1. Primera tanda de problemas

1. *Defina el error de cancelación y explique su origen y consecuencias.*
   El error de cancelación es el fenómeno que se produce al restar dos números muy parecidos y que puede provocar la pérdida de datos en el cálculo ya que provoca una disminución considerable del número de dígitos significativos. La cancelación catastrófica puede ser evitada si anticipamos su ocurrencia.

2. *Explique brevemente lo que es estabilidad numérica.*
   La estabilidad numérica es un fenómeno que se presenta en algunos algoritmos en los cuales el error crece menos que la función exponencial a lo largo de las iteraciones. Cuando el crecimiento del error es lineal no suele ser inestable, el problema es cuando el crecimiento del error es exponencial (de la forma $k^n \in$ con $k > 1$) que puede provocar hechos desastrosos.

3. *Consideramos el polinomio $p(x) = x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ ¿Cuantas raíces positivas tiene el polinomio $p(x)$?.*
   Sabemos que el polinomio tiene 5 raíces (entre reales e imaginarias) aunque siempre habrá alguna raíz real. Vamos a ver tres métodos de comprobarlo.

   - Como estamos considerando que $x \geq 0$ entonces tenemos que $p(x) > 0$ para cualquier valor de x.
   - Otro modo de calcularlo es usando la derivada ya que , si consideramos la derivada ($p'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 8x + 5 > 0$) es mayor que cero para cualquier $x > 0$; luego entonces la función es monótona creciente si $x > 0$ y como $p(0) > 0$ tenemos que para cualquier número positivo $p(x) > 0$
   - Por último decir que, si todos los coeficientes de $p(x)$ son mayores que cero entonces no hay raíces positivas.

4. *Dada la función* $f(x) = \cos(x) - 2x$, *demuéstrese que tiene una única raíz real .*

   Para ver si tiene raíces, suponemos un intervalo $[a, b]$ y comprobamos que $f(a)\, f(b) < 0$. Trivialmente, si consideramos:
   $$\left.\begin{array}{rr} f(-\infty) = & +\infty \\ f(+\infty) = & -\infty \end{array}\right\} f(-\infty)\, f(+\infty) < 0 \text{ y al menos existe una raíz.}$$

   Para ver que es única debemos calcular la derivada y nos queda $f'(x) = -\sin(x) - 2 \lneqq 0$. Luego entonces tenemos que la función es estrictamente monótona decreciente y por tanto tiene una única raíz.

   Se consideran las siguientes iteraciones de punto fijo ($x_{n+1} = g_j(x_n) / j = 1, 2, 3, 4$ *). Compruébese además que la única raíz de* $f(x) = 0$ *es punto fijo de cada una de las funciones y viceversa. Indíquese cuáles de las iteraciones convergen y, en caso de converger, cuál es su orden de convergencia*

   a) $g_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{2}$.
   La función de iteración es pues $x_{n+1} = \dfrac{\cos(x_n)}{2}$.
   Veamos que es una iteración de punto fijo:
   $$\frac{\cos(x)}{2} = x \to \cos(x) = 2x \to \cos(x) - 2x = 0 \to f(x) = 0.$$

   Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:
   $g_1'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{2}$.

   Además la derivada cumple que $|g_1'(x)| \leq 0{,}5 < 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
   Luego entonces tenemos que $g_1(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13.
   El orden de convergencia depende de cual sea el punto fijo ya que si es de la forma $\alpha = k\pi / k \in \mathbb{Z}$ entonces la primera derivada se anula y por tanto es de orden 2 (ya que en ese caso la segunda derivada no se anula). Mientras no ocurra el caso anterior, el orden será lineal.

b) $g_2(x) = \cos(x) - x$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \cos(x_n) - x$.
Veamos que es una iteración de punto fijo:
$\cos(x) - x = x \to \cos(x) - 2x = 0 \to f(x) = 0$.

Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:
$g_2'(x) = -\sin(x) - 1$.

Veamos cuando la derivada cumple que $|g_2'(x)| < 1$.
$|g_2'(x)| < 1 \leftrightarrow -1 < -\sin(x) - 1 < 1 \leftrightarrow 0 < -\sin(x) < 2 \leftrightarrow -2 < \sin(x) < 0 \leftrightarrow \sin(x) < 0$.

Ahora si consideramos el intervalo $[-1, 0]$ podemos ver que $f(x)$ converge al punto fijo. El orden de convergencia depende de cual sea el punto fijo ya que si es de la forma $\alpha = 2k(2\pi/3)/k \in \mathbb{Z}$ entonces la primera derivada se anula y por tanto es de orden 2 (ya que en ese caso la segunda derivada no se anula). Mientras no ocurra el caso anterior, el orden será lineal.

c) $g_3(x) = \dfrac{x\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + 2}$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \dfrac{x_n \sin(x_n) + \cos(x_n)}{\sin(x_n) + 2}$.
Veamos que es una iteración de punto fijo:
$\dfrac{x\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + 2} = x \to x\sin(x) + \cos(x) = x\sin(x) + 2x \to x\sin(x) - x\sin(x) = \cos(x) - 2x \to \cos(x) - 2x = 0$.

Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:

$$g_3'(x) = \frac{(\sin(x) + x\cos(x) - \sin(x))(\sin(x) + 2) - \cos(x)(\cos(x) + x\sin(x))}{(\sin(x) + 2)^2} =$$

$$g_3'(x) = \frac{x\cos(x)\sin(x) + 2x\cos(x) - x\cos(x)\sin(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x) + 2)^2}$$

$$g_3'(x) = \frac{2x\cos(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x) + 2)^2}$$

Para ver cuando $|g_3'(x)| < 1$ vamos a estudiarlo por casos, basándonos en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y entonces tenemos:
$0 \leq x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \longrightarrow 0 \leq 2x\cos(x) \leq 2 \longrightarrow$
$\longrightarrow -\cos^2(1) \leq 2x\cos(x) \leq 1 - \cos^2(1) \longrightarrow$
$\longrightarrow -0{,}29 \leq 2x\cos(x) - \cos^2(x) \leq 0{,}7081$

$0 \leq x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \sin(x) \leq \sin(1) \longrightarrow$
$\longrightarrow 2 \leq \sin(x) + 2 \leq \sin(1) + 2 \longrightarrow$
$\longrightarrow 4 \leq (\sin(x)+2)^2 \leq (\sin(1)+2)^2 \longrightarrow$
$\longrightarrow 4 \leq (\sin(x)+2)^2 \leq 8{,}074$

Después de haber visto estas desigualdades tenemos que $|g_3'(x)| \in [0{,}03, 0{,}177]$ luego entonces podemos acotar la derivada por $|g_3'(x)| < 1/3$ y esto quiere decir que habrá un punto fijo de atracción si $x \in [0,1]$ como vamos a comprobar ahora:
$0 \leq x \leq 1 \longrightarrow \cos(1) \leq x\sin(x) + \cos(x)) \leq 1 + \sin(1) \longrightarrow$
$\longrightarrow \cos(1) \leq \dfrac{x\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+x} \leq \dfrac{\cos(1)+\sin(1)}{\sin(1)+1}$
Como las desigualdades se cumplen tenemos que esta aproximación converge en el intervalo antes mencionado, pasamos a ver el orden de convergencia.

$$\begin{aligned}
g_3'(\alpha) &= \frac{2\alpha\cos(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{(\sin(\alpha)+2)^2} = \frac{2\alpha\cos(\alpha) - 2\alpha\cos(\alpha)}{(\sin(x)+2)^2} = 0 \\
g_3''(\alpha) &= \frac{2\alpha\cos(\alpha) - 2\alpha\sin(\alpha) + 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{(\sin(\alpha)+2)^2} = \\
&= \frac{2\alpha\cos(\alpha) - 2\alpha\sin(\alpha) + 4\alpha\sin(\alpha)}{(\sin(x)+2)^2} = \frac{4\alpha + 2\alpha\sin(\alpha)}{(\sin(x)+2)^2} \neq 0
\end{aligned}$$

Como no se anula la segunda derivada, tenemos que la convergencia es cuadrática.

d) $g_4(x) = \dfrac{\cos(x) + 2x}{4}$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \dfrac{\cos(x_n) + 2x_n}{4}$.
Veamos que es una iteración de punto fijo:
$\dfrac{\cos(x) + 2x}{4} = x \rightarrow \cos(x) + 2x = 4x \rightarrow f(x) = 0.$

Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:
$g_4'(x) = \dfrac{-\sin(x) - 2}{4}$.
Además la derivada cumple que $|g_4'(x)| < 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
Luego entonces tenemos que $g_4(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13.
El orden de convergencia es lineal ya que se puede ver que la derivada se anula para ningún punto de $\mathbb{R}$.

5. *Dada la ecuación $x^3 - x - 5 = 0$ se propone resolverla mediante las siguientes iteraciones de punto fijo ($x_{n+1} = g_j(x_n) / j = 1, 2, 3$). Compruébese además que la única raíz de $f(x) = 0$ es punto fijo de cada una de las funciones y viceversa. Indíquese cuáles de las iteraciones convergen y, en caso de converger, cuál es su orden de convergencia.*

a) $g_1(x) = x^3 - 5$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = x_n^3 - 5$.
Veamos que es una iteración de punto fijo:
$x^3 - 5 = x \rightarrow x^3 - x - 5 = 0 \rightarrow f(x) = 0.$

Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:
$g_1'(x) = 3x^2$.

