TEMA 4: Principio de Superposición y Ondas estacionarias.

Introducción.

Cuando dos ondas se encuentran en el espacio, sus perturbaciones individuales, representadas por las funciones de onda, se superponen y se suman algebraicamente originándose así una nueva onda.

Las ondas que se observan en la naturaleza raramente son tan sencillas como las ondas armónicas, ya estudiadas: así, la onda que se forma sobre la cuerda de una guitarra tiene una forma complicada y diferente de la onda armónica. También, de un solo golpe sobre una cuerda muy larga se origina una onda viajera en forma de pulso, que no es una función sinusoidal (armónica).

Por su parte, las ondas armónicas nos permiten comprender las ondas más complicadas: así podemos combinar la ondas armónicas, o superponerlas, para obtener la forma de cualquier onda de la Naturaleza. Las ondas superpuestas, que a veces se anulan y a veces se refuerzan entre sí, diremos que interfieren.

La superposición de las ondas armónicas recibe el nombre *de **interferencia***. *La interferencia, como la difracción,* son fenómenos característicos de las ondas, que las partículas clásicas no poseen. Así, en 1801, el descubrimiento por parte de *Young* de la interferencia de la luz, condujo al establecimiento de ésta como onda, en contra de la opinión de Newton que la consideraba corpuscular. El estudio detallado de la luz y de las partículas subatómicas llevó al establecimiento de la mecánica cuántica.

2. Principio de superposición:

Consideremos dos pulsos que se propagan sobre una misma cuerda con sentido opuesto, como se ve en la figura 16.1. Cuando ambos se encuentran, podemos saber cual es la perturbación resultante de la cuerda sumando los desplazamientos (perturbaciones) originadas para cada una de las ondas individualmente.

$y(x,t)=y_1(x-vt)+y_2(x+vt)$ Principio de superposición.

El principio de superposición afirma: Cuando dos ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.

En el caso de que las dos ondas sean idénticas, pero con valor inverso, llega un momento en el que la suma de los pulsos produce un desplazamiento nulo del punto de equilibrio. Sin embargo, hay que advertir que esto no significa que las ondas se anulen, pues un instante posterior siguen su camino. El fenómeno de la superposición es propio de las ondas.

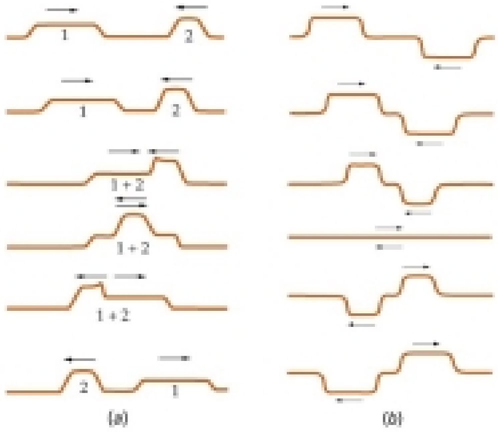

Figura 16.1[1] Pulsos de una onda iguales (invertidos) con sentidos opuestos. La separación de la cuerda en cada punto e instante se obtiene sumando directamente las separaciones que origina cada onda por separado. Obsérvese que cuando los desplazamientos individuales son opuestos, la cuerda queda en la posición de equilibrio.

Linealidad de la función de ondas y el principio de superposición.

La ecuación de ondas presenta la propiedad de ser lineal, de hecho solamente intervienen en su definición la función y sus derivadas a la primera potencia. La consecuencia inmediata de la linealidad es que si Y_1 y Y_2 son soluciones de la ecuación de ondas, también lo es cualquier combinación lineal de estas:

Y_1 e Y_2 soluciones de onda $\Rightarrow C_1Y_1+C_2Y_2$ solución de onda.

Demostradlo!.[2]

3. Principio de superposición: interferencia de ondas armónicas.

La superposición de las ondas armónicas recibe el nombre de interferencia. La interferencia de las ondas armónicas depende directamente de cómo sea la diferencia de fase de éstas.

Sean dos ondas desfasadas en δ, con el mismo número de ondas y amplitud, propagándose hacia la derecha (Figura 16.2). Las ecuaciones de onda son:

$$y_1 = A\cdot\sin(kx-\omega t)$$
$$y_2 = A\cdot\sin(kx-\omega t+\delta)$$

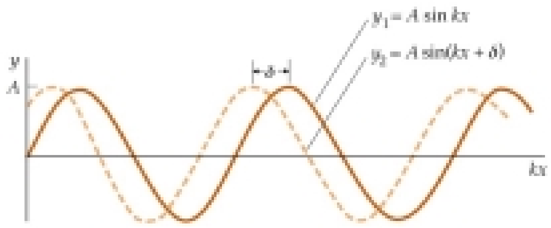

Figura 16.2 Dos ondas armónicas desfasadas en δ.

