

## TEMA 5. OSCILACIONES EN CIRCUITOS LRC.

### 1. Introducción.

En los circuitos eléctricos, las resistencias son causa de pérdida de energía, y los condensadores son los almacenes de la energía del campo eléctrico. En efecto, ya se ha visto que la energía que se almacena entre las placas de un condensador plano se puede interpretar como la energía necesaria para la creación del campo eléctrico entre sus placas, e incluso se ha definido una densidad de energía en las regiones en las que hay campo eléctrico, que es proporcional<sup>1</sup> al cuadrado de dicho campo  $E$ .

También se puede almacenar la energía en un campo magnético. Esta tarea la realizan las inducciones. Las inducciones solamente actúan sobre el circuito cuando existen corrientes variables con el tiempo, y además su actuación es inercial, oponiéndose siempre a las variaciones de corriente.

Los circuitos eléctricos, con resistencias, condensadores e inducciones, son matemáticamente y en consecuencia en su comportamiento, semejantes a los osciladores mecánicos amortiguados, en los que la resistencia es el elemento disipativo y hace el papel de fuerza de fricción.

### 2. Circuitos RC.

Se denomina circuitos RC a aquellos en los que intervienen una resistencia  $R$  y un condensador de capacidad  $C$ . En estos circuitos la corriente no es estacionaria, sino que varía con el tiempo. Así ocurre cuando estando cargado inicialmente el condensador de la figura 26.37 se cierra el interruptor. Un ejemplo es el circuito de descarga del *flash* en la máquina fotográfica.

#### Descarga de un condensador.

En la figura 26.37 se observa un condensador con una carga inicial  $\pm Q_0$  sobre cada placa, conectado a una resistencia  $R$  y a un interruptor  $S$ . Para corrientes estables (constantes) el condensador actúa como un interruptor abierto. Con el circuito abierto, la diferencia de potencial entre los bornes es  $V_0 = Q_0/C$ , donde  $C$  es la capacidad del condensador.

En el instante que cerramos el circuito, la corriente que lo atraviesa será:

---

<sup>1</sup> Ver Tipler, cuarta edición Tema 25. Expresiones 25.13 y 25.26. Ver Fishbane Tema 26, Expresión 26.12, etc.

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}$$

A medida que transcurre el tiempo, la carga del condensador irá disminuyendo, por lo que la intensidad y la diferencia de potencial que genera serán función del tiempo. La intensidad, por definición, es<sup>2</sup>:

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

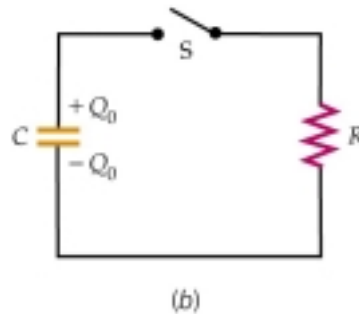
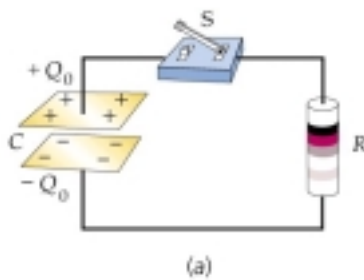


Figura 26.37. Circuito de descarga de un condensador de láminas planas.

Si aplicamos la primera **ley de Kirchhoff** en el sentido de la corriente, tenemos:

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + \ln B \rightarrow Q(t) = Be^{-t/RC}$$

donde B es una constante de integración, que en el instante  $t=0$  (condiciones iniciales) vale  $Q_0$ . Así:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}$$

donde  $\tau$  representa la **constante temporal<sup>3</sup> del circuito RC**, que representa el tiempo que debe transcurrir para que la carga del condensador haya disminuido en  $1/e$  su valor inicial. La constante  $\tau$ , que caracteriza el flujo de la carga a través del condensador, queda definida:

$$\tau = RC$$

La carga en el condensador **disminuye exponencialmente** con el tiempo, como se ve en la **figura 26.38**. La constante temporal  $\tau$  tiene además el significado del tiempo en el que el condensador se habría descargado totalmente, si el ritmo de disminución fuera constante e igual al inicial. La intensidad de la corriente y la diferencia de potencial del condensador también decrecen a ritmo exponencial, como se demuestra:

<sup>2</sup> El signo menos procede de que la carga disminuye en el condensador.

<sup>3</sup> Justifique por qué y deduzca que la constante temporal  $\tau$  tiene dimensiones de tiempo.