Además la derivada cumple que $|g_1'(x)| < 1 \forall x \in \left]\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$.
Luego entonces tenemos que $g_1(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13 en el intervalo antes mostrado ya que allí es continua, derivable y además cumple las condiciones.

El orden de convergencia depende de cual sea el punto fijo ya que si el punto fijo es $x = 0$ entonces la función de iteración seria de orden cúbico (ya que en ese caso la tercera derivada no se anula). Mientras no ocurra el caso anterior, el orden será lineal.

b) $g_2(x) = \sqrt[3]{x+5}$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 5}$.
Veamos que es una iteración de punto fijo:
$\sqrt[3]{x+5} = x \rightarrow x + 5 = x^3 \rightarrow f(x) = 0$.

Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:
$g_1'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}$.

Además la derivada cumple que $|g_1'(x)| < 1 \forall x \in]-4,-6[$.
Luego entonces tenemos que $g_1(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13 en el intervalo antes mostrado ya que allí es continua, derivable y además cumple las condiciones.
El orden de convergencia es lineal ya que se puede ver que la derivada se anula para ningún punto de $\mathbb{R}$.

c) $g_3(x) = \dfrac{5}{x^2-1}$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \dfrac{5}{x_n^2 - 1}$.
Veamos que es una iteración de punto fijo:
$\dfrac{5}{x^2-1} = x \rightarrow 5 = x^3 - x \rightarrow f(x) = 0$.

Visto que es de punto fijo pasamos a calcular su derivada que vale:
$g_1'(x) = \dfrac{-10x}{(x^2-1)^2}$.

Veamos cuando la derivada cumple que $|g_3'(x)| < 1$.

$$\begin{aligned} |g_3'(x)| < 1 \quad &\longleftrightarrow \quad -1 < \frac{-10x}{(x^2-1)^2} < 1 \\ &\longleftrightarrow \quad -\left(x^2-1\right)^2 < -10x < \left(x^2-1\right)^2 \end{aligned}$$

Estudiándolas por separado:

$$\begin{aligned} -\left(x^2-1\right)^2 < -10x &\leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2 > 10x \\ &\leftrightarrow x^4-2x^2+1 > 10x \\ &\leftrightarrow x^4-2x^2-10x+1 > 0 \end{aligned}$$

Cuya solución es muy compleja imposible de hacer manualmente con lo cual no podemos decir en que intervalos será convergente la función anterior ya que le otro caso es casi análogo;simplemente decir que la derivada no está definida en -1 y en 1.
El orden de convergencia depende de cual sea el punto fijo ya que si el punto fijo es $x=0$ entonces la función de iteración seria de orden cuadrático (ya que en ese caso la segunda derivada no se anula). Mientras no ocurra el caso anterior, el orden será lineal.

6. *Dada la ecuación* $x+\ln(x)=0$ *se propone resolverla mediante las siguientes iteraciones de punto fijo (* $x_{n+1}=g_j(x_n)/j=1,2,3$ *).Indíquese cuáles de las iteraciones convergen y, en caso de converger, cuál es su orden de convergencia.*

   a) $g_1(x)=-\ln(x)$.
   La función de iteración es pues $x_{n+1}=-\ln(x_n)$.
   Pasamos ahora a calcular su derivada que vale: $g_1'(x)=-x^{-1}$.
   Además la derivada cumple que $|g_1'(x)|<1 \forall x \in \,]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[$.
   Luego entonces tenemos que $g_1(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13 en los intervalos antes mostrado ya que allí es continua, derivable y además cumple las condiciones.
   El orden de convergencia es lineal ya que se puede ver que la derivada se anula para ningún punto de $\mathbb{R}$.

b) $g_2(x) = \exp(-x)$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \exp(-x_n)$.
Pasamos a calcular su derivada que vale: $g_2'(x) = -\exp(-x)$.
Además la derivada cumple que $|g_2'(x)| < 1 \forall x \in]0, +\infty[$.
Luego entonces tenemos que $g_2(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13 en el intervalo antes mostrado ya que allí es continua, derivable y además cumple las condiciones.
El orden de convergencia es lineal ya que se puede ver que la derivada se anula para ningún punto de $\mathbb{R}$.

c) $g_3(x) = \dfrac{x + \exp(x)}{2}$.
La función de iteración es pues $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \exp(x_n)}{2}$.
Pasamos a calcular su derivada que vale: $g_3'(x) = \dfrac{1 + \exp(x)}{2}$.
Además la derivada cumple que $|g_3'(x)| < 1 \forall x \in]-\infty, 0[$.
Luego entonces tenemos que $g_3(x)$ es una función de iteración que converge a un único punto fijo por el teorema 2.4.13 en el intervalo antes mostrado ya que allí es continua, derivable y además cumple las condiciones.
El orden de convergencia es lineal ya que se puede ver que la derivada se anula para ningún punto de $\mathbb{R}$.

7. *En los dos problemas anteriores, ¿podría proponer alguna iteración alternativa que converja más rápidamente que las que figuran en el enunciado?¿Cuál? Justifíquese.*
Se podría buscar alguna función que cumpliese esos requisitos, pero para ello sería necesario conocer el punto fijo que en este momento no sabemos cual es ya que no se puede calcular. Si lo conociéramos podríamos calcular algún método de los explicados en clase como puede ser Steffensen o Newton.

8. *Se utiliza la recurrencia:* $x_{n+1} = 2^{x_n - 1}$ *para resolver la siguiente ecuación* $2x = 2^x$. *Investíguese si y a que converge la sucesión según los valores de* x_0.
   Para comprobar si la recurrencia converge vamos a calcular la derivada de la función de iteración $g(x) = 2^{x-1}$:
   $g'(x) = 2^{x-1}\ln(2)$.
   Luego entonces sabemos que la función es continua y con derivada continua en todo $\mathbb{R}$ solo nos falta saber cuando $|g'(x)| < 1$, para ello vamos a calcular la desigualdad.

$$\begin{aligned} 2^{x-1}\ln(2) < 1 &\longleftrightarrow 2^{x-1} < \frac{1}{\ln(2)} \\ &\longleftrightarrow x < \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)} \\ &\longleftrightarrow x < 0{,}5287663729 \end{aligned}$$

   Entonces se cumple $|g'(x)| < 1 \forall x \in]-\infty, 0[$ donde, utilizando el teorema del manual 2.4.13 podemos decir que existe un único punto fijo de atracción, luego entonces si x_0 pertenece a este intervalo, tenemos que converge al punto fijo con un orden lineal.
   En otro caso, si x_0 no pertenece al intervalo antes mencionado podemos decir que no converge a ningún punto ya que la derivada en cualquier otro punto de los reales sería de módulo mayor que 1.

9. *Determínense* p, q, *y* r *para que la iteración:* $x_{n+1} = px_n + \frac{qa}{x_n^2} + \frac{ra^2}{x_n^5}$ *converja a* $\sqrt[3]{a}$ *con el mayor orden posible. Para la elección obtenida indíquese cómo el error en* x_n *+1 depende del error en* x_n.
   Para saber cuales son los valores de p, q, y r que debemos escoger usaremos inicialmente que es una iteración de punto fijo, por lo tanto sabemos que cuando $n \to \infty$ el valor x_n converge a $\sqrt[3]{a}$ y entonces nos queda:

$$\sqrt[3]{a} = p\sqrt[3]{a} + \frac{qa}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} + \frac{ra^2}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^5} \longleftrightarrow 1 = p + q + r$$

Luego entonces sabemos que para que la iteración sea de punto fijo los valores p, q, y r deben cumplir que $1 = p+q+r$, ahora vamos a ver cual es la solución más óptima (es decir, la que nos proporciona un mayor orden de la función de iteración), para ello calculamos la derivada de la función de iteración en $\sqrt[3]{a}$ y la igualamos a cero (así al menos sería de orden 2 el algoritmo).

$$0 = p - \frac{qa}{a} - \frac{ra^2}{a^2} \longleftrightarrow 0 = p - q - r$$

Gracias a esto es trivial ver, que para que el algoritmo sea al menos de orden dos es necesario que $p = 1$ (sumando las dos ecuaciones se puede comprobar) y que además $q+r = 1 \leftrightarrow q = 1-r$. Si volvemos a calcular la derivada nos queda el siguiente resultado:

$$0 = \frac{q}{\sqrt[3]{a}} + \frac{ra^2}{\sqrt[3]{a}} \longleftrightarrow 0 = q + r$$

Después de conoer cual es la segunda derivada tenemos que para que la función fuese al menos de orden tres debería cumplir:

$\left.\begin{array}{rr} q+r = & 0 \\ q+r = & 1 \end{array}\right\}$ Y esto no tiene solución.

Luego entonces para que la función sea de orden máximo, debe cumplir $p = 1 \wedge q + r = 1$ y por tanto será de orden 2, veamos ahora la dependencia del error.

