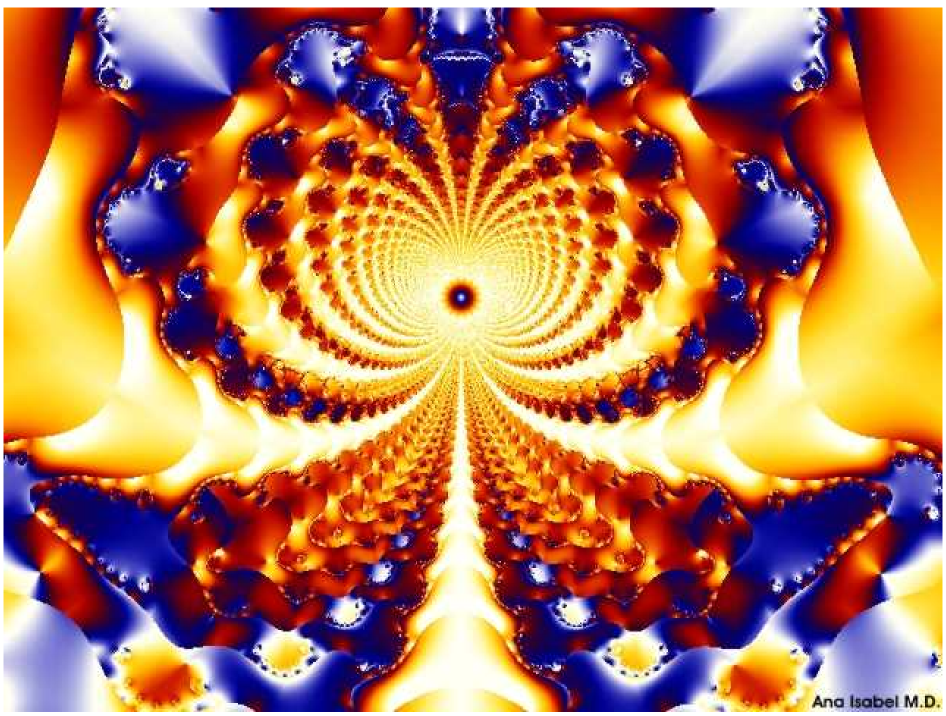
Práctica 2 de aproximación numérica $\LaTeX$

Juan Miguel Ribera Puchades

29 de abril de 2007



Índice

1. Ejercicio 1

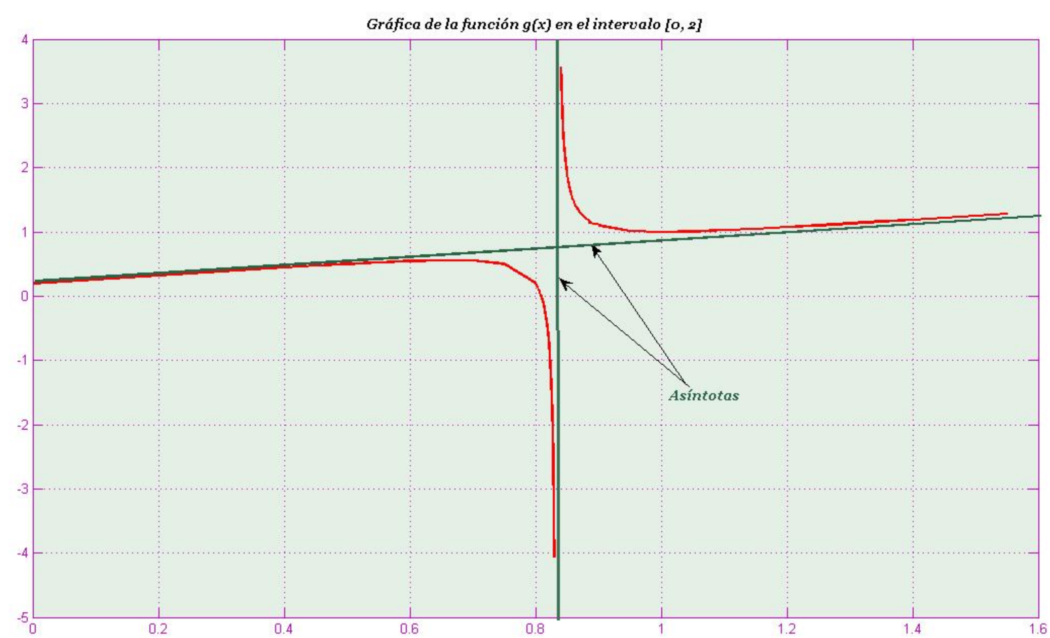
El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 1 seguidamente basándonos en la función g(x) que muestro seguidamente:

$$g(x) = \frac{4x^2 - 2x - 1}{6x - 5} \tag{1}$$

1.1. Análisis de la función

En este apartado el lector va a poder ver un análisis exhaustivo de la función 1 presentada anteriormente.

Primero vamos a ver la gráfica de ésta función para que sirva de guía en el estudio de la misma. En la gráfica se pueden ver además las dos asíntotas que ahora analizaremos, además de la discontinuidad de salto infinito que hay en el punto $x = 5/6$.



Después de haber visto la gráfica vamos a empezar con el estudio numérico:

1. **Discontinuidad** La función es racional con una función polinómica de primer grado en el denominador. Luego la función racional 1 no está definida *únicamente* en el valor de la x que cumple que:

$$6x - 5 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

2. **Asíntotas** La función es racional y sabemos que, en este caso, solo tiene dos asíntotas, una de ellas es vertical y la otra es oblicua (Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes, es decir la existencia de unas, implica la no existencia de las otras).

Vertical La asíntota vertical se puede observar en los valores cercano donde la función racional no esta definida, es decir en $x = 5/6$ ya que la definición de asíntota vertical es que el $\lim_{t \to 5/6} g(t) = \infty$

Oblicua La asíntota oblicua la podemos calcular mediante el siguiente cálculo de límites. Con el siguiente límite podemos calcular la pendiente de la recta oblicua:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{t} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^2 - 2x - 1}{6x - 5}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{6x^2 - 5x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ahora solo nos queda ver por que punto pasa mediante el siguiente límite.

$$\lim_{t \to \infty} g(t) - \frac{2}{3}t = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{6x - 5} - \frac{2x}{3} = \frac{2}{9}$$

Luego entonces tenemos que la asíntota oblicua de la función es la recta: $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}$

3. **Derivabilidad** Sabemos que en $x = 5/6$ no es derivable ya que no es continua, ahora vamos a estudiar los otros puntos donde la función puede no ser derivable viendo donde no está definida la derivada. Para ello es necesario calcular la derivada de la función 1 en cualquier punto de la recta real.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4x^2 - 2x - 1}{6x - 5} \\ g'(x) &= \frac{8\left(3x^2 - 5x + 2\right)}{\left(6x - 5\right)^2} \qquad (2) \\ g''(x) &= \frac{8}{\left(6x - 5\right)^3} \qquad (3) \end{aligned}$$

Como podemos ver, las derivadas están definidas en cualquier punto distinto de $x = 5/6$ ya que la operación está definida en cualquier punto distinto de este. Se pueden destacar también algunos datos importantes como por ejemplo el máximo y el mínimo de está función respectivamente(que son $x = 2/3$ y $x = 1$, soluciones del numerador de la primera derivada).