[1] Las figuras y su numeración siguen el libro de P. Tipler, *Física para la ciencia y la tecnología*, 4ª Edición.

[2] Ver P. Tipler, página 480 y P. Fishbane página 451.

Que nos da para la onda resultante (*P. Superposición*):

$$y_1 + y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t) + A \cdot \sin(kx - \omega t + \delta)$$
$$= 2A \cdot \cos\frac{\delta}{2} \sin(kx - \omega t + \frac{\delta}{2})$$

Éste es el caso general de la interferencia de dos ondas armónicas de la misma frecuencia.

Obsérvese que, en general, hemos encontrado como superposición de dos ondas armónicas de la misma frecuencia, otra onda armónica resultante que se propaga con la misma velocidad y frecuencia, con una nueva fase de $\delta/2$, y con una amplitud $2A \cos(\delta/2)$, que depende de la diferencia de fases.

Casos particulares:

a) Si la diferencia de fase δ es nula, tenemos *interferencia constructiva* pues las amplitudes se suman (fig.16.3):

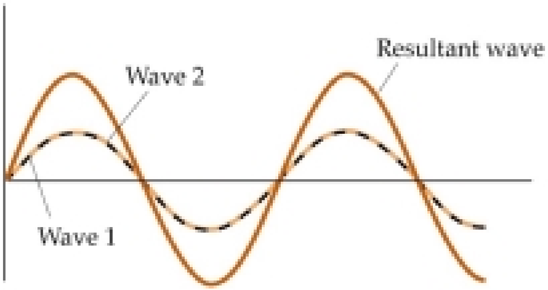

Figura 16.3 Interferencia constructiva.

$$y_1 + y_2 = 2A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

b) Si la diferencia de fase es $\delta = \pi$, tenemos *interferencia destructiva*: (Figura 16.4)

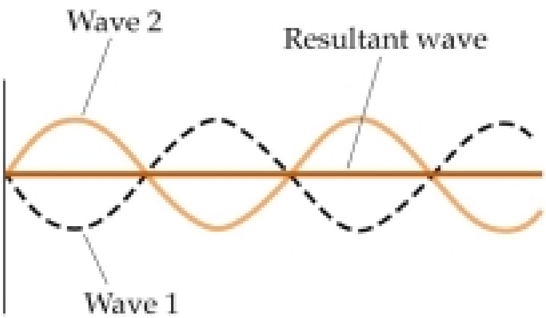

Figura 16.4. Interferencia destructiva de dos ondas armónicas desfasadas π radianes.

$$y_1 + y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t) + A \cdot \sin(kx - \omega t + \pi)$$
$$= A \cdot \sin(kx - \omega t) - A \cdot \sin(kx - \omega t) = 0$$

3.1 Pulsaciones (o batidos).

Denominamos *pulsación o batido* a las variaciones en la intensidad de un sonido, que se producen cuando dos ondas de frecuencias próximas interfieren entre sí.
Ejemplo: cuando se afina una guitarra comparando su sonido con el de otra, aparecen variaciones de la intensidad sonora para una misma nota.

Frecuencia de pulsación es el nombre que recibe la frecuencia de variación de la intensidad sonora.

Descripción del fenómeno: Supongamos que llegan a un punto dos ondas de frecuencias angulares próximas ω_1 y ω_2, y con la misma amplitud. Imaginemos que en el instante inicial (Figura 16.5) las ondas que llegan a un punto se encuentran en fase. Como la frecuencia de una de las ondas es ligeramente superior a la otra, esta última irá retardándose, aumentando su desfase respecto de la primera, hasta encontrarse en oposición de fase (instante t_1 en la figura). En el instante t_2 las ondas se encuentran en fase de nuevo (desfase 2π en realidad) y se sumarán las amplitudes de las dos ondas.

Descripción matemática: Las vibraciones de les ondas en el punto considerado serán[3]:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \sin \omega_1 t \\ p_2 &= p_0 \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

y la suma (P. de Superposición y trigonometría)

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 = p_0 \sin \omega_1 t + p_0 \sin \omega_2 t = \\ &= 2p_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \end{aligned}$$

Sea $\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 2\pi f_m$ la frecuencia media, y así mismo $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi\Delta f$ la diferencia de frecuencias, tendremos:

$$p = 2p_0 \cos(\pi\Delta f t)\sin(2\pi f_m t)$$

La figura 16.5 nos muestra una representación de la variación de presión en función del tiempo, bajo las hipótesis de dos ondas de frecuencias próxima. El oído percibe la frecuencia media f_m con una amplitud oscilante $2p_0 \cos(\pi\Delta f t)$ de frecuencia $\Delta f/2$. Ahora bien, la frecuencia de batida es Δf, ya que los máximos de intensidad aparecen tanto para los máximos de amplitud como para sus mínimos.

