcionales a las derivadas.

Cabe destacar simplemente la importancia de este resultado en el cálculo del error de las aproximaciones en los $x = \pi$ ya que es donde se producen los errores máximos (como pasa con 3 y 4) y también donde tenemos la aproximación exacta (en el caso de 5).

5. Ejercicio 5

El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 5 seguidamente trabajando con el cálculo aproximado de logaritmos neperianos o naturales utilizando la siguiente aproximación:

$$q\left(h\right) = \frac{x^{h} - x^{-h}}{2h} \tag{20}$$

5.1. Apartado a

Inicialmente se nos pide que justifiquemos la formula 20 como valor aproximado de la función $\ln\left(x\right)$ para un valor h variable que se aproxime a cero. Podemos utilizar diversos métodos para mostrar que la función 20 se aproxima a $\ln\left(x\right)$ en valores de h cercanos a cero. En este apartado voy a proponer dos posibles formas de mostrar esta aproximación de la función 20.

5.1.1. Posibilidad 1

La primera ellas basada en la siguiente propiedad.

$$q\left(h\right) = \frac{x^{h} - x^{-h}}{2h} \equiv \frac{e^{h\ln(x)} - e^{-h\ln(x)}}{2h} \equiv \frac{\sinh\left(h\ln\left(x\right)\right)}{h}$$

Pasando al $\lim_{h\to 0} q\left(h\right)$ tenemos que nos da la siguiente solución, aplicando los infinitésimos de equivalencia en el cálculo del límite.

$$\lim_{h\to 0} q\left(h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\sinh\left(h\ln\left(x\right)\right)}{h} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{h\ln\left(x\right)}{h} = \lim_{h\to 0} ln\left(x\right) = ln\left(x\right)$$

Con esto tenemos que la fórmula está justificada.

5.1.2. Posibilidad 2

La otra forma de justificar la fórmula es mediante la derivación logarítmica basada en el calculo de la derivada de 20.

$$\left\{\begin{array}{ll} y = x^h, & \text{suponemos esto} \\ \ln(y) = h\ln(x), & \text{aplicando logaritmos} \\ \dfrac{y'}{y} = \ln(x), & \text{derivación logarítmica} \end{array}\right\}$$

Luego entonces $y' = x^h \ln(x)$.

$$\left\{\begin{array}{ll} y = x^{-h}, & \text{suponemos esto} \\ \ln(y) = -h\ln(x), & \text{aplicando logaritmos} \\ \dfrac{y'}{y} = -\ln(x), & \text{derivación logarítmica} \end{array}\right\}$$

Luego entonces $y' = -x^{-h} \ln(x)$.

Con estos dos datos calculamos de nuevo el límite de la función $q(h)$ aunque esta vez aplicaremos el método de L'Hopital en vez de utilizar los infinitésimos de equivalencia.

$$\lim_{h\to 0} q(h) = \frac{x^h - x^{-h}}{2h} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{x^h \ln(x) + x^{-h}\ln(x)}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{x^h + x^{-h}}{2} ln(x) = ln(x)$$

Ya que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^h + x^{-h}}{2} = 1$$

Luego tenemos demostrado de otra forma que la fórmula 20 se aproxima a $\ln(x)$ cuando h tiende a cero.

5.2. Apartado b

En este segundo apartado el lector podrá comprobar que el desarrollo de de la serie de Taylor de la función 20 es el siguiente:

$$q(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!} h^{2n}$$

Para ello empezaremos calculando el desarrollo de la función $y = x^h$ y nos queda los siguiente:

$$x^h + x^h \ln(x) + \frac{\left(x^h \ln(x)\right)^2}{2} + \frac{\left(x^h \ln(x)\right)^3}{3!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h \ln(x))^n}{n!}$$

Ahora calculamos el desarrollo para la función $y = x^{-h}$ y nos da el siguiente resultado:

$$x^h - x^h \ln(x) + \frac{\left(x^h \ln(x)\right)^2}{2} - \frac{\left(x^h \ln(x)\right)^3}{3!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(h \ln(x))^n}{n!}$$