Definimos el error en x_n :$|x_n - \alpha| = \varepsilon_{x_n}$ y entonces si calculamos el error en la siguiente iteración podemos ver que:

$$|x_{n+1} - \alpha| = x_n + \frac{qa}{x_n^2} + \frac{(1-q)\,a^2}{x_n^5} - \alpha = \frac{qa}{x_n^2} + \frac{(1-q)\,a^2}{x_n^5} + \varepsilon_{x_n}$$

Como acabamos de ver el error en x_{n+1} depende de la iteración anterior.

10. *Al aplicar el método iterativo se obtienen los siguientes errores, ¿Cual es el orden del método?.*

n	Error
4	0,3478
5	$8{,}2679 \cdot 10^{-2}$
6	$4{,}6662 \cdot 10^{-3}$
7	$1{,}4873 \cdot 10^{-5}$
8	$1{,}5158 \cdot 10^{-10}$
9	$1{,}5750 \cdot 10^{-20}$

Por definición de orden del error tenemos que el orden es p si se cumple que.
$m < \dfrac{|x* - x_{n+1}|}{|x* - x_n|^p} \leq M$

Aplicando logaritmos(y considerando que $\epsilon_n < 1$) :

$$l = \ln(m) < \ln(\epsilon_{n+1}) - p\ln(\epsilon_n) \leq \ln(M) = L \longrightarrow$$
$$l + p\ln(\epsilon_n) < \ln(\epsilon_{n+1}) \leq L + p\ln(\epsilon_n) \longrightarrow$$
$$\frac{l + p\ln(\epsilon_n)}{\ln(\epsilon_n)} < \frac{\ln(\epsilon_{n+1})}{\ln(\epsilon_n)} \leq \frac{L + p\ln(\epsilon_n)}{\ln(\epsilon_n)} \longrightarrow$$
$$\frac{l}{\ln(\epsilon_n)} + p < \frac{\ln(\epsilon_{n+1})}{\ln(\epsilon_n)} \leq \frac{L}{\ln(\epsilon_n)} + p \longrightarrow$$
$$\text{Como } \frac{l}{\ln(\epsilon_n)} \text{ y } \frac{L}{\ln(\epsilon_n)} \text{ converge a cero } \longrightarrow$$
$$\frac{\ln(\epsilon_{n+1})}{\ln(\epsilon_n)} \approx p$$

Luego entonces en nuestro caso:
$\dfrac{\ln(\epsilon_5)}{\ln(\epsilon_4)} \approx 2{,}36$, $\dfrac{\ln(\epsilon_6)}{\ln(\epsilon_5)} \approx 2{,}15$, $\dfrac{\ln(\epsilon_7)}{\ln(\epsilon_6)} \approx 2{,}07$,
$\dfrac{\ln(\epsilon_8)}{\ln(\epsilon_7)} \approx 2{,}03$, $\dfrac{\ln(\epsilon_9)}{\ln(\epsilon_8)} \approx 2{,}017$
Y de aquí podemos deducir que se está utilizando un método iterativo de orden dos como puede ser Newton.

11. *Si α es una raíz doble de $f(x)$ (es decir, $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$), calcúlese el orden del método de Newton alrededor de α.*
Utilizando el teorema 3.2.5. del manual tenemos que, como α es raíz múltiple de f con multiplicidad 2, entonces la convergencia del método de Newton es lineal y además la ratio es R = 1/2.

Si se define $h(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, *¿cual es el orden del método de Newton aplicado a* $h(x)$ *alrededor de* α *?*
Esta función tiene la propiedad que $h(\alpha) = 0$ pero sin embargo $h'(\alpha) \neq 0$, con la cual cosa tenemos que α es raíz simple de $h(x)$. Y por tanto el método de Newton para la función $h(x)$ sería el siguiente:

$$g_{N;h} = x - \frac{h(x)}{h'(x)} = x - \frac{f(x) f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}$$

Y utilizando el teorema 3.2.4. del manual tenemos probado que es de orden dos ya que $h(x)$ tiene a α como raíz simple.

12. *Queremos resolver la ecuación de punto fijo* $x = g(x)$, *con* $g(x)$ *diferenciable. Para ello proponemos la siguiente iteración (delta-2):*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(g(x_n) - x_n)^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}$$

¿Cuál es el orden del método? Demuéstrese.
Consideramos las siguientes funciones:
$N(x) = (g(x_n) - x_n)^2$
$N(\alpha) = (g(\alpha) - \alpha)^2 = 0$
$N'(x) = 2(g(x_n) - x_n)(g'(x_n) - 1)$
$N'(\alpha) = 2(g(\alpha) - \alpha)(g'(\alpha) - 1) = 0$
$N''(x) = 2(g(x_n) - x_n)(g'(x_n) - 1)^2 + 2g''(x_n)(g(x_n) - x_n)$
$N''(\alpha) = 2(g(\alpha) - \alpha)(g'(\alpha) - 1)^2 + 2g''(\alpha)(g(\alpha) - \alpha) = 2D'(\alpha)$
$D(x) = g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n$
$D(\alpha) = g(g(\alpha)) - 2g(\alpha) + \alpha = \alpha - 2\alpha + \alpha = 0$
$D'(x) = g'(g(x_n))g'(x_n) - 2g'(x_n) + 1$
$D'(\alpha) = g'(g(\alpha))g'(\alpha) - 2g'(\alpha) + 1 = (g'(\alpha) - 1)^2$
Y a partir de esto comprobar el orden del método:

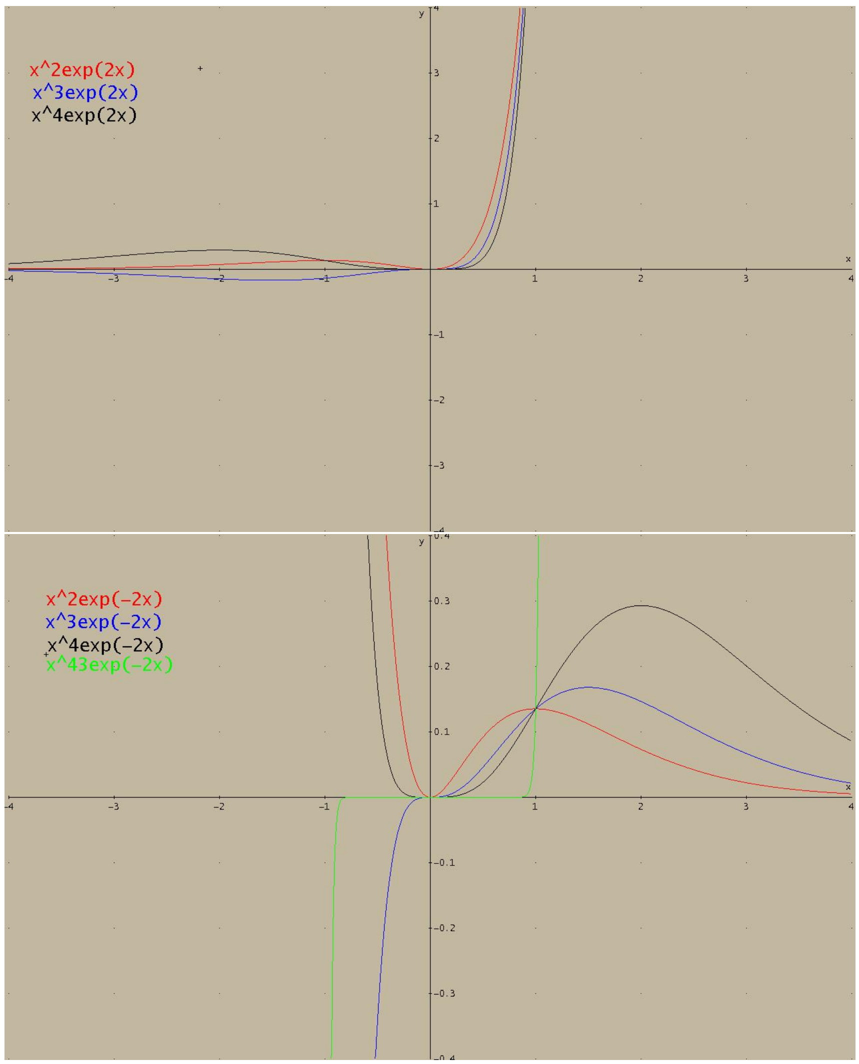
$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x - \frac{N(x)}{D(x)} \\
\varphi(\alpha) &= \alpha - \frac{N'(\alpha)}{D(\alpha)} \longrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 1 - \frac{N'(x)\,D(x) - N(x)\,D'(x)}{(D(x))^2} \\
&= 1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{N'(x)}{D(x)} + D'(x) \lim_{x\to\alpha} \frac{N(x)}{(D(x))^2} = \text{ L'Hopital} \\
&= 1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{N''(x)}{D'(x)} + D'(x) \lim_{x\to\alpha} \frac{N'(x)}{2D(x)\,D'(x)} \\
&= 1 - 2 + \frac{1}{D'(\alpha)} \lim_{x\to\alpha} \frac{N'(x)}{2D(x)} \\
\varphi'(\alpha) &= 1 + 2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

Luego entonces la convergencia es cuadrática.