[3] En las ecuaciones siguientes hemos eliminado la dependencia espacial que no desempeña ningún papel.

$$f_{batido} = \Delta f$$

Ejemplos.

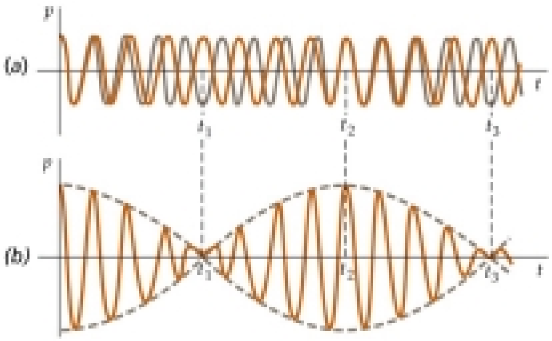

Figura 16.5[4] Batidos o pulsaciones producidos por dos ondas sonoras de frecuencias próximas. El instante inicial t=0 se ha elegido cuando las dos están en fase. En t_1 y t_3 se encuentran desfasadas en π radianes. En t_0, t_2 se hallan en fase.

3.2 Diferencia de fase originada por diferencia de trayectoria.

Cuando dos ondas llegan a un punto en fase, hemos visto que la amplitud resultante es la suma, y que si lo hacen en oposición de fase, la amplitud resultante es la diferencia (nula si A_1=A_2). Así, sabemos que:

$$p_1 = p_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$p_2 = p_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

nos da:

$$p = p_1 + p_2 = p_0 \sin(kx - \omega t) + p_0 \sin(kx - \omega t + \delta) =$$
$$= 2p_0 \cos\frac{\delta}{2} \sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

Una forma usual de obtener diferencias de fase entre ondas de la misma frecuencia (y longitud de onda) es hacerles recorrer *trayectorias de longitud diferente*, como se ve en la figura 16.6, donde se origina una interferencia constructiva. La diferencia de caminos es un múltiplo entero de la longitud de onda[5] λ, llegando al punto las dos ondas en fase y sumándose las amplitudes.

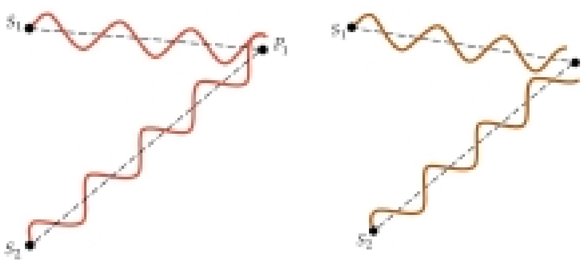

Figura 16.6. Interferencia constructiva, a la izquierda, para diferencia de caminos múltiplo entero de λ. Interferencia destructiva, a la derecha, para diferencia de caminos, múltiplo impar de $\lambda/2$.

En el caso general (ondas en fase con diferencias de caminos) podemos escribir:

---

[4] Observad que el dibujo presenta ciertas incoherencias, ya que la derivada de la onda resultante no puede ser discontinua y las ondas deberían coincidir en mínimos antes que en máximos en t_2.

[5] Obsérvese que una diferencia de caminos λ, corresponde a una diferencia de fase de 2π, mientras que $\lambda/2$ corresponde a π.

$$p_1 = p_0 \sin(kx_1 - \omega t), y, \; p_2 = p_0 \sin(kx_2 - \omega t)$$

que nos produce una diferencia de fase δ:

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x \rightarrow$$

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \left(360^{o}\right)\frac{\Delta x}{\lambda}$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 = 2p_0 \cos(\delta/2)\sin(kx - \omega t)$$

que representa la diferencia de fase originada por trayectorias distintas, en ondas harmónicas.

En la figura 16.8.a y b se presenta el esquema de las ondas producidas por dos focos puntuales separados por una pequeña distancia y oscilando en fase, (cubeta de ondas). Las separaciones entre las crestas son de longitud de onda λ. Los solapamientos de las crestas, (correspondientes a un número entero de longitudes de onda en diferencia de caminos), originan interferencia constructiva. Entre cada dos máximos, hay una interferencia destructiva (mínimo), correspondiente a un número impar de semilongitudes de onda en el camino de los rayos.