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 e^{-t/\tau}$$

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau}$$

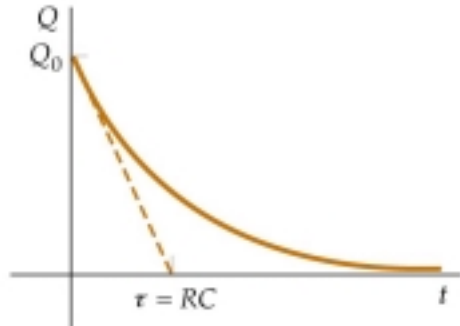


Figura 26.38 Descarga de un condensador.

Carga de un condensador.

La figura 26.40 muestra el circuito utilizado para cargar un condensador, inicialmente descargado. Cuando cerramos el circuito, comienza a fluir carga que va almacenándose sobre las placas, hasta que el voltaje del condensador iguala al de la FEM, con signo contrario. Aplicando la primera regla de Kirchhoff:

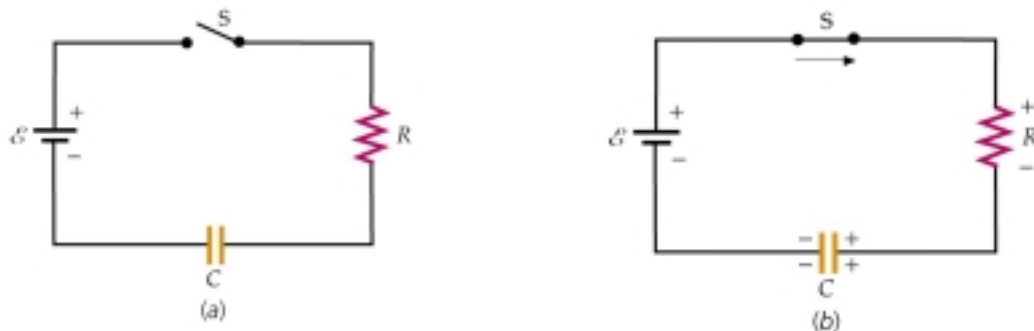


Figura 26.40 Circuito de carga de un condensador.

$$\xi - IR - \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow \xi = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

ya que en este caso la intensidad  $I = +dQ/dt$ . Multiplicando por  $C$  y reordenando:

$$\frac{dQ}{C\xi - Q} = \frac{dt}{RC} \rightarrow -\ln(C\xi - Q) = \frac{t}{RC} + \ln A$$

Tomando antilogaritmos y aplicando las condiciones iniciales, deducimos:

$$Q = C\xi(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$$

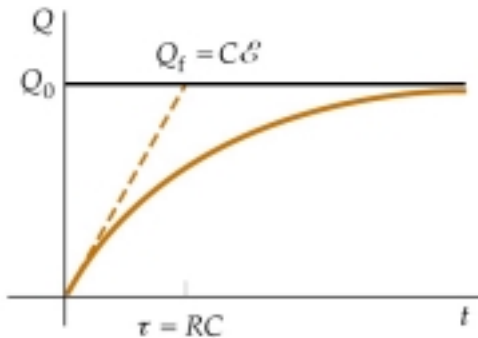
donde hemos aplicado que la carga final del condensador vale  $Q_f = C\xi$

Como antes, la intensidad  $I$  decrece al **ritmo determinado por la constante temporal  $\tau=RC$**  del circuito (el mismo que antes):

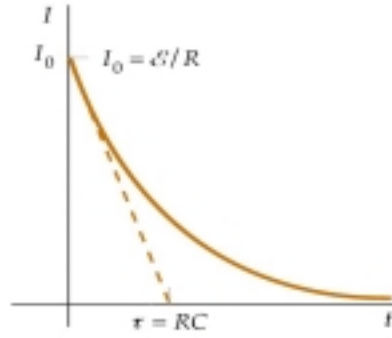
$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

**Ejercicio:** Calculad la función  $V(t)$  entre las placas del condensador.

En las **figures 26.41 y 26.42** se representa la carga e intensidad en función del tiempo en este caso.



**Figura 26.41** Carga de un condensador en función del tiempo.



**Figura 26.42** Intensidad de carga de un condensador.

Una vez el condensador se ha cargado completamente se comporta como un **circuito abierto**, no dejando pasar más corriente.

