

TEMA 1: OSCILACIONES. MOVIMIENTO ARMÓNICO.

1. Introducción.

Un sistema en equilibrio estable, si se perturba ligeramente de su punto de equilibrio, realiza oscilaciones en torno a este punto. Las **oscilaciones** tienen la característica de ser **periódicas**. Un **movimiento** se denomina **periódico**, si a intervalos de tiempo iguales de valor T , se repiten exactamente las características cinéticas y dinámicas del sistema. El tiempo T recibe el nombre de **período**.

Debe diferenciarse el **movimiento oscilatorio** del **movimiento ondulatorio**, aunque ambos están muy relacionados. Las ondas sonoras, por ejemplo, se pueden producir mediante las vibraciones de un instrumento musical. Un muelle o un péndulo, realizan un *movimiento oscilatorio*, al ser desplazados de su punto de equilibrio, alrededor de este punto. Las *ondas sonoras*, como perturbaciones del equilibrio de las moléculas de aire, se *propagan en el espacio*, alejándose del punto en el que fueron producidas.

Ejemplos: Péndulos, cuerdas vocales, cuerdas de instrumentos musicales.

2. Movimiento armónico simple.

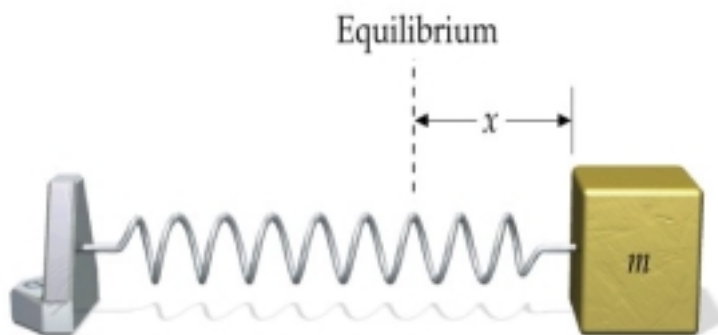


Figura 14.1¹ Cuerpo unido a un muelle → **Movimiento armónico**. El desplazamiento x es medido desde la posición de equilibrio, pudiendo ser positivo o negativo.

Es el caso más sencillo de movimiento oscilatorio o periódico. Puede definirse de muchas maneras:

*Diremos que el movimiento de un punto material es armónico simple cuando está sometido a una fuerza restauradora, proporcional al desplazamiento de su posición de equilibrio. **Figura 14.1.***

¹ Las figuras han sido tomadas en su mayor parte, del libro de P. Tipler. Consúltense la bibliografía del curso.

$$F_x = -Kx \quad \text{Ley de Hooke}$$

De la segunda ley de Newton deducimos:

$$F_x = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \text{ Ecuación diferencial de segundo orden. (Ecuación 1)}$$

Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional al desplazamiento, en sentido opuesto, éste realiza un movimiento armónico simple (m.v.a.s.).

- El tiempo necesario para realizar una oscilación completa es el **período T**. La unidad en el sistema internacional es el segundo (s).
- La **frecuencia f** de las oscilaciones es la inversa del período, y se mide en el sistema internacional (**S.I.**) en *Hertz* (que equivale a s^{-1}):

$$f = \frac{1}{T}$$

Demostraremos, mediante la interpretación geométrica del m.v.a.s., que el desplazamiento de un objeto, sometido a un m.v.a.s., obedece a una ley sinusoidal (seno o coseno) de la forma:

$$x = A \cos(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + \delta'), \quad \text{con } \delta' = \delta + \frac{\pi}{2}$$

Ecuación del movimiento armónico simple. (Ecuación 2)

Donde:

- El desplazamiento máximo A recibe el nombre de **Amplitud** de las oscilaciones,
- El argumento de la función sinusoidal se denomina **fase** ($\omega t + \delta$). La fase caracteriza unívocamente el estado dinámico del oscilador.
- La **fase inicial** es δ , es decir es la fase para $t=0$.
- El desplazamiento instantáneo del punto de equilibrio es x, que recibe el nombre de **elongación**.

