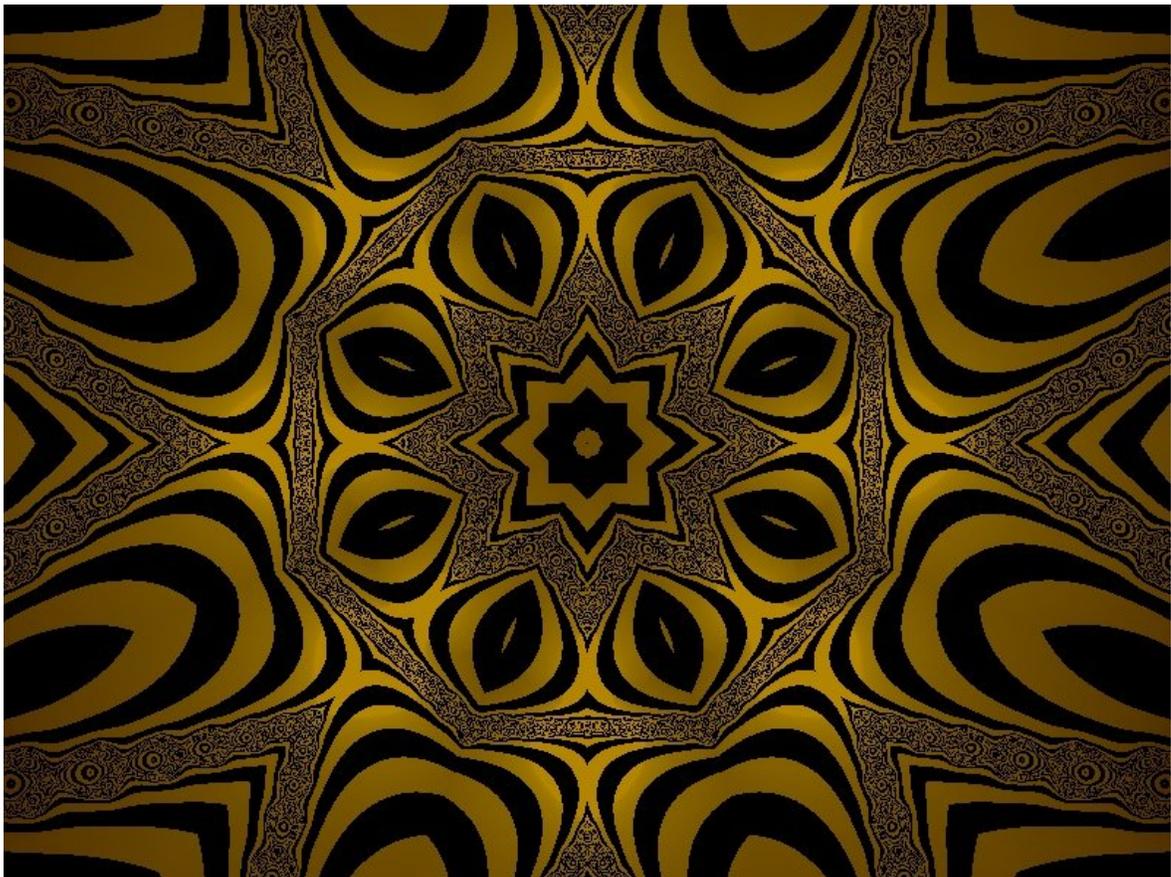


Práctica 3 de aproximación numérica L^AT_EX

Juan Miguel Ribera Puchades

13 de junio de 2007



Índice

1. Requisitos teóricos	4
1.1. Evaluación de un polinomio mediante el algoritmo de Horner .	4
1.2. Interpolación de Lagrange en nodos equidistantes	5
1.2.1. Cálculo de los nodos equidistantes	5
1.2.2. Error en la interpolación de Lagrange	6
1.3. Interpolación de Lagrange en nodos de Chebyshev	7
1.3.1. Cálculo de los nodos de Chebyshev	7
1.3.2. Error en la interpolación de Lagrange	7
1.4. Interpolación de Hermite	8
1.4.1. Modificación del archivo 'difdiv.m'	8
1.4.2. Error en nodos equidistantes	9
1.4.3. Error en nodos de Chebyshev	9
1.5. Errores teóricos	10
1.5.1. Error en nodos equidistantes	10
1.5.2. Error en nodos de Chebyshev	10
2. Estudio de la Función $y = \sin(x\pi)$	11
2.1. Lagrange en nodos equidistantes	11
2.2. Lagrange en nodos Chebyshev	13
2.3. Hermite en nodos equidistantes	16
2.4. Hermite en nodos Chebyshev	18
2.5. Observaciones finales	19
3. Estudio de la Función $y = \exp(x)$	21
3.1. Lagrange en nodos equidistantes	21
3.2. Lagrange Chebyshev	22
3.3. Hermite en nodos equidistantes	24
3.4. Hermite en nodos Chebyshev	25
3.5. Observaciones finales	26
4. Estudio de la Función de Runge	28
4.1. Lagrange en nodos equidistantes	28
4.2. Lagrange en nodos Chebyshev	31
4.3. Hermite en nodos equidistantes	34
4.4. Hermite en nodos Chebyshev	36
4.5. Observaciones finales	38

5. Conclusiones	40
6. Enlaces a rutinas	41

1. Requisitos teóricos

1.1. Evaluación de un polinomio mediante el algoritmo de Horner

Vamos a estudiar la evaluación de polinomios mediante el algoritmo de Horner (o regla de Ruffini) basado en que evaluar un polinomio $x = z$ es formalmente equivalente a extraer el resto de la división de $p(x)$ por el factor lineal $(x - z)$. Sabemos que el algoritmo de Horner es importante ya que con tan solo n multiplicaciones y n sumas se puede evaluar un polinomio con $n + 2$ cantidades. El algoritmo de Horner utiliza el método de la multiplicación encajada lo que hace que sea tan óptimo. Inicialmente partimos de un polinomio de la forma $p(x) = c_0 + c_1(x - c_0) + \dots + c_n(x - c_0)(x - c_1) \cdots (x - c_{n-1})$ y utilizaremos el programa de diferencias divididas para calcularlo mediante el algoritmo de Horner. Este programa está disponible en la siguiente página: <http://mural.uv.es/juanripu/difdiv.m> donde se puede encontrar algoritmo entero, aunque ahora les vamos a presentar solo unas pequeñas variaciones al programa inicial del que partíamos ya que había que implementar el algoritmo de Horner y corregir algunas variables que actuaban como vectores.

```
62 P=a(n);|
63 for q=n-1:-1:1
64     P=a(q) + P.*(z - x(q));
65 end
66
67 % Calculo de la cota del error en x=z.
68 cota=M;
69 for i=1:n
70     cota=cota.*(z - x(i))/i;
71 end
```

Figura 1: Algoritmo para evaluar el polinomio y acotar el error

En conclusión, ahora disponemos de un programa que calcula las diferencias divididas y que además nos calcula el valor del polinomio interpolador mediante el algoritmo de Horner.

1.2. Interpolación de Lagrange en nodos equidistantes

1.2.1. Cálculo de los nodos equidistantes

Como vamos a estudiar los polinomios de Lagrange mediante nodos equidistantes vamos primero a estudiar cuales serán esos nodos que vamos a utilizar en las tres funciones que vamos a interpolar. Estos nodos siguen la siguiente fórmula :

$$x_i = vi + i \cdot h \quad / \quad h = \frac{li}{nn - 1} \quad (1)$$

Donde:

- x_i es el nodo i -ésimo
- vi es el valor inicial del intervalo
- li es la longitud del intervalo sobre el que queremos calcular los nodos
- nn es el número de nodos que queremos obtener

Luego entonces en nuestro caso obtenemos la siguiente fórmula:

$$x_i = -1 + i \cdot \frac{2}{nn - 1}$$

donde nn variará entre 10, 20, 40 y 80 e $i = 0, 1, \dots, nn$.

1.2.2. Error en la interpolación de Lagrange

Suponiendo $f(x)$ una de nuestras funciones que sea $n + 1$ veces derivables en $[-1, 1]$ y $x_0, x_1, \dots, x_n \in [-1, 1]$ puntos diferentes del intervalo. Si $P_n(x)$ es el polinomio interpolador de Lagrange de cada función con nodos x_0, x_1, \dots, x_n entonces para cada $x \in [-1, 1]$ existe ξ_x tal que:

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \right| \quad (2)$$

con $\min(x_0, x_1, \dots, x_n) < \xi_x < \max(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Aunque el error se tenga bien definido, en esta práctica se pide la búsqueda de valores de error en funciones que debemos derivar hasta 81 veces, con lo cual necesitamos alguna más fácil de calcular, o al menos poder acotarlo. Además comprobar cual es el $\max(x_0, x_1, \dots, x_n)$ necesitamos muchos cálculos, y en algún caso conocer las raíces de un polinomio de grado 79. Una posible cota del error sería:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \left| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \right| \quad (3)$$

siendo el supremo $\bigvee_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$

Este trabajo es muy complicado con lo cual nos vamos a basar en el cálculo de una cota aproximada del error teórico; mediante el algoritmo 1 podemos considerar una cota del error para cada punto donde se comprueba la iteración ya que el algoritmo evalúa la cota de error $|f(z) - P_n(z)|$ sabiendo que la derivada que aparece en la formula del error esta acotada por M y esta derivada se puede calcular fácilmente en al menos dos casos de los tres propuestos. Luego utilizando el algoritmo podremos aproximarnos a la cota teórica.

1.3. Interpolación de Lagrange en nodos de Chebyshev

1.3.1. Cálculo de los nodos de Chebyshev

Aquí estudiaremos inicialmente la interpolación de Lagrange en nodos de Chebyshev de las funciones mediante nodos con una peculiaridad. Para saber inicialmente cuáles serán esos nodos partimos de la fórmula:

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad (4)$$

Donde:

- x_i es el nodo i -ésimo
- i es la iteración i -ésima
- n es el número de nodos que queremos obtener

donde n variará entre 10, 20, 40 y 80 e $i = 0, 1, \dots, n$.

1.3.2. Error en la interpolación de Lagrange

En este caso el cálculo del error se simplifica mucho porque nos quita un problema en el cálculo del error en 2 ya que, usando que el polinomio de Chebyshev hace que el polinomio que multiplica a la derivada del error sea mínimo en el intervalo en que estamos trabajando, luego entonces tenemos que en este caso:

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

Y por lo tanto al aplicarle la cota del error 3 estudiada anteriormente y usando que el intervalo en el que trabajamos es $[-1, 1]$ tenemos pues que:

$$|(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)| = \frac{1}{2^{n-1}}|T_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Lo cual facilita mucho el cálculo del error teórico ya que podemos hacer una aproximación a la cota del error mediante el algoritmo 1 bastante buena.

1.4. Interpolación de Hermite

1.4.1. Modificación del archivo 'difdiv.m'

Usando los nodos equidistantes calculados anteriormente nos vamos a centrar ahora en el estudio de la interpolación de Hermite en el caso de una

```

7  % INPUT: x es el vector de nodos (fila o columna, no importa)
8  %        vf es el vector de valores f(x(i)) (si no es columna
9  %           cogemos el traspuesto.
10 %        vff es el vector de derivadas f'(x(i)) (si no es columna
11 %           se coge el traspuesto).
25 % Comprobacion de los datos
26 n=length(x); % numero de nodos (el primero con indice 1)
27 [nf, nc]=size(vf); % dimensiones de vf
28 if (nf == 1)
29     vf=vf'; % si el numero de filas es 1, trasponemos.
30 end
31 [nf, nc]=size(vff); % dimensiones de vf
32 if (nf == 1)
33     vff=vff'; % si el numero de filas es 1, trasponemos.
34 end
35 ff=zeros(n,n); % valores iniciales nulos
36 % Tabla de diferencias divididas
37 ff(:,1)=vf; % primera columna de ff.
38 for j=2:n % hay tantas columnas como nodos
39     for i=j:n % cada fila empieza en la diagonal
40         ini=i-j+1; % indice inicial
41         num=ff(i,j-1)-ff(i-1,j-1);
42         den=x(i)-x(ini);
43         if (den==0)
44             r= vff(i);
45         else
46             r= num / den; % Def. normal.
47         end
48         ff(i,j)=r; % Incluye en la matriz
49     end
50 end

```

Figura 2 :algoritmo derdifdiv.m (modificaciones)

que introduciremos paramétricamente mediante el vector 'vff'. Para poder hacer el estudio mediante la interpolación de Hermite era necesario que cada valor del vector inicial 'x' apareciese dos veces y seguidas; así como el valor de la función y el valor de la derivada en ese punto (para que la diferencia dividida fuese 0 y entonces cogiera el algoritmo 1.4.1 el valor de la derivada).

derivada, es decir, en el estudio de las interpolaciones en que coinciden valores de la función y su derivada en los nodos. Para ello, utilizaremos que las funciones son derivables en cualquier valor de la recta real (mas concretamente en el intervalo que estamos estudiando) y con esto definimos un nuevo 'difdiv.m' llamado 'derdifdiv.m' en el cual hemos variado las líneas donde pide la derivada la función (en caso que la necesite) y le hemos dicho que directamente coja el valor de la derivada

1.4.2. Error en nodos equidistantes

El error en la interpolación de Hermite es diferente respecto la interpolación de Lagrange, por ello veamos cual es la nueva fórmula del error. Si consideramos que $P(x)$ es el único polinomio de grado $N = m_0 + m_1 + \dots + m_n + n$ (donde en nuestro caso $m_i = 1 \forall i$) que interpola los valores de la función y de su derivada entonces se puede demostrar que:

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} (x-x_0)^{m_0+1} (x-x_1)^{m_1+1} \dots (x-x_n)^{m_n+1} \right|$$

Destacar además que no es necesario cambiar la fórmula del cálculo del error en mi rutina del matlab 'derdifdiv.m' ya que, al introducir dos veces cada nodo tenemos calculado el error que acabamos de introducir. Solo es necesario que nos fijemos en que, en el cálculo de la cota de la derivada debemos estudiar la derivada $N+1$, que en nuestro caso es la derivada $2n+1$ ya que solo estamos estudiando la interpolación en la primera derivada. Por lo tanto no será necesario que calculemos de nuevo las derivadas (o que apliquemos la forma de Newton como en la función 3) ya que nos servirán las calculadas anteriormente.

