

Teoría de Geometría Afín y Proyectiva (G.A.P.) L^AT_EX

Juan Miguel Ribera Puchades

2 de julio de 2007



Índice

1. Introducción	4
2. Tema 1: Espacio Afín	5
2.1. Definición, ejemplos y notación	5
2.1.1. Definición y notación	5
2.1.2. Proposición	6
2.1.3. Definición, notación	7
2.1.4. Observación	7
2.1.5. Notación en espacios afines	7
2.1.6. Observaciones	8
2.2. La aplicación diferencia de un espacio afín	8
2.2.1. Definición y notación	8
2.2.2. Proposición	9
2.2.3. Corolario	9
2.2.4. Proposición	9
2.2.5. Proposición	10
2.3. Apéndice: Una definición alternativa de espacio afín	10
2.3.1. Proposición	10
2.3.2. Proposición	11
3. Tema 2: Variedades(Subespacios) Afines	12
3.1. Variedades afines	12
3.1.1. Definición	12
3.1.2. Proposición	12
3.1.3. Observaciones	13
3.1.4. Ejercicio	13
3.1.5. Definición	13
3.1.6. Observaciones	13
3.1.7. Definición	14
3.2. Subespacios afines	14
3.2.1. Proposición	14
3.2.2. Corolario	14
3.2.3. Proposición	15
3.3. El K-espacio afín canónico de dim. n	16
3.3.1. Definición	16
3.3.2. Observación	16

4. Tema 3: Aplicaciones Afines	17
4.1. Variedades afines	17
4.1.1. Definición	17
4.1.2. Definición	17
4.1.3. Proposición	17
4.1.4. Definición	18

1. Introducción

El objetivo fundamental de la *geometría afín* es la *modelización algebraica del razonamiento geométrico*. Las piezas clave de tal modelización son:

Objetos: Las estructuras algebraicas de los *espacios afines*

Subobjetos: Las subestructuras algebraicas de los *espacios afines* (*variedades afines*, *subespacios afines*)

Morfismos: Las aplicaciones *afines* entre espacios *afines*, como las transformaciones *propias* de tales estructuras algebraicas

La presentación de los espacios afines, que hemos elegido, es como estructuras algebraicas. Serán: **Conjuntos con una operación binaria**. La operación binaria tendrá como dominio de operadores un *espacio vectorial*.

Las aplicaciones afines entre espacios afines tendrás una componente que será una aplicación *lineal* entre los espacios vectoriales. (dominios de operadores de tales estructuras). Por tanto: el estudio de la geometría afín presupone el conocimiento de la *teoría del álgebra lineal*, y al igual que esta, quedará parametrizado, en la clase de las estructuras algebraicas de *cuerpo* (anillo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ conmutativo con unidad 1, no trivial $1 \neq 0$ y grupo de las unidades $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$).

Atención especial dedicaremos a la familia en la que el cuerpo es el de los *números reales*, que posibilitarán, la introducción de métricas, abriendo así nuevas perspectivas para el razonamiento geométrico. Así pues supondremos igualmente conocida la *teoría de las formas cuadráticas reales definidas positivas*.

2. Espacio Afín

2.1. Definición, ejemplos y notación

2.1.1. Definición y notación

Un espacio afín ϵ , es una terna: $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ donde:

- $P(\epsilon)$ es un conjunto no vacío
- $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial
- $+$ es una operación binaria de $P(\epsilon)$ con V dominio de operadores:

$$+ : P(\epsilon) \times V \longrightarrow P(\epsilon)$$

$$(P, v) \longrightarrow P + v$$

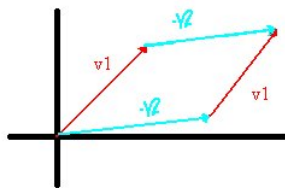
que cumple los *axiomas*:

- E.A. I : $\forall P \in P(\epsilon), \forall i \in V, i = 1, 2$ entonces
 $P + (v_1 + v_2) = (P + v_1) + v_2$.
- E.A. II : Para cada elemento P del conjunto $P(\epsilon)$, la aplicación:

$${}_P S : V \longrightarrow P(\epsilon)$$

definida por : $v \in V, {}_P S(v) = P + v$, es *Biyectiva*

La aplicación a la geometría del axioma primero se puede ver en el siguiente dibujo.