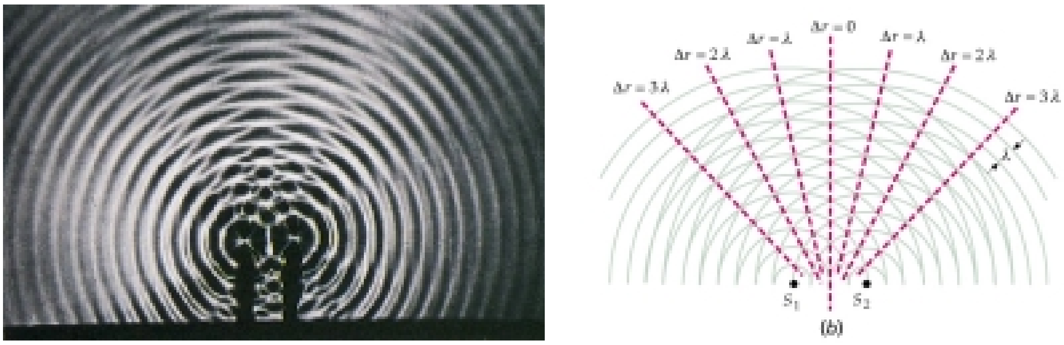

Figura 16.8 Interferencia de dos focos puntuales coherentes que oscilan en fase en una cubeta de ondas. Las líneas a trazos indican los puntos para los que las longitudes de los trayectos de los dos focos difieren en un número entero de longitudes de onda, interferencia constructiva. Equidistantes de las líneas de trazos, se encuentran las líneas nodales, en las que la interferencia es destructiva.

Una cuestión que nos debemos plantear: la **conservación de la energía**. Si la energía transportada por la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud resultante, ocurrirá que en los puntos de interferencia constructiva la energía será cuatro veces la de una sola onda. Por el conrario, en los puntos de interferencia destructiva será nula.

La figura 16.9 muestra la intensidad de la onda resultante a partir de dos focos, en función de la diferencia de trayectorias. Observemos que la intensidad media es la que cabe esperar para no violar el principio de conservación de la energía.

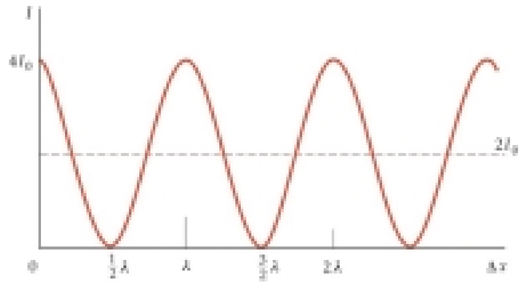

Figura 16.9 Intensidad de la onda resultante en función de la diferencia de caminos para dos focos en fase. I_0 es la intensidad de cada foco.

3.3 Concepto de coherencia.

Los sistemas físicos reales obedecen el principio de superposición. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que las ondas de dos fuentes distintas presenten un patrón de interferencia?

Si las ondas que emiten las dos fuentes fueran de distinta frecuencia y fase, variando al azar, nunca se presentaría un comportamiento coherente de interferencia, puesto que las interferencias cambiarían tan rápidamente de ubicación que no podrían ser reconocidas. Lo mismo ocurre si las ondas que interfieren son armónicas, pero la diferencia de fase cambia de forma errática.

Las interferencias (constructivas y destructivas) se producirán siempre que tratemos con ondas armónicas y las fuentes tengan una diferencia definida y estable entre sus frecuencias y fases.

Diremos que dos focos son coherentes *(incoherentes)* si la diferencia de fase entre ambos *(no)* es constante con el transcurso del tiempo.

Si las fuentes son incoherentes el fenómeno de la interferencia[6] no aparece ubicado en el espacio, sino que varía continuamente de lugar, no se observa por tanto ningún esquema de interferencia, y la intensidad es suma directa de las intensidades de cada onda.

4. Ondas estacionarias.

Cuando las ondas se encuentran confinadas en el espacio, como ocurre con las ondas que se forman en una cuerda de guitarra, en la que los extremos son fijos, las ondas son reflejadas en dichos extremos, existiendo por tanto ondas propagándose en ambas direcciones que se combinan de acuerdo con el principio de superposición. En consecuencia existirá interferencia entre las ondas, que para unas será destructiva y para las otras será constructiva.

[6] Las condiciones de visibilidad de las interferencias y el concepto de coherencia se verán con detalle en el tema 12.

El resultado es que, para una cuerda de determinadas características, **tan sólo** hay ciertas frecuencias (discretas) para las que el principio de superposición nos da un esquema vibratorio estacionario posible, que se denominan **ondas estacionarias**. Este fenómeno es importante por ejemplo, en los instrumentos musicales y en Mecánica Cuántica (ondas de probabilidad).