Un **ciclo completo** del movimiento conlleva obviamente, un incremento en la fase de 2π y un incremento temporal de T, que es el período $\rightarrow \text{Fase}(t+T) = \text{Fase}(t) + 2\pi$

$$\omega(t+T) + \delta = \omega t + \delta + 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω recibe el nombre de **pulsación (o frecuencia angular)** y se mide en radianes por s^{-1} .

La ecuación del m.a.s. puede ser escrita en función de la frecuencia f del período T , tomando la forma siguiente:

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)$$

La constante de fase, y la elección de la función seno o coseno depende de cual haya sido la definición del movimiento en el instante $t=0$, que son las llamadas **condiciones iniciales**.

En la **figura 14.5** se presentan las variaciones de las tres magnitudes cinemáticas en el m.v.a.s., observándose que la elongación está desfasada respecto a la velocidad en 90° y 180° respecto de la aceleración.

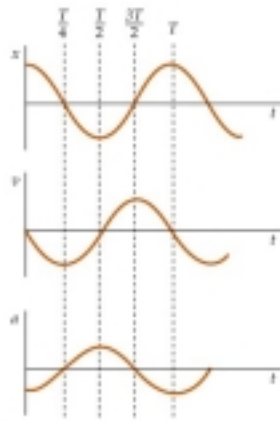


Figura 14.5 Desplazamiento, velocidad y aceleración en el m.v.a.s. Obsérvese el desfase entre estas tres magnitudes.

2.1.-Demostración:

Queremos demostrar que la ecuación del movimiento (Ec. 2.) es solución de la ecuación diferencial del movimiento (Ec. 1.)

Derivando dos veces la ecuación del movimiento (Ec. 2), encontramos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

que es exactamente la ecuación diferencial (Ec. 1), si se cumple que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ejercicios de aplicación.

Una **característica importante del m.a.s.** es que su **período** (o frecuencia) es **independiente** de la **amplitud** A del movimiento, como se ilustra en la **figura 14.4**. Esta propiedad es importante en música, de modo que el tono de las notas musicales es independiente de su intensidad.

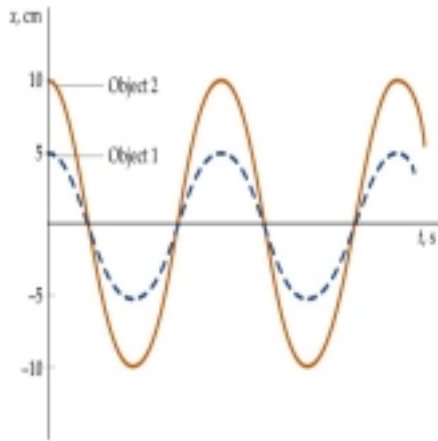


Figura 14.4 Ecuaciones horarias para un muelle con distintas amplitudes. Observad como los dos movimientos llegan a sus posiciones de equilibrio simultáneamente, independientemente de su amplitud.

3. Interpretación geométrica.

Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio A , con velocidad angular ω constante; la velocidad lineal vale $v = \omega r$. Queremos demostrar que **la proyección x** de este punto sobre un diámetro fijo, realiza un movimiento armónico simple. De la **figura 14.5**, deducimos:

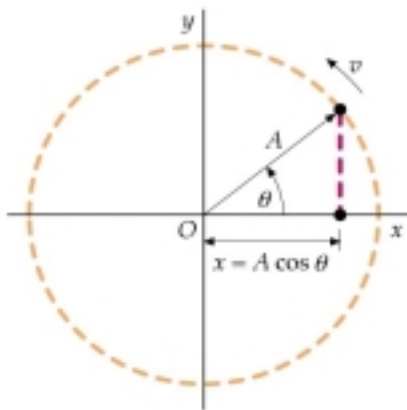


Figura 14.5 Interpretación geométrica del m.v.a.s. La proyección x del punto material sobre el diámetro describe un movimiento armónico.

$$\theta = \omega t + \delta$$

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \delta) \quad \text{c.q.d.}$$

El punto proyectado sobre un diámetro de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme realiza un movimiento armónico simple.