2.1.2. Proposición

Proposición 0.1 *Para cada espacio vectorial $(V, +, \cdot)$ se verifica que la terna $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ antes definida es un espacio afín.*

La afirmación es consecuencia inmediata de ser $(V, +, \cdot)$ un grupo (abeliano). Concretamente de su propiedad asociativa y del carácter regular de cada uno de los elementos de V para la operación binaria $+$. Además veamos que cumple la definición de espacio afín.

1. V es no vacío ya que $(V, +, \cdot)$ tiene estructura de grupo abeliano y, usando el axioma del grupo no vacío, tenemos que V es no vacío.
2. , 3. Se cumplen por ser $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial.

EA I Se cumple por asociatividad en el espacio vectorial.

EA II Debemos comprobar que la siguiente aplicación es biyectiva:

$${}_vS : V \longrightarrow V$$

$$w \longrightarrow v + w$$

Dos formas diferentes de probarlo:

- Veamos que es inyectiva y suprayectiva.

inyectiva Se puede ver que:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 \mapsto v + v_1 \\ v_2 \mapsto v + v_2 \end{array} \right\}$$

Si v_1 y v_2 son diferentes $\rightarrow v + v_1 \neq v + v_2$ por la posibilidad de cancelación

Suprayectiva Tenemos que es suprayectiva por definición de espacio vectorial

- Usando la composición y una propiedad que nos explicaron en bases de la matemática:

$$_{-v}S \circ_v S = I =_v S \circ_{-v} S$$

De aquí tenemos que en la primera igualdad $_{-v}S$ es inyectiva mientras que $_vS$ es suprayectiva.

De igual forma en la segunda igualdad nos da que $_vS$ es inyectiva mientras que $_{-v}S$ es suprayectiva.

Luego tanto $_{-v}S$ como $_vS$ son biyectivas y además $(_{-v}S)^{-1} =_v S$.

2.1.3. Definición, notación

Para cada espacio vectorial $(V, +, \cdot)$, es *espacio vectorial afín standard de* $(V, +, \cdot)$, es el espacio afín construido a partir de $(V, +, \cdot)$, según la proposición **0.1**. Lo notaremos $AS[(V, +, \cdot)]$.

2.1.4. Observación

Notar que la aplicación AS de la clase de los espacios vectoriales en la clase de los espacios afines que asocia a cada espacio vectorial, su espacio afín standard es *inyectiva*.

2.1.5. Notación en espacios afines

Sea $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ un espacio afín y $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$ entonces:

- $P(\epsilon)$ es el conjunto de los puntos de ϵ
- *Punto* de ϵ es cada uno de los elementos de $P(\epsilon)$
- V es el conjunto de los vectores de ϵ
- *Vector* de ϵ es cada uno de los elementos de V
- Si $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ entonces ϵ es $\mathbb{K}$ -espacio afín (o espacio afín sobre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) y $\mathbb{K}$ es el conjunto de escalar sobre ϵ

- Si es $\epsilon\mathbb{K}$ -espacio vectorial, la dimensión de ϵ es la dimensión del la *dimensión* del $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$.
- La operación binaria $+$ de $P(\epsilon)$ es la operación de *suma de punto más vector* de ϵ