1.2. Análisis de los puntos fijos

Ahora vamos a fijarnos en los puntos fijos de la función 1, para ello seguiremos la definición de punto fijo y algunos datos importantes sobre estos. Para empezar, se dice que x *es un punto fijo* $\Leftrightarrow g(x) = x$. Luego entonces, vamos a empezar con el cálculo de éstos, mediante una simple resolución de una ecuación de segundo grado.

$$\begin{aligned}
g(x) = x &\iff g(x) - x = 0 \\
&\iff \frac{4x^2 - 2x - 1}{6x - 5} - x = 0 \\
&\iff \frac{-2x^2 + 3x - 1}{6x - 5} = 0 \\
&\iff -2x^2 + 3x - 1 = 0 \\
&\iff 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\
&\iff x = 1/2 \vee x = 1 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que los puntos 4 son puntos fijos para la función $g(x)$ (se puede observar también en la gráfica de la función presentada anteriormente 1.1). Después de conocer cuales eran los puntos fijos e esta función vamos a comprobar si dichos puntos son de atracción o de repulsión. Utilizando la página 58 del manual de aproximación numérica tenemos definido que:

- Si $|g'(\alpha)| < 1$, diremos que α es un punto de atracción para la iteración de punto con $g(x)$ como función de iteración
- Si $|g'(\alpha)| > 1$, tenemos que el proceso iterativo no converge al punto y es un proceso de repulsión.

Luego entonces utilizando 2 calculada anteriormente vamos a evaluar el valor de la derivada en los puntos calculados anteriormente en 4.

$$g'(x) = \frac{8\left(3x^2 - 5x + 2\right)}{\left(6x - 5\right)^2} \rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2\right)}{\left(6\left(\frac{1}{2}\right) - 5\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x) = \frac{8\left(3x^2 - 5x + 2\right)}{\left(6x - 5\right)^2} \rightarrow g'(1) = \frac{8\left(3(1)^2 - 5(1) + 2\right)}{\left(6(1) - 5\right)^2} = 0$$

Utilizando lo que acabamos de calcular tenemos que la función $g(x)$ tiene dos puntos fijos (como antes habíamos calculado) y que además ambos son de *atracción* ya que utilizando la definición antes presentada nos da que ambos tienen $|g'(\alpha)| < 1$.

1.3. Estudio de las iteraciones

En este apartado nos vamos a centrar en la fórmula $x_{n+1} = g(x)$ y en el estudio de ésta en algunos puntos de la recta real.

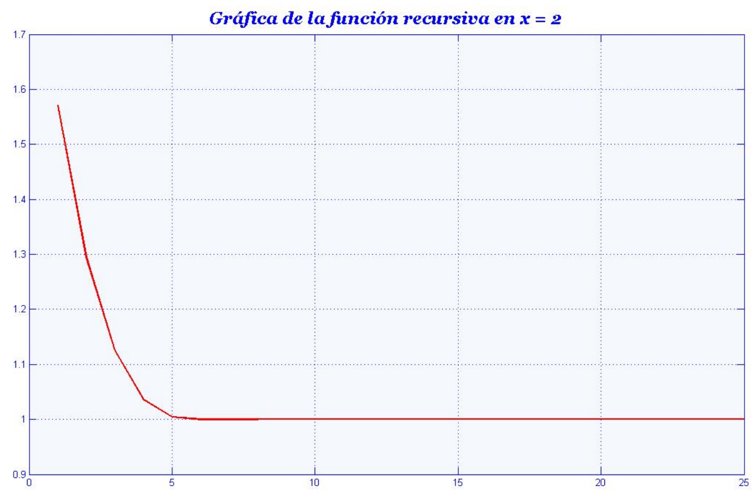
Primeramente vamos a estudiar las diferencias que hay entre calcular las iteraciones de la fórmula anterior entre $x = 0$ y $x = 2$ utilizando el programa Matlab. Para ver como evoluciona la función haremos 50 iteraciones aunque se va a poder observar la convergencia mucho antes.

Para el valor de $x = 0$ tenemos que la función converge muy rápidamente hacia el punto fijo $x = 1/2$ como podemos ver en las siguientes iteraciones:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= 0{,}20000000000000\\
n_2 &= 0{,}32631578947368\\
n_3 &= 0{,}40324166818430\\
n_4 &= 0{,}44799285757211\\
n_5 &= 0{,}47282657898930\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n_{20} &= 0{,}49999912643081\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n_{48} &= 0{,}50000000000000\\
n_{49} &= 0{,}50000000000000\\
n_{50} &= 0{,}50000000000000
\end{aligned}
$$

Como se puede ver en la gráfica anterior tenemos que a la 5ª iteración ya tenemos una aproximación muy buena. Una nota interesante es que si consideráramos la gráfica anterior a partir de otro valor de la iteración, ésta tendría la misma forma que la que hemos presentado aunque variarían los valores de los ejes. Pasamos ahora al estudio para el valor de $x = 2$.

Para el valor de $x = 2$ tenemos que la función converge muy rápidamente hacia el punto fijo $x = 1$ como podemos ver en las siguientes iteraciones:



$$
\begin{aligned}
n_1 &= 1{,}57142857142857 \\
n_2 &= 1{,}29493087557604 \\
n_3 &= 1{,}12562779392257 \\
n_4 &= 1{,}03599644589919 \\
n_5 &= 1{,}00426239092376 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n_7 &= 1{,}00000002007586 \\
n_8 &= 1{,}00000000000000 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n_{50} &= 1{,}00000000000000
\end{aligned}
$$

Como se puede ver en la gráfica anterior tenemos que a diferencia de la anterior ésta converge mucho mas rápido al punto fijo $x = 1$; ya que en este caso se puede ver que el error absoluto es del orden de 10^{-2} menor que en el caso anterior.

1.4. Orden del error con Matlab

Para calcular el orden de convergencia estudiaremos primero si esta convergencia es lineal , cuadrática, . . . entonces para estudiar este caso tenemos que calcular el siguiente límite por la definición 3.1.4. en la que nos dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ tiene orden de convergencia $p > 1$cuando:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = R/R \neq 0, \infty$$

y tiene orden de convergencia lineal con ratio R cuando:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = R/0 < R < 1$$

Luego entonces, aplicando estos resultado vamos a estudiar con matlab la solución de los órdenes. En un principio consideramos la primera función de iteración para $x = 0$ que converge muy rápidamente hacia el punto fijo $x = 1/2$, veamos el cálculo del orden del error, mediante el siguiente programa

```
ejex = [];
res = [];
err = [];
conv = [];
b = 0 ;
for i = 1 : 50
    ejex = [ejex; b];
    valor = (- 1 + b*( - 2 + b*4))/( 6*b - 5);
    res = [res; valor];
    err = [err; abs(valor - 0.5)];
    conv = [conv; (abs(valor - 0.5))/(abs(b - 0.5))];
    b = valor;
end
```

Para el valor de $x = 0$ tenemos que el valor de la convergencia de la iteración del punto fijo es de ratio 0.5 y que además es lineal aunque en el cálculo se han producido muchos errores ya que tenemos factores como la cancelación catastrófica o la división entre valores próximos a cero que entorpecen nuestros cálculos. Como podemos ver en los siguientes cálculos hechos con la función anterior.

$$\begin{aligned}
n_1 &= 0{,}60000000000000\\
n_2 &= 0{,}57894736842105\\
n_3 &= 0{,}55709342560554\\
n_4 &= 0{,}53749523634773\\
n_5 &= 0{,}52249402182367\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
n_{27} &= 0{,}50000000406689
\end{aligned}$$

Pero, a partir de aquí empiezan a notarse los errores antes mencionados

$$n_{28} = 0{,}49999999593311$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n_{51} = 0{,}42857142857143$$
$$n_{52} = 0{,}33333333333333$$
$$n_{53} = 1{,}00000000000000$$

Hasta llegar a que el ratio de la convergencia es uno (por culpa de los errores mencionados) cuando realmente es 0.5.