4.1 Cuerda fijada por sus dos extremos.

Es el ejemplo típico de las cuerdas de los instrumentos musicales. El hecho de que los dos extremos estén fijos, y por tanto necesariamente de amplitud nula en todo momento, impone una fuerte restricción sobre las ondas que se pueden propagar en el seno de tales cuerdas (figura 16.11). Las frecuencias permitidas reciben el nombre de ***frecuencias de resonancia***. La más baja de todas, se denomina *fundamental o primer armónico*.

En la figura se ve la existencia de **nodos y vientres** , para cada armónico, es decir puntos de amplitud nula y máxima respectivamente.

Como se observa en la figura, la **condición de resonancia** para el armónico de orden *n* es:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \qquad n = 1,2,3....,$$

Condición de onda estacionaria,
para una cuerda con los dos extremos fijos

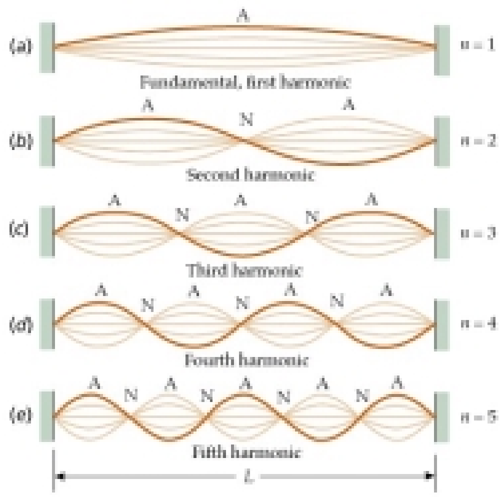

Figura 16.11. Ondas estacionarias sobre una cuerda fijada por los dos extremos. Obsérvese los nodos (N) y antinodos (A) o vientres.

Las frecuencias f_n de vibración las podemos deducir como:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{(2L / n)} \rightarrow f_n = n \frac{v}{2L} = n f_1$$

siendo f_1 la frecuencia fundamental que toma un valor, $f_1 = \frac{v}{2L}$.

Como la velocidad de propagación de la onda es: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, se tiene:

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Ejemplo del diapasón conectado a una cuerda para comprender las longitudes de resonancia de ésta. Figura 16.13.

Una cuerda de longitud L, está fija por un extremo y por el otro conectada a un diapasón que vibra con frecuencia propia f. Esta frecuencia no es ninguna de las frecuencias naturales (o de resonancia) de la cuerda. Las ondas introducidas en la cuerda rebotan en el extremo fijo, se invierten y vuelven hacia el diapasón. Si el tiempo que utiliza la onda para recorrer la distancia 2L coincide con el período del diapasón, se produce un solapamiento (interferencia constructiva) entre la onda reflejada dos veces y la onda que en ese momento emite el diapasón. Como consecuencia, la onda resultante habrá duplicado la amplitud. También se producirá resonancia, si el tiempo que tarda la onda en recorre 2L es un múltiplo entero del período del diapasón. La condición de resonancia es pues:

$$\frac{2L}{v} = nT \rightarrow f_n = n \frac{v}{2L}$$

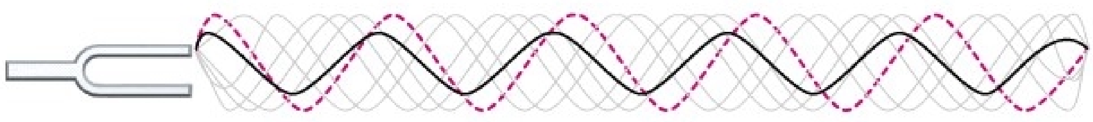

Figura 16.13 Ondas producidas sobre una cuerda por un diapasón, cuya frecuencia no coincide con las frecuencias naturales (o de resonancia) de la cuerda. La onda reflejada (gris) dos veces sobre los extremos, no se encuentra en fase con la que sale del diapasón: no hay interferencia constructiva, y la resultante es la línea negra.

Cuando la frecuencia del diapasón no coincide con ninguna de las frecuencias naturales o de resonancia de la cuerda, las ondas estacionarias no llegan a producirse.

Ejemplos de aplicación.

4.2 Cuerda fija por un solo extremo.

La figura 16.15, aclara lo que pasa en este caso. El extremo libre será ahora un vientre, y la condición de ondas estacionarias la escribiremos:

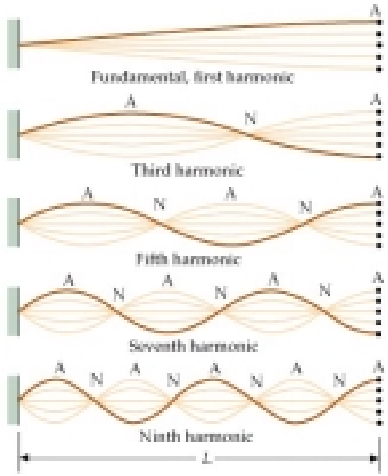

Figura 16.15 Ondas estacionarias en una cuerda fija por un solo extremo.

$$L = n\frac{\lambda_n}{4}, \quad n = 1, 3, 5\ldots,$$

Condición de onda estacionaria, un solo extremo fijo.