2.1.6. Observaciones

1. Notar que el espacio afín standard de cada espacio vectorial, el conjunto de sus puntos coincide con el conjunto de sus vectores y la operación punto más vector coincide con la operación *binaria interna del espacio vectorial*, con la que el conjunto de los vectores de V tiene estructura de Grupo Abelianiano:

$$AS[(V, +, \cdot)] = (V, (V, +, \cdot), +)$$

2. Puesto que por el axioma *E.A. II* de la definición de espacio afín, en cada uno de ellos, los conjuntos de *sus puntos* y *sus vectores* son biyectivos, y, se sigue:
El conjunto de los puntos de un $\mathbb{K}$ -espacio afín ϵ es finito *si y solo si* El cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es finito y la dimensión del $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $V(\epsilon)$ es finita (Geometrías finitas). En tal caso:

$$|P(\epsilon)| = |\mathbb{K}|^{dim\epsilon}$$

2.2. La aplicación diferencia de un espacio afín

En lo que sigue en este párrafo es $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ un $\mathbb{K}$ -espacio afín, con $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$.

2.2.1. Definición y notación

La aplicación diferencia de ϵ , es la aplicación δ del conjunto producto $P(\epsilon) \times P(\epsilon)$ en el conjunto V de los vectores de ϵ definida por:

$$(P, Q) \in P(\epsilon) \times P(\epsilon) \quad \delta[(P, Q)] = {}_pS^{-1}(Q)$$

(donde por ${}_pS^{-1}$ denotamos como es habitual, la aplicación inversa la aplicación biyectiva ${}_pS$). Abreviadamente pactamos denotar:

$$\delta[(P, Q)] = \overrightarrow{PQ} \quad \forall (P, Q) \in P(\epsilon) \times P(\epsilon)$$

2.2.2. Proposición

1. Para cualquier par de puntos P, Q de ϵ se verifica:

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q$$

En particular $P = P + PP \quad \forall P \in P(\epsilon)$.

2. Para cualquier punto P de ϵ y cualquier vector v de ϵ se verifica:

$$\overrightarrow{P(P+v)} = v$$

Demostración:

1. $P + \overrightarrow{PQ} =_p S[pS^{-1}(Q)] = Q$
2. $\overrightarrow{P(P+v)} =_p S^{-1}[pS(v)] = v$

2.2.3. Corolario

La aplicación diferencia de ϵ es suprayectiva.

Para cada vector v de ϵ se verifica que el conjunto:

$$\{(P, P+v) / P \in P(\epsilon)\}$$

es el de las imágenes inversas del vector v de ϵ por la aplicación diferencia de ϵ .

Demostración:

Si $\overrightarrow{PQ} = v$ entonces $Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + v$

2.2.4. Proposición

Para cualquier terna P, Q, R, de puntos de ϵ se verifica:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} {}_pS[\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}] &= P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = \\ R &= P + \overrightarrow{PR} =_p S[\overrightarrow{PR}] \end{aligned}$$

2.2.5. Proposición

Sean P y Q puntos de ϵ . Se verifican:

1. $\overrightarrow{PP} = O$ (O neutro de $(V, +, \cdot)$).
2. $\overrightarrow{PQ} = O \Leftrightarrow P = Q$.
3. $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ ($-\overrightarrow{PQ}$ opuesto de $\overrightarrow{PQ}$)

Demostración:

1. $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} + \dots + \overrightarrow{PP} = O$
2. Si $\overrightarrow{PQ} = O$ entonces $Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{PP} = P$
3. $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PQ} = O = -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \longrightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$

2.3. Apéndice: Una definición alternativa de espacio afín

2.3.1. Proposición

Sea $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ un espacio afín, con $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$ y sea δ la aplicación diferencia de ϵ . Se verifican:

A.1 Para cada punto P de ϵ , la aplicación siguiente es biyectiva:

$$\delta_p : P(\epsilon) \longrightarrow V \text{ definida por: } Q \in P(\epsilon) \quad \delta_p(Q) = \delta[(PQ)] = \overrightarrow{PQ}$$

A.2 Para cualquier terna P, Q, R de puntos de ϵ .

$$\delta[(PQ)] + \delta[(QR)] = \delta[(PR)]$$

Demostración:

A.1 Basta tener en cuenta que por definición de δ :

$$\delta_p = \delta[(PQ)] = {}_P S^{-1}(Q)$$

para concluir que es δ_p la inversa de la aplicación biyectiva ${}_p S$ y por tanto, también biyectiva.

$$\textbf{A.2} \quad \delta[(PQ)] + \delta[(QR)] = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = \delta[(PR)].$$

2.3.2. Proposición

Sean

- A un conjunto no vacío
- $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial
- φ Una aplicación del conjunto producto $A \times A$ en V que verifica:

A.1 : $\forall P \in A$, la aplicación $\varphi_P : A \Rightarrow V$ definida por:

$$Q \in A \quad \varphi_P(Q) = \varphi[(P, Q)]$$

es biyectiva

A.2 : Para cualquier terna P, Q, R de puntos de A se verifica:

$$\varphi[(P, Q)] + \varphi[(Q, R)] = \varphi[(P, R)]$$

3. Variedades(Subespacios) Afines

En lo que sigue, es $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ un espacio afín, con $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$ y es $\overrightarrow{PQ}$ la imagen del par $(P, Q) \in P(\epsilon) \times P(\epsilon)$ por la aplicación diferencia de ϵ .

Recordamos además que un subespacio de $(V, +, \cdot)$, es un espacio vectorial $(T, +, \cdot)$ donde: T es un subconjunto (no vacío) de V estable para las operaciones binarias de $(V, +, \cdot)$, y, las operaciones binarias de $(T, +, \cdot)$ son las inducidas por las operaciones binarias de $(V, +, \cdot)$.

3.1. Variedades afines

3.1.1. Definición

La variedad afín de ϵ que pasa por $P \in P(\epsilon)$ y tiene por dirección el subespacio $(T, +, \cdot)$ de $V(\epsilon)$, es el conjunto de puntos de ϵ imagen de T por la aplicación biyectiva ${}_P S$, que denotaremos abreviadamente por ${}_P T$. Así:

$${}_P T = {}_P S(T) = \{P + t/t \in T\}$$

3.1.2. Proposición

Sean: $P \in P(\epsilon)$ y $(T, +, \cdot)$ un subespacio de $(V, +, \cdot)$. Se verifican :

1. P es un punto de la variedad afín ${}_P T$ de ϵ .
2. Para cualquier punto Q de la variedad afín ${}_P T$ se cumple que $\delta_Q({}_P T) = \{\overrightarrow{QM}/M \in {}_P T\} = T$ y ${}_P T = {}_Q T$

Demostración

1. $P = P + PP = P + 0_V = {}_P S(0_V) \subseteq {}_P S(T) = {}_P T$
2. $\{\overrightarrow{QM}/M \in {}_P T\} = \delta_Q({}_P T) = {}_Q S^{-1}(P + T) = {}_Q S^{-1}(Q + \overrightarrow{QP} + T) = {}_Q S^{-1}(Q + T) = {}_Q S^{-1}({}_Q S(T)) = T$

Ahora, de $\delta_Q({}_P T)$ se sigue ${}_P T = \delta_Q^{-1}({}_Q S(T)) = {}_Q T$.

3.1.3. Observaciones

Algunas características especiales son las variedades afines impropias:

1. Los subconjuntos atómicos (de un solo elemento) de $P(\epsilon)$, son variedades afines de dirección el subespacio trivial de $V(\epsilon)$, es decir, si $P \in P(\epsilon)$,:

$$\{P\} = \{P + PP\} = \{P + 0_V\} =_P S(0)$$

2. $P(\epsilon)$ es variedad afín de ϵ de dirección el subespacio total $(V, +, \cdot)$ de $V(\epsilon)$

$$\forall P \in P(\epsilon) \quad {}_P S(V) =_P V = P(\epsilon)$$

ya que ${}_P S$ es suprayectiva.