13. *Consideramos la sucesión de integrales:*
 $I_n = \int_0^1 x^n e^{ax}\, \mathrm{d}x / a \neq 0$

 a) *Demostrar que* $lim_n I_n = 0$.
 Usamos que la función es decreciente primero como vemos en la gráfica o se prueba fácilmente mediante desigualdades



 Además también podemos decir que está acotada inferiormente por $\int_0^1 -e^{ax}$ ya que cualquier valor x^n / $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$ es mayor que -1. Por ello, tenemos que está acotada por:

$$\int_0^1 -e^{ax} = -\frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{a}\left(e^a - 1\right)$$

Luego entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que existe limite de la función, y este vale:

$$l = \frac{e^a}{a} - \frac{n}{a}l \longleftrightarrow l\left(1 + \frac{n}{a}\right) = \frac{e^a}{a} \longleftrightarrow l = \frac{e^a}{a}\left(\frac{a}{a+n}\right)^{n=\infty} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

b) *Comprobar que se verifica:* $I_0 = \frac{exp(a)}{a}$, *y , para* $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{e^a}{a} - \frac{n}{a}I_{n-1}$$

Para comprobarlo vamos a calcular primero la integral para I_0 y luego para I_n, entonces:

$$\int_0^1 x^0 e^{ax}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left[e^{ax}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^a - 1}{a}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n e^{ax}\,\mathrm{d}x \quad &, \quad \text{Usando integración por partes } u = x^n \text{ y } dv = e^{ax}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^n}{a}\left[e^{ax}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{a} n x^{n-1} e^{ax}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^a}{a} - \frac{n}{a}\int_0^1 x^{n-1} e^{ax}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^a}{a} - \frac{n}{a}I_{n-1}
\end{aligned}$$

c) *¿Para que valores de a es estable la recurrencia anterior?.*
Calculamos pues alguna iteración para comprobarlo en general.

$$\begin{aligned}
I_0^* &= I_0 + \varepsilon \\
I_1^* &= \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} I_0^* = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a}(I_0 + \varepsilon) = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} I_0 - \frac{1}{a}\varepsilon = I_1 - \frac{1}{a}\varepsilon \\
I_2^* &= \frac{e^a}{a} - \frac{2}{a} I_1^* = \frac{e^a}{a} - \frac{2}{a}\left(I_1 - \frac{1}{a}\varepsilon\right) = \frac{e^a}{a} - \frac{2}{a} I_1 + \frac{2}{a^2}\varepsilon = I_2 + \frac{2}{a^2}\varepsilon \\
&\dots \\
I_n^* &= I_n + (-1)^n \frac{n!}{a^n}\varepsilon
\end{aligned} \tag{1}$$

Después de hacer estos cálculos se comprueba fácilmente que $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ el algoritmos es inestable, ya que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$$

d) *En los casos en que sea inestable proponer una alternativa estable.*
La forma más fácil de algoritmo estable a la cual podemos recurrir es la siguiente:

$$I_n = \frac{e^a}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1} \longrightarrow I_{n-1} = \frac{e^a}{a} - \frac{a}{n} I_n$$

Como $\lim_n \mathrm{I}_n = 0$, podemos considerar $I_{100} = 0$ y iríamos calculando hacia atrás la sucesión, con lo cual el error se dividiría y sería entonces estable.

14. *Dados $n + 1$ puntos distintos, $x_0, x_1 \dots, x_n \in [a, b]$, demostrar que la sucesión de polinomios de Lagrange asociada a esos nodos forma una base del espacio de polinomios de grado menor o igual que n.*
Sabemos que el polinomio de Lagrange de grado j es:

$$L_j = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} / \text{ j = 0,1, \dots, n}$$

Tenemos n + 1 polinomios, entonces para comprobar que son base simplemente tenemos que ver que forman un sistema libre de polinomios. Consideramos $q(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \ldots + \alpha_n L_n(x) = 0$

Sabemos que: $L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Entonces:

$$\begin{aligned} q(x_0) &= \alpha_0 L_0(x_0) + \alpha_1 L_1(x_0) + \ldots + \alpha_n L_n(x_0) = \alpha_0 = 0 \\ q(x_1) &= \alpha_0 L_0(x_1) + \alpha_1 L_1(x_1) + \ldots + \alpha_n L_n(x_1) = \alpha_1 = 0 \\ &\ldots \\ q(x_n) &= \alpha_0 L_0(x_n) + \alpha_1 L_1(x_n) + \ldots + \alpha_n L_n(x_n) = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

De donde tenemos que $\alpha_i = 0 \forall i \in \{0, \ldots, n\}$ y así, $\{L_0(x), \ldots, L_n(x)\}$ son linealmente independientes luego forman una base del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n.

15. *Se propone le siguiente problema de interpolación:*
Dados dos nodos distintos $x_0, x_1 \in [-1, 1]$, y dos valores reales f_0, f_1 , encontrar un polinomio de la forma: $p(x) = a_0 x + a_1 x^3$ tal que $p(x_0) = f_0$ y $p(x_1) = f_1$
¿Cuando tiene solución única?.
Utilizando los datos del enunciado podemos decir que:
$\left.\begin{array}{ll} p(x_0) = & a_0 x_0 + a_1 x_0^3 = f_0 \\ p(x_1) = & a_0 x_1 + a_1 x_1^3 = f_1 \end{array}\right\}$
Podemos también escribir el sistema en forma matricial $Ax = b$.
$\begin{pmatrix} x_0 & x_0^3 \\ x_1 & x_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$
El sistema tendrá solución única $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$
$|A| = x_0 x_1^3 - x_1 x_0^3 = x_0 x_1 (x_1^2 - x_0^2)$
Y solo valdrá 0 si se cumple que: $x_0 x_1 (x_1^2 - x_0^2) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & \text{ó} \\ x_1 = 0 & \text{ó} \\ x_0^2 = x_1^2 \longrightarrow & x_1 = x_0 \text{ó} x_1 = -x_0 \end{cases}$

Luego el problema de interpolación tendrá solución única si $x_0 \neq 0$,$x_1 \neq 0$ y $x_1 \neq x_0$ ó $x_1 \neq -x_0$

16. *Encontrar una base de polinomio de tercer grado* $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ *que verifique:*
$p_0(0) = 1, p_0(1) = p_0'(0) = p_0'(1) = 0$
$p_1(1) = 1, p_1(0) = p_1'(0) = p_1'(1) = 0$
$p_2'(0) = 1, p_2(0) = p_2(1) = p_2'(1) = 0$
$p_3'(1) = 1, p_3(0) = p_3(1) = p_3'(0) = 0$
Utilizando estos datos podemos definir un polinomio para cada grupo de datos

a) Calculando las diferencias divididas para $p_0(x)$ nos queda:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot\cdot]$	$f[\cdots]$	$f[\cdots\cdot]$
0	1	/	/	/
0	1	0	/	/
1	0	-1	-1	/
1	0	0	1	2

Y por lo tanto el polinomio interpolador es:
$p_0(x) = 1x^0 + 0x^1 - 1x^2 + 2x^2(x-1) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

b) Calculando las diferencias divididas para $p_1(x)$ nos queda:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot\cdot]$	$f[\cdots]$	$f[\cdots\cdot]$
0	0	/	/	/
0	0	0	/	/
1	1	1	1	/
1	1	0	-1	-2

Y por lo tanto el polinomio interpolador es:
$p_1(x) = 0x^0 + 0x^1 + 1x^2 - 2x^2(x-1) = -2x^3 + 3x^2$

c) Calculando las diferencias divididas para $p_2(x)$ nos queda:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot\cdot]$	$f[\cdots]$	$f[\cdots\cdot]$
0	0	/	/	/
0	0	1	/	/
1	0	0	-1	/
1	0	0	0	1

Y por lo tanto el polinomio interpolador es:
$p_2(x) = 0x^0 + 1x^1 - 1x^2 + x^2(x-1) = x^3 - 2x^2 + x$

d) Calculando las diferencias divididas para $p_3(x)$ nos queda:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot\cdot]$	$f[\cdots]$	$f[\cdots\cdot]$
0	0	/	/	/
0	0	0	/	/
1	0	0	0	/
1	0	1	1	1

Y por lo tanto el polinomio interpolador es:
$p_1(x) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + 1x^2(x-1) = x^3 - x^2$

Veamos que $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es una base de polinomios de tercer grado. Será sufficiente con ver que la matriz de cambio de base es regular, esto es, ver si $|A| \neq 0$ siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con:

$$|A| = -\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

Luego entonces $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es una bases de polinomio de tercer grado.