La interpretación geométrica del m.v.a.s. da significado a la frecuencia angular ω .

4. Energía del movimiento armónico simple.

Queremos demostrar que:

La energía mecánica del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de su amplitud.

Supondremos por simplicidad que tenemos un muelle de **constante recuperadora** k , que realiza oscilaciones de amplitud A , no sometido a ningún tipo de fricción. Se trata pues de un sistema que conserva la energía mecánica:

- La energía potencial es: $U = \frac{1}{2}kx^2$.

- La energía cinética es: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Como no hay fricción, el sistema es conservativo $\rightarrow E_{\text{tot}}$ es constante.

$$E_{\text{tot}} = U + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{hay que demostrarlo!}$$

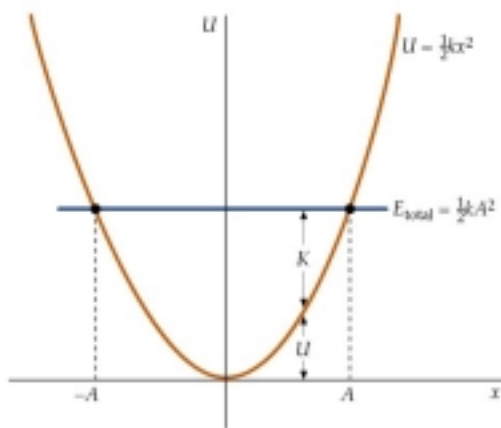


Figura 14.9 Energía potencial y mecánica de un muelle. Observad la energía cinética k (E_c). Los puntos $x=\pm A$ se denominan **puntos de retroceso**, dado que el objeto no puede ir más allá, con la energía mecánica de que dispone.

En la **figura 14.9** representamos la energía mecánica (constante) de un m.v.a.s. y la energía potencial (parábola). Los puntos de corte de las dos curvas se denominan **puntos de retroceso**, en los que se anula la energía cinética de la partícula y es máxima la energía potencial. Desde estos puntos, el móvil se desplaza aumentando su energía cinética a expensas de la energía potencial, hasta que llega al punto de equilibrio, en el que la energía cinética es máxima y la potencial nula.

4.1 Demostración:

Vamos a demostrar **explícitamente** que la energía mecánica del m.v.a.s. es constante.

Usando la expresión de la elongación y la velocidad para el m.v.a.s. deducimos:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m[-A\omega \sin(\omega t + \delta)]^2$$

Como $k=m\cdot\omega^2$, sumando ambas expresiones se obtiene:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} kA^2$$

La energía mecánica total del m.v.a.s. es proporcional al cuadrado de su amplitud.

Se deduce fácilmente también como varían E_c i U :

$$U = E_{\text{tot}} \cos^2 \theta$$

$$E_c = E_{\text{tot}} \sin^2 \theta$$

donde $\theta = \omega t + \delta$

- Como ejercicio demostrad² que el valor medio de estas es $E_{\text{tot}}/2$

Ejercicios de aplicación: Objeto colgado de un muelle vertical: prácticas.

5. Estudio del péndulo.

El movimiento de un péndulo es solamente **armónico simple** si su amplitud es pequeña. En la **figura 14.14.** se representa de forma esquemática un péndulo de longitud L , con las variables que deben usarse y las fuerzas que actúan sobre él. Se cumple que:

$$s = L\phi$$

$$F_t = -mg \sin \phi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi = -\frac{g}{L} \phi = -\omega^2 \phi$$

Según la **hipótesis establecida de ángulo pequeño** en la que aproximamos el seno por el ángulo $\sin \phi \cong \phi$, encontramos que la