Pasamos ahora a hacer los mismos cálculos que anteriormente pero en este caso para el valor $x = 2$ que converge rápidamente hacia el punto fijo $x = 1$. Aunque en este problema se nos plantea una dificultad añadida ya que con los errores mencionados anteriormente el cálculo exacto del orden de convergencia en el matlab es imposible ya que en la 8ª iteración habla ya de división entre 0; como mucho se pueden presentar algunos valores en el intento de calcular este dato.

Iteración	$\|x_n - \alpha\|$	$\frac{\|x_{n+1} - \alpha\|}{\|x_n - \alpha\|}$	$\frac{\|x_{n+1} - \alpha\|}{\|x_n - \alpha\|^2}$
n_1	0.57142857142857	0.57142857142857	0.57142857142857
n_2	0.29493087557604	0.51612903225806	0.90322580645161
n_3	0.12562779392257	0.42595673876872	1.44425956738769
n_4	0.03599644589919	0.28653250029512	2.28080499822928
n_5	0.00426239092376	0.11841143805420	3.28953137167493
n_6	0.00007085971472	0.01662440540676	3.90025356756456
n_7	0.00000002007586	0.00028331841218	3.99830020917803
n_8	0.00000000000000	0.00000008848222	4.40739338012947
n_9	0	div. by cero	div. by cero

Mas adelante se estudiará el orden teórico del error pero en este momento no podemos estimar cual es usando los cálculos de matlab arriba expuestos.

1.5. Orden del error teórico

Para calcular el orden de convergencia nos basaremos en el manual de aproximación numérica (exactamente en el teorema 3.2.1 de la página 65) donde nos dice:
Si α es un punto de atracción de la función g, I_α un entorno de α, g es suficientemente suave a I_α y p el primer entero (≥ 1) tal que $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Si la sucesión generada por $x_{n+1} = g(x_n)$ es convergente, entonces tiene orden p y el ratio es $R = |g^{(p)}(\alpha)|/(p!)$.

Luego entonces basándonos en estos datos tenemos que para la iteración a partir de $x = 0$ tenemos que podemos encontrar:

$$\begin{cases} \text{Tenemos que } \alpha = 0{,}5 \text{ es punto de atracción de la función g} \\ \text{Consideramos } I_\alpha =]-\infty, 5/6[\text{ que es entorno de } \alpha \\ \text{Tenemos que } g \text{ es suficientemente suave en } I_\alpha \text{ (véase pag. 5)} \\ \text{Consideramos } p = 1 \text{ ya que } g'(1/2) = 1/2 \\ \text{La sucesión generada por } x_{n+1} = g(x_n) \text{ es convergente a } \alpha = 1/2 \end{cases}$$

Y por tanto utilizando los datos anteriores, tenemos que por el teorema 3.2.1 del manual:

$$\begin{cases} \text{El orden de convergencia es p} \\ \text{El ratio es } R = |g^{(p)}((\alpha)|/(p!) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{El orden de convergencia es 1} \\ \text{El ratio es } R = |1/2|/(1!) = 1/2 \end{cases}$$

Luego entonces tenemos que concuerda con las previsiones hachas en el capítulo anterior ya que habíamos calculado la división correspondiente al cálculo de la convergencia lineal (que es la que nos da teóricamente) y además también nos daba que el ratio era $1/2$ aunque hayamos visto que en este cálculo se producían errores en el apartado anterior, ahora tenemos que realmente si que era $1/2$. Después de habernos fijado en este resultado, para $x = 0$ vamos a estudiar ahora lo mismo pero para $x = 2$.

$$\begin{cases} \text{Tenemos que } \beta = 1 \text{ es punto de atracción de la función g} \\ \text{Consideramos } I_\beta =]5/6, +\infty[\text{ que es entorno de } \beta \\ \text{Tenemos que } g \text{ es suficientemente suave en } I_\beta \text{ (véase en pag. 5)} \\ \text{Consideramos } p = 2 \text{ ya que } g'(1) = 0 \text{ y } g''(1) = 8 \text{ como se ve en 5} \\ \text{La sucesión generada por } x_{n+1} = g(x_n) \text{ es convergente a } \beta = 1 \end{cases}$$

Y por tanto igual que anteriormente hemos expuesto tenemos que:

$$\begin{cases} \text{El orden de convergencia es 2} \\ \text{El ratio es } R = |8|/(2!) = 4 \end{cases}$$

En conclusión después de ver los resultados aquí presentados tenemos que si partimos del valor $x = 0$ entonces la convergencia al punto fijo $x = 1/2$ es lineal y de ratio $1/2$, por el contrario si partimos de $x = 2$tenemos que el orden de convergencia al punto fijo $x = 1$ es cuadrático y que además tiene un ratio de 4. Por lo tanto podemos ver que si partimos de puntos distintos llegamos a sucesiones con órdenes de convergencia diferentes (siempre utilizando los puntos fijos de la función g).

En respuesta a la pregunta formulada al principio de la práctica podemos decir que esta función no contradice al teorema (es un teorema y no puede tener contraejemplos) ya que se pide que la función sea continua en un intervalo y, si consideramos un intervalo que contenga a ambos puntos y sea continuo llegamos a una contradicción ya que la función no es continua en $x = 5/6$. El resto de las hipótesis las cumple ya que podemos calcular, mediante el derive por ejemplo, que la derivada de la función $g(x_n)$ es menor 0.8 para cualquier punto que la recta real. Es decir, la función cumple las hipótesis del teorema siempre que el intervalo no contenga a $x = 5/6$. Luego entonces tenemos que se cumple que ambos son puntos únicos de atracción.