Encuéntrese el polinomio $q\left(x\right)$ tal que:
$q\left(0\right)=2,\ \ q\left(1\right)=-1,\ \ q'\left(0\right)=-0{,}5,\ \ q'\left(1\right)=-2$
Como $\left\{p_0\left(x\right), p_1\left(x\right), p_2\left(x\right), p_3\left(x\right)\right\}$ es una base de polinomios de tercer grado podemos escribir:

$$q\left(x\right)=\alpha_0 p_0\left(x\right)+\alpha_1 p_1\left(x\right)+\alpha_2 p_2\left(x\right)+\alpha_3 p_3\left(x\right)$$
$$q'\left(x\right)=\alpha_0 p_0'\left(x\right)+\alpha_1 p_1'\left(x\right)+\alpha_2 p_2'\left(x\right)+\alpha_3 p_3'\left(x\right)$$

Cumpliendo:

$$q\left(0\right)=\alpha_0 p_0\left(0\right)+\alpha_1 p_1\left(0\right)+\alpha_2 p_2\left(0\right)+\alpha_3 p_3\left(0\right)=2\longrightarrow\alpha_0=2$$
$$q\left(1\right)=\alpha_0 p_0\left(1\right)+\alpha_1 p_1\left(1\right)+\alpha_2 p_2\left(1\right)+\alpha_3 p_3\left(1\right)=-1\longrightarrow\alpha_1=-1$$
$$q'\left(0\right)=\alpha_0 p_0'\left(0\right)+\alpha_1 p_1'\left(0\right)+\alpha_2 p_2'\left(0\right)+\alpha_3 p_3'\left(0\right)=-0{,}5\longrightarrow\alpha_2=-0{,}5$$
$$q'\left(1\right)=\alpha_0 p_0'\left(1\right)+\alpha_1 p_1'\left(1\right)+\alpha_2 p_2'\left(1\right)+\alpha_3 p_3'\left(1\right)=-2\longrightarrow\alpha_3=-2$$

Luego entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} q\left(x\right) &= 2\left(2x^3-3x^2+1\right)-\left(-2x^3+3x^2\right)-0{,}5\left(x^3-2x^2+x\right)-2\left(x^3-x^2\right)= \\ &= 4x^3-6x^2+2+2x^3-3x^2-0{,}5x^3+x^2-0{,}5x-2x^3+2x^2 \\ &= 3{,}5x^3-6x^2-0{,}5x+2 \end{aligned}$$

Que interpola el valor deseado en los puntos antes mencionados.

17. *Dada la tabla de valores para la función* $f(x) = \cos(x)$ *aproximar* $f(0{,}7)$ *mediante un polinomio de segundo grado, una función* M_0^1*, una función* M_1^3 *y una función* M_2^5*. Acótese el error en cada caso:*

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	0
0.5	0.968912	-0.247404	-1.463720
1	0.540302	-1.682942	-3.844151

Sabiendo inicialmente que $f(0{,}7) = 0{,}8823328586$ vamos a ver las aproximaciones mediante los polinomios interpoladores.

- Empezaremos calculando el polinomio de segundo grado mediante diferencias divididas:

x	$p_0[\cdot]$	$p_0[\cdot\cdot]$	$p_0[\cdots]$
0	1	/	/
0.5	0.968912	-0.062176	/
1	0.540302	-0.85722	-0.795044

Luego entonces el polinomio interpolador es:
$p_0(x) = 1x^0 - 0{,}062176x^1 - 0{,}795044x(x - 0{,}5)$
$p_0(x) = 1 - 0{,}062176x - 0{,}795044x^2 + 0{,}397522x$
$p_0(0{,}7) = 0{,}84517$

- Pasamos ahora a calcular la función M_0^1:

x	$p_1[\cdot]$	$p_1[\cdot\cdot]$
0.5	0.968912	/
1	0.540302	-0.85722

Luego entonces el polinomio interpolador es:
$p_1(x) = 0{,}968912x^0 - 0{,}85722(x - 0{,}5)$
$p_1(x) = -0{,}85722x + 1{,}397522x$
$p_1(0{,}7) = 0{,}797468$

- Pasamos ahora a calcular la función M_1^3:

x	$p_2[\cdot]$	$p_2[\cdot\cdot]$	$p_2[\cdots]$	$p_2[\cdot\cdot\cdot\cdot]$
0.5	0.968912	/	/	/
0.5	0.968912	-0.247404	/	/
1	0.540302	-0.85722	-1.219632	/
1	0.540302	-1.682942	-1.651444	-0.863624

Luego entonces el polinomio interpolador es:
$p_2(x) = 0{,}968912x^0 - 0{,}247404(x-0{,}5) - 1{,}219632(x-0{,}5)^2 - 0{,}863624(x-0{,}5)^2(x-1)$
$p_2(x) = -\dfrac{431812x^3 - 253808x^2 + 53651x - 501806}{500000}$
$p_2(0{,}7) = 0{,}881009408$

- Pasamos ahora a calcular la función M_2^5:

x	$p_3[\cdot]$	$p_3[\cdot\cdot]$	$p_3[\cdots]$	$p_3[\cdot\cdot\cdot\cdot]$	$p_3[\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot]$	$p_3[\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot]$
0.5	0.968912	/	/	/	/	/
0.5	0.968912	-0.247404	/	/	/	/
0.5	0.968912	-0.247404	-0.731810	/	/	/
1	0.540302	-0.85722	-1.219632	-0.975644	/	/
1	0.540302	-1.682942	-1.651444	-0.863624	0.22404	/
1	0.540302	-1.682942	-1.922760	-0.54264	0.641968	0.835856

Luego entonces el polinomio interpolador es:
$p_3(x) = 0{,}968912x^0 - 0{,}247404(x-0{,}5) - 0{,}731810(x-0{,}5)^2 - 0{,}975644(x-0{,}5)^3 + 0{,}22404(x-0{,}5)^3(x-1) + 0{,}835856(x-0{,}5)^3(x-1)^2$
$p_3(x) = \dfrac{417928x^5 - 1350728x^4 + 1217286x^3 - 688152x^2 + 196247x + 477570}{500000}$
$p_3(0{,}7) = 0{,}8824177683$

Vamos a acotar el error en cada caso:

- Empezaremos calculando el polinomio de segundo grado:
$|f(x) - p_0(x)| \leq \left|\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-0{,}5)(x-1)\right| \leq |(x-0{,}5)(x-1)| = |-0{,}06| = 0{,}06$
Error real:
$|f(0{,}7) - p_0(0{,}7)| = |0{,}84517 - 0{,}8823328586| = 0{,}03716285859$

- Pasamos ahora a calcular la función M_0^1:
$|f(x) - p_1(x)| \leq \left|\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-0{,}5)\right| \leq |(x-0{,}5)| = |0{,}2| = 0{,}2$
Error real:
$|f(0{,}7) - p_1(0{,}7)| = |0{,}797468 - 0{,}8823328586| = 0{,}08486485860$

- Pasamos ahora a calcular la función M_1^3:
  $|f(x) - p_2(x)| \leq \left|\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-0{,}5)^2(x-1)^2\right| \leq \left|(x-0{,}5)^2(x-1)^2\right| =$
  $|0{,}0036| = 0{,}0036$
  Error real:
  $|f(0{,}7) - p_2(0{,}7)| = |0{,}881009408 - 0{,}8823328586| = 0{,}001323450599$

- Pasamos ahora a calcular la función M_2^5:
  $|f(x) - p_3(x)| \leq \left|\dfrac{f''''(\xi)}{4!}(x-0{,}5)^3(x-1)^2\right| \leq \left|(x-0{,}5)^3(x-1)^2\right| =$
  $|0{,}00072| = 0{,}00072$
  Error real:
  $|f(0{,}7) - p_3(0{,}7)| = |0{,}8824177683 - 0{,}8823328586| = 8{,}490970000 \cdot 10^{-5}$

18. *Dada $f(x)$ una función diferenciable en $[a,b]$ tal que $|f(x)| \leq K_2$ y $p(x)$ el polinomio interpolador a $f(x)$ en los nodos $x_0 = a$ y $x_1 = b$, compruébese que*:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{K_2}{8}(b-a)^2,\ x \in [a,b]$$

Utilizando los datos anteriores tenemos que:
$|f(x) - p(x)| \leq \dfrac{K_2}{2!}|(x-x_1)(x-x_2)| = \dfrac{K_2}{2!}|(x-a)(x-b)|$
Luego entonces definimos $q(x) = (x-a)(x-b)$ y tenemos que cumple las siguientes propiedades:
$q'(x) = (x-b) - (x-a) = 2x - (a-b)$
$q'(x) = 0 \longleftrightarrow x = \dfrac{a-b}{2}$
$q''(x) = 2 \longrightarrow$ en $x = \dfrac{a+b}{2}$ hay un mínimo
$|q(x)|$ tiene máximo en $x = \dfrac{a+b}{2}$
En conclusión, tenemos que :
$|f(x) - p(x)| \leq \dfrac{K_2}{2!}\dfrac{1}{4}|(b-a)(a-b)| = \dfrac{K_2}{8}(b-a)^2$

19. *Se propone el siguiente problema de interpolación:*
Encontrar un polinomio de segundo grado, $p(x)$, tal que:
$p(1) = f_0,\ p'(1) = f_1,\ p'(2) = f_2$
siendo f_0, f_1, f_2 tres valores reales. ¿Tiene solución única?
Como es un problema de interpolación de tres puntos consideramos un polinomio de segundo grado que cumpla los tres requisitos anteriores, es decir, tendrá la siguiente forma:
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
$p'(x) = a_1 + 2a_2x$

Luego entonces tenemos que se forma el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rr} p(1) = & a_0 + a_1 + a_2 = f_0 \\ p'(1) = & a_1 + 2a_2 = f_1 \\ p'(2) = & a_1 + 4a_2 = f_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que el sistema tendrá solución única si $|A| \neq 0$, y se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Luego el problema de interpolación planteado tiene solución única.