3.1.4. Ejercicio

Probar que el conjunto de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales con 'n' incógnitas sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es una variedad afín del espacio afín standard, del $\mathbb{K}$ -espacio vectorial $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$.

3.1.5. Definición

- Recta de ϵ es una variedad afín de ϵ cuya dirección es un subespacio $V(\epsilon)$ de dimensión igual a 1.
- Plano de ϵ es una variedad afín de ϵ cuya dirección es un subespacio $V(\epsilon)$ de dimensión igual a 2.
- Recta de ϵ es una variedad afín de ϵ cuya dirección es un subespacio $V(\epsilon)$ de dimensión igual a $n - 1$ (maximal en la clase de los subespacios propios de $V(\epsilon)$)

3.1.6. Observaciones

- Si la dimensión de ϵ es 2, las rectas de ϵ , son los hiperplanos de ϵ .
- Si la dimensión de ϵ es 3, los planos de ϵ , son los hiperplanos de ϵ .

3.1.7. Definición

El hiperplano canónico $HC(n, \mathbb{K})$ del $AE((\mathbb{K}^{n+1}, +, \cdot))$ es:

$$HC({}_N\mathbb{K}) = \mathbf{e}^1 < \mathbf{e}^j / j = 2, \dots, n+1 >$$

3.2. Subespacios afines

En lo que sigue, es $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ un espacio afín, con $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$.

3.2.1. Proposición

Sean: $P \in P(\epsilon)$ y $(T, +, \cdot)$ un subespacio de $(V, +, \cdot)$.
Para cualquier punto H de la variedad afín ${}_PT$ de ϵ y cualquier vector t de T , se verifica que $H + t \in {}_PT$

Demostración:

$H + t \in {}_PT$ y puesto que $H \in {}_PT$ se tiene que ${}_PT = {}_HT$ luego $H + t \in {}_PT$

3.2.2. Corolario

Sobre la variedad ${}_PT$ de ϵ queda definida una operación binaria $+$ con T como dominio de operadores.

$$+ : {}_PT \times T \longrightarrow {}_PT$$

Siendo la imagen el par $(H, t) \in {}_PT \times T$ por $+$, es $H + t$, que llamaremos suma inducida de punto mas vector de ϵ .

3.2.3. Proposición

Sean : $P \in P(\epsilon)$ y $(T, +, \cdot)$ un subespacio de $(V, +, \cdot)$, entonces la terna:

$$({}_PT, (T, +, \cdot), +)$$

donde:

- La primera componente es la variedad de ϵ que pasa por el punto P de dirección T
- La segunda componente es el subespacio $(T, +, \cdot)$ (dirección de la primera componente):
- $+$ es la operación binaria de ${}_PT$ con dominio de operadores T inducida por la suma de punto más vector de ϵ

es un espacio afín, que llamaremos subespacio afín de ϵ , de la variedad ${}_PT$.

Demostración:

- $P \in {}_PT$ luego entonces ${}_PT \neq \emptyset$
- $\forall H \in {}_PT$ y $\forall t_i \in T/i = 1, 2$ se tiene $H + (t_1 + t_2) = (H + t_1) + t_2$ ya que $+$ es la inducida por la operación punto más vector que cumple el axioma E.A.I.
- Finalmente, para cada $H \in {}_PT$, sabemos que ${}_HS : V \rightarrow P(\epsilon)$ es biyectiva y además ${}_HS(T) = {}_HT = {}_PT$, luego entonces la siguiente aplicación: ${}_HS : T \rightarrow {}_PT$ por la que cada vector t de T tiene por imagen $H + t$ es biyectiva $\forall H \in P(\epsilon)$ quedando así probada la afirmación.

3.3. El $\mathbb{K}$ -espacio afín canónico de dim. n

3.3.1. Definición

El $\mathbb{K}$ -espacio afín canónico de dimensión n es el subespacio afín del $\mathbb{K}$ -espacio afín standard del espacio vectorial de las matrices columnas sobre $\mathbb{K}$ de dimensión $n + 1$, de la variedad afín el hiperplano que pasa por $\mathbf{e}^1$ de dirección : $\langle \mathbf{e}^i / i = 2, \dots, n + 1 \rangle$, que notaremos por $AC(n, \mathbb{K})$.