² Calcular el valor medio de cada función **sobre una oscilación completa**. Usad la definición de valor medio.

aceleración angular es proporcional al desplazamiento de el ángulo ϕ , es decir, se trata de un m.v.a.s. en esta variable. La constante de proporcionalidad es obviamente, el cuadrado de la frecuencia angular ω y la solución, que representa la ecuación del movimiento del péndulo es:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

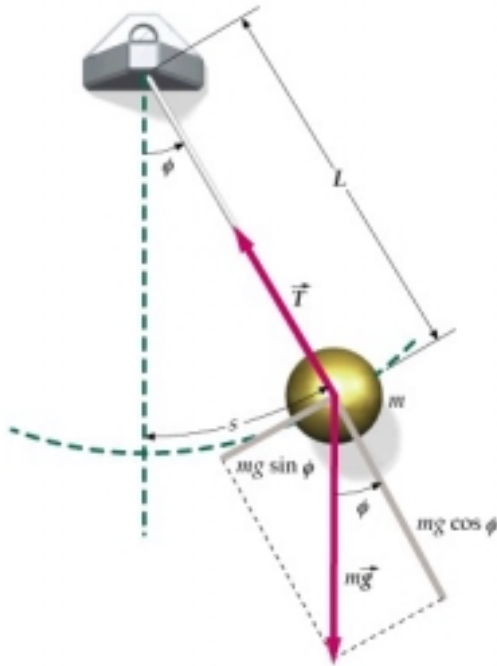


Figura 14.14 Péndulo simple, y las fuerzas que actúan sobre él.

El período toma el valor:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

expresión que nos permite medir de forma simple la aceleración de la gravedad g .

Oscilaciones de gran amplitud: Observamos que el período de las oscilaciones pendulares es independiente de la masa, aunque la fuerza sí que dependa de la masa, resultando independiente de ella la aceleración. El período y la frecuencia son independientes de la amplitud, como se requiere en el m.v.a.s. Ahora bien, si la hipótesis de amplitudes pequeñas no es válida, ya no se puede considerar un m.v.a.s. y el período depende de la amplitud. En este caso, el movimiento continúa siendo periódico con un período que depende de la amplitud en la forma:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + \dots \right]$$

Ejercicio: Mediante el análisis dimensional demostrad que el período del péndulo no puede depender de su masa³.

6. Péndulo físico.

Un sólido rígido colgado de cualquier punto, diferente de su C.d.G. constituye un **péndulo físico**, y por tanto, separado de su posición de equilibrio oscilará alrededor de este punto. **Figura 14.17:** las variables que definen el problema son la masa M , la distancia D , y el ángulo ϕ .

Aplicando el teorema del momento angular:

$$\tau = \frac{dL}{dt}, \quad L = I\omega, \quad \tau = -MgD \sin \phi \rightarrow$$

$$I\alpha = I \frac{d^2\phi}{dt^2} = -MgD \sin \phi$$

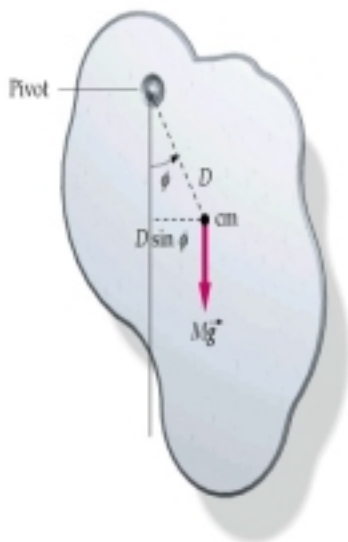


Figura 14.17 Péndulo físico, con las variables que intervienen.

Si el desplazamiento del punto de equilibrio ϕ es pequeño, se trata de un m.v.a.s., ya que si $\sin \phi \cong \phi$ obtenemos la ecuación y el período:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I}\phi = -\omega^2\phi \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

La ecuación anterior puede usarse para obtener el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje, dejando oscilar el cuerpo respecto del eje y midiendo el período de las oscilaciones. Observad que **el período de las oscilaciones es independiente** de la masa: para demostrarlo usad la definición de radio de giro.