1.6. Método de Steffensen

Ahora utilizaremos el método de Steffensen que consiste en aplicar un método de Aitken modificado a una sucesión convergente obtenida de la iteración de punto fijo. Para ello partiremos de tres puntos obtenidos mediante la iteración en el punto fijo, que cumplen:

$$\begin{cases} x_0 & \text{Con } x_0 \text{ punto inicial} \\ y_0 = g(x_0) & \text{Calculado a partir una iteración} \\ z_0 = g(y_0) & \text{Calculado a partir otra iteración} \end{cases}$$

Y ahora podemos aplicar Aitken a estos tres términos

$$\tilde{x_1} = x_0 - \frac{(y_0 - x_0)^2}{z_0 - 2y_0 + x_0}$$

Para la obtención de los siguientes términos de la sucesión basta considerar los siguientes valores ...

$$\begin{cases} \tilde{x_n} & \text{Con } x_0 \text{ punto inicial} \\ y_n = g(\tilde{x_n}) & \text{Calculado a partir una iteración} \\ z_n = g(y_n) & \text{Calculado a partir otra iteración} \end{cases}$$

... en la siguiente fórmula genérica

$$\tilde{x_{n+1}} = \tilde{x_n} - \frac{(y_n - \tilde{x_n})^2}{z_n - 2y_n + \tilde{x_n}}$$

Tenemos pues que la sucesión generada por estos resultados converge más rápidamente siguiendo el siguiente teorema:

Sea f una función que proporciona un método iterativo de orden p para computar su punto fijo α.Para p ¿1 la sucesión definida por el método de Steffensen proporciona un método de orden (2 . p-1) para computar α. Para p = 1 este método es al menos de orden 2, supuesto que $f'(\alpha) \neq 1$

Después de haber hablado del método de Steffensen vamos a ver ahora que pasa si lo aplicamos a los pivotes del caso anterior, empezando con el pivote $x = 0$.

```
res = [];
err = [];
a = 0 ;
for i = 1 : 8
    b = (- 1 + a*( - 2 + a*4))/( 6*a - 5);
    c = (- 1 + b*( - 2 + b*4))/( 6*b - 5);
    d = a - ((b- a)^2)/(c - 2*b + a);
    res = [res; d];
    err = [err; d - 0.5];
    a = d;
end
```

Aplicando el algoritmo mostrado a la izquierda hemos comprobado la gran utilidad del método de steffensen en el cálculo de las iteraciones, ya que a la 5 iteración había llegado al valor exacto.

$$
\begin{aligned}
n_1 &= 0{,}54285714285714 \\
n_2 &= 0{,}50099365734431 \\
n_3 &= 0{,}50000049465805 \\
n_4 &= 0{,}50000000000012 \\
n_5 &= 0{,}50000000000000
\end{aligned}
$$

A partir de aquí el valor es exacto y por eso se producen errores en los siguientes cálculos.

Luego entonces, aplicando el método de Steffensen a la función $g(x)$ en el pivote $x = 0$ tenemos que aumenta el orden de convergencia ya que la función inicial era lineal mientras que ahora (usando el teorema antes explicado) podemos decir que pasamos a una función de iteración con orden cuadrático.

No obstante, si aplicamos el método de Steffensen a la función de iteración $g(x)$ en el pivote $x = 2$ tenemos que se producen errores ya que si aplicamos Steffensen la función converge a 0.5 cuando realmente debería converger a 1. Esto es debido supuestamente porque el orden de la función de iteración en este punto era de orden cuadrático y utilizando los resultados del manual se puede ver que si aplicamos Steffensen en algoritmos de orden cuadrático puede que no lo acelere o que haga que una función que era divergente la transforme en converge (incluso llegar a cambiar la convergencia de una función, como es nuestro caso).

En conclusión, tenemos que el método de Steffensen es bueno en algunos casos, y no lo es tanto en otros. Si lo utilizamos para acelerar una función de orden lineal la converge en una cuadrática, mientras que si lo utilizamos en una cuadrática puede que nos lleve a errores de cálculo importantes.

1.7. Método de Newton

También vamos a estudiar el método de Newton que es muy rápido y eficiente ya que la convergencia es de tipo cuadrático (el número de cifras significativas se duplica en cada iteración). Sin embargo, la convergencia depende en gran medida de la forma que adopta la función en las proximidades del punto de iteración. Aquí presento como aplicar el método de Newton en nuestro caso:

```
  res = [];
err = [];
conv = [];
conv2 = [];
logar = [];
a = 0 ;
for i = 1 : 20
    b = (- 1 + a*( - 2 + a*4))/( 6*a - 5);
    c = (8*(3*a^2 - 5*a + 2))/(( 6*a - 5)^2);
    d = a - ((b - a)/(c - 1));
    res = [res; d];
    err = [err; d - 0.5];
    conv = [conv; (abs(d - 0.5))/(abs(a - 0.5))];
    conv2 = [conv2; (abs(d - 0.5))/(abs(a - 0.5)^2)];
    logar = [logar; (log(abs(d - 0.5)))/(log(abs(a - 0.5)))];
    a = d;
end
```

En este apartado utilizaremos algunos teoremas que aparecen en el manual de aproximación numérica y alguna definición necesaria:

Definición 1 *Sea F un campo y $p(x)$ un polinomio de una variable con coeficientes en F. Un elemento $a \varepsilon F$ se llama* raíz de multiplicidad k *de $p(x)$ si existe un polinomio $s(x)$ tal que $s(a) \neq 0 y p(x) = (x-a) ks(x)$. Si $k = 1$, entonces a recibe el nombre de raíz simple.*

Ejemplo 1 Por ejemplo el polinomio $p(x) = x3 + 2x2 - 7x + 4$ tiene 1 y - 4 como raíces, y puede escribirse como $p(x) = (x+4)(x-1)^2$. Esto significa que 1 es una raíz de multiplicidad 2, $(y-4)$ es una raíz 'simple'.

Teorema 1 (Orden del Método de Newton en raíces simples) *Sea $f \varepsilon C^3(I_\alpha)$. Si α es raíz simple de f, el orden de convergencia de $g(x)$ es al menos p=2 ya que si:*

- *Si $f''(\alpha) \neq 0$, tendremos que $g''(\alpha) \neq 0$. El orden es $p = 2$ y el ratio es $R = |g''(\alpha)|/(2!) = |f''(\alpha)|/2|f'(\alpha)|$.*

- *Si $f''(\alpha) = 0$, tenemos que $g''(\alpha) = 0$ y el orden es $p > 2$.*

Luego entonces si volvemos al problema que estamos estudiando nos podemos fijar que las dos raíces son simples según la definición 1 luego entonces podemos aplicar el teorema 1 partiendo de ambos pivotes. Empezando con el pivote $x = 0$ tenemos que partimos de una función de iteración que inicialmente tenia orden de convergencia lineal y que al aplicar el método de Newton tenemos que (empíricamente) la transforma en una cuadrática ya que como hemos mostrado en el programa anterior, al calcular el orden de convergencia mediante el cociente de logaritmos nos sale que vale 2 con un ratio de 1. Además en el primer pivote tenemos que el error absoluto se hace completamente nulo en la quinta iteración gracias a este método, por lo tanto no podemos calcular nada más sobre órdenes de convergencia más allá de la 5º iteración aunque de todas formas se puede ver perfectamente. Aplicando el teorema antes visto tenemos que como $g''(\alpha) \neq 0$ entonces el orden de la función es cuadrático y aplicando la formula también nos da que el ratio vale 1. Empíricamente lo podemos ver en la siguiente tabla:

Iteración	x_{n+1}	$x_{n+1} - \alpha$	$\dfrac{\lvert x_{n+1} - \alpha\rvert}{\lvert x_n - \alpha\rvert^2}$	$\dfrac{\ln(\lvert x_{n+1} - \alpha\rvert)}{\ln(\lvert x_n - \alpha\rvert)}$
n_1	0.55555555555556	0.05555555555556	NaN	NaN
n_2	0.50387596899225	0.00387596899225	0.22222222222222	4.16992500144231
n_3	0.50001525832342	0.00001525832342	1.25581395348834	1.92119216836090
n_4	0.50000000023283	0.00000000023283	1.01565503980953	1.99720261537661
n_5	0.50000000000000	0	1.00006103611662	1.99999449665167
n_6	0.50000000000000	0	NaN	NaN

Tabla de datos del método de Newton en $g(x)$ para $x = 0$

En el caso del pivote $x = 2$ tenemos que, al igual que cuando hemos intentado aplicar el método de Steffensen, el método de Newton lo único que hace es cambiar el límite de la función de iteración ya que como la función de iteración ya era inicialmente de orden cuadrático al aplicar Newton se debería quedar igual.