1.4.3. Error en nodos de Chebyshev

En este caso el cálculo del error se simplifica mucho porque nos quita un problema en el cálculo del error en 1.4.2 ya que, usando que el polinomio de Chebyshev hace que el polinomio que multiplica a la derivada del error sea mínimo en el intervalo en que estamos trabajando, luego entonces tenemos que en este caso:

$$(x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = 2^{-2n+2} T_n(x)$$

Y por lo tanto al aplicarle la cota del error modificada para el caso de la interpolación de Hermite y usando que el intervalo en el que trabajamos es $[-1, 1]$ tenemos pues que:

$$|(x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2| = 2^{-2n+2} |T_n(x)| \leq 2^{-2n+2}$$

Lo cual facilita mucho el cálculo del error teórico ya que podemos hacer una aproximación a la cota del error mediante el algoritmo 1 bastante buena.

1.5. Errores teóricos

1.5.1. Error en nodos equidistantes

El error teórico en la interpolación de Lagrange se puede acotar mediante el siguiente algoritmo que vamos a explicar. Ya que si consideramos una interpolación de Lagrange, sabemos que el error teórico es mayor en el punto medio entre el extremo y el nodo contiguo. Luego entonces podemos acotar el polinomio de grado $n + 1$ por el producto siguiente, donde h es la distancia entre nodos equidistantes.

$$|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \leq \prod_{i=1}^{nodos} \frac{(2i - 1)h}{2} = \frac{h \cdot (2 * nodos - 1)!!}{2^{nodos}}$$

Conociendo además la cota de la derivada $n + 1$ obtendremos además la cota más próxima al error teórico.

En el caso de Hermite es casi idéntico al anterior, con la única diferencia que ahora tenemos los polinomios anteriores elevados al cuadrado. Por eso el cálculo es el mismo aunque se consideran la mitad de nodos y además el resultado elevado al cuadrado.

1.5.2. Error en nodos de Chebyshev

A diferencia el caso anterior, la cota en este es más fácil de calcularla ya que es una propiedad de los nodos de Chebyshev la de minimizar el polinomio de grado $n + 1$ como se puede ver en [1.3.2](#). Luego lo único que nos queda por controlar en este caso es la derivada $n + 1$ para saber cual es la cota del error teórico. Esta es una gran ventaja de los nodos de Chebyshev.

En el caso de la interpolación de Hermite lo podemos encontrar también anteriormente en [1.4.3](#); ya que como hemos dicho esta es una propiedad vital de los nodos de Chebyshev

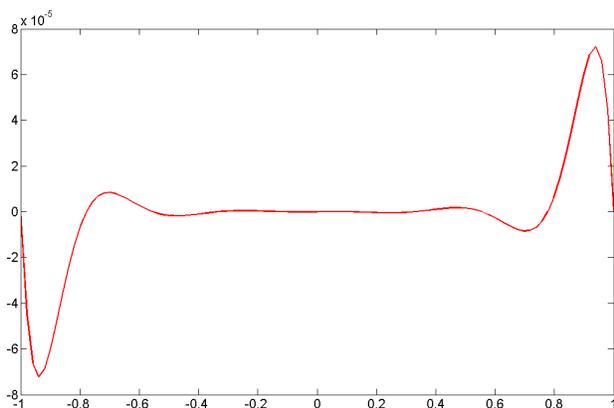
2. Estudio de la Función $y = \sin(x\pi)$

Vamos a estudiar las interpolaciones en el intervalo $[-1, 1]$ de la función:

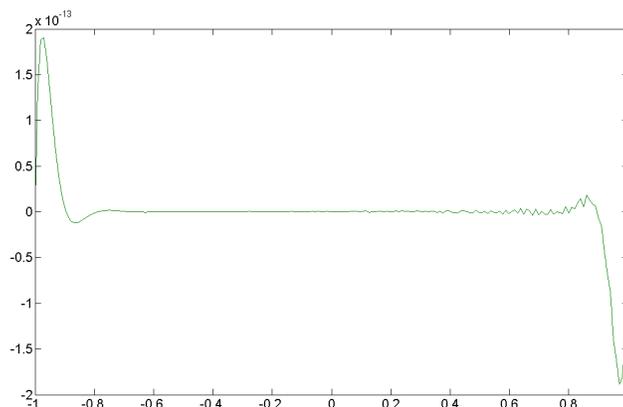
$$y = \sin(x\pi) \tag{5}$$

2.1. Lagrange en nodos equidistantes

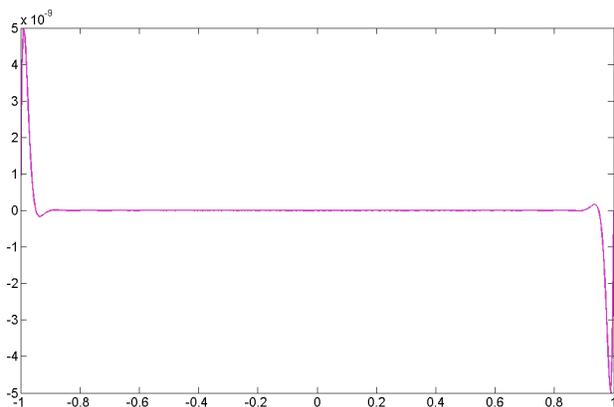
Utilizando los nodos que hemos calculado en 1 procederemos a comprobar la interpolación a la función 5 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. Aquí se pueden ver las gráficas de los errores cometidos en las interpolaciones a la función 5.



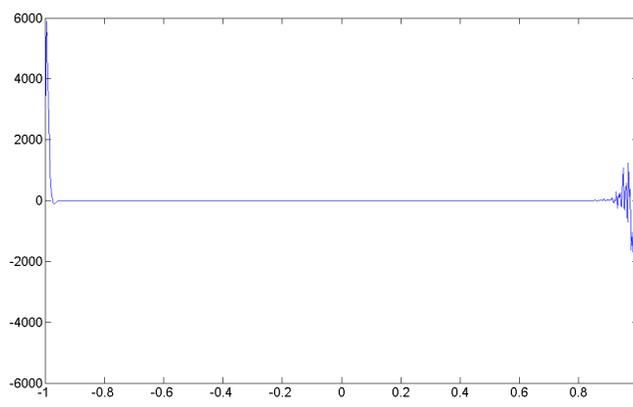
Error de interpolación de 5 en 10 nodos



Error de interpolación de 5 en 20 nodos



Error de interpolación de 5 en 40 nodos



Error de interpolación de 5 en 80 nodos

Para calcular las gráficas anteriores hemos utilizado el algoritmo 1 modificado que nos ha proporcionado todos los datos necesarios para que podamos estudiar esta interpolación. Hemos mostrado todas las gráficas porque cada una es de un tipo aunque mostrando la primera y la última hubiésemos tenido una forma clara de ver como se comportaba en esta función la interpolación. En la siguiente tabla se han expuesto los datos relevantes de la interpolación usando siempre las fórmulas mostradas en los requisitos teóricos. Consideramos el error absoluto δ y vemos los datos que nos proporcionan las interpolaciones.

nodos	media real de δ	cota real de δ	media teórica apr. de δ	cota teórica apr. de δ	sup de $f^{(n+1)}$
10	$1,164551 \cdot 10^{-6}$	$7,22354 \cdot 10^{-5}$	$3,195722 \cdot 10^{-5}$	$1,560908 \cdot 10^{-4}$	$\pi^{11} \simeq 2,94 \cdot 10^5$
20	$5,481726 \cdot 10^{-16}$	$1,90680 \cdot 10^{-13}$	$6,744270 \cdot 10^{-26}$	$2,513303 \cdot 10^{-13}$	$\pi^{21} \simeq 2,75 \cdot 10^{10}$
40	$5,655198 \cdot 10^{-16}$	$4,98950 \cdot 10^{-9}$	$4,509848 \cdot 10^{-43}$	$3,963795 \cdot 10^{-36}$	$\pi^{41} \simeq 2,41 \cdot 10^{20}$
80	$7,433431 \cdot 10^{-10}$	$5,88488 \cdot 10^3$	$3,059167 \cdot 10^{-109}$	$4,697062 \cdot 10^{-93}$	$\pi^{81} \simeq 1,85 \cdot 10^{40}$

Cabe destacar algunas cosas de los datos mostrados anteriormente ya que se puede ver que la diferencia entre el error real y el error teórico aproximado aumenta cuando mayor es el número de nodos interpolados, esto es causado por el error que se produce en el cálculo de la interpolación hacia los extremos del intervalo donde queremos calcular, ya que ahí es donde mayores son los errores reales; destacar que en este caso hemos podido calcular el valor de la derivada $n + 1$ ya que era $\pi^{n+1} \cos(x\pi)$ que alcanza su valor máximo en el valor $x = 0$ luego esto nos ha servido para luego hacer el cálculo de la cota teórica del error. Un ejemplo muy importante de la diferencia entre el estudio de la interpolación entre el extremo y el interior del intervalo se puede ver en el caso de la interpolación con 80 nodos ya que el error real en el punto 401 es de $1,3603106564 \cdot 10^{-15}$ mientras que en el punto 2 el error real es $4,9205147 \cdot 10^3$.

2.2. Lagrange en nodos Chebyshev

Partiendo ahora de los nodos calculados mediante la forma 4 vamos a interpolar la función 5 mediante la interpolación de Lagrange en nodos de Chebyshev. Para ello utilizaremos la siguiente rutina que será igual en las tres funciones que vamos a estudiar donde 'corregido.m' es el archivo 'difdiv.m' modificado.

```

1  x = [];
2  z = [];
3  nodos = 10;
4  for i = 1 : nodos
5      v = cos((2*(i-1) + 1)*pi)/(2*(nodos+1));
6      x = [x, v];
7  end
8  vf = sin(pi*x);
9      for j = 1 : (10*nodos)
10     w = cos((2*(j-1) + 1)*pi)/(2*(10*nodos+1));
11     z = [z, w];
12 end
13 [ff, a, P, cota]=corregido(x, vf, z, pi^11);
14 vv = sin(pi*z);
15 e= P - vv;
16 m = median(abs(e))
17 M = max(abs(e))
18 c = median(abs(cota))
19 C = max(abs(cota))

```

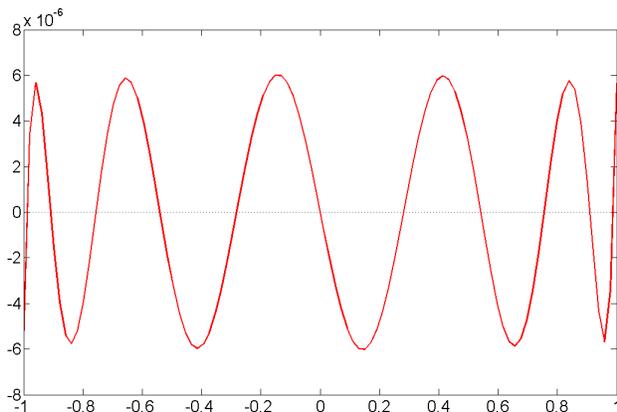
Figura 2: Algoritmo para calcular la interpolación en nodos de Chebyshev

Al estudiar la interpolación entre los 4 valores diferentes de nodos (con su acotación de derivada correspondiente calculada anteriormente) tenemos que nos proporciona los siguientes datos en los errores de aproximación a la función real.