3.3.2. Observación

- Los puntos de $AC(n, \mathbb{K})$ son (considerando $\lambda_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \dots, n$):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Los vectores de $AC(n, \mathbb{K})$ son (considerando $\alpha_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \dots, n$):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

- La operación punto más vector de $AC(n, \mathbb{K})$ es la inducida por la suma de matrices columna.

4. Aplicaciones Afines

En lo que sigue, es $\epsilon = (P(\epsilon), V(\epsilon), +)$ y $\epsilon' = (P(\epsilon'), V(\epsilon'), +)$ espacios afines, con $V(\epsilon) = (V, +, \cdot)$ y $V(\epsilon') = (V', +, \cdot)$.

4.1. Variedades afines

4.1.1. Definición

- Por una aplicación de ϵ en ϵ' , entenderemos una aplicación de $P(\epsilon)$ en $P(\epsilon')$. Así:

$$\epsilon'^\epsilon = \{f/f : \epsilon \rightarrow \epsilon'\} = \{g/g : P(\epsilon) \rightarrow P(\epsilon')\} = P(\epsilon')^{P(\epsilon)}$$

- Por una transformación de ϵ entenderemos una aplicación de ϵ en sí mismo.

4.1.2. Definición

Para cada punto P de ϵ y para cada aplicación h de ϵ en ϵ' es h_P la aplicación de V en V' definida por:

$$\text{Si } v \in V \text{ entonces } h_P = \overrightarrow{h(P)h(P+v)}$$

O lo que es equivalente:

$$\forall Q \in P(\epsilon) \text{ se tiene } h_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{h(P)h(Q)}$$

4.1.3. Proposición

Sea h una aplicación de ϵ en ϵ' . Son equivalentes:

1. $\exists P \in P(\epsilon)$ tal que h_P es homomorfismo del grupo (abeliano) $(V, +)$ en el grupo (abeliano) $(V', +)$.
2. La aplicación h_P es independiente de la elección del punto P de ϵ . Esto es: $\forall P, Q \in P(\epsilon) \ h_P = h_Q$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 1 \rightarrow 2 \quad h_Q(v) &= \overrightarrow{h(Q)h(Q+v)} = \overrightarrow{h(Q)h(P)} + \overrightarrow{h(P)h(Q+v)} = \\
 &= \overrightarrow{-h(P)h(Q)} + \overrightarrow{h(P)h(Q+v)} = \overrightarrow{-h(P)h(P+\overrightarrow{PQ})} + \overrightarrow{h(P)h(P+\overrightarrow{PQ}+v)} = \\
 &= \overrightarrow{h(P)h(P+\overrightarrow{PQ}+v)} - \overrightarrow{h(P)h(P+\overrightarrow{PQ})} = h_P(\overrightarrow{PQ}+v) - h_P(\overrightarrow{PQ}) = h_P(v)
 \end{aligned}$$

2 $\rightarrow$ 1 Sean $P \in P(\epsilon)$ y $v, w \in V$. Suponemos $h_P = h_{P+v}$, luego:

$$\begin{aligned}
 h_P(w) &= h_{P+v}(w) = \overrightarrow{h(P)h(P+v+w)} = \\
 &= \overrightarrow{h(P+v)h(P)} + \overrightarrow{h(P)h(P+v+w)} = \\
 &= \overrightarrow{h(P)h(P+v+w)} - \overrightarrow{h(P)h(P+v)} = \\
 &= h_P(v+w) - h_P(v)
 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto : } h_P(v+w) = h_P(v) + h_P(w)$$

4.1.4. Definición

Una aplicación h de ϵ en ϵ' es preafín si cumple las condiciones equivalentes de la proposición 4.1.3.