20. *Dados $n+1$ nodos distintos, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, y $n+1$ valores, demostrar que existe un único polinomio $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}$ tal que $p'(x) = f_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.* Como es un problema de interpolación planteamos el mismo método que en el apartado anterior, es decir, tendrá la siguiente forma:
$p(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n+1}x^{n+1}$
$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + (n+1)\,a_{n+1}x^n$

Luego entonces tenemos que se forma el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & \cdots & (n+1)\,x_0^n \\ 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \cdots & (n+1)\,x_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & 2x_n & 3x_n^2 & \cdots & (n+1)\,x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Y sabemos que existirá y será única la solución$\longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$, veámoslo:

$$|A| = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}(n+1) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = (n+1)\,|B|$$

Pero de teoría sabemos que B es una matriz de Vandermonde, y sabemos además que su determinante es no nulo. Luego entonces tenemos que $|A| \neq 0$ y por tanto existe un único polinomio $p\,(x)$ que verifica las hipótesis propuestas.

21. *Se desea aproximar la función* $f\,(x) = \sqrt{e^{3x}}$ *en el intervalo* $[0,1]$ *mediante una función* M_0^1 *con intervalos igualmente espaciados de longitud* h. *¿Cuántos intervalos debemos tomar para cometer un error menor que* 10^{-6} *?*

Vamos a hacer operaciones sobre la función $f\,(x) = \sqrt{e^{3x}}$ que cumple:
$f\,(x) = \sqrt{e^{3x}} = e^{\frac{3x}{2}}$
$f'\,(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{3x}{2}}$
$f''\,(x) = \frac{9}{4}e^{\frac{3x}{2}}$

Sabemos que el error que se comete en una función M_0^1 es:

$$\varepsilon = \left| \frac{f''\,(\xi)}{2!}\,(x - x_i)\,(x - x_{i+1}) \right|$$

Pero, de aquí considerando $s = \widetilde{s}h$ podemos extraer que:
$|(x - x_i)\,(x - x_{i+1})| = |(x - x_i)\,((x - x_i) - h)| = |s\,(s - h)| = h^2\,|\widetilde{s}\,(\widetilde{s} - 1)|$

Como la s va de 0 a h se tiene que : $p\,(\widetilde{s}) = \widetilde{s}\,(\widetilde{s} - 1)$
$p'\,(\widetilde{s}) = 2\widetilde{s} - 1 = 0 \longrightarrow \widetilde{s} = 0{,}5$
$p\,(0{,}5) = -0{,}25$

Por lo tanto se cumple que:
$h^2\,|\widetilde{s}\,(\widetilde{s} - 1)| \leq \dfrac{h^2}{4} \longrightarrow |(x - x_i)\,(x - x_{i+1})| \leq \dfrac{M_2 h^2}{8}$

Ahora hay que ver que valor entre 0 y 1 hace máximo a $f''(x)$, siendo en este caso, el valor $x = 1$ ya que:
$|f''(x)| = \left|\frac{9}{4}e^{\frac{3x}{2}}\right| = \frac{9}{4}e^{\frac{3}{2}}$

Así pues nos queda:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \frac{9}{32}e^{\frac{3}{2}}h^2 < 10^{-6} \\
h^2 &< 10^{-6}\frac{32}{9}e^{-\frac{3}{2}} \\
h &< \sqrt{10^{-6}\frac{32}{9}e^{-\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}10^{-3}\sqrt{2e^{-\frac{3}{2}}} = e^{-\frac{3}{4}}\frac{4}{3}10^{-3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{750}e^{-\frac{3}{4}} \\
h &< \frac{\sqrt{2}}{750}e^{-\frac{3}{4}} = 8{,}907029137 \cdot 10^{-4} = 0{,}008907029137
\end{aligned}$$

Luego entonces sería : h = 0.0089.

2. Segunda tanda de problemas

1. *Calcule la aproximación óptima a $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$ mediante polinomios de tercer grado.*

   Buscamos un polinomio del tipo $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, y sabemos que:

$$< x^i, x^j >= \int_1^{-1} x^{i+j} \text{ dx} = \left[\frac{x^{j+i+1}}{i+j+1} \right]_1^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si i + j es impar} \\ \dfrac{2}{i+j+1} & \text{si i + j es par} \end{cases}$$

   Y queremos estudiar los a_i que cumplen el siguiente producto matricial:

$$\begin{bmatrix} <1,1> & <x,1> & <x^2,1> & <x^3,1> \\ <1,x> & <x,x> & <x^2,x> & <x^3,x> \\ <1,x^2> & <x,x^2> & <x^2,x^2> & <x^3,x^2> \\ <1,x^3> & <x,x^3> & <x^2,x^3> & <x^3,x^3> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f, \widetilde{1} > \\ < f, \widetilde{x} > \\ < f, \widetilde{x^2} > \\ < f, \widetilde{x^3} > \end{bmatrix}$$

   Empezamos pues haciendo los cálculos:

$$\begin{aligned} < f, \widetilde{1} > &= \int_1^{-1} f(x) \text{ dx} = \int_1^{-1} |x| \text{ dx} = \int_{-1}^{0} (-x) \text{ dx} + \int_0^1 x \text{dx} = \\ &= -\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < f, \widetilde{x} > &= \int_1^{-1} f(x) x \text{ dx} = \int_1^{-1} |x| x \text{dx} = \int_{-1}^{0} \left(-x^2\right) \text{ dx} + \int_0^1 x^2 \text{dx} = \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < f, \widetilde{x^2} > &= \int_1^{-1} f(x) x^2 \text{ dx} = \int_1^{-1} |x| x^2 \text{dx} = \int_{-1}^{0} \left(-x^3\right) \text{ dx} + \int_0^1 x^3 \text{dx} = \\ &= -\left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < f, \widetilde{x^3} > &= \int_1^{-1} f(x) x^3 \text{ dx} = \int_1^{-1} |x| x^3 \text{dx} = \int_{-1}^{0} \left(-x^4\right) \text{ dx} + \int_0^1 x^4 \text{dx} = \\ &= -\left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0 \end{aligned}$$

Y por tanto nos queda el siguiente sistema de ecuaciones después de haber calculado mediante os datos disponibles:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y haciendo los cálculos pertinentes (son dos sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas):

$a_0 = \frac{3}{16}; \qquad a_1 = 0; \qquad a_2 = \frac{15}{16}; \qquad a_3 = 0$

b) Calcula la aproximación óptima a dicha función mediante polinomios trigonométricos de segundo grado, es decir, funciones $m(x)$ del tipo:

$$m(x) = a_0 \sum_{k=1}^{2} \left(a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)\right)$$

Luego entonces sabemos que el polinomio que buscamos es de la forma $m_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(x) + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x)$ calculando los coeficientes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} f(x)\cos(0x)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} |x|\cos(0x)\,\mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} (-x)\cos(0x)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos(0x)\,\mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} (-x)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\mathrm{dx} = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} |x|\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} (-x)\cos(kx)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos(kx)\,\mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(-k)}{k} - \frac{\cos(-k)-1}{k^2} + \frac{\sin(k)}{k} + \frac{\cos(k)-1}{k^2}\right] \\ &= 0\forall\text{ k } \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{1}^{-1} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{-1}|x|\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}(-x)\sin(kx)\,\mathrm{dx} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} x\sin(kx)\,\mathrm{dx} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(-k)}{k} - \frac{\sin(-k)}{k^2} - \frac{\cos(k)}{k} + \frac{\sin(k)}{k^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\sin(k)}{k^2}\right] \forall\ \mathrm{k}\ \geq 1
\end{aligned}$$

Después de haber hecho todos estos cálculos, nos queda que el polinomio trigonométrico de grado 2 que mejor se aproxima es

$$\begin{aligned}
m_2(x) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{2\sin(1)}{\pi}\sin(x) + \frac{\sin(2)}{2\pi}\sin(2x) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + 2\sin(1)\sin(x) + \frac{\sin(2)}{2}\sin(2x)\right]
\end{aligned}$$

2. *¿Es el problema de aproximación óptima, en general, lineal? Es decir, dado un espacio normado E, con $f, g \in E$ y un subespacio S de E, si $p^* \in S$ es aproximación óptima a f en S, y $q^* \in S$ es aproximación óptima a g en S, para cualesquiera escalares α_1 y α_2, ¿ Se cumple que $\alpha_1 p^* + \alpha_2 q^*$ es aproximación óptima a $\alpha_1 f + \alpha_2 g$ en S?.*
   Por definición de aproximación óptima en espacios normados tenemos que se cumplen las siguientes desigualdades en el subespacio S.
   $$\left.\begin{array}{l} \|f - p^*\| \leq \|f - p\| \quad \forall p \in S \\ \|g - q^*\| \leq \|g - q\| \quad \forall q \in S \end{array}\right\}$$
   Y queremos comprobar que $\forall p, q \in S$ se cumple :
   $$\|\alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p^* - \alpha_2 q^*\| \leq \|\alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p - \alpha_2 q\|$$
   Si aplicamos las propiedades de las normas:
   $$\begin{aligned}
   \|\alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p^* - \alpha_2 q^*\| &\leq \|\alpha_1 f - \alpha_1 p^*\| + \|\alpha_2 g - \alpha_2 q^*\| \leq \\
   &\leq |\alpha_1|\,\|f - p^*\| + |\alpha_2|\,\|g - q^*\| \leq \\
   &\leq |\alpha_1|\,\|f - p\| + |\alpha_2|\,\|g - q\| \leq \\
   &\leq \left||\alpha_1|\,\|f - p\| + |\alpha_2|\,\|g - q\|\right| \leq \\
   &\leq \|\alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p - \alpha_2 q\|
   \end{aligned}$$

Tenemos pues que no es la aproximación óptima ya que $|\alpha_1|\,\|f-p\| + |\alpha_2|\,\|g-q\|$ es una aproximación mejor que la que nos decía el problema, luego entonces tenemos que no es lineal.