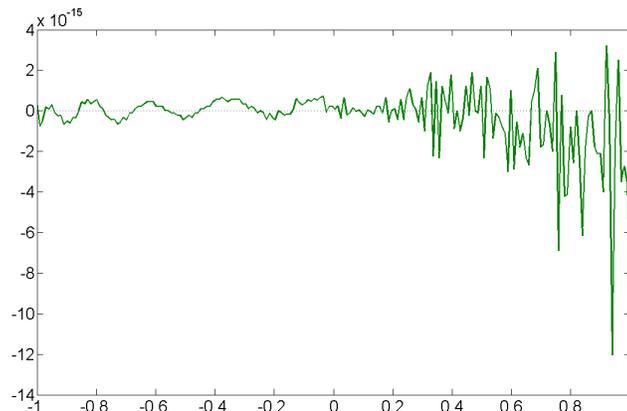
nodos	media real de δ	cota real de δ	media teórica apr. de δ	cota teórica apr. de δ
10	$4,2618506 \cdot 10^{-6}$	$6,0025260 \cdot 10^{-6}$	$5,0844211 \cdot 10^{-6}$	$7,1976864 \cdot 10^{-6}$
20	$4,4408920 \cdot 10^{-16}$	$1,5022705 \cdot 10^{-14}$	$3,6401789 \cdot 10^{-16}$	$5,1428457 \cdot 10^{-14}$
40	$2,2204460 \cdot 10^{-16}$	$6,6627259 \cdot 10^{-14}$	$4,6253994 \cdot 10^{-42}$	$6,5692536 \cdot 10^{-42}$
80	$1,5579499 \cdot 10^{-7}$	$1,2290275 \cdot 10^6$	$1,8837438 \cdot 10^{-105}$	$2,6517177 \cdot 10^{-105}$

2 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $Y = \sin(X\pi)$

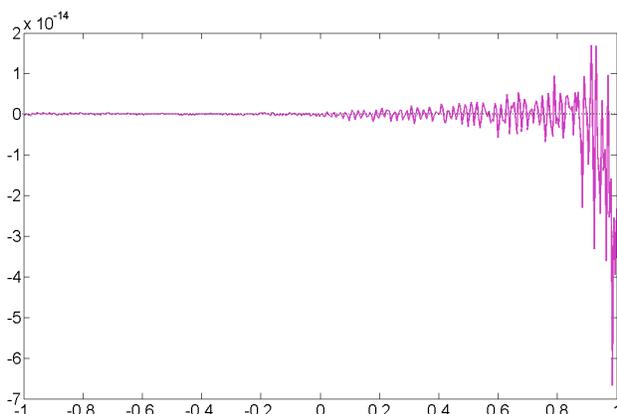
Pero para comprender mejor este tipo de interpolación es necesario observar las gráficas en los 4 nodos posibles que nos muestran las diferencias con la interpolación en nodos equidistantes.



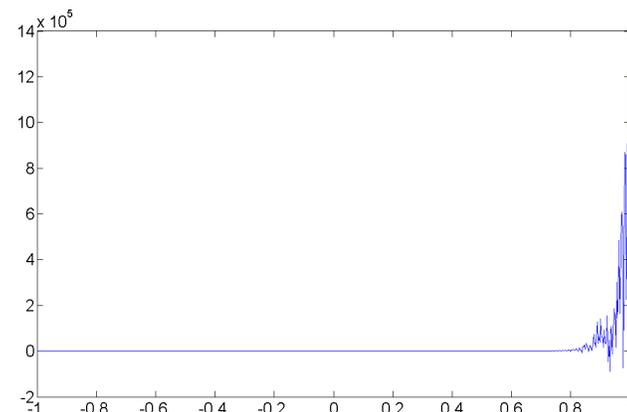
Error de interpolación de 5 en 10 nodos



Error de interpolación de 5 en 20 nodos



Error de interpolación de 5 en 40 nodos

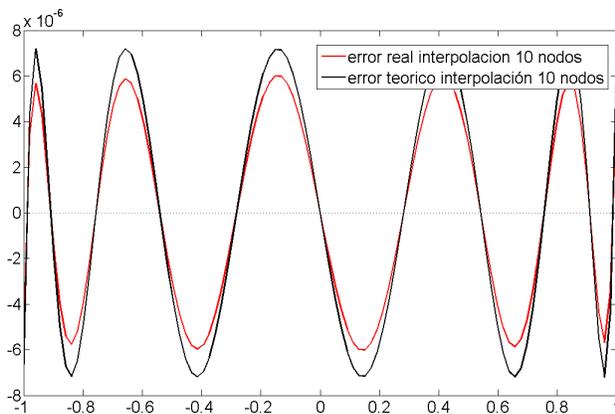


Error de interpolación de 5 en 80 nodos

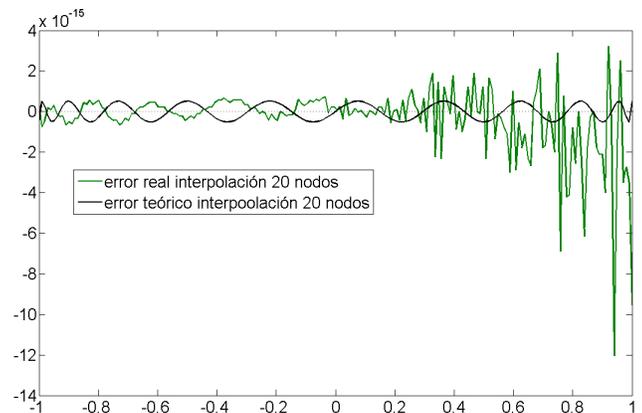
Como se puede ver hay diferencias entre las gráficas anteriores y éstas, y no solo en los 'sitios' donde aparecen los errores, sino en la escala del error. Podemos ver que el error en la interpolación de 10 nodos tiene forma cosenoide porque $f^{(-11)}(x) = \pi^{11} \cos(x\pi)$ y porque si utilizamos los nodos de chebyshev tenemos que el polinomio se hace mínimo luego entonces modifica mínimamente la gráfica de la derivada 11. Del resto de gráficas podríamos decir que son errores máquina ya que si nos fijamos en los errores teóricos son mucho menores que los reales; esto es causado por la gran cantidad de cálculos en las diferencias divididas donde se empiezan a arrastrar errores.

2 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $Y = \sin(X\pi)$

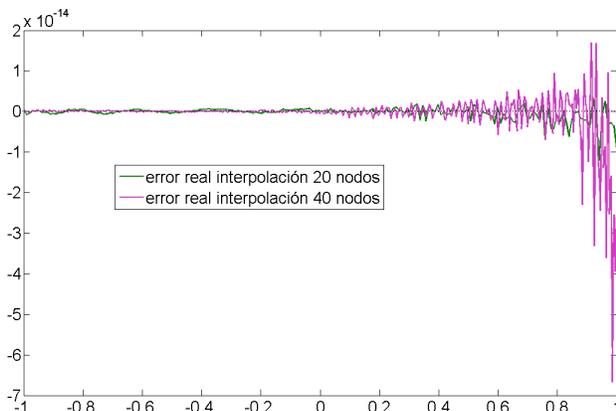
Un problema muy importante que se presenta en el estudio de estas interpolaciones son los errores de máquina, es decir, errores causados en la computadora (probablemente en el cálculo de las diferencias divididas) que se arrastran en el algoritmo hasta provocar errores extremos. En los cálculos de las interpolaciones de 10 y 20 nodos no se perciben mucho, pero a partir de aquí, el error en las interpolaciones se dispara extremadamente. En el apartado 4.2 veremos un ejemplo muy importante de este hecho. Aquí presentamos dos gráficas donde se superponen el error teórico y real en el estudio de las interpolaciones de 10 y 20 nodos mediante los nodos de Chebyshev.



error teórico y real en interpolación de 10 nodos de 5



error teórico y real en interpolación de 20 nodos de 5

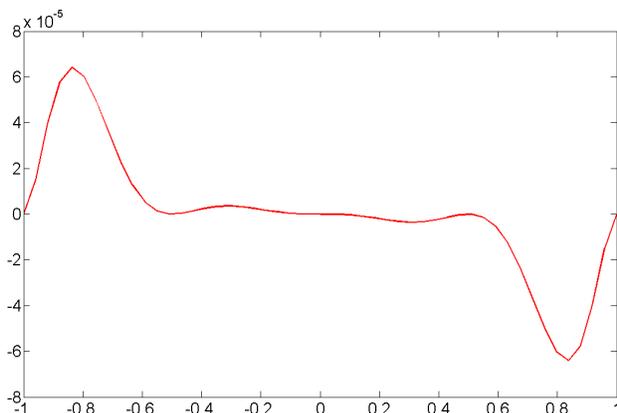


durante el estudio de la interpolación observando además que en la interpolación de 40 nodos se disparan más.

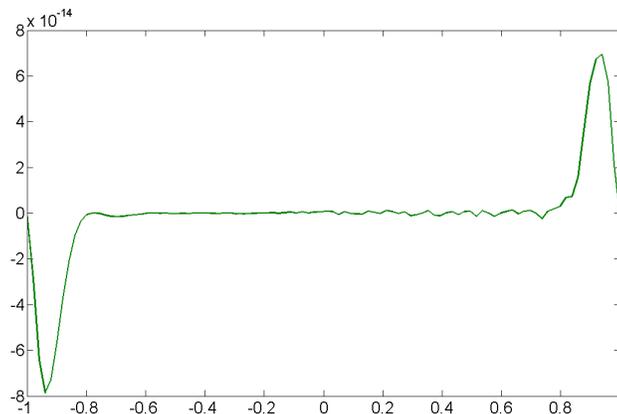
Como se puede ver en la segunda gráfica, a partir de cierto momento, los errores se disparan respecto al error teórico aproximado que debería tener esta interpolación y que inicialmente se comporta igual. Sin embargo, en el primer caso esto no ocurre y por tanto podemos ver un error uniforme respecto al error teórico aproximado. Podemos ver también en la siguiente gráfica como ocurre esto en el paso de una interpolación de 20 nodos a una de 40 nodos y como los errores se vuelven a disparar

2.3. Hermite en nodos equidistantes

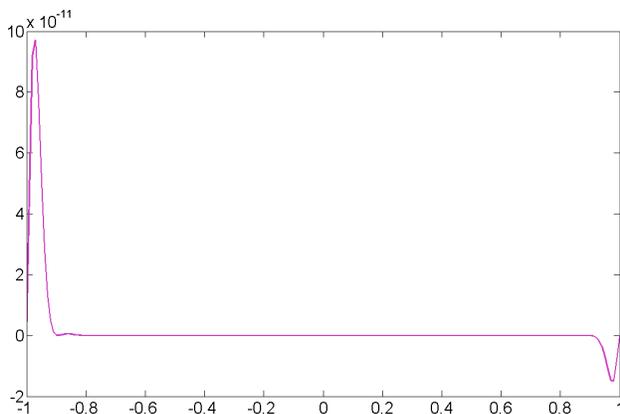
Utilizando los nodos que hemos calculado en 1 procederemos a comprobar la interpolación a la función 5 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. Aquí se pueden ver las gráficas de los errores cometidos en las interpolaciones a la función 5.



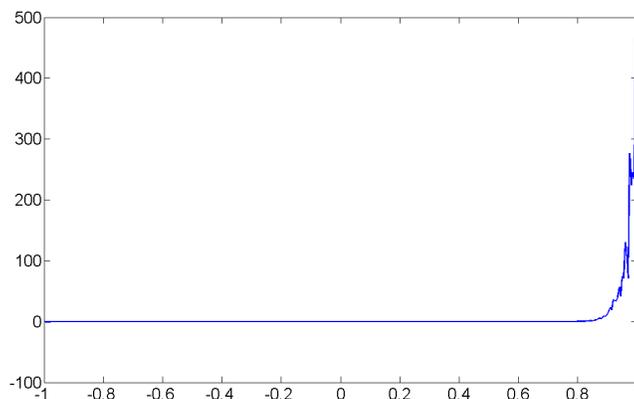
Error de interpolación de 5 en 5 nodos



Error de interpolación de 5 en 10 nodos



Error de interpolación de 5 en 20 nodos



Error de interpolación de 5 en 40 nodos

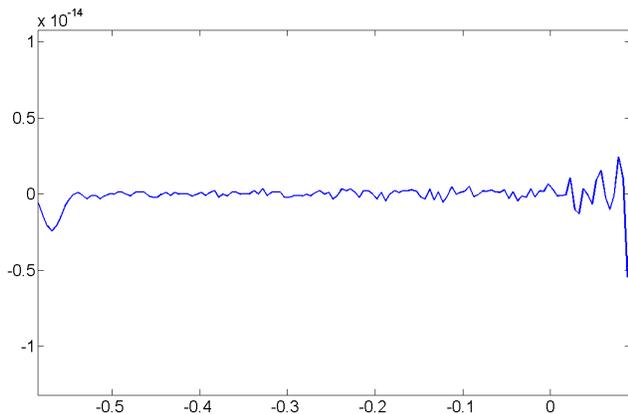
Para calcular las gráficas anteriores hemos utilizado el algoritmo 1.4.1 modificado que nos ha proporcionado todos los datos necesarios para que podamos estudiar esta interpolación.