³ Ver P. Tipler, página 416.

7. Péndulo de torsión.

Esquemáticamente se muestra en la **figura 12.15**. Existe un par restaurador elástico proporcional al ángulo ϕ de desplazamiento del punto de equilibrio.

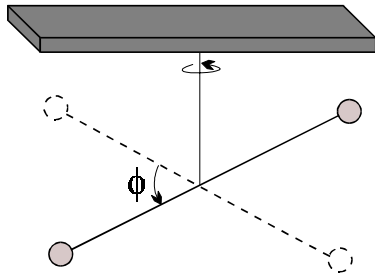


Figura 12.15: Péndulo de torsión

$$\tau = -k\phi = I \frac{d^2\phi}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{k}{I} \phi = -\omega^2\phi$$

La constante de proporcionalidad k recibe el nombre de **módulo de torsión**. De la definición de la frecuencia angular ω , deducimos el valor del período de las oscilaciones, que en este caso no depende de la amplitud:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

8. Movimiento general de un punto material en las proximidades del equilibrio.

Siempre que una partícula se desplaza **ligeramente** de su **posición de equilibrio estable**, realiza oscilaciones armónicas alrededor de este punto, independientemente de la forma de la fuerza. Si esto es así, la fuerza se puede aproximar alrededor del punto de equilibrio como:

$$F = -k\varepsilon$$

donde ε representa el desplazamiento del punto de equilibrio (**Figura 12.16**)

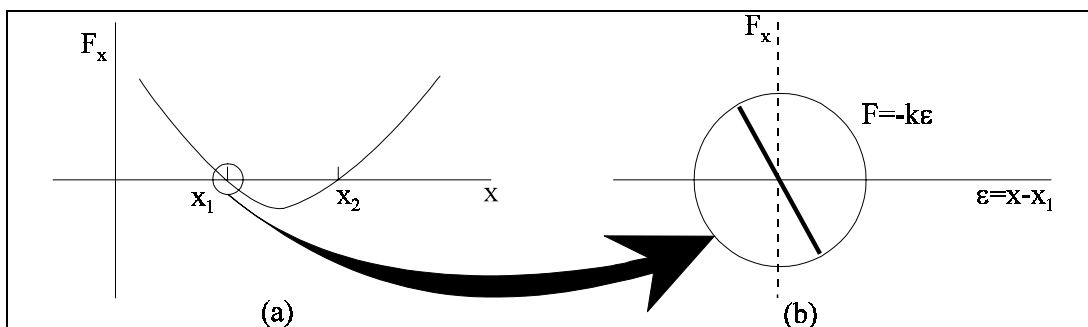


Figura 12.16 Una fuerza arbitraria F_x en función de x . Aproximación lineal

Este análisis es conveniente hacerlo desde el punto de vista de la energía potencial U , asociada a la fuerza que actúa sobre el objeto. La **figura 14.10**. representa la función energía potencial correspondiente a la fuerza de la figura anterior. El mínimo (máximo) es un punto de equilibrio estable (inestable). Si hacemos un desarrollo en serie de Taylor, alrededor del mínimo, como la primera derivada, por tratarse de un punto de equilibrio se anula, y la segunda derivada es positiva, podremos escribir, quedándonos en el segundo término:

$$U = A + B(x - x_1)^2$$

donde B es una constante positiva. La energía potencial, en las proximidades del punto de equilibrio puede aproximarse a una parábola, y por tanto el movimiento del punto material será m.v.a.s, por lo que:

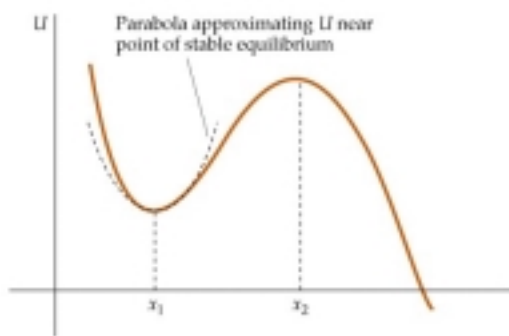


Figura 14.10 Energía potencial del ejemplo anterior.