Las frecuencias de las ondas estacionarias vienen dadas por:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = n f_1 \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

donde la frecuencia fundamental es ahora: $$f_1 = \frac{v}{4L}$$

Únicamente han quedado los armónicos impares. Se han perdido los armónicos pares, respecto del caso anterior.

4.3 Ondas sonoras estacionarias.

Un ejemplo de ondas estacionarias sonoras son las producidas en los instrumentos musicales, por ejemplo un órgano. Los órganos se construyen con los dos extremos abiertos (órgano abierto) o uno de los extremos cerrado (órgano cerrado). Dado que la presión del aire en el interior y exterior de un extremo abierto es la misma (atmosférica), éste representará un nodo **de presión**, mientras que un extremo cerrado debe representar un vientre. Comparad su comportamiento, desde el punto de vista de las ondas estacionarias, con el de una cuerda[7].

[7] Ver. P. Tipler, página 491. Recordar el desfase existente entre la onda de desplazamiento y la de presión.

4.4 Funciones de onda estacionaria: superposición.

Ya hemos visto que las ondas, por el hecho de propagarse exhiben necesariamente el argumento propio de la propagación. Ahora bien, cuando se trata de ondas estacionarias, las condiciones de contorno, es decir, el hecho de que las amplitudes deben ser nulas en los extremos, impone fuertes restricciones sobre las posibles frecuencias de propagación y además sobre la forma de la ecuación de la onda misma, que como vamos a ver, puede simplificarse.

En efecto, sea y_+ (y_-) la onda que es propaga hacia la derecha (izquierda).

$$y_+=A\sin(kx-\omega t)$$
$$y_-=A\sin(kx+\omega t)$$

donde, como es usual $k=2\pi/\lambda$ es el número de ondas y $\omega=2\pi f$ es la pulsación o frecuencia angular.

La suma de ambas ondas debe escribirse como:

$$y(x,t)=y_+ + y_- = A\sin(kx-\omega t)+A\sin(kx+\omega t)=$$
$$2A\cos(\omega t)\sin(kx)$$

Si la cuerda está fija por ambos extremos, (condiciones de contorno), debe cumplirse que las elongaciones en x=0 y x=L han de ser nulas en cualquier instante, por tanto:

$$\sin(kL)=0 \rightarrow k_n L = n\pi,\ n=1,2,3.. \rightarrow n\frac{\lambda_n}{2}=L$$

que es la misma condición de onda estacionaria establecida antes.

Finalmente, las ecuaciones de las ondas estacionarias las escribiremos:

$$y_n(x,t) = A_n\cos(\omega_n t)\sin(k_n x)$$

donde A_n es la amplitud del harmónico resonante de orden n, k_n es el número de ondas (discretas por las condiciones de contorno) correspondiente y ω_n la frecuencia angular correspondiente.

En general, un sistema vibrante no lo hace con un único armónico aislado, sino que el movimiento es la **composición o superposición** de todos o parte de los armónicos permitidos. Así, la función de onda (por ejemplo de una cuerda de guitarra vibrante) es una combinación lineal (o superposición) de les funciones de onda armónicas permitidas:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

La ecuación anterior se puede interpretar para cada armónico como que cada punto de la onda estacionaria vibra con una amplitud, que depende de la posición $A_n \sin(k_n x)$ y con la frecuencia angular del armónico ω_n.

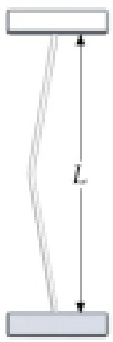

Figura 16.21. Una cuerda pulsada por el centro. Al dejarla libre, su vibración es una combinación lineal de ondas estacionarias.

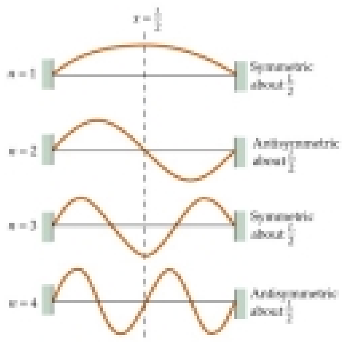

Figura 16.22. Los cuatro primeros armónicos de la cuerda. Por la simetría del problema solamente contribuyen los armónicos impares al caso anterior.