2 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $Y = \text{SIN}(X\pi)$

En la siguiente tabla se han expuesto los datos relevantes de la interpolación usando siempre las fórmulas mostradas en los requisitos teóricos. Consideramos el error absoluto δ y vemos los datos que nos proporcionan las interpolaciones.

nodos	media real de δ	cota real de δ	media teórica apr. de δ	cota teórica apr. de δ	sup de $f^{(N+1)}$
5	$3,260532 \cdot 10^{-6}$	$6,41600 \cdot 10^{-5}$	$1,268905 \cdot 10^{-4}$	$1,034208 \cdot 10^{-3}$	$\pi^{11} \simeq 2,94 \cdot 10^5$
10	$5,689893 \cdot 10^{-16}$	$7,85482 \cdot 10^{-14}$	$1,767800 \cdot 10^{-15}$	$1,787270 \cdot 10^{-12}$	$\pi^{21} \simeq 2,75 \cdot 10^{10}$
20	$4,440892 \cdot 10^{-16}$	$9,72273 \cdot 10^{-11}$	$1,079139 \cdot 10^{-42}$	$3,141587 \cdot 10^{-35}$	$\pi^{41} \simeq 2,41 \cdot 10^{20}$
40	$8,587075 \cdot 10^{-12}$	$4,71337 \cdot 10^2$	$6,037560 \cdot 10^{-109}$	$4,580608 \cdot 10^{-92}$	$\pi^{81} \simeq 1,85 \cdot 10^{40}$

Como se puede apreciar, los datos (incluso las gráficas) se parecen mucho respecto a la interpolación de Lagrange, pero cabe destacar que en este caso el número de nodos era la mita que en los homólogos de la interpolación de

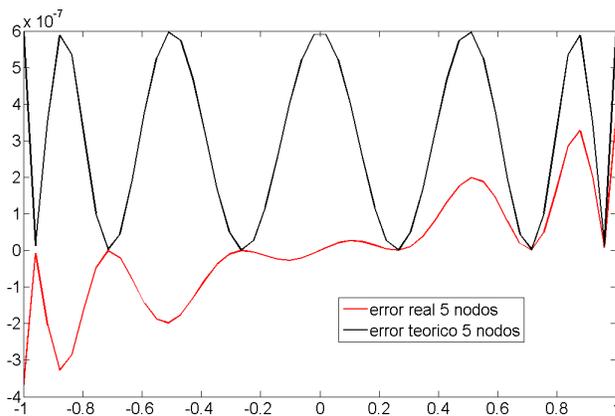


Lagrange; es decir, que la interpolación de Hermite se comporta mejor utilizando menos nodos. De todas formas es interesante ver estos datos y el gran parecido que tienen con la interpolación de Lagrange; esto también es provocado porque el seno es una función suave, luego entonces la interpolación de Hermite funciona como la de Lagrange. Aquí también hemos presentado un extracto de la gráfica de la interpolación de 40 nodos mostrando que la interpolación funciona bien en la zona central del

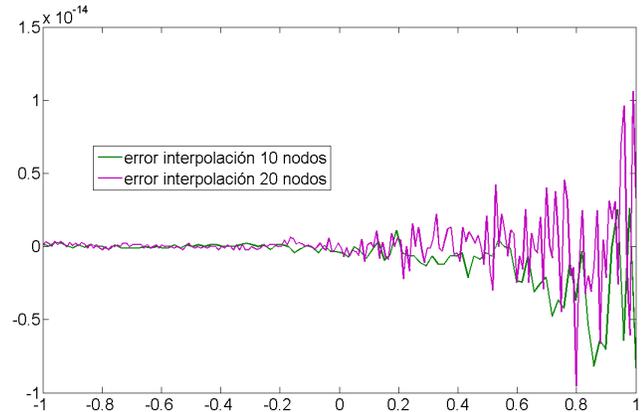
intervalo y como se puede ver los errores no superan 10^{-14} . Decir por último que aunque estemos calculando la interpolación de Hermite, se sigue cumpliendo que, con nodos equidistantes, se produzcan errores en los extremos del intervalo.

2.4. Hermite en nodos Chebyshev

Utilizando los nodos que hemos calculado en 4 procederemos a comprobar la interpolación a la función 7 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. No es necesario introducir los datos del error en este caso ya que son casi idénticos al apartado 2.1 con la diferencia de que en este caso estamos considerando una interpolación con 5 nodos que sería equivalente a una de 10 nodos en la interpolación de Lagrange aunque realmente hay algunas pequeñas variaciones como que el error real en el caso de 5 nodos es un poco más de una décima menor; pero de todas formas no hay más datos representativos. Lo que es interesante destacar son estas dos gráficas.



Error real y teórico aproximado de 5 en 5 nodos

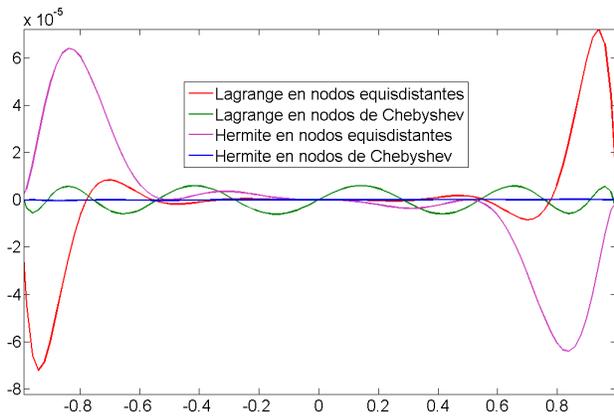


Error real de 5 en 10 y 20 nodos

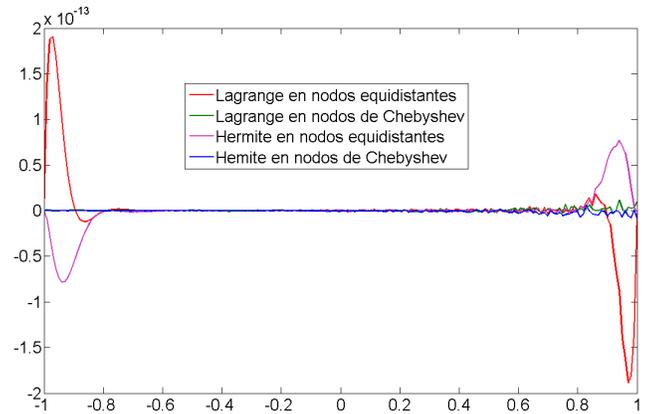
Estas dos gráficas son muy importantes porque muestran la capacidad de la computadora para hacer cálculos muy pequeños. Si estudiamos la primera gráfica vemos que el error real (en rojo) tiene forma de cosinusoide por ser una interpolación con nodos de chebyshev con una distancia entre pico superior y pico inferior que va disminuyendo cuando se aproxima a $x = 0$, esto es debido a la derivada $n + 1$. Vemos también el error teórico aproximado y como este acota (en valor absoluto) al error real ya que para el calcular del error teórico hemos utilizado una cota de la derivada $n + 1$. En la segunda gráfica es una muestra de los errores de la máquina ya que las interpolaciones tienen un error aproximado a 10^{-16} y entonces se pueden provocar errores catastróficos como los que estamos viendo ya que las gráficas del error han perdido la simetría que las caracteriza, la igual que la forma de cosinusoide.

2.5. Observaciones finales

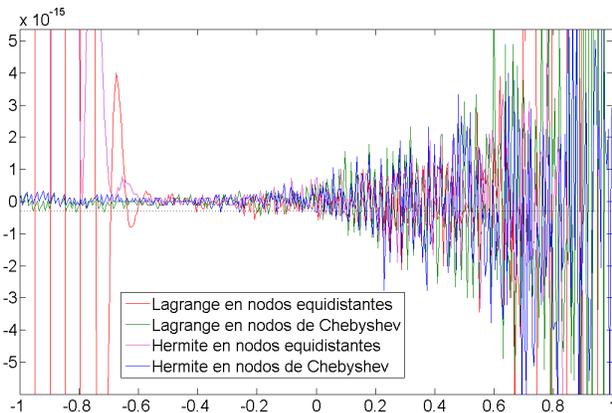
Veamos primero una superposición de las gráficas de los errores cometidos en las interpolaciones estudiadas en este apartado. En cada una de ellas se muestran las interpolaciones con una cantidad n de nodos en Lagrange y una cantidad $n/2$ de nodos en Hermite.



error real de 5 en 10 nodos en Lagrange



error real de 5 en 20 nodos en Lagrange



error real de 5 en 40 nodos en Lagrange

Como se puede ver aquí, hemos superpuesto las gráficas de cada interpolación menos la de 80 nodos que era demasiado errática y no se podía diferenciar nada. Destacar que la primera tiene un comportamiento uniforme donde se pueden ver que hermite con nodos de Chebyshev es mucho mejor respecto todas las demás, también se observa la diferencia entre las interpolaciones con nodos de hermite y las interpolaciones con nodos de Chebyshev ya que las primeras tienen los errores concentrados en los extremos y se comportan mejor en el centro, por contra las segundas se comportan uniformemente en todo el intervalo. Mientras que las otras dos gráficas son más erráticas ya que los errores se reducen a una escala de 10^{-14} y comienzan a manifestarse los errores máquina.

2 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $Y = \text{SIN}(X\pi)$

Por otro lado mostrar también las cotas de los errores teóricos de cada una de las interpolaciones estudiadas como habíamos estudiado en los requisitos teóricos.

Lag./Herm.	Lag. equidist.	Lag. Cheb.	Herm. equidist.	Herm. Cheb.	sup de $f^{(n+1)}$
10/5	$1,383978 \cdot 10^{-3}$	$3,598843 \cdot 10^{-6}$	$6,277064 \cdot 10^{-3}$	$2,879074 \cdot 10^{-5}$	$\pi^{11} \simeq 2,94 \cdot 10^5$
20/10	$4,588301 \cdot 10^{-12}$	$2,571422 \cdot 10^{-16}$	$1,901413 \cdot 10^{-11}$	$2,053180 \cdot 10^{-15}$	$\pi^{21} \simeq 2,75 \cdot 10^{10}$
40/20	$1,312243 \cdot 10^{-34}$	$3,284626 \cdot 10^{-42}$	$5,228930 \cdot 10^{-34}$	$2,677014 \cdot 10^{-42}$	$\pi^{41} \simeq 2,41 \cdot 10^{20}$
80/40	$2,704509 \cdot 10^{-91}$	$1,325858 \cdot 10^{-105}$	$1,058093 \cdot 10^{-90}$	$1,060687 \cdot 10^{-104}$	$\pi^{81} \simeq 1,85 \cdot 10^{40}$

Aquí podemos ver las grandes diferencias entre los nodos equidistantes y los nodos de Chebyshev aunque hay que entender que esto solo son cotas del error que hemos hecho en cada interpolación estudiada con anterioridad a las que hemos aplicado las rutinas explicadas en los requisitos teóricos anteriores.

En conclusión, la función que se nos pedía interpolar era un función bastante suave, con lo cual las interpolaciones deberían e ser bastante buenas aunque considerando siempre que es una función trigonométrica y es bastante difícil encontrar polinomios que la aproximara. Decir que los nodos de Chebyshev han funcionado muy bien en esta función como muestra la gráfica de la página anterior.

3. Estudio de la Función $y = e^x$

Después de haber comprobado todos los tipos de interpolaciones de la función anterior, pasamos a estudiar las interpolaciones en el intervalo $[-1, 1]$ de la función:

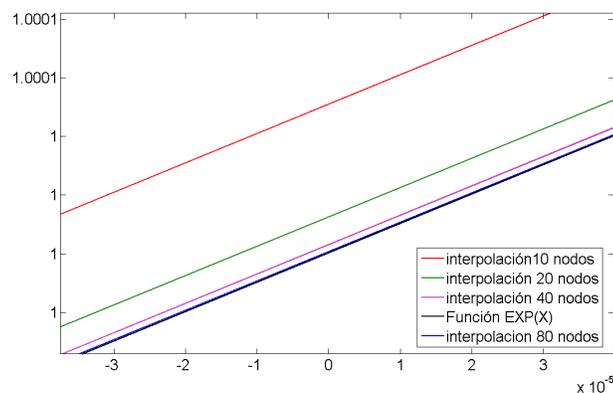
$$y = e^x \tag{6}$$

3.1. Lagrange en nodos equidistantes

Utilizando los nodos que hemos calculado en 1 procederemos a comprobar la interpolación a la función 6 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. En este caso, la interpolación es similar a la de la función 5. Consideramos el error absoluto δ y vemos los datos que nos proporcionan las interpolaciones.

nodos	media real de δ	cota real de δ	media teórica apr. de δ	cota teórica apr. de δ
10	$1,09568354 \cdot 10^{-10}$	$3,84053056 \cdot 10^{-9}$	$2,95266860 \cdot 10^{-10}$	$1,44219257 \cdot 10^{-9}$
20	$1,11022302 \cdot 10^{-16}$	$5,43454170 \cdot 10^{-14}$	$6,74427073 \cdot 10^{-26}$	$2,47965926 \cdot 10^{-23}$
40	$1,11022302 \cdot 10^{-16}$	$6,28998586 \cdot 10^{-9}$	$5,07547083 \cdot 10^{-56}$	$4,45924103 \cdot 10^{-53}$
80	$4,65358690 \cdot 10^{-10}$	$8,37599694 \cdot 10^3$	$4,47463980 \cdot 10^{-149}$	$6,87038582 \cdot 10^{-133}$

Incluso los datos de los errores son casi los mismos como se puede ver aunque es interesante presentarlo ya que la cota del error teórica aproximado se hace muy pequeña y muy rápidamente, esto es causado en este caso por el valor de la derivada $n + 1$ que es muy peculiar ya que esta función coincide su derivada. Además se comprueba que la cota de la derivada es e^1 y al hacer el resto del cálculos, el valor de la cota teórica aproximada del error desciende mucho respecto al caso anterior mientras que la cota real del error se parece mucho al caso anterior. Luego dada la similitud con el caso anterior, las gráficas mostradas en 4.4 son casi idénticas a las de esta función. Aquí vemos la interpolación cerca del cero y como la azul corta con la negra en escala 10^{-6} .