¿Y si la norma proviene de un producto escalar?
En ese caso es diferente ya que la aproximación óptima debería cumplir los siguientes requisitos. $\left.\begin{array}{ll} < f-p^*, p >= 0 & \forall p \in S \\ < g-q^*, q >= 0 & \forall q \in S \end{array}\right\}$ Y queremos ver si $\forall p, q \in S$ se tiene que:

$$< \alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p^* - \alpha_2 q^*, \alpha_1 p + \alpha_2 q >= 0$$

Si aplicamos las propiedades del producto escalar:

$$\begin{array}{rcl} < \alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p^* - \alpha_2 q^*, \alpha_1 p + \alpha_2 q > & = & \\ < \alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p^* - \alpha_2 q^*, \alpha_1 p > + < \alpha_1 f + \alpha_2 g - \alpha_1 p^* - \alpha_2 q^*, \alpha_2 q > & = & (\sharp) \\ < \alpha_2 g - \alpha_2 q^*, \alpha_1 p > + < \alpha_1 f - \alpha_1 p^*, \alpha_2 q > & = & \\ \alpha_1 \alpha_2 \left(< g - q^*, p > + < f - p^*, q >\right) & = & 0\,(\sharp) \end{array}$$

($\sharp$) ya que tenemos supuesto $< f - p^*, p >= 0 \ \forall \ p \in S$

En conclusión, tenemos que en este caso, si la norma proviene de un producto escalar se cumple que la aproximación óptima es lineal.

3. *Consideramos n números reales estrictamente positivos* $w_1, w_2, \ldots, w_n$. *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$, *se define una operación* $< .,. >_w$ *del siguiente modo. Dados* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *se define:*

$$< .,. >_w = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i w_i$$

Demuéstrese que tal operación es un producto escalar.
Para probar que es un producto escalar tenemos que ver si cumple las cuatro propiedades, por ello:

- $< x, x >_w \geq 0 \forall x \in E$
  La prueba es trivial ya que se considera que w_i es estrictamente mayor que cero y además todos los elementos del sumatorio están elevados al cuadrado, luego se sigue cumpliendo esta propiedad.
- $< x, y >_w = < y, x >_w \; \forall x, y \in E$
  La prueba es trivial ya que el producto de número reales es conmutativo luego entonces el producto escalar es simétrico.
- $< x, y + z >_w = < x, y >_w + < x, z >_w \; \forall x, y, z \in E$
  La prueba es trivial ya que en la primera parte de la igualdad tendremos que cada elemento i-ésimo será de la forma $x_i w_i (y_i + z_i)$ luego se podrá separar y formará los otros dos productos escalares. En conclusión, esta propiedad también se cumple.
- $< \alpha x, y >_w = \alpha < x, y >_w \; \forall x, y \in E \forall \alpha \in \mathbb{R}$
  La prueba (por si no lo sabías) también es trivial ya que cada elemento i-ésimo será de la forma $(\alpha x_i) y_i w_i$ luego entonces por la propiedad asociativa de los números reales podemos extraer el α fuera del sumatorio y tendremos pues el resultado buscado.

En conclusión, tenemos que el posible producto escalar definido anteriormente SÍ que es un producto escalar.

Compruébese que, si algún w_i no es estrictamente positivo, lo anterior no se verifica.
Basta considerar el vector $\mathbf{e}_1$ primer vector de la base canónica y los siguientes vectores:

$$\left.\begin{array}{rl} x = & \mathbf{e}_1 \\ y = & \mathbf{e}_1 \\ z = & -\mathbf{e}_1 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Entonces } <.,.>_w = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i w_i = -1.$$

Luego se tiene que contradice la primera propiedad de los productos escalares y por tanto no es un producto escalar si algún w_i no es estrictamente menor que cero.

4. *Dado $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 2, 4, 8)$, calcule la aproximación óptima al vector $x = (1, 1, 1, 2)$ en el subespacio $S = \{y/y_1+2y_3 = 0, y_2-2y_4 = 0\}$, con el producto escalar definido anteriormente, $<.,.>_w$*
Construimos inicialmente una base del subespacio que nos han dado con:
$S = \{y/y_1 = -2y_3, y_2 = -2y_4\} =< (-2y_3, 0, y_3, 0), (0, 2y_4, 0, y_4) >=< G_1, G_2 >$ Aplicamos pues la propiedad que debe cumplir la aproximación óptima y para ello hacemos el siguiente producto:

$$< x, G_1 >_w = x_1 G_1^1 w_1 + x_3 G_1^3 w_3 = -2w_1 + w_3 = -2 + 4 = 2$$

$$< x, G_2 >_w = x_2 G_2^2 w_2 + x_4 G_2^4 w_4 = 2w_2 + 2w_4 = 4 + 16 = 20$$

Luego se tiene que:

$$\left.\begin{array}{rl} 9a_1 = & 2 \\ 9a_2 = & 20 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{rl} a_1 = & \frac{2}{9} \\ a_2 = & \frac{20}{9} \end{array}\right\} \longrightarrow y = \left(\frac{-4}{9}, \frac{40}{9}, \frac{2}{9}, \frac{20}{9}\right) = \frac{2}{9}(-2, 20, 1, 10)$$

Y tenemos el óptimo que buscábamos.

5. *Encuentre una base de polinomio de grado menor o igual que tres, para la función peso* $w(x) = |x + x^3|$ *en el intervalo* $[-1, 1]$.
Consideramos inicialmente la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$ para más tarde aplicarle el método de ortonormalización de Grand-Smith. Y ahora calculamos las siguiente integral para obtener un resultado general de los productos escalares:

$$\int_{-1}^{1} x^k w(x)\ \mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} x^k \left|x + x^3\right| \mathrm{dx} = \begin{cases} 2\int_0^1 x^k \left|x + x^3\right| \mathrm{dx} = \dfrac{2}{k+4} + \dfrac{2}{k+2} & \text{si k es par} \\ 0 & \text{si k es impar} \end{cases}$$

Empezamos pues a aplicar el método y tenemos que:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x + 1\alpha_{10} = x \text{ ya que } \alpha_{10} = \frac{-< x, 1 >}{< 1, 1 >} = 0 \\ p_2(x) &= x^2 + 1\alpha_{20} + x\alpha_{21} = x^2 - \frac{5}{9} \\ \text{ya} &\quad \text{que } \alpha_{20} = \frac{-< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} = \frac{-5}{9} \text{ y } \alpha_{21} = \frac{-< x, x^2 >}{< x, x >} = 0 \\ p_3(x) &= x^3 + 1\alpha_{30} + x\alpha_{31} + x^2\alpha_{31} = x^3 - \frac{7}{10}x \\ \text{ya} &\quad \text{que } \alpha_{30} = \frac{-< x^3, 1 >}{< 1, 1 >} = \alpha_{32} = \frac{-< x^3, x^2 - \frac{5}{9} >}{< x^2 - \frac{5}{9}, x^2 - \frac{5}{9} >} = 0 \\ \text{y} &\quad \alpha_{31} = \frac{-< x, x^3 >}{< x, x >} = \frac{-7/12}{5/6} = \frac{-7}{10} \end{aligned}$$

Concluimos pues que la base de los polinomios ortogonales que buscábamos es $\{1, x, x^2 - \frac{5}{9}, x^3 - \frac{7}{10}x\}$

6. *Repítase el problema anterior con la función peso $w(x) = |x| + 1$*
   Calculamos inicialmente la integral general para todo el problema:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^k w(x)\ \mathrm{dx} &= \int_{-1}^{1} x^k |x| + x^k \mathrm{dx} = \int_{-1}^{0} \left[-x^{k+1} + x^k\right]\ \mathrm{dx} + \int_{0}^{1} \left[x^{k+1} + x^k\right]\ \mathrm{dx} = \\ &= \frac{(-1)^{k+2}}{k+2} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+2} + \dfrac{2}{k+1} & \text{si k es par} \\ 0 & \text{si k es impar} \end{cases}\end{aligned}$$

   Empezamos pues a aplicar el método de ortonormalización sobre la base canónica:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x + 1\alpha_{10} = x \text{ ya que } \alpha_{10} = \frac{-< x, 1 >}{< 1, 1 >} = 0 \\ p_2(x) &= x^2 + 1\alpha_{20} + x\alpha_{21} = x^2 - \frac{7}{18} \\ \text{ya} &\quad \text{que } \alpha_{20} = \frac{-< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} = \frac{-7}{18} \text{ y } \alpha_{21} = \frac{-< x, x^2 >}{< x, x >} = 0 \\ p_3(x) &= x^3 + 1\alpha_{30} + x\alpha_{31} + x^2\alpha_{31} = x^3 - \frac{22}{35}x \\ \text{ya} &\quad \text{que } \alpha_{30} = \frac{-< x^3, 1 >}{< 1, 1 >} = \alpha_{32} = \frac{-< x^3, x^2 - \frac{5}{9} >}{< x^2 - \frac{5}{9}, x^2 - \frac{5}{9} >} = 0 \\ \text{y} &\quad \alpha_{31} = \frac{-< x, x^3 >}{< x, x >} = \frac{-11/15}{7/6} = \frac{-22}{35} \end{aligned}$$

   Concluimos pues que la base de los polinomios ortogonales que buscábamos es $\{1, x, x^2 - \frac{7}{18}, x^3 - \frac{22}{35}x\}$. El resto de casos son análogos a este.