En conclusión el método de Newton es un buen método de aceleración para la funciones con convergencia inicial de tipo lineal ya que las transforma en una función con orden cuadrático.

2. Ejercicio 2

El lector va a poder ver resueltos los apartados del ejercicio 2 seguidamente basándonos en las funciones presentadas en el enunciado.

2.1. Función a)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_{n+1} = {x^2}_n - 1/2 \\ g'(x) &= 2x_n \end{aligned} \tag{5}$$

Considerando la función 5 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

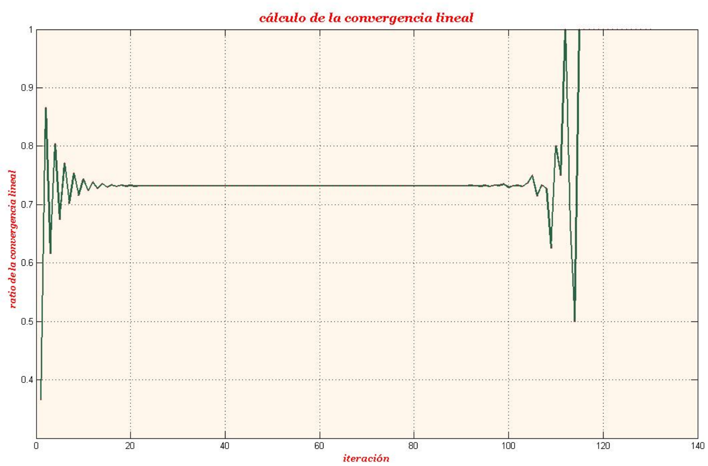
$$x^2 - 1/2 = x \rightarrow x^2 - x - 1/2 = 0 \rightarrow l = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = & 1{,}366025403784438646 \\ \\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} = & -0{,}366025403784438646 \end{cases}$$

Luego entonces tiene dos puntos fijos, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que el primero es un punto de repulsión mientras que el segundo es de atracción.

Estudiamos ahora la convergencia de 5 con el pivote $x = 2$, pero en este caso la función de iteración no es convergente y es fácil ver que en la octava iteración llega a valores como $5{,}33670547300439 * 10^{273}$.

Pasamos ahora al estudio de la misma función de iteración a partir del otro pivote cuando $x = 0{,}6$.

Cálculo de iteraciones de 5 a partir de $x = 0{,}6$



Cálculo del ratio de la convergencia lineal

Para el valor de $x = 0{,}6$ tenemos que converge al punto fijo $x = -0{,}3660254\ldots$ como se puede ver en la primera gráfica. Mientras que el valor de la convergencia de la iteración del punto fijo es de ratio $|1 - \sqrt{3}|$ y que además es lineal aunque en el cálculo se han producido muchos errores ya que tenemos factores como la cancelación catastrófica o la división entre valores próximos a cero que entorpecen nuestros cálculos. Ya que se puede observar que converge a este valor pero a partir de la iteración 100 los errores se hacen notar. Como se puede ver en la segunda gráfica

2.2. Función b)

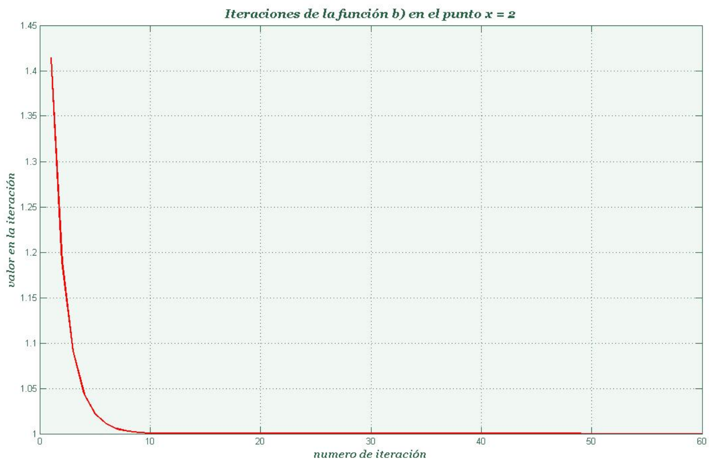
Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_{n+1} = \sqrt{x_n} \\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_n}} \end{aligned} \tag{6}$$

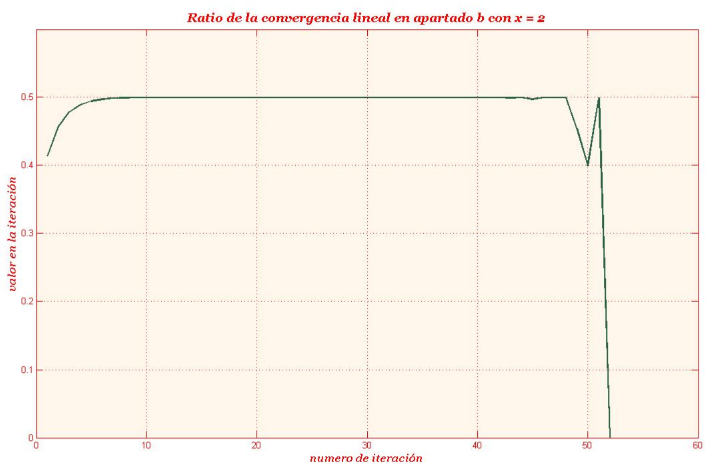
Considerando la función 6 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

$$\sqrt{x_n} = x_n \rightarrow \sqrt{x_n} - x_n = 0 \rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Luego entonces tiene dos puntos fijos, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que el segundo es de atracción mientras que del primero no podemos decir nada ya que no es derivable en ninguna derivada (luego no podemos aplicar el teorema que utilizábamos hasta ahora aunque si lo consideráramos tendríamos que es de repulsión porque la derivada tiende a $+\infty$).