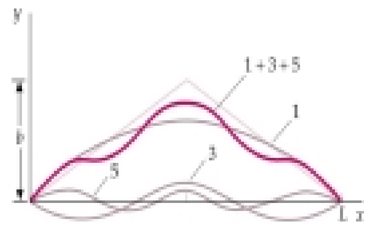

Figura 16.23. Solamente con los tres primeros armónicos impares se reproduce casi la forma de la cuerda pulsada: observad que todos contribuyen a la vibración.

14. Análisis de armónicos.

Dos notas iguales tocadas por diferentes instrumentos tienen el mismo **tono**, pero **timbre** diferente. El tono hace referencia a la frecuencia del armónico principal y el **timbre** a las **diferentes intensidades relativas** de los armónicos secundarios que lo acompañan. El oído humano es un extraordinario detector de sonidos, pues es susceptible de distinguir que un clarinete y un piano dan la misma nota, por ejemplo *la* (es el tono), y distinguir los instrumentos (que tienen una composición diferente de armónicos). Otra cualidad del sonido es su intensidad, que como ya hemos visto, se relaciona con la energía que transporta la onda sonora.

La figura 16.23 nos muestra las formas de onda correspondientes a un diapasón, un clarinete y un oboe. El diapasón prácticamente es un sonido fundamental, sin armónicos superiores. En cambio, esto no ocurre en otros instrumentos que tienen un riqueza apreciable de armónicos superiores.

El análisis de Fourier es un procedimiento matemático para desarrollar cualquier forma de onda (periódica) en función de los armónicos que la componen. En el caso de los instrumentos anteriormente citados, el análisis de Fourier nos da las composiciones de los armónicos que se ven en la figura 16.24.

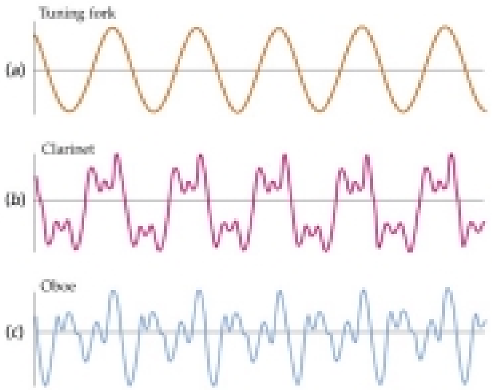

Figura 16.23 Formas de onda para diferentes instrumentos: diapasón, clarinete, oboe, con la misma intensidad aproximadamente. Observad que por tratarse de la misma nota (frecuencia de fundamental), todas las formas de onda presentan los mismos nodos.

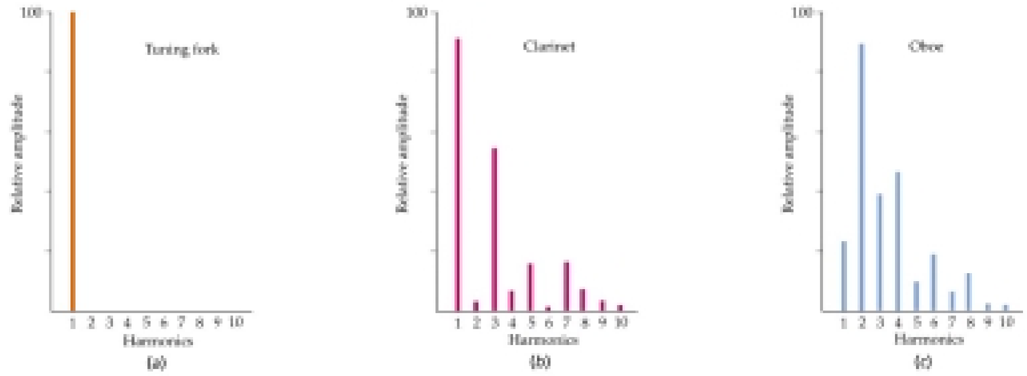

Figura 16.24. Intensidades relativas de los armónicos para las ondas de la figura anterior, mediante análisis de Fourier.

Obsérvese que las ondas de la figura16.23 son periódicas, puesto que se repiten a intervalos iguales de la variable independiente (el tiempo en este caso), que no está restringido a un intervalo finito (como en los paquetes de onda). La restricción en este caso se basa en que todas las ondas que tienen que darnos el resultado periódico, deben anularse en los mismos puntos (ver figura 16.23), y esto solo se puede obtener con los armónicos de frecuencia múltiple. Figura 16.25.