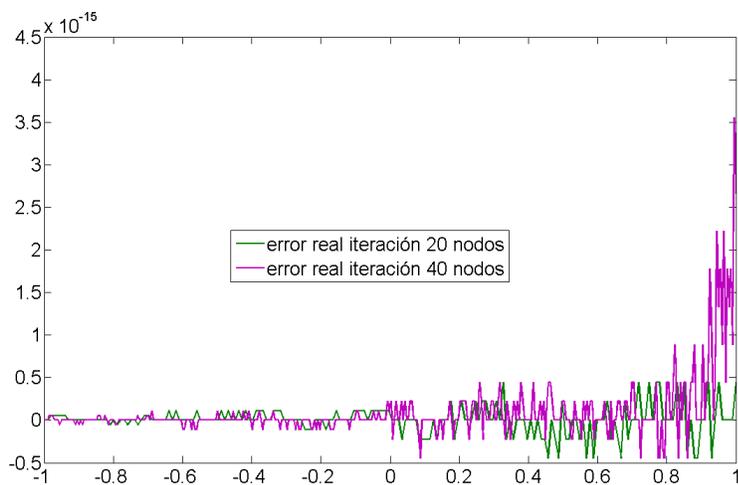


3.2. Lagrange Chebyshev

Partiendo ahora de los nodos calculados mediante la forma 4 vamos a interpolar la función 6 mediante la interpolación de Lagrange en nodos de Chebyshev. Para ello utilizaremos la siguiente rutina 6. Sabemos además que la cota de la derivada $n + 1$ es e^1 como antes habíamos dicho, luego, con estos datos, hemos calculado las interpolaciones.

nodos	media real de δ	cota real de δ	media teórica apr. de δ	cota teórica apr. de δ
10	$1,7760959 \cdot 10^{-11}$	$2,7140512 \cdot 10^{-11}$	$4,6977229 \cdot 10^{-11}$	$6,6502627 \cdot 10^{-11}$
20	0	$4,4408920 \cdot 10^{-16}$	$3,5914505 \cdot 10^{-26}$	$5,0740022 \cdot 10^{-26}$
40	0	$3,5527136 \cdot 10^{-15}$	$5,2035405 \cdot 10^{-62}$	$7,3903623 \cdot 10^{-62}$
80	$5,4368383 \cdot 10^{-8}$	$6,6121666 \cdot 10^4$	$2,7553492 \cdot 10^{-145}$	$3,8786633 \cdot 10^{-145}$

De estos datos expuestos es interesante destacar como la interpolación de 10 nodos se comporta mejor mediante el estudio en nodos de Chebyshev respecto con nodos equidistantes y además ver que la interpolación con 80 nodos se comporta de forma más errática que en el cálculo mediante nodos equidistantes. Pero lo más interesante de esta interpolación es el cálculo obtenido por el Matlab cuando se quiere estudiar la media de los errores (en valor absoluto) de las interpolaciones con 20 y 40 nodos; este resultado tan interesante parece indicar que se comportan muy bien con un error ínfimo, y como se puede ver en la gráfica, las interpolaciones tienen los errores máquina explicados anteriormente. Destacar que la gráfica del error muestra

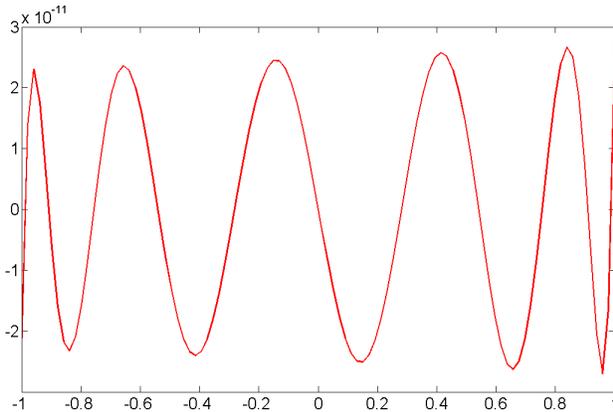


interpolación Chebyshev 20 y 40 nodos de 6

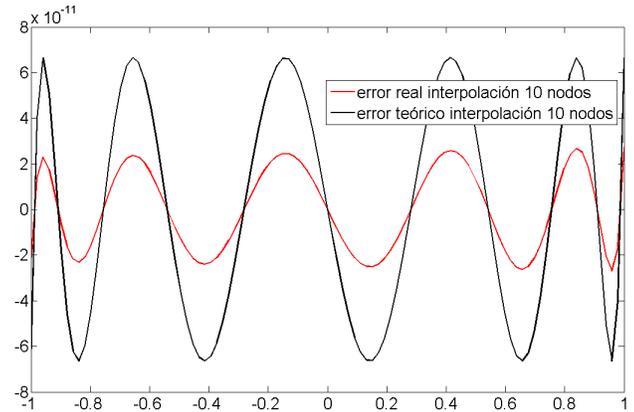
valores de errores del orden de 10^{-16} .

3 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $Y = \text{EXP}(X)$

Es interesante destacar las siguientes gráficas que pertenecen a la misma interpolación aunque a una de ellas le hemos añadido el error teórico.



error real en interpolación de 10 nodos de 6

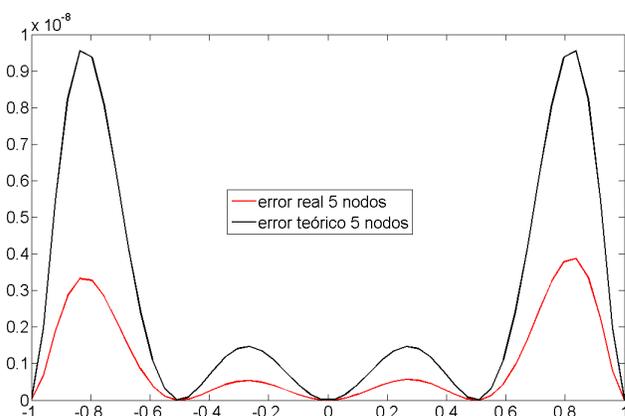


error teórico aproximado y real en interpolación de 10 nodos d

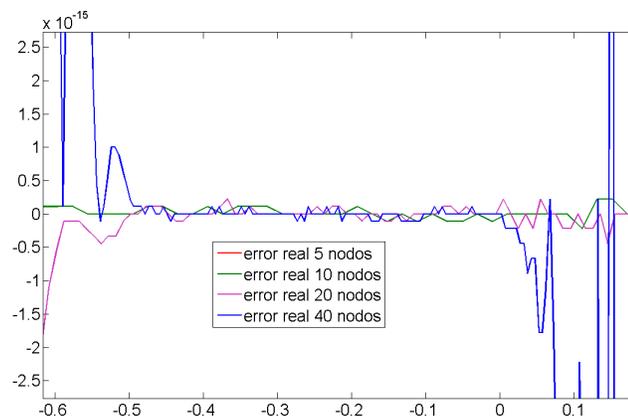
Hemos expuesto la primera gráfica porque es interesante destacar el comportamiento del error de la interpolación de Chebyshev en la exponencial. Como los nodos de Chebyshev son los óptimos en el estudio de las interpolaciones, ya que son los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $n + 1$ tenemos que en el cálculo del error mediante 2 tenemos que hacernos mínimos el polinomio luego en el estudio del error solo nos queda centrarnos en la derivada. Esta función es muy interesante porque la derivada de esta función es ella misma, luego en el estudio del error se puede ver como la gráfica de la izquierda tiene un error de forma cosinusoide pero que va creciendo en los picos; esto es producido por el carácter creciente de la derivada de la función en la que estamos trabajando. Luego es interesante ver que cuando mayor es el valor de la x, más altos son los picos de la función. Destacar además el gran parecido con el error teórico aproximado, esto nos podría llevar a decir que no hemos cometido muchos errores en el cálculo ya que estamos mostrando interpolación de 10 nodos.

3.3. Hermite en nodos equidistantes

Utilizando los nodos que hemos calculado en 1 procederemos a comprobar la interpolación a la función 6 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. No es necesario introducir los datos del error en este caso ya que son casi idénticos al apartado 3.1 con la diferencia de que en este caso estamos considerando una interpolación con 5 nodos que sería equivalente a una de 10 nodos en la interpolación de Lagrange. Lo que es interesante destacar son estas dos gráficas.



error real y teórico aproximado en interpolación de 5 nodos de 6

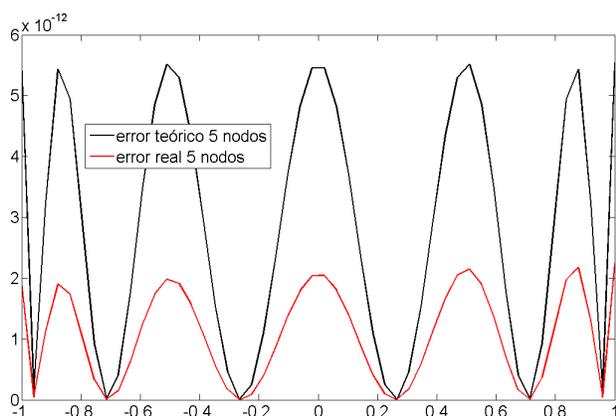


error real en interpolación de 5,10 y 20 nodos de 6

En este caso no era interesante mostrar las otras gráficas de la interpolación por el parecido que tenían con las de la interpolación de la función 5. Pero estas dos sí que son interesantes. La primera nos muestra el error real de la interpolación con 5 nodos de la función 6 (sin valores absolutos, es decir, la interpolación se aproxima a la función superiormente) y además el error teórico aproximado y se puede ver que es casi idéntico. Mientras que la segunda es un extracto de la superposición de las otras tres interpolaciones en la zona central del intervalo, que es donde la interpolación en nodos equidistantes tiene menos errores; se puede ver como la gráfica de la interpolación de 40 nodos es casi constante mientras que el resto son más oscilatorias respecto al eje de abscisas. Destacar también la falta de uniformidad en esta última gráfica causada por el error de cálculo del Matlab cercano a la escala que estamos mostrando.

3.4. Hermite en nodos Chebyshev

Utilizando los nodos que hemos calculado en 4 procederemos a comprobar la interpolación a la función 7 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. No es necesario introducir los datos del error en este caso ya que son casi idénticos al apartado 3.1 con la diferencia de que en este caso estamos considerando una interpolación con 5 nodos que sería equivalente a una de 10 nodos en la interpolación de Lagrange aunque realmente hay algunas pequeñas variaciones como que el error real en el caso de 5 nodos es un poco más de una décima menor; pero de todas formas no hay más datos representativos. Lo que es interesante destacar es esta gráfica igual que en 2.4.

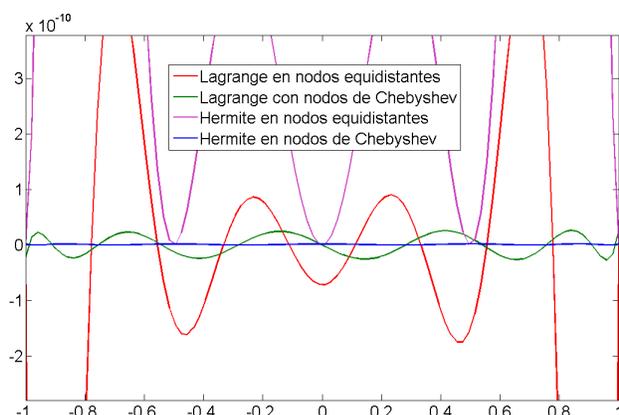


En este caso hemos mostrado simplemente esta gráfica ya que la otra que habíamos mostrado en 2.4 era casi completamente igual a la de esta función mientras que la interpolación de 80 nodos vuelve a descontrolarse como se ve en 3.1. Luego entonces e interesante comentar que el error en este apartado en la interpolación de 5 nodos ha descendido respecto al apartado 3.3 ya que en este caso el error se sitúa en una escala de 10^{-12} a diferencia de lo que ocurría anteriormente. Destacar también la

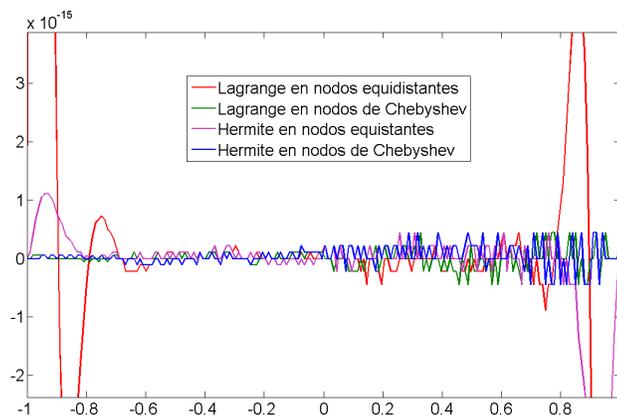
acotación que hace el error teórico aproximado respecto al error real y observar también la forma de cosinusoide característica de la interpolaciones con nodos de chebyshev donde el error real es nulo cuando estamos en un nodo. En conclusión, como esta función es muy suave (además coincide con su derivada) entonces las interpolaciones de ellas son muy aproximadas, luego entonces la máquina altera el estudio de los errores causado por esa proximidad tan fuerte. Es interesante destacar que con solo 5 nodos tengamos una aproximación tan buena, cosa que por ejemplo no ocurre en la función de Runge.