Cálculo de iteraciones de 5 a partir de $x = 2$

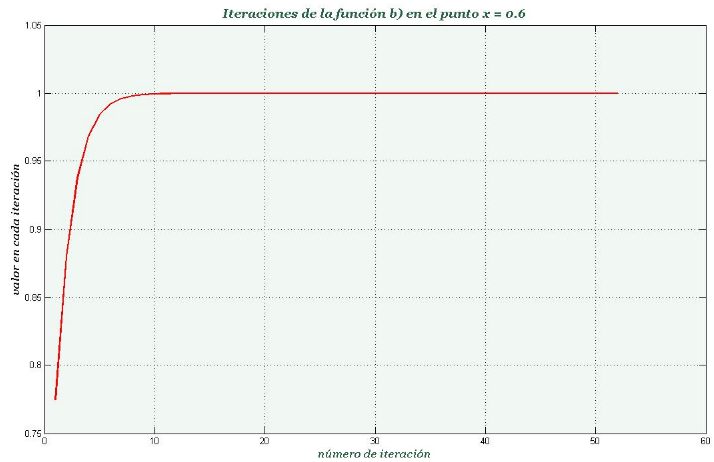


Cálculo del ratio de la convergencia lineal

Para el valor de $x = 2$ tenemos que converge al punto fijo $x = 1$ como se puede ver en la primera gráfica. Mientras que el valor de la convergencia de la iteración del punto fijo es de ratio 0.5 y que además es lineal aunque en el cálculo se han producido muchos errores ya que tenemos factores como la cancelación catastrófica o la división entre valores próximos a cero que entorpecen nuestros cálculos. Ya que se puede observar que converge a este valor pero a partir de la iteración 100 los errores se hacen notar. Como se puede ver en la segunda gráfica

Ahora vamos a estudiar la misma función, pero en este caso partiremos de $x = 0{,}6$

Para el valor de $x = 0{,}6$ tenemos que converge al punto fijo $x = 1$ como se puede ver en la primera gráfica. Mientras que el valor de la convergencia de la iteración del punto fijo es de ratio 0.5 y que además es lineal aunque en el cálculo se han producido muchos errores ya que tenemos factores como la cancelación catastrófica o la división entre valores próximos a cero que entorpecen nuestros cálculos. Ya que se puede observar que converge a este valor pero a partir de la iteración 60 los errores se hacen notar. Como se puede ver en la segunda gráfica



Cálculo de iteraciones de 6 a partir de $x = 0{,}6$

Cálculo del ratio de la convergencia lineal

Luego

2.3. Función c)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_{n+1} = 3x_n(1-x_n) \\ g'(x) &= 3-6x_n \end{aligned} \tag{7}$$

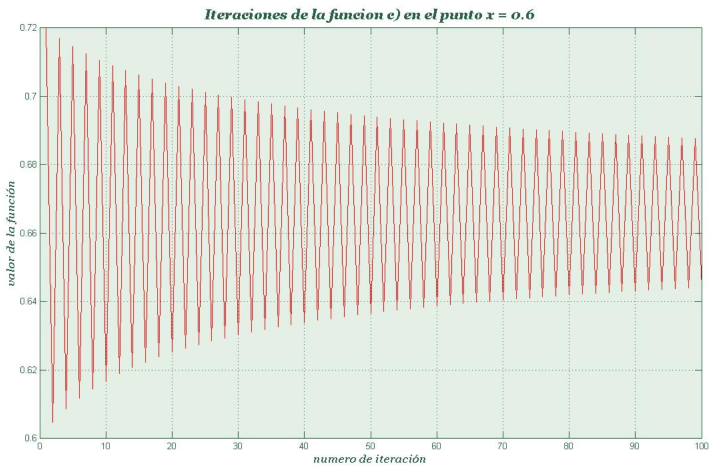
Considerando la función 7 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

$$3x_n(1-x_n) = x_n \rightarrow 2x_n - 3x_n^2 = 0 \rightarrow x_n(2-3x_n) = 0 \rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ 2/3 \end{cases}$$

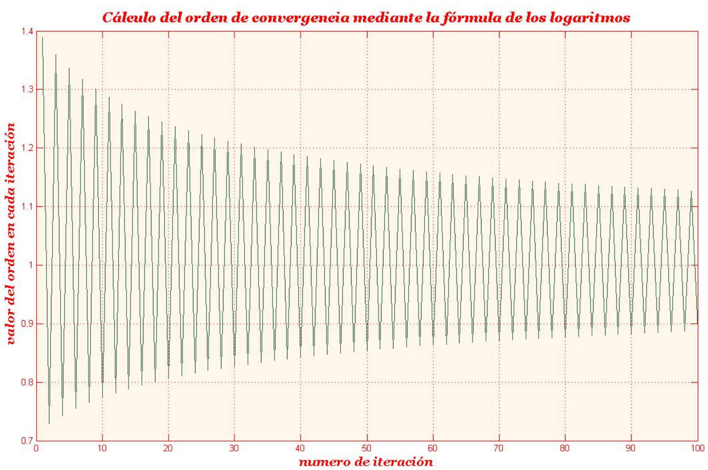
Luego entonces tiene dos puntos fijos, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que el primero es punto de repulsión ya que $|g'(\alpha)| > 1$ (extracto de la página 58 del manual) mientras que del segundo no se puede decir nada ya que la derivada en ese valor vale 1, luego entonces puede que converja o que diverja. Pasamos al estudio de las funciones de iteración.

Veamos primero cuando el pivote es $x = 2$, en este caso, podemos calcular fácilmente con el Matlab y comprobar que en 5 iteraciones ya tenemos un número de 9 cifras, que tiende a menos infinito. Con lo cual tenemos que, en este caso, la función de iteración es divergente hacia $-\infty$ y además muy rápidamente.

Después de haber visto que la primera no converge pasamos a estudiar el caso en el que el pivote es $x = 0{,}6$. Este caso es muy especial ya que converge a 2/3 pero muy lentamente ya que después de 2000 iteraciones seguía teniendo une error absoluto de 0.005.



Cálculo de iteraciones de 7 a partir de $x = 0{,}6$



Cálculo del orden de convergencia

Para el valor de $x = 0{,}6$ tenemos que converge al punto fijo $x = 2/3$ como se puede ver en la primera gráfica. Mientras que el orden de la convergencia de la iteración del punto fijo es lineal ya que, como se puede ver en la segunda gráfica, mediante la fórmula de los logaritmos, el límite de esa sucesión de valores se aproxima a 1. Es decir, que el orden es lineal. Aunque como hemos dicho antes converge muy lentamente a 2/3.

2.4. Función d)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_{n+1} = 2x_n(1-x_n) \\ g'(x) &= 2-4x_n \\ g''(x) &= -4 \end{aligned} \tag{8}$$

Considerando la función 8 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

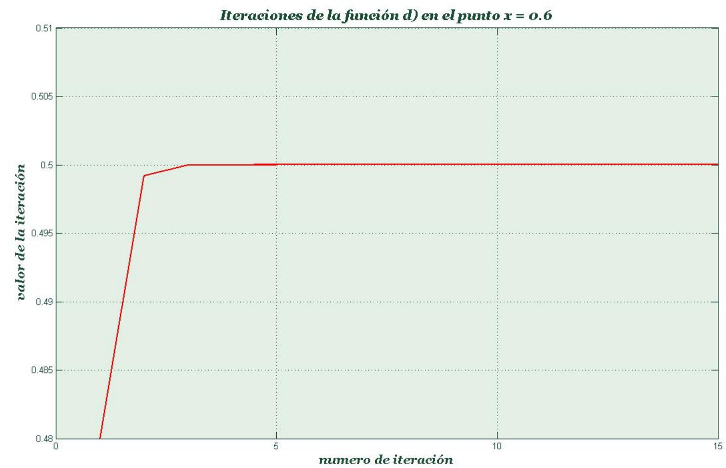
$$2x_n(1-x_n) = x_n \rightarrow x_n - 2x_n^2 = 0 \rightarrow x_n(1-2x_n) = 0 \rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$$

Luego entonces tiene dos puntos fijos, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que el primero es punto de repulsión ya que $|g'(\alpha)| > 1$ (extracto de la página 58 del manual) mientras que el segundo es un punto de atracción que además cumple que tiene la primera derivada nula, luego vamos a ver como se comporta la función de iteración cercana a ese punto;pasamos pues al estudio de las funciones de iteración.