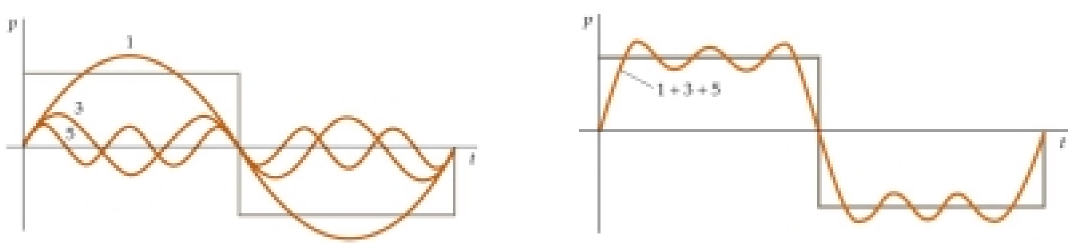

Figura 16.25. Onda cuadrada periódica y sus primeros armónicos. Todos ellos deben cumplir que se anulan en el punto en el que lo hace la onda: restricción.

Hoy en día se ha hecho muy frecuente obtener nuevos sonidos mediante procedimientos basados en el uso de ordenadores. Estos procedimientos, contrarios al análisis de Fourier, se denominan *síntesis de sonidos mediante los harmónicos*: un ejemplo puede verse también en la figura 16.25.

15. Paquetes de onda y dispersión.

Las ondas reales aparecen normalmente en forma de **pulsos** o paquetes de ondas, que son perturbaciones (del medio) con un inicio y un final. Las ondas armónicas que hemos estudiado, con seno y coseno, son una idealización de la realidad, ya que no tienen inicio ni final. Así pues, para enviar una señal (que es finita) portadora de información y energía, a un punto del espacio, no se pueden usar ondas armónicas, sino que se deben usar ***paquetes de onda***.

La diferencia fundamental entre las señales estudiadas en el apartado anterior y los paquetes de onda es que aquellas son periódicas y se repiten indefinidamente en el tiempo, sin inicio ni final, mientras que los pulsos están localizados en el tiempo con un inicio y un final, y cuya duración denominaremos Δt.

Los pulsos o paquetes no presentan ninguna dificultad matemática ni conceptual. De modo que son solución la ecuación de ondas, con su dependencia explícita del argumento de propagación ($x \pm vt$), como ocurre con un pulso de forma gaussiana, y que por tanto se propaga en el espacio.

$$z(x,t) = z_0\, e^{\left(-(x-vt^2)/\alpha^2\right)}$$

Pulso de forma gaussiana.

donde se observa que la constante α representa la anchura (duración) del paquete.

Los paquetes de onda se pueden descomponer matemáticamente como **superposición** (suma) de ondas armónicas, que a diferencia de la descomposición de Fourier del análisis de armónicos, es **contínua** en ω. Ahora bien, la restricción espacial del pulso, se traduce aquí en una restricción en las frecuencias angulares ω de les ondas armónicas que lo constituyen.

Esta descomposición se efectúa matemáticamente mediante una técnica conocida como *transformaciones de Fourier*: si el pulso tiene una duración temporal Δt, se encuentra que también dispone de una amplitud de frecuencias angulares $\Delta\omega$. Esto quiere decir que un pulso está constituido por un conjunto contínuo de ondas próximas a un valor ω_0.

Usando estas técnicas, se demuestra que si la amplitud del pulso en el tiempo es Δt, la amplitud del pulso en las frecuencias necesarias para describir el paquete es $\Delta\omega$, de modo que se verifica que:

$$\Delta w \Delta t \cong 1 \rightarrow \Delta k \Delta x \cong 1$$

un pulso de corta duración tiene una amplitud en las frecuencias que la componen relativamente grande, y viceversa.

Las anteriores relaciones son de gran importancia, puesto que se deben verificar para todo tipo de ondas, y en particular deben verificarse en el contexto del mundo microscópico de los átomos, en el que reciben el nombre de relaciones de incertidumbre.

Si un paquete de ondas debe mantener su forma al propagarse por un medio material, es necesario que todas las ondas armónicas que lo constituyen se propaguen a la misma velocidad en el medio. Entonces, se dice que el **medio es *no dispersivo***.

En los medios *dispersivos*, si bien generalmente la velocidad de las ondas no varía demasiado, el paquete se deforma durante la propagación, ya que unas ondas se adelantan a las otras. Se denomina ***velocidad de fase*** a la velocidad de las ondas armónicas en el medio, (diferente para cada uno de los *armónicos* que componen el paquete) y ***velocidad de grupo*** a la velocidad global del paquete (única para el paquete).

Lecturas recomendadas:
Paquetes de onda y dispersión. P. Tipler, página 496.
Descomposición de Fourier de pulsos y el principio de incertidumbre. P. Fishbane, página 471 y siguientes.