3.5. Observaciones finales

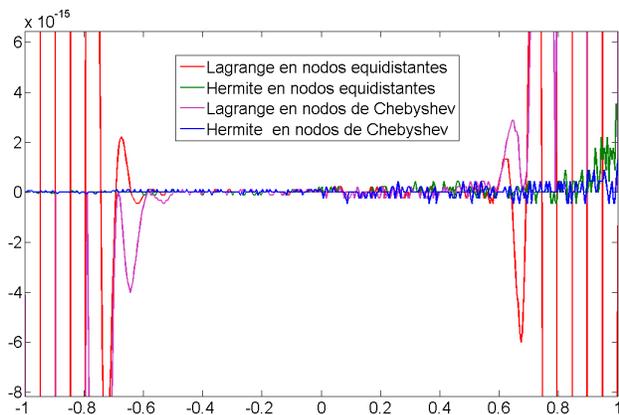
Veamos primero una superposición de las gráficas de los errores cometidos en las interpolaciones estudiadas en este apartado. En cada una de ellas se muestran las interpolaciones con una cantidad n de nodos en Lagrange y una cantidad $n/2$ de nodos en Hermite.



error real de 6 en 10 nodos en Lagrange



error real de 6 en 20 nodos en Lagrange



error real de 6 en 40 nodos en Lagrange

Como se puede ver aquí, hemos superpuesto las gráficas de cada interpolación menos la de 80 nodos que era demasiado errática y no se podía diferenciar nada. Este caso es muy especial también ya que como la función es suave las interpolaciones son muy buenas y entonces, cuando aumentamos el número de nodos el error disminuye de tal forma que aparece el error máquina y provoca la aparición de errores en el cálculo. Es interesante ver que en la primera gráfica las interpolaciones de Hermite son de signo constante al igual que en 7 que más tarde comentaremos. Decir además que las interpolaciones son tan buenas que aparecen estos errores antes mencionados y que se puede ver muy claramente en la segunda y tercera gráfica donde las interpolaciones funcionan bien hasta cierto momento en el cual se descontrolan.

3 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN $Y = \text{EXP}(X)$

Por otro lado mostrar también las cotas de los errores teóricos de cada una de las interpolaciones estudiadas como habíamos estudiado en los requisitos teóricos.

Lag./Herm.	Lag. equidist.	Lag. Cheb.	Herm. equidist.	Herm. Cheb.	sup de $f^{(n+1)}$
10/5	$1,278719 \cdot 10^{-8}$	$3,325131 \cdot 10^{-11}$	$5,799659 \cdot 10^{-8}$	$2,660105 \cdot 10^{-10}$	$e^1 \simeq 2,718281$
20/10	$4,528863 \cdot 10^{-22}$	$2,357001 \cdot 10^{-26}$	$1,875960 \cdot 10^{-21}$	$2,029600 \cdot 10^{-25}$	$e^1 \simeq 2,718281$
40/20	$1,476264 \cdot 10^{-54}$	$3,695181 \cdot 10^{-62}$	$5,882508 \cdot 10^{-54}$	$2,9561449 \cdot 10^{-61}$	$e^1 \simeq 2,718281$
80/40	$2,955881 \cdot 10^{-131}$	$1,939331 \cdot 10^{-144}$	$1,547671 \cdot 10^{-130}$	$1,551465 \cdot 10^{-144}$	$e^1 \simeq 2,718281$

Aquí podemos ver las grandes diferencias entre los nodos equidistantes y los nodos de Chebyshev aunque hay que entender que esto solo son cotas del error que hemos hecho en cada interpolación estudiada con anterioridad a las que hemos aplicado las rutinas explicadas en los requisitos teóricos anteriores aunque este caso es de especial importancia ya que la cota de la derivada $n+1$ es la misma para todos los nodos estudiados ya que la exponencial es una función que coincide con su derivada. Destacar también los pequeños que son los errores teóricos esto es debido, como decíamos anteriormente, a que la función exponencial es muy suave, y por tanto, fácil de interpolar.

En conclusión, la función que se nos pedía interpolar era un función bastante suave, con lo cual las interpolaciones deberían de ser bastante buenas aunque por ser tan suave aparecen más pronto los errores máquina con lo cual los cálculos que podemos hacer en nuestro microordenador no son exactos y por ello desconocemos la forma en la que actúan las interpolaciones con cierta cantidad de nodos. De todas formas destacar que en la interpolación de Hermite con nodos de Chebyshev de 5 nodos, la aproximación casi llega al límite del error máquina motivo por el cual más tarde se ven esos errores.

4. Estudio de la Función de Runge

Después de haber comprobado todos los tipos de interpolaciones de la función anterior, pasamos a estudiar las interpolaciones en el intervalo $[-1, 1]$ de la función:

$$y = \frac{1}{1 + 10x^2} \quad (7)$$

4.1. Lagrange en nodos equidistantes

Utilizando los nodos que hemos calculado en 1 procederemos a comprobar la interpolación a la función 7 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. Este caso ha sido diferente de los demás ya que ahora no se podía calcular el supremo de la derivada $n + 1$ por lo tanto hemos tenido que utilizar una acotación superior. Para ello hemos calculado la siguiente cota.

$$\begin{aligned} y &= (1 + 10x^2)^{-1} \leq (0!) \cdot 20^0 \leq 1 \\ y' &= -1 (1 + 10x^2)^{-2} 20x \leq (1!) \cdot 20^1 \\ y'' &= 2 (1 + 10x^2)^{-3} (20x) (20x) - (1 + 10x^2)^{-2} \leq 2 \cdot (20x)^2 \leq (2!) x (20)^2 \\ y''' &\leq (3!) x (20)^3 \\ \dots &\dots \dots \\ y^{(n)} &\leq (n!) x (20)^n \end{aligned}$$

En este caso hemos tomado una cota muy grande de lo que realmente valdrá la derivada $n + 1$ pero como no nos dice nada sobre la cota de la derivada podemos tomar cualquiera que valga, como esta que hemos mostrado. A partir de este resultado vamos a ver los resultados que valor nos proporciona el cálculo del error teórico mediante el `difdiv.m` para ello llamaremos a la función mediante el siguiente código.

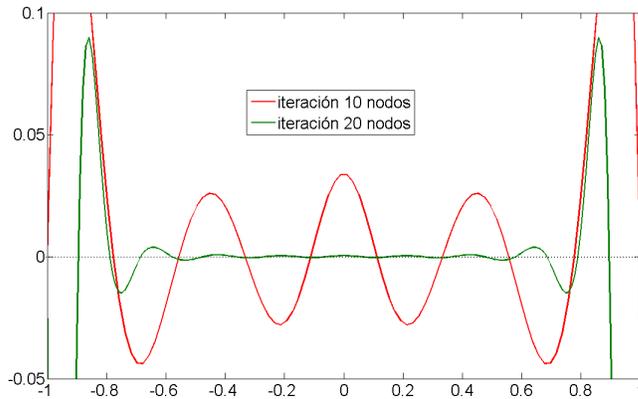
$$[ff, a, P, cota] = \text{corregido}(x, vf, z, (\text{factorial}(\text{nodos} + 1) \cdot (20^{\text{nodos} + 1})))$$

Si consideramos δ el valor del error absoluto.

Veamos los datos concretos:

nodos	media real de δ	cota real de δ	media teórica apr. de δ	cota teórica apr. de δ	cota de $f^{(n+1)}$
10	$2,44545 \cdot 10^{-2}$	$1,71702 \cdot 10^{-1}$	$8,87985 \cdot 10^{11}$	$2,83012 \cdot 10^{13}$	$8,174960 \cdot 10^{21}$
20	$6,33959 \cdot 10^{-4}$	1,06332	$2,65836 \cdot 10^{21}$	$1,43441 \cdot 10^{25}$	$1,071454 \cdot 10^{47}$
40	$1,04242 \cdot 10^{-6}$	$8,37866 \cdot 10^1$	$1,37301 \cdot 10^{40}$	$3,78677 \cdot 10^{48}$	$7,356288 \cdot 10^{102}$
80	$2,54122 \cdot 10^{-9}$	$9,39904 \cdot 10^5$	$2,30731 \cdot 10^{77}$	$2,35023 \cdot 10^{95}$	$1,401659 \cdot 10^{226}$

Este caso es muy peculiar ya que es ligeramente diferente que el caso 4.4, como se puede ver en los datos, las interpolaciones son muy inestables respecto las funciones anteriores pero además se puede ver que cuando más nodos estudiamos, la interpolación es mejor ya que la media real del error disminuye (siendo el error en los extremos mayor que en los casos anteriores). Es interesante mostrar las siguientes gráficas por las particularidades que tienen cada una de ellas.

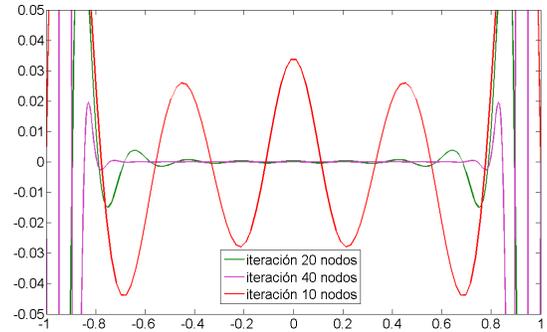


Error de interpolación de 7 en 10 y 20 nodos

Esta gráfica es muy interesante ya que muestra como una interpolación con una cota de error mayor que otra se aproxima mejor a la función real. Es interesante ver que la interpolación con 10 nodos es peor que la otra en la zona central del intervalo, mientras que en los extremos la interpolación de 20 nodos tiene un error mayor que la de 10. Este hecho se produce a causa del grado del polinomio, que al ser interpolado en una zona donde tiene menos datos se provocan más errores, es decir, depende de la información que tenemos.

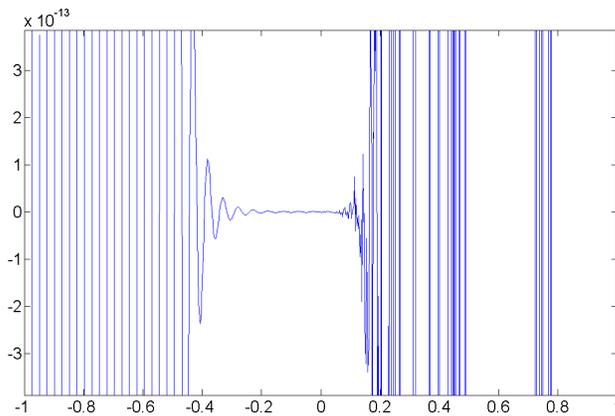
4 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN DE RUNGE

Aquí también mostramos la misma gráfica que se puede ver en la página anterior pero en este caso le hemos añadido la interpolación de 40 nodos donde se puede ver que aún es mejor que la de 20 en la zona central pero sin embargo, como se puede ver en la tabla, en los extremos llega a tomar valores cercano a 100 de error.



Error de interpolación de 5 en 10,20 y 40 nodos

Y por último, en este apartado, vamos a ver una gráfica de la interpolación con 80 nodos.

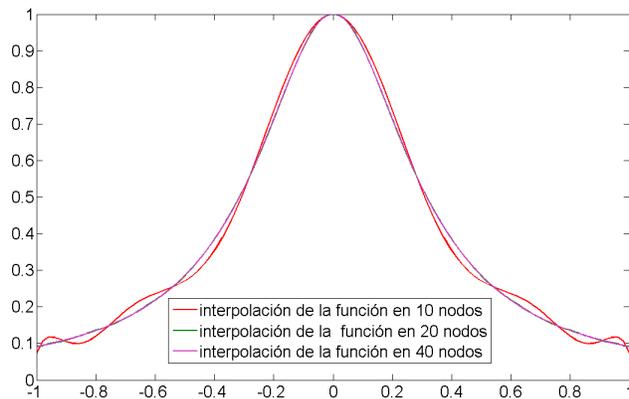


Error de interpolación real en 80 nodos (zoom)

interpolación con 80 nodos. Como más tarde veremos en el cálculo de las interpolaciones de 80 nodos se producen errores que llegan a tomar valores extremos, pero estos errores no son causados por el algoritmo, sino por la máquina ya que los errores de cancelación se van arrastrando hasta un momento como el que se ve en esta gráfica, en el cual parece, inicialmente que interpola uniformemente y que más tarde se vuelve muy inestable ya que como se puede ver, el cambio se produce en un valor cercano a 10^{-16} y si miramos en Matlab cual es el error máquina cometido nos da el siguiente valor : $2,220446049250313 \cdot 10^{-16}$. Luego los errores máquina se encuentran muy presentes en las interpolaciones de 80 nodos.

4.2. Lagrange en nodos Chebyshev

Partiendo ahora de los nodos calculados mediante la forma 4 vamos a interpolar la función 7 mediante la interpolación de Lagrange en nodos de Chebyshev. Para ello utilizaremos la rutina 6.