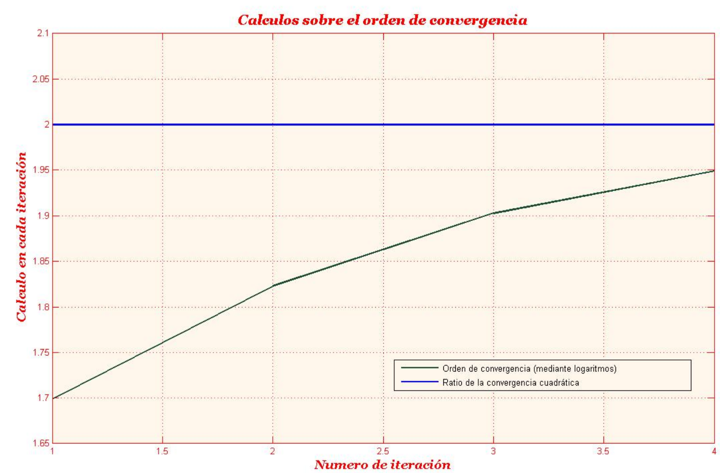
Veamos primero cuando el pivote es $x = 2$, en este caso, podemos calcular fácilmente con el Matlab y comprobar que en 5 iteraciones ya tenemos un número de 14 cifras, que tiende a menos infinito. Con lo cual tenemos que, en este caso, la función de iteración es divergente hacia $-\infty$ y además muy rápidamente.

$$\begin{aligned} n_1 &= -0{,}00000000000004 \cdot 10^{14} \\ n_2 &= -0{,}00000000000040 \cdot 10^{14} \\ n_3 &= -0{,}00000000003280 \cdot 10^{14} \\ n_4 &= -0{,}00000021523360 \cdot 10^{14} \\ n_5 &= -9{,}26510094425920 \cdot 10^{14} \end{aligned}$$

Después de haber visto que la primera no converge pasamos a estudiar el caso en el que el pivote es $x = 0{,}6$. Este caso es muy especial ya que converge a 1/2 pero muy rápidamente, a diferencia del anterior apartado en el que ocurría todo lo contrario ya que en 5 iteraciones tenemos el valor exacto.



Cálculo de iteraciones de 8 a partir de $x = 0,6$



Cálculos del orden de convergencia

Para el valor de $x = 0,6$ tenemos que converge al punto fijo $x = 1/2$ como se puede ver en la primera gráfica. Mientras que el orden de convergencia de la función de iteración es cuadrático como aparece en la segunda gráfica (linea verde) y además con un ratio que vale 2 (como muestra la linea azul), cabe decir además que estos resultados están extractos sobre 5 iteraciones ya que a la 5ª iteración la función llega al valor exacto. Destacar también la diferencia con el caso anterior en la cual convergía linealmente mientras que cambiando un único valor tenemos una convergencia cuadrática.

2.5. Función e)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$\begin{aligned} g(x) &= x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} \\ g'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{x_n^{3/2}}} \end{aligned} \tag{9}$$

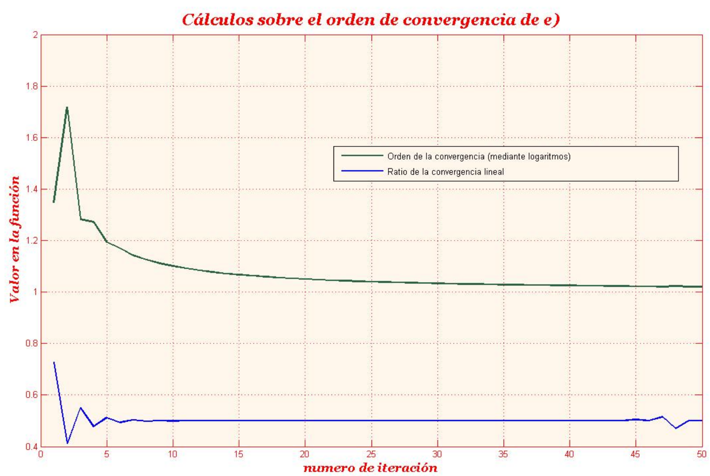
Considerando la función 9 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

$$\frac{1}{\sqrt{x_n}} = x_n \rightarrow x_n\sqrt{x_n} = 1 \rightarrow x_n^3 = 1 \rightarrow l = 1$$

Luego entonces tiene un único punto fijo, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que es punto de atracción ya que $|g'(\alpha)| = 1/2 < 1$ (extracto de la página 58 del manual).

Pasemos al estudio de las funciones de iteración e) en los dos pivotes como se puede ver en las siguientes páginas.

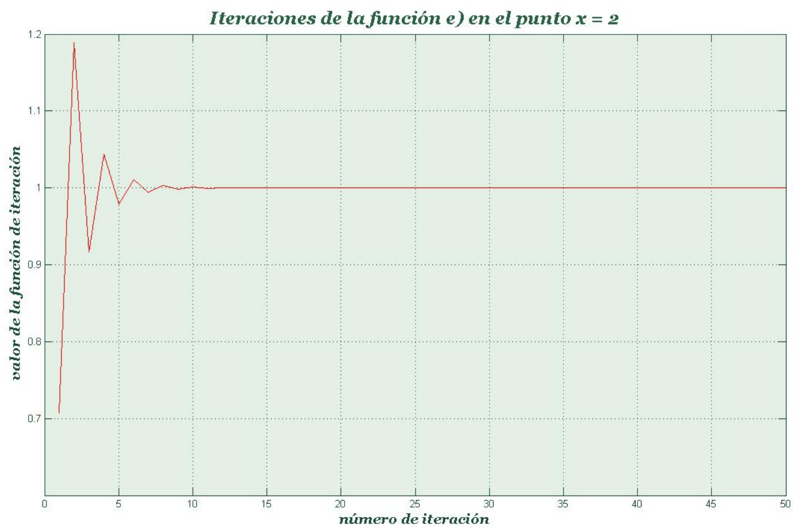
Cálculo de iteraciones de 9 a partir de $x = 0{,}6$