7. *Aproxime la función $f(x) = \sqrt{x^3}$ mediante polinomios de tercer grado con las cuatro funciones peso de los dos ejercicios anteriores.*
Considerando primero la función peso del ejercicio 5 disponemos pues de la base de polinomios ortogonales $\{1, x, x^2 - \frac{5}{9}, x^3 - \frac{7}{10}x\}$ y buscamos valores β_i tales que si $p(x)$ es la aproximación óptima se cumpla que:

$$p(x) = \beta_1 1 + \beta_1 x + \beta_2 \left(x^2 + \frac{5}{9}\right) + \beta_3 \left(x^3 - \frac{7}{10}x\right)$$

Luego entonces calculamos los valores de β_i:

$$\begin{aligned}
\beta_0 \quad &= \quad \frac{\int_{-1}^{1} \sqrt{x^3}\,|x + x^3|\,\mathrm{dx}}{\int_{-1}^{1} |x + x^3|\,\mathrm{dx}} = \frac{36}{77}(1 - i) + \frac{3}{2} = \frac{375}{154} - \frac{36}{77}i \\
&\text{con} \quad \int_{-1}^{1} \sqrt{x^3}\left|x + x^3\right|\mathrm{dx} = -\int_{-1}^{0}\left[x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{9}{2}}\right]\mathrm{dx} + \int_{0}^{1}\left[x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{9}{2}}\right]\mathrm{dx} = \\
&= \quad -\left[\frac{2i}{7} + \frac{2i}{11}\right] + \left[\frac{2}{7} + \frac{2}{11}\right] = \frac{36}{77}(1 - i) \\
&\text{con} \quad \int_{-1}^{1} \left|x + x^3\right|\mathrm{dx} = \frac{3}{2} \\
\beta_1 \quad &= \quad \frac{\int_{-1}^{1} x\sqrt{x^3}\,|x + x^3|\,\mathrm{dx}}{\int_{-1}^{1} x^2\,|x + x^3|\,\mathrm{dx}} = \frac{44}{117}(1 - i) + \frac{5}{6} = \frac{283}{234} - \frac{44}{117}i \\
&\text{con} \quad \int_{-1}^{1} x\sqrt{x^3}\left|x + x^3\right|\mathrm{dx} = -\int_{-1}^{0}\left[x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{11}{2}}\right]\mathrm{dx} + \int_{0}^{1}\left[x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{11}{2}}\right]\mathrm{dx} = \\
&= \quad -\left[\frac{2i}{9} + \frac{2i}{13}\right] + \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{13}\right] = \frac{44}{117}(1 - i) \\
&\text{con} \quad \int_{-1}^{1} x^2\left|x + x^3\right|\mathrm{dx} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Y siguiendo así se toman los valore que nos darán la aproximación óptima a las función.

8. *Dada la función peso* $w(x) = \frac{1}{1+x^4}$ *aproximase a la función* $f(x) = e^2x^5 - \cos(0{,}1\pi)\, x^4 + \sqrt{2}x - 3$ *mediante polinomios de grado menor o igual que seis.*
   Es igual que el anterior, primero buscas la base de polinomios de grado 6 para esa función peso y más tarde calculas los β_i que cumplan la propiedad antes mostrada, pero no tengo todo un día para hacerlo, por tanto, decimos que es análogo

9. *Dados los siguientes datos:*

x	*1*	*3*	*4*	*6*	*7*
$f(x)$	*-2.18*	*-0.91*	*-0.63*	*0.61*	*0.95*

   Aproxímense mediante un polinomio de primer grado.
   Lo vamos a estudiar mediante dos métodos diferentes, aunque antes consideramos los siguientes vectores $\{\overline{1} = (1,1,1,1,1), \overline{x} = (1,3,4,6,7), \overline{x^2} = (1,9,16,36,49), \overline{x^3} = (1,81,64,256,343), \overline{f} = (-2{,}18, -0{,}91, -0{,}63, 0{,}61, 0{,}95)\}$.
   A partir de aquí veamos las dos fórmulas:

   - Para la primera consideramos la definición de aproximación óptimos en espacios definidos a partir de un producto escalar, luego se cumplirá:
     $$\begin{cases} <\overline{f}-\overline{p},\overline{1}>=0 & \longleftrightarrow <\overline{f},\overline{1}>=<\overline{p},\overline{1}> \\ <\overline{f}-\overline{p},\overline{x}>=0 & \longleftrightarrow <\overline{f},\overline{x}>=<\overline{p},\overline{x}> \end{cases}$$
     Hacemos ahora pues los cálculos:
     $$\begin{aligned} <\overline{f},\overline{1}> &= -2{,}16 = a_0 <\overline{1},\overline{1}> + a_1 <\overline{x},\overline{1}> = 5a_0 + 21a_1 = <\overline{p},\overline{1}> \\ <\overline{f},\overline{x}> &= 2{,}88 = a_0 <\overline{1},\overline{x}> + a_1 <\overline{x},\overline{x}> = 21a_0 + 111a_1 = <\overline{p},\overline{1}> \end{aligned}$$
     Por último nos queda resolver el siguiente sistema:
     $$\left.\begin{aligned} 5a_0 + 21a_1 &= -2{,}16 \\ 21a_0 + 111a_1 &= 2{,}88 \end{aligned}\right\}$$ Cuyo resultado es: $a_0 = -1251/475 y a_1 = 249/475$.
     Luego la recta buscada es $y = \frac{3}{475}[-417 + 83x]$.

- El otro método es más parecido a lo que estábamos viendo hasta ahora. Construimos primero una base ortogonal partiendo de los datos del enunciado mediante ortogonalización de Schmidt.

$$\begin{aligned}\overline{v_0} &= \overline{1}\\ \overline{v_1} &= \overline{x}+\overline{1}\alpha_{10}=x \text{ ya que } \alpha_{10}=\frac{-<\overline{x},\overline{1}>}{<\overline{1},\overline{1}>}=\frac{-(1+3+4+6+7)}{5}=\frac{-21}{5}\end{aligned}$$

Luego tenemos la siguiente base de vectores $\{(1,1,1,1,1),\frac{1}{5}(-16,-6,-1,9,14)\}$ y ahora solo nos queda buscar la aproximación óptima.

$$\begin{aligned}p(x) &= a_0\overline{v_0}+a_1\overline{v_1}\\ a_0 &= \frac{<\overline{f},\overline{v_0}>}{<\overline{v_0},\overline{v_0}>}=\frac{-2{,}16}{5}=-0{,}432\\ a_1 &= \frac{<\overline{f},\overline{v_1}>}{<\overline{v_1},\overline{v_1}>}=\frac{11-95}{22{,}8}=0{,}52\end{aligned}$$

Luego en forma de recta nos queda que:

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{v_0} & \sim 1\\ \overline{v_1} & \sim x-\frac{21}{5}\end{array}\right\}\longrightarrow p(x)=-0{,}432\overline{v_0}+0{,}52\overline{v_1}=-2{,}614+0{,}52x$$

10. *El nivel de agua del Mar del Norte está determinado por las llamadas mareas M_2, cuyo período es de 12 horas, por lo que tiene una altura (donde t está expresado en horas).*

$$H(t)=h_0+a_i\sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right)+a_2\cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

Y se han tomado las siguiente medidas:

t	0	2	4	6	8	10
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

Ajústese $H(t)$ a las medida obtenidas.

Construimos pues el siguiente sistema que estará sobredeterminado. y lo resolveremos mediante las ecuaciones normales, es decir buscaremos los valores $x = (h_0, a_1, a_2)$ que cumplan $A^T \cdot Ax = A^T b$ siendo:

$$\begin{aligned}
1 &= h_0 + 0a_1 + 1a_2 \\
1{,}6 &= h_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\
1{,}4 &= h_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\
0{,}6 &= h_0 + 0a_1 - 1a_2 \\
0{,}2 &= h_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\
0{,}8 &= h_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2
\end{aligned}$$

Siendo:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}6 \\ 1{,}4 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}6 \\ 1{,}7320 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Por tanto tenemos que buscar cuales son los valores que cumplen:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}6 \\ 1{,}7320 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} 6h_0 = &\ 5{,}6 \\ 3a_1 = &\ 1{,}7320 \\ 3a_2 = &\ 0{,}8 \end{aligned} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} h_0 = &\ 0{,}93333\ldots \\ a_1 = &\ 0{,}57683\ldots \\ a_2 = &\ 0{,}26666\ldots \end{aligned} \right.$$