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -2B(x - x_1) = -kx$$

Obsérvese que el período de las oscilaciones se relaciona B , derivada segunda de la función potencial (coeficiente B de la parábola), y por tanto, con cuan cerrada (**abierta**) sea la parábola.

9. Oscilaciones Amortiguadas.

En el mundo macroscópico, los sistemas oscilantes van perdiendo progresivamente energía, por la que no se puede obviar la fricción. Se dice que **el movimiento es amortiguado**. La característica de un movimiento oscilatorio sometido a amortiguación (débil) es que **la amplitud de las oscilaciones va disminuyendo en el tiempo** de forma **exponencial** como se ve en la **figura 14.20**.

La representación más sencilla de una fuerza amortiguada viene dada por una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad del punto material, pero opuesta a la velocidad:

$$F_v = -bv \rightarrow -kx - bv = ma_x = m \frac{dv}{dt}$$

donde b es una constante que caracteriza el amortiguamiento del objeto en el medio (con fricción) en el que se desplaza. La fuerza de amortiguamiento del oscilador se opone al movimiento del oscilador en todo instante (signo menos), y realiza en consecuencia un trabajo negativo: esta es la razón de que **disminuya la energía del sistema**.

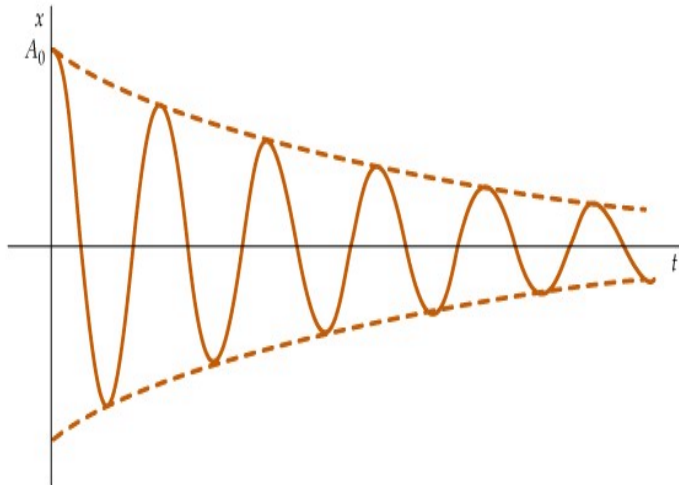


Figura 14.20. Oscilador amortiguado. (Con amortiguación débil)

La ecuación anterior es en realidad **una ecuación diferencial de segundo orden** (de coeficientes constantes), de fácil resolución, si bien esto es materia de próximos cursos. Avancemos la solución de la ecuación diferencial⁴:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \rightarrow x = A_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \delta)$$

donde la constante λ se relaciona con la viscosidad y la frecuencia angular ω del oscilador amortiguado con la $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ del oscilador libre como:

$$\lambda = \frac{b}{2m} , \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

La amplitud A_0 y la fase inicial δ de la solución, son las constantes de integración de la ecuación diferencial, determinables mediante las condiciones iniciales del problema.

⁴ La comprobación de la solución aquí usada puede verse en el libro de Fishbane, página 396.

De esta solución podemos extraer las siguientes conclusiones respecto al movimiento armónico amortiguado:

- La **frecuencia** del oscilador sometido a una fuerza viscosa **disminuye**, como cabe esperar, ya que la viscosidad se opone al movimiento.
- La **amplitud de las oscilaciones** (y por tanto la energía, que es el cuadrado de ésta) **disminuye de forma exponencial** en el transcurso del tiempo, así que la fuerza viscosa consume energía mecánica del sistema.