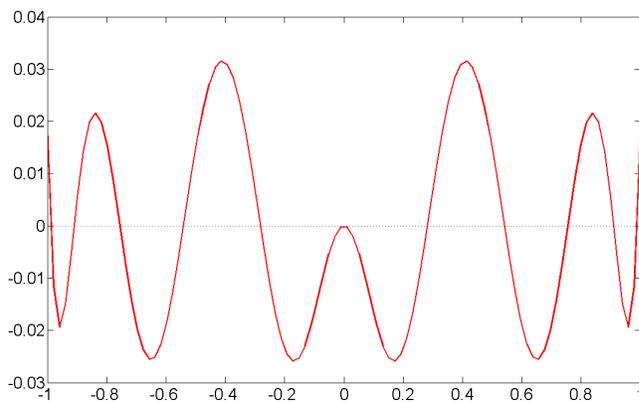
ejemplos interpolaciones

Sabemos además cuales son las cotas de las derivadas $n + 1$ ya que las habíamos calculado en el apartado anterior, luego, con estos datos, hemos calculado las interpolaciones y nos han salido unos valores del error casi idénticos al estudio con nodos equidistantes, luego entonces vamos a ver las gráficas directamente. En este caso vale la pena destacar que el error es simétrico; es decir que, al

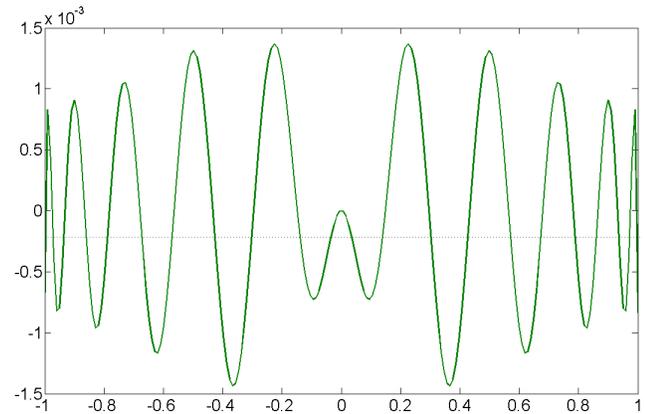
igual que la función, el error es simétrico respecto del valor $x = 0$. Destacar además el buen comportamiento de las interpolaciones y como, en este caso, cuando más interpolaciones utilizamos mejor es la interpolación (excepto en el caso de 80 nodos que más tarde comentaremos)

4 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN DE RUNGE

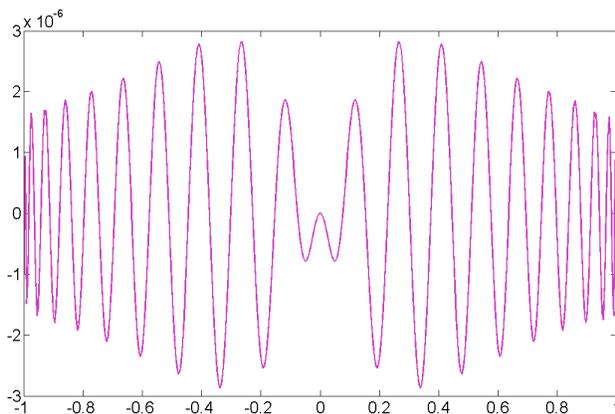
Vamos a ver ahora todas las gráficas del error de esta interpolación para observar como se comportan las interpolaciones cuando vamos añadiendo nodos.



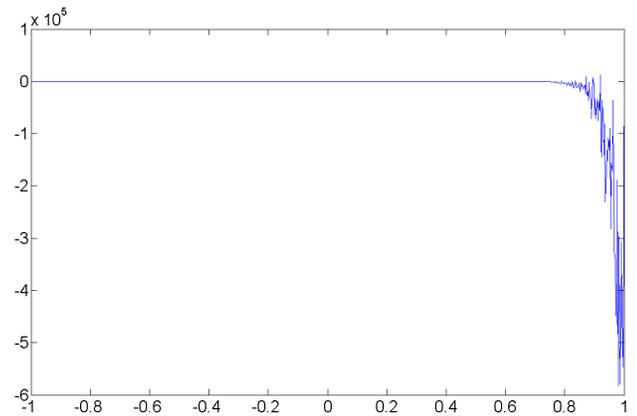
Error de interpolación de 7 en 10 nodos



Error de interpolación de 7 en 20 nodos



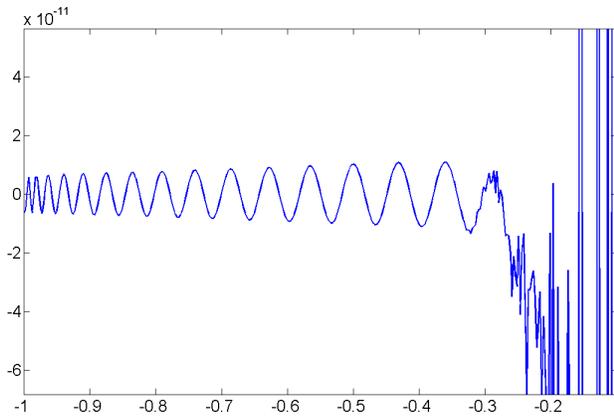
Error de interpolación de 7 en 40 nodos



Error de interpolación de 7 en 80 nodos

Destacar en este caso como el error se reduce en la evolución del estudio hasta el cálculo de 40 nodos, donde podemos ver una cosinusoide en la que se puede ver como la distancia entre pico y zona baja va aumentando hasta que llegamos al valor $x = 0$ donde se reduce al mínimo. Observar también que en las gráficas de 10 y 20 nodos también se puede observar una cosinusoide.

Por último en el estudio de los nodos de Chebyshev de esta función destacar el comportamiento de la interpolación de 80 nodos que, en este caso, se comporta de forma muy errática. Pero si estudiamos más la gráfica

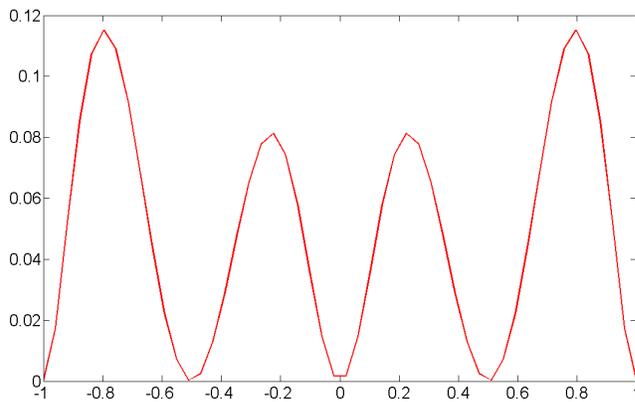


anterior, observamos un dato muy interesante que podemos ver en esta gráfica; como llega un momento en que el error de la interpolación deja de comportarse como una cosinusoide (que como era de esperar tenía más picos que las anteriores y además se reducía el error hasta 10^{-12}) y pasa a comportarse erráticamente. Este error puede ser provocado por la máquina, ya que inicialmente el error era mínimo pero, más tarde, avanza has ta límites extremos; se puede ver que

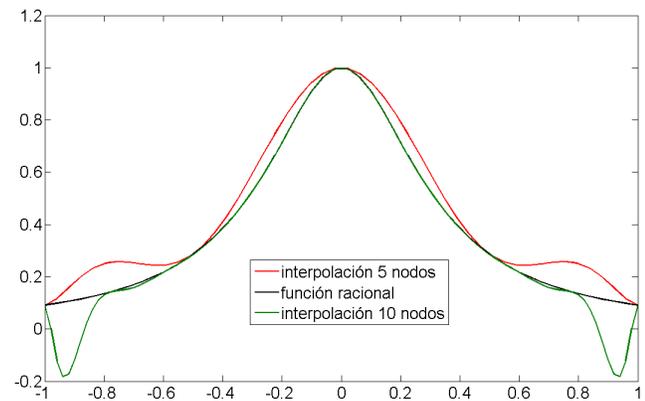
llega a tomar valores de 10^6 . Podemos decir pues que, aunque la interpolación inicialmente era buena, más tarde se comporta de forma errática y por tanto no nos sirve para aproximarnos a la función [7](#) a partir de cierto valor (aunque anteriormente se comporta muy bien)

4.3. Hermite en nodos equidistantes

Utilizando los nodos que hemos calculado en 1 procederemos a comprobar la interpolación a la función 7 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. No es necesario introducir los datos del error en este caso ya que son casi idénticos al apartado 4.1 con la diferencia de que en este caso estamos considerando una interpolación con 5 nodos que sería equivalente a una de 10 nodos en la interpolación de Lagrange. Lo que es interesante destacar son estas dos gráficas.



error real y teórico en interpolación de 5 nodos de 6

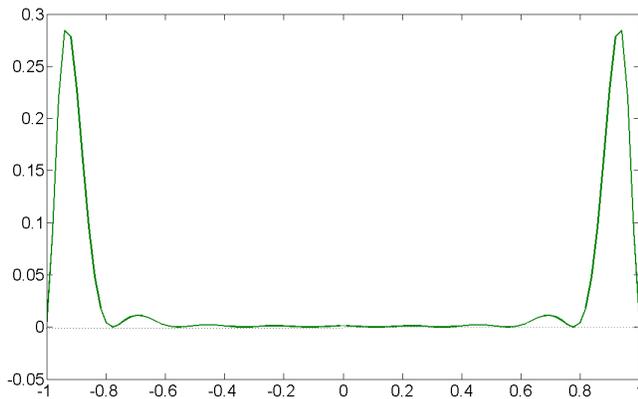


error real en interpolación de 5,10 y 20 nodos de 6

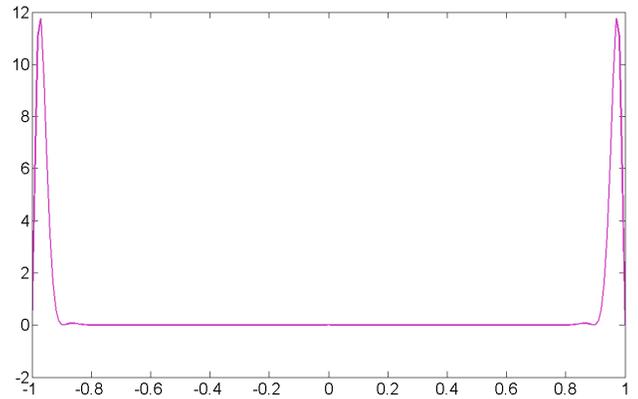
Estas dos gráficas son muy representativas de la interpolación que estamos estudiando. La primera nos muestra el error real de la interpolación con 5 nodos de la función 6 (sin valores absolutos, es decir, la interpolación se aproxima a la función superiormente) y además es interesante fijarse que tiene forma oscilante además de ser representativa de las interpolaciones mediante nodos equidistantes ya que el error tiene tendencia de ser mayor en los extremos del intervalo interpolado. Mientras que la segunda es la superposición de la interpolación de 5 y 10 nodos junto con la gráfica de la función tal y como es; se puede ver como la gráfica de la interpolación de 10 nodos es casi perfecta pero sin embargo, al aproximarse a los extremos se vuelve más errática y se desplaza más de la función que la interpolación con 5 nodos. Destacar también que la interpolación de 5 nodos se aproxima superiormente a la función mientras que la interpolación de 10 nodos se aproxima inferiormente.

4 ESTUDIO DE LA FUNCIÓN DE RUNGE

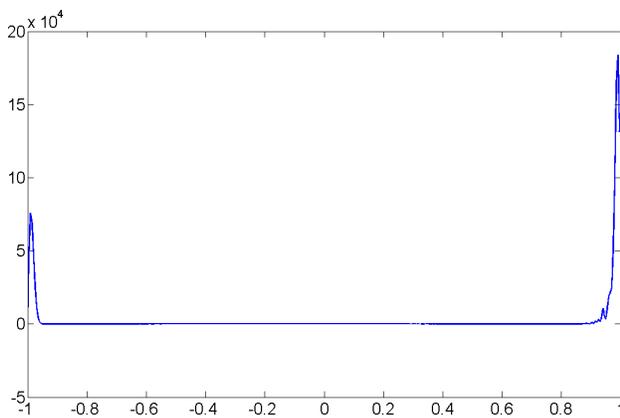
Veamos gráficas de las interpolaciones de 10, 20 y 40 nodos.



error real en interpolación de 10 nodos de 7



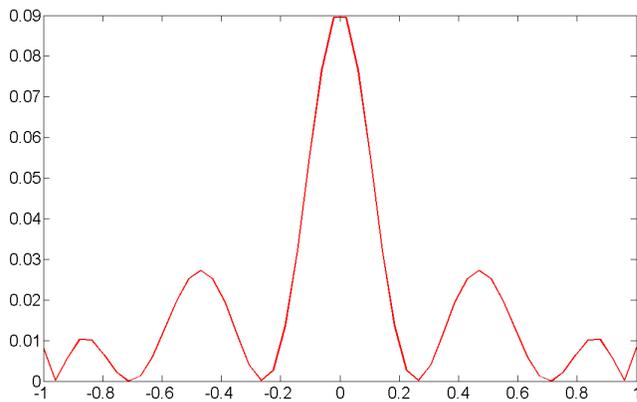
error real en interpolación de 20 nodos de 7



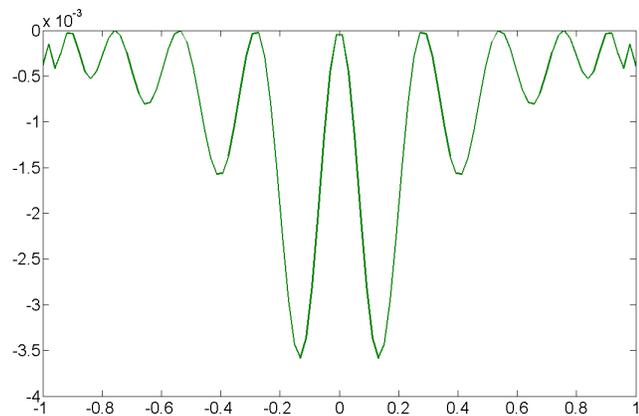
Como se puede ver, se nota que estamos frente a una interpolación mediante nodos equidistantes porque en los tres casos el error es simétrico respecto al eje de ordenadas y además toma los valores máximos en los extremos del intervalo. Cabe destacar la falta de simetría de la última de las tres interpolaciones causada por un error máquina que vale lo mismo que habíamos dicho anteriormente, luego en la interpolación con 40 nodos se producen errores de cálculo de la interpolación, lo que provoca asimetría en la distribución del error y que por tanto a partir de cierto valor (aproximadamente $x = 0,9$ la gráfica del error deje de ser suave).