Luego si juntamos todo y podemos ver cual es el desarrollo de la función 20

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(h\ln(x))^n}{n!} - \frac{((-1)^n (h\ln(x))^n)}{n!}}{2h} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(h\ln(x))^n - ((-1)^n (h\ln(x))^n)}{n!}}{2h} \equiv \ldots$$

Y con esto, mediante operaciones elementales llegamos al resultado buscado:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{2n} (\ln(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5.3. Apartado c

En este apartado se nos pide encontrar una fórmula recurrente que muestre la relación entre $q(h)$ y $q(h/2)$. Para ello, vamos a encontrar, partiendo de la fórmula de $q(h/2)$, una relación entre esta y $q(h)$. Luego partimos de:

$$\begin{aligned}
q(h/2) &= \frac{x^{h/2}-x^{-h/2}}{2(h/2)} = \frac{x^{h/2}-x^{-h/2}}{h} = \frac{e^{(h/2)\ln(x)}-e^{(-h/2)\ln(x)}}{2}\frac{2}{h} \\
&= \frac{2}{h}\sinh\left(\frac{h}{2}\ln(x)\right) = \frac{2}{h}\frac{\sinh\left(\frac{h}{2}\ln(x)\right)\cosh\left(\frac{h}{2}\ln(x)\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2}\ln(x)\right)} \\
&= \frac{\dfrac{\sinh(h\ln(x))}{h}}{\cosh\left(\dfrac{h}{2}\ln(x)\right)} = \frac{q(h)}{\cosh\left(\dfrac{h}{2}\ln(x)\right)} = \frac{q(h)}{\sqrt{\dfrac{1+\cosh(h\ln(x))}{2}}} \\
&= q(h)\sqrt{\frac{2}{1+\cosh(h\ln(x))}} \\
&= q(h)\sqrt{\frac{2\sinh(h\ln(x))}{\sinh(h\ln(x))+\sinh(h\ln(x))\cosh(h\ln(x))}} \\
&= q(h)\sqrt{\frac{2\dfrac{\sinh(h\ln(x))}{h}}{\dfrac{\sinh(h\ln(x))+\sinh(h\ln(x))\cosh(h\ln(x))}{h}}} \\
&= q(h)\sqrt{\frac{2q(h)}{\dfrac{\sinh(h\ln(x))}{h}+\dfrac{\sinh(2h\ln(x))}{2h}}} = q(h)\sqrt{\frac{2q(h)}{q(h)+q(2h)}}
\end{aligned} \tag{21}$$

Mediante estas operaciones hemos podido encontrar una función recurrente para calcular $q(h/2)$ que depende de $q(h)$ y $q(2h)$.

Se nos pide también que analicemos la estabilidad numérica de la función recurrente 21 es decir, ver si la siguiente función recurrente es estable.

$$q\left(h/2\right) = q\left(h\right)\sqrt{\frac{2q\left(h\right)}{q\left(h\right)+q\left(2h\right)}}$$

Como se puede ver no tiene errores de cancelación porque no hay diferencias de valores muy parecidos aunque si que se puede producir un error en el cálculo de la raíz cuando el valor de x esté próximo a 1 ya que entonces el logaritmo se aproxima a cero (luego la aproximación también se aproxima a cero); además si se produjera este error tendríamos también otro error al dividir entre valores muy próximos a cero. De todas formas si calculamos esta aproximación para un valor cualquiera tenemos que esta función recurrente sería estable.

5.4. Apartado d

En este apartado se nos pide encontrar una fórmula recurrente que muestre la relación entre $q\left(1/2^{n+1}\right)$, $q\left(1/2^{n}\right)$ y $q\left(1/2^{n-1}\right)$. Para ello, vamos a encontrar, partiendo de la fórmula 21 calculada anteriormente, una sucesión recurrente. Simplemente utilizando que si $h \sim 1/2^n$ entonces $h/2 \sim 1/2^{n+1}$ y $2h \sim 1/2^{n-1}$. Luego tenemos que.

$$q\left(h/2\right) = q\left(h\right)\sqrt{\frac{2q\left(h\right)}{q\left(h\right)+q\left(2h\right)}} \sim q\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = q\left(\frac{1}{2^{n}}\right)\sqrt{\frac{2q\left(\frac{1}{2^{n}}\right)}{q\left(\frac{1}{2^{n}}\right)+q\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)}}$$

Luego entonces, como habíamos visto en el apartado anterior, esta función es estable, y además no tiene errores de cancelación por lo explicado anteriormente.