El ritmo de pérdida de energía mecánica viene caracterizado por la **constante temporal τ** , que se relaciona con la **constante de amortiguación λ** :

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} kA^2, \quad A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow E(t) = E_0 e^{-t/\tau} \rightarrow \lambda = \frac{1}{2\tau}$$

La **constante temporal τ** , denominada también constante de extinción, representa el tiempo que debe transcurrir para que **la energía del oscilador se reduzca en un factor $1/e$** . Así pues, **a mayor τ , menor ritmo de pérdida de energía**.

A medida que el coeficiente de viscosidad aumenta, la amortiguación es más fuerte, hasta que se alcanza un **valor crítico** por encima del cual ya no se producen oscilaciones. (Figura 14.22).

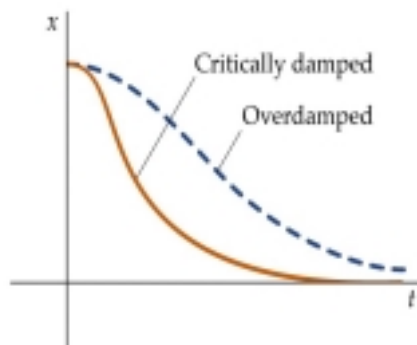


Figura 14.22: Oscilador amortiguado críticamente y oscilador sobre amortiguado.

Los osciladores amortiguados están caracterizados por su factor Q de calidad, que resulta ser inverso a su ritmo de pérdida de energía, y se define como:

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0 m}{b}$$

Diferenciando la ecuación de la energía del oscilador amortiguado, considerando que la amortiguación es pequeña y calculando la energía perdida en un período, deducimos:

$$dE = -\frac{1}{\tau} E_0 e^{-t/\tau} dt = -\frac{1}{\tau} E(t) dt \rightarrow \frac{|\Delta E|}{E} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}} = 2\pi \frac{\bar{E}}{|\Delta E|_{\text{ciclo}}}$$

10. Movimiento armónico forzado.

Para mantener constante (o incrementar) la energía de un oscilador sometido a una fuerza viscosa, es necesario **suministrarle energía** desde una **fuerza exterior**. Por ejemplo, en un péndulo o en un columpio podemos suministrar energía a golpes de frecuencia constante. Si la frecuencia de la fuente de energía exterior es parecida a la del columpio, nuestra experiencia nos dice que la amplitud de sus oscilaciones puede hacerse muy grande, mientras que si es muy diferente, la transmisión de energía desde la fuente exterior al sistema oscilante es muy pequeña. Ejemplo del columpio.

Supongamos un sistema oscilante en reposo, que comienza a ser excitado por una **fuerza de energía exterior**: a medida que la amplitud de las oscilaciones aumenta, se incrementa también la velocidad del objeto y por tanto la energía disipada en la fricción viscosa, por lo que cabe esperar que finalmente **se alcance un estado estacionario en el que la energía disipada por fricción se iguale con la energía recibida por parte de la fuente exterior**. En consecuencia, la energía que finalmente alcanzará el sistema depende de la amplitud de la fuerza exterior y también de su frecuencia.

Se denomina **frecuencia propia (o natural)** del oscilador a la que exhibe cuando no hay viscosidad ni fuerza exterior, es decir:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ocurre que cuando frecuencia de la fuerza exterior es igual a la propia, la amplitud de las oscilaciones (y por tanto la energía) que alcanza el oscilador es máxima. Este fenómeno recibe el nombre de **resonancia**, (y la frecuencia a la que aparece este fenómeno: **frecuencia de resonancia**).