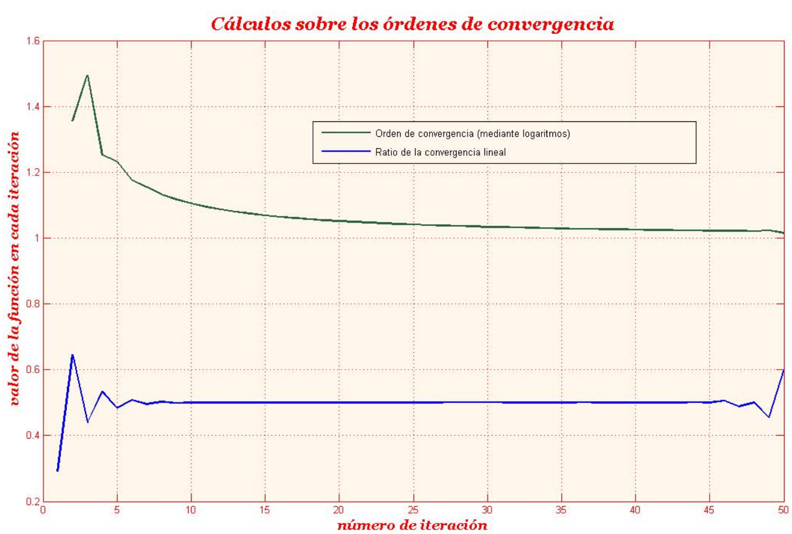
Cálculos del orden de convergencia

Para el valor de $x = 0{,}6$ tenemos que converge al punto fijo $x = 1$ como se puede ver en la primera gráfica. Mientras que el orden de convergencia de la función de iteración es lineal como aparece en la segunda gráfica (linea verde) y además con un ratio que vale $1/2$ (como muestra la linea azul), cabe decir además que esta función es oscilante pero converge ya que el error en cada iteración cambia de signo además de decrecer (lo cual quiere decir que converge). A las 20 iteraciones se puede ver claramente la convergencia pero hasta la 50 no se observa numéricamente estable ya que no llega a aproximarse del todo.

Para el valor de $x = 2$ tenemos que converge al punto fijo $x = 1$ y además todos los datos son iguales, solo destacar la observación de errores (posiblemente de cancelación y de división entre valores próximos al cero) en el cálculo del ratio de la convergencia lineal. En el resto son completamente igual los dos estudios.



Cálculo de iteraciones de 9 a partir de $x = 2$



Cálculos del orden de convergencia

2.6. Función f)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1 \\
g'(x) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

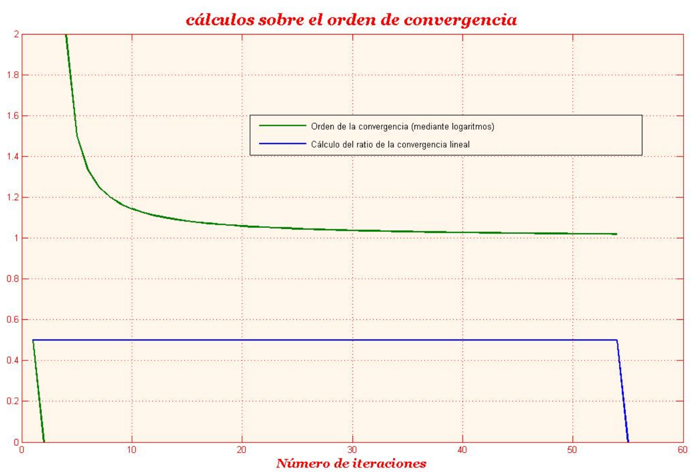
Considerando la función 10 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

$$0{,}5x_n - 1 = x_n \rightarrow 0{,}5x_n = -1 \rightarrow l = -2$$

Luego entonces tiene un único punto fijo, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que es punto de atracción ya que $|g'(\alpha)| = 1/2 < 1$ (extracto de la página 58 del manual).

Pasemos al estudio de las funciones de iteración e) en los dos pivotes como se puede ver en las siguientes páginas.

Cálculo de iteraciones de 10 a partir de $x = 0{,}6$



Cálculos del orden de convergencia

Para el valor de $x = 0{,}6$ tenemos que converge al punto fijo $x = -2$ como se puede ver en la primera gráfica. Utilizando la segunda gráfica llegamos a que la función tiene un orden de convergencia lineal con un ratio de 0.5. Decir además que la función es estable hasta la iteración 55 ya que a partir de aquí llegamos casi el valor exacto y por tanto el cálculo del los errores se hace inestable y se producen errores.

Para el valor de $x = 2$ tenemos que converge al punto fijo $x = -2$ y además todos los datos son iguales que en caso anterior, es decir, converge linealmente y con ratio 0.5.

2.7. Función g)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

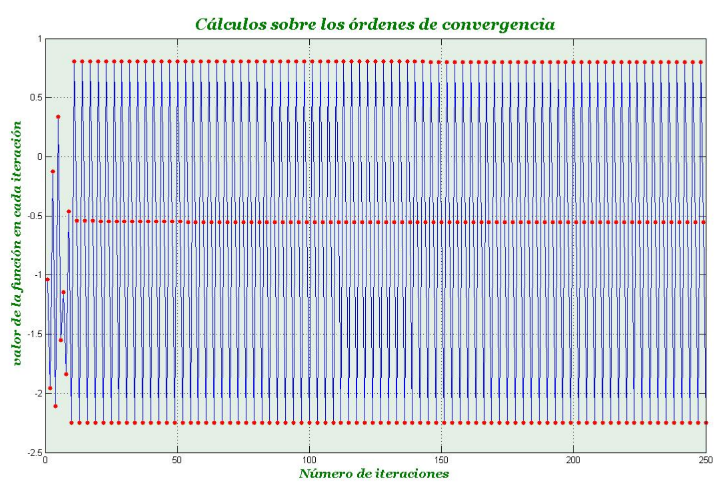
$$\begin{aligned} g(x) &= x_{n+1} = x^2{}_n + x_n - 2 \\ g'(x) &= 2x_n + 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Considerando la función 11 pasamos ahora a ver si tiene algún punto fijo:

$$x^2{}_n + x_n - 2 = x_n \rightarrow x^2{}_n = 2 \rightarrow l = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego entonces tiene dos puntos fijos, y utilizando lo explicado en el ejercicio anterior y gracias a la derivada estudiada anteriormente podemos decir que ambos son puntos de repulsión ya que $|g'(\alpha)| > 1$ (extracto de la página 58 del manual);pasamos pues al estudio de las funciones de iteración en ambos puntos.

Este caso es muy especial ya que la función de iteración con el pivote $x = 0{,}6$ no converge a ningún valor (los puntos fijos son de repulsión) pero si consideramos subsucesiones de esta función tenemos tres posibles valores donde converge como muestran los puntos de esta figura, pero si calculamos muchísimas iteraciones parece ser que no converge a ningún valor (es decir no se estabiliza a ningún punto).



Cálculo de iteraciones de 11 a partir de $x = 0{,}6$

Sin embargo, en el caso en que $x = 2$ la función se hace muy grande rápidamente, en la novena iteración llega a $1{,}13575764805269 \cdot 10^{162}$.

2.8. Función h)

Estudiaremos ahora la siguiente función de iteración:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x_{n+1} = |x_n| \\
g'(x) &= \pm 1
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Considerando la función 12 tenemos que la función de iteración tiene la propiedad especial de que todo número real positivo es punto fijo; otra propiedad importante es que la derivada en cualquier punto antes mencionado vale uno. Puede ocurrir cualquier cosa, pero de todas formas sabemos que si partimos de un punto positivo la función de iteración lo devuelve a el mismo y así repetidamente, es decir, la función converge a el mismo siempre. Por tanto no tenemos mucho mas que decir sobre esta función.