Por último nos queda comprobar que los valores de arranque de la recurrencia coinciden con los propuestos en el enunciado:

$$q\,(1) = \frac{x^1 - x^{-1}}{2} = \frac{x^1 - \dfrac{1}{x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$q\,(1/2) = \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

5.5. Apartado e

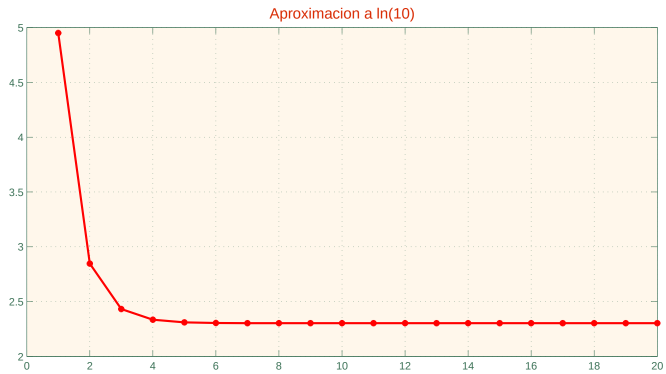
En este apartado se nos pide que mostremos un programa que sirva para calcular la secuencia de valores para $q\,(1)\,, q\,(1/2)\,, q\,(1/4)\,, \ldots, q\,(1/2^n)$. Basándonos en el programa Matlab se ha construido el siguiente programa para calcular los valores anteriormente pedidos.

```
% función aprox
function ejer = aprox(h,x)
   ejer = (x^h - x^(-h))/(2*h);
end

%programa
     q = [];
     %Valores iniciales
     q = [aprox(1, x); aprox(1/2, x); q];
     %Recurrencia

     for i = 3 : n %n valor cualquiera
          h = q(i-1)*sqrt((2*q(i-1))/(q(i-1)+q(i-2)));
          q = [q; h];
     end
```

Utilizando este programa se nos pide calcular además la aproximación mediante el a el logaritmo neperiano en el caso de que $x = 10$, luego partiendo de los dos primeros valores se calculan el resto de forma recurrente. Aquí se presenta la aproximación en 20 iteraciones.

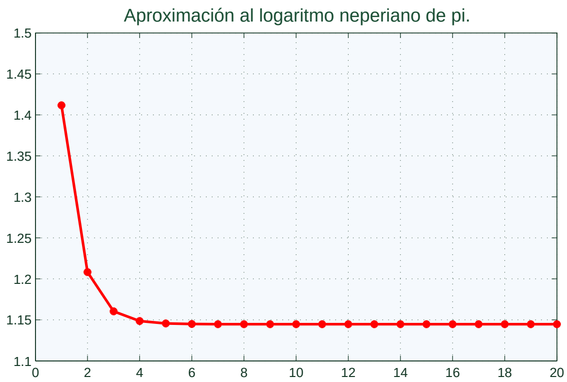
Con el programa anterior para veinte iteraciones nos proporciona el siguiente resultado para el cálculo de $\ln(10)$:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 4{,}95000000000000\\
i_2 &= 2{,}84604989415154\\
i_3 &= 2{,}43187616969715\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
i_{19} &= 2{,}30258509302365\\
i_{20} &= 2{,}30258509300145
\end{aligned}
$$



Cabe destacar que si consideramos el valor real que se nos pide es:

$$\ln(10) = 2{,}30258509299405$$



Con el programa anterior para veinte iteraciones nos proporciona el siguiente resultado para $\ln(\pi)$:

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 1{,}41164138370300\\
i_2 &= 1{,}20826426735776\\
i_3 &= 1{,}16041963867089\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
i_{19} &= 1{,}14472988585304\\
i_{20} &= 1{,}14472988585031
\end{aligned}
$$

Cabe destacar que si consideramos el valor real que se nos pide es:

$$\ln(\pi) = 1{,}14472988584940$$

Lo cual es una aproximación muy buena (de 8 decimales).