4.4. Hermite en nodos Chebyshev

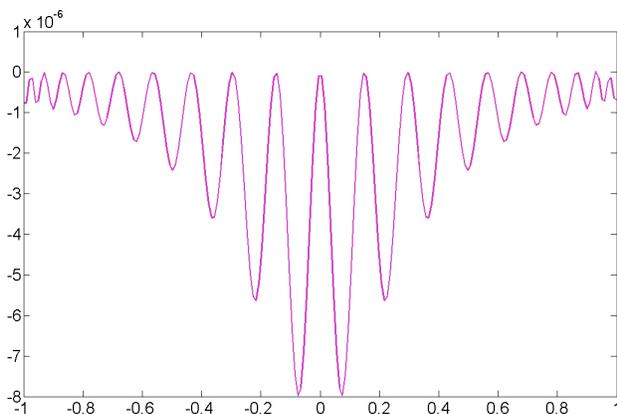
Utilizando los nodos que hemos calculado en 4 procederemos a comprobar la interpolación a la función 7 variando los nodos entre los valores definidos anteriormente. No es necesario introducir los datos del error en este caso ya que son casi idénticos al apartado 4.1 con la diferencia de que en este caso estamos considerando una interpolación con 5 nodos que sería equivalente a una de 10 nodos en la interpolación de Lagrange. Lo que es interesante destacar son estas cuatro gráficas.



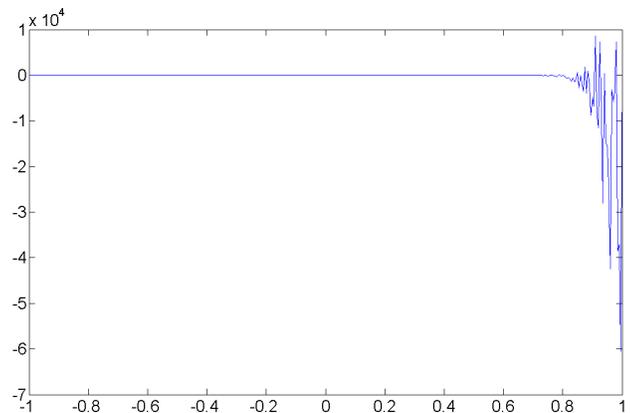
Error de interpolación de 5 en 5 nodos



Error de interpolación de 5 en 10 nodos

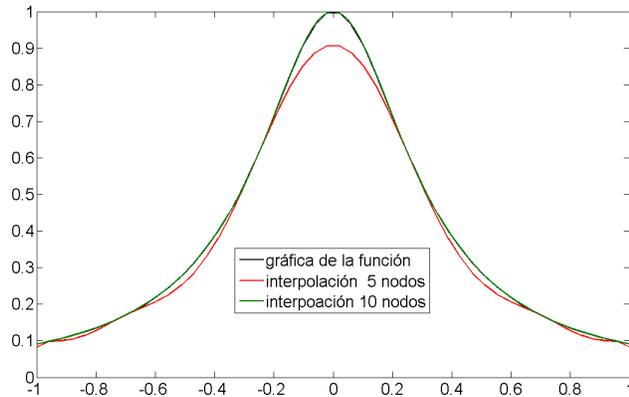


Error de interpolación de 5 en 20 nodos



Error de interpolación de 5 en 40 nodos

Podemos ver que las gráficas de la página anterior son cosinusoides (al menos se ve en las tres primeras) que varían según el número de nodos y según el valor de la derivada $n + 1$; se comprueba visualmente que el número

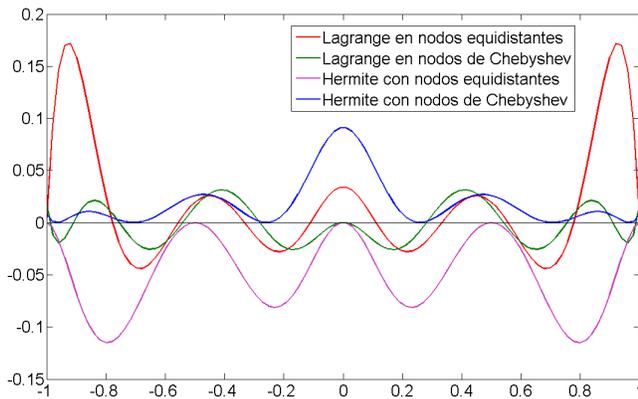


de oscilaciones es mayor cuando mayor es el número de derivadas y que además según el valor de la derivada y la zona del intervalo donde estamos interpolando hay una distancia diferente entre pico superior y pico inferior. Todas estas peculiaridades vienen dadas por este tipo de interpolación en la cual los errores 'se reparten' por todo el intervalo (en vez de aparecer en los extremos del intervalo) y que es más precisa ya que en este caso también interpolamos la derivada de cada nodo.

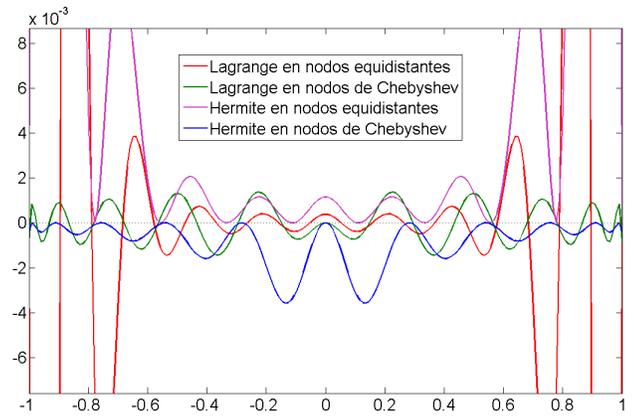
Destacar además que la interpolación de 5 nodos se aproxima inferiormente a la función mientras que el resto de interpolaciones presentadas se aproxima superiormente (véase interpolación de 10 y 20 nodos de la página anterior).

4.5. Observaciones finales

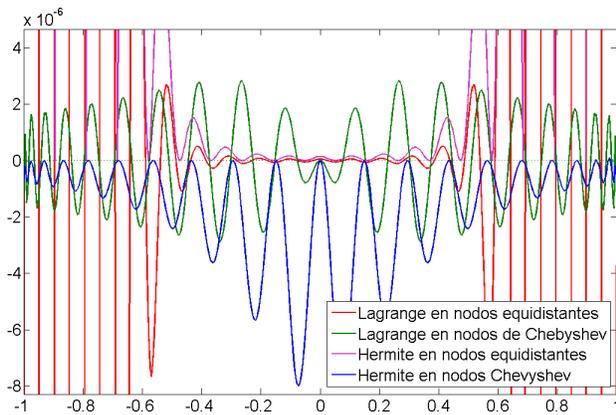
Veamos primero una superposición de las gráficas de los errores cometidos en las interpolaciones estudiadas en este apartado. En cada una de ellas se muestran las interpolaciones con una cantidad n de nodos en Lagrange y una cantidad $n/2$ de nodos en Hermite.



error real de 7 en 10 nodos en Lagrange



error real de 7 en 20 nodos en Lagrange



error real de 7 en 40 nodos en Lagrange

Como se puede ver aquí, hemos superpuesto las gráficas de cada interpolación menos la de 80(/40) nodos que era demasiado errática y no se podía diferenciar nada. Sin embargo, la contrario que en otras funciones, esta función admite interpolaciones de hasta 40 nodos sin errores ya que es a partir de aquí donde se muestran claramente. Destacar que al contrario que las interpolaciones de Lagrange, las de Hermite no cambian de signo, esto es debido a que la derivada $n + 1$ no cambia de signo en el intervalo y además el polinomio

del error es positivo para cualquier valor del intervalo. Observar también la gran cantidad de oscilaciones que se pueden ver en la interpolación de 40 nodos y como, en la zona central, es mejor la interpolación de Lagrange que la de Hermite.

En este caso también disponíamos de los datos sobre los errores teóricos en cada interpolación aunque no es interesante mostrarlos ya que la cota obtenida de la derivada $n + 1$ era demasiado alta con lo cual el estudio del error teórico no se ceñía mucho a la realidad. Simplemente destacar que esta función tenía errores de cálculo bastante grandes.

En conclusión, la función de Runge que se nos pedía interpolar era un función diferente a las anteriores ya que aquellas eran funciones suaves mientras que esta tenía una estructura de campana de Euler un poco estirada. Aunque las interpolaciones nos han proporcionado datos interesantes ya que si la comparamos con las funciones 5 y 6 podemos ver como los errores que se producían en las interpolaciones eran mayores que en cualquier otra; por tanto han aparecido más tarde los errores máquina y hemos podido entender mejor el comportamiento de estas interpolaciones estudiadas. Decir además que esta función también es conocida por la dificultad de conseguir una interpolación casi perfecta aunque, en nuestro caso, aparecen los errores máquina que provocan que no podemos estudiar más profundamente las interpolaciones (sobre todo cuando pasamos al cálculo con 80(/40) nodos).

5. Conclusiones

Como hemos podido ver durante este estudio de 3 funciones diferentes en el cual hemos aplicado algunos métodos de interpolación estudiados hemos visto formas diferente e conseguir un polinomio de grado n que nos interpolara en algunos nodos(n) la función que estuviésemos estudiando.

Dentro de este estudio separamos en dos partes las interpolaciones estudiadas; por una parte la interpolación de Lagrange basada exclusivamente en los valore proporcionados por la función mientras que por la otra parte la interpolación de Hermite en la cual, además de los valores de la función, utilizamos los valores de las derivadas de la función en los nodos sobre los que estudiábamos las interpolaciones. En este segundo caso hemos observado que con un número menor de nodos obteníamos interpolaciones mejores que en la interpolación de Lagrange ya que, al usar el dato de las derivadas, obteníamos que la interpolación de Hermite representaba mejor el comportamiento de la función. Aunque de todas formas en los dos casos observábamos errores desmesurados cuando intentábamos estudiar las iteración con un mayor número de nodos, causado supuestamente además por el grado del polinomio interpolador que llegaba a ser de grado 80 y que oscilaba además en el intervalo escogido en todas las funciones.

Otra diferencia importante observada en este estudio ha sido la diferencia que comportaba estudiar las interpolaciones mediante unos nodos u otros. En nuestro caso habíamos optado por estudiar las interpolaciones con nodos equidistantes inicialmente y más tarde con nodos de Chebyshev. Como se ha dicho, teníamos que los nodos de Chebyshev hacían mínimo el polinomio que tenemos en el estudio del error luego entonces se observaban errores uniformes que variaban a causa del valor de la derivada y que tenían forma de cosinusoide. Por otro lado, los nodos equidistantes no eran tan buena elección ya que, aunque interpelaran bastante bien en la zona central del intervalo, tenían errores considerables en los extremos a diferencia de los nodos de Chebyshev. Esto es causado porque los nodos de Chebyshev no se reparten de forma equidistante en el intervalo, sino que tienen tendencia a estar cerca de los extremos del intervalo donde, con los nodos equidistantes hay más errores causado por una cantidad menor de información.

En conclusión, hemos observado las interpolaciones de tres funciones diferentes que hemos intentado aproximar con polinomios de grado n mediante nuestro microordenador, pero como escuché una vez 'algunos errores se pueden convertir en horrores' y como el lector ha podido observar a lo largo de este estudio, esa oración tenía mucha razón.

6. Enlaces a rutinas

Aquí están algunas de las rutinas utilizadas en el estudio de las tres funciones.

Difdiv.m. Esto es el archivo difdiv.m con las modificaciones necesarias para que funcionase.

DerDifdiv.m Esto es el archivo difdiv.m modificado con tal de que pudiésemos introducir un vector de derivadas como parámetro y que en vez de pedirla durante la ejecución del programa la obtuviera a partir del vector.

Rutina función 1 Esto es el código que introducía en Matlab para conocer todos los datos necesarios de la función 1.

Rutina función 2 Esto es el código que introducía en Matlab para conocer todos los datos necesarios de la función 2.

Rutina función 3 Esto es el código que introducía en Matlab para conocer todos los datos necesarios de la función 3.