Planteemos el problema del oscilador forzado con una fuerza sencilla, como por ejemplo un armónico de frecuencia ω , siendo $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ la frecuencia propia del oscilador. Tendremos:

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t$$

$$\sum_i F = -kx - bv + F_0 \cos \omega t = m \frac{dv}{dt} \rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

La solución general de esta ecuación diferencial es la combinación de una **solución transitoria**, que decrece exponencialmente con el tiempo hasta dejar de ser importante, y que incluye las dos constantes de integración de la ecuación diferencial, determinables por condiciones iniciales, (oscilador amortiguado) y **una solución estacionaria** que permanece constante en el tiempo, y que corresponde al equilibrio entre la energía recibida y la disipada por parte del sistema oscilante.

La solución de tipo estacionaria (no lo demostraremos), comentada antes, se escribe de la forma⁵:

$$x = A \cos (\omega t - \delta) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

donde **la frecuencia ω** de las **oscilaciones forzadas** coincide totalmente con la de la frecuencia de la fuerza exterior. **El oscilador forzado vibra con la frecuencia de la fuerza exterior.**

La fase δ de la solución estacionaria, representa **el desfase** existente entre la fuerza exterior y la respuesta (desplazamiento) del oscilador:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

10.1 Resonancia.

La amplitud de las **oscilaciones estacionarias** tiene la propiedad notable de la resonancia y toma un valor:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}$$

que **será máxima (resonancia)** cuando la frecuencia de la fuerza exterior se **haga coincidir con la propia del oscilador**. De hecho, el máximo de la amplitud (resonancia) aparece para frecuencias menores a la propia (calculadlo!)⁶:

⁵ La amplitud y la fase de la solución estacionaria del oscilador forzado dependen de las características físicas del oscilador y la fuerza exterior, no de las condiciones iniciales del problema.

⁶ La condición de amplitud máxima es equivalente a la de denominador mínimo. Para calcular el máximo derivad respecto de ω^2 .

$$\omega_{m\acute{a}x}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m} \right)^2$$

También se observa que, en el caso de una amortiguación fuerte (b grande), la amplitud de las oscilaciones será pequeña y viceversa, (Figura 14.25).

Se puede demostrar que la amplitud de las curvas de resonancia (figura 14.25), es inversamente proporcional al coeficiente de calidad del oscilador:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$$

de manera que son más estrechas las curvas de resonancia para osciladores con Q grande, es decir, con coeficiente de fricción pequeño.

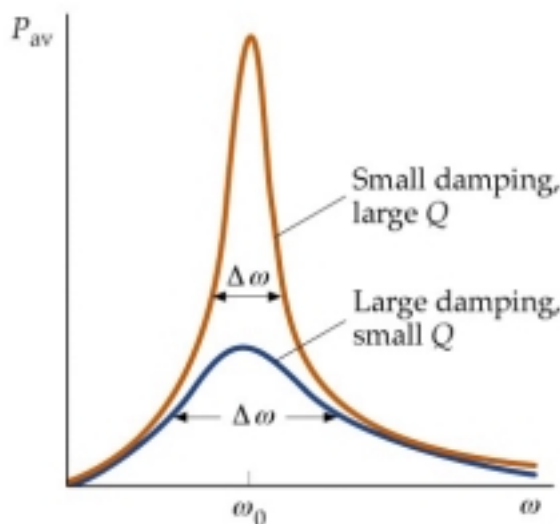


Figura 14.25 Curvas de resonancia, para diferentes coeficientes de amortiguación, representados por el factor de calidad Q .

Conclusiones:

- La amplitud de la solución estacionaria es mayor (por tanto, adquiere mayor energía) cuando la frecuencia exterior coincide con la propia del oscilador (resonancia).
- Las curvas de resonancia son tanto más estrechas cuanto menor sea el coeficiente de amortiguación. De hecho, se puede demostrar que la amplitud $\Delta\omega$ a la altura media de las curvas toma un valor:

$$\Delta\omega \cong 2b / m$$
- El oscilador forzado realiza oscilaciones (estacionarias) adoptando la frecuencia de la fuerza exterior.

Ejemplos de fenómenos de resonancia (P. Fishbane, página 398)

Lectura recomendada. Resonancia e incertidumbre (P. Fishbane página 400)