**Ejercicio:** Demostrar que la constante temporal  $\tau=RC$  tiene dimensiones de tiempo.

## 2.1 Energía en un circuito RC.

Queremos analizar el proceso de carga del condensador, **desde el punto de vista de la energía**: la energía es suministrada por la FEM. Una parte de ésta se usa obviamente en cargar el condensador, y la otra parte se disipa en la resistencia. Durante todo el proceso de carga el valor  $\xi$  de la FEM permanece constante, mientras que la ddp entre las placas del condensador va aumentando desde 0 al valor final  $V_f = \xi$ .

$$dW_{\text{bat}} = \xi dq = \xi(CdV) \rightarrow W_{\text{bat}} = C\xi^2 \quad \text{Energía suministrada.}$$

La energía almacenada en el condensador, toma el valor:

$$dW_{\text{con}} = Vdq = V(CdV) \rightarrow W_{\text{con}} = \frac{1}{2}C\xi^2 \quad \text{Energía Condensador}$$

Falta por controlar la mitad de la energía, que necesariamente se debe haber disipado en la resistencia por el efecto Joule. Así:

$$dE_{\text{dis}} = Vdq = RI^2 dt \rightarrow E_{\text{dis}} = \int_{t=0}^{t=\infty} RI^2 dt = \frac{\xi^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt \Rightarrow E_{\text{dis}} = \frac{C\xi^2}{2}$$

Independientemente del valor nominal de la resistencia  $R$ , la FEM  $\xi$  y la capacidad  $C$ , **la mitad de la energía queda almacenada en el condensador y la otra mitad disipada en la resistencia  $R$ .**

Ejercicios de aplicación.

### 3. Inductancia.

Cuando sobre un circuito existe una corriente eléctrica variable, este produce un campo magnético que también varía. Aplicando la ley de Faraday, se introducirá una FEM adicional en el circuito, **que se opone a la variación de corriente** en el circuito (signo menos en la ley de Lenz)<sup>4</sup>.

Así, al conectar un circuito con una FEM, ésta genera una corriente transitoria que va aumentando con el tiempo hasta alcanzar su valor estable o final. En consecuencia, **el campo magnético** generado por el circuito va incrementándose, al aumentar la intensidad de la corriente que lo recorre, e igualmente **el flujo magnético** que atraviesa el circuito también aumenta. La ley de Faraday-Lenz nos afirma que aparece una FEM inducida en el circuito que **se opone a cualquier cambio** (incremento o disminución) del flujo magnético en el circuito.  $\xi = -d\Phi_m / dt$

**Conclusión:** Las **corrientes variables** en los circuitos originan efectos de inducción que tratan de reducir la rapidez con la que varían las corrientes.

El flujo magnético que atraviesa un circuito depende de la corriente existente en el mismo, de las corrientes presentes en los circuitos vecinos (en ausencia de imanes permanentes), lo que origina dos coeficientes denominados **de autoinducción y de inductancia mutua**.

Coeficiente de autoinducción. Consideremos una espira (aislada) por la que circula una corriente  $I$ . Como el campo magnético que genera es proporcional a  $I$  en todo punto del espacio, el flujo magnético que atraviesa la espira por la existencia de la corriente es proporcional a la intensidad  $I$ .

$$\Phi_m = LI \rightarrow \xi_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{FEM inducida.}$$

Donde  $L$  es una constante que recibe el nombre de **coeficiente de autoinducción** de la espira. Este coeficiente depende únicamente de la forma geométrica de la espira considerada. La unidad de autoinducción en el S.I. es el **Henri (H)** que equivale a un weber de inducción por amperio de corriente:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$$

<sup>4</sup> Repase el alumno las leyes de Faraday y Lenz, así como el concepto de inductancia.

El cálculo de los coeficientes de autoinducción es difícil en general. En el caso de un solenoide de longitud  $\lambda$ , área  $A$  y densidad de espiras<sup>5</sup>  $n$  por el que circula una corriente  $I$ , el campo magnético vale:

$$B = \mu_0 n I \rightarrow \Phi_m = NBA = n\lambda BA = \mu_0 n^2 I A \lambda$$

El coeficiente de proporcionalidad entre el flujo y la corriente es el coeficiente de autoinducción:

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \mu_0 n^2 A \lambda$$

que como se observa **depende únicamente de factores geométricos**<sup>6</sup>. La *constante de permeabilidad magnética* puede definirse en función de esta nueva unidad:

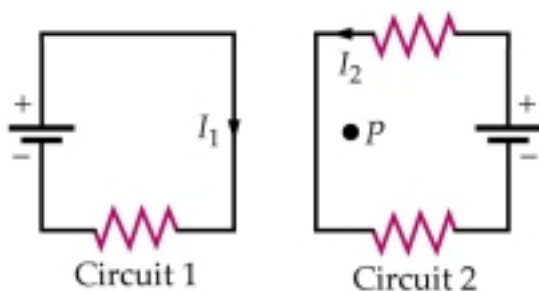
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

Cuando la intensidad de la corriente de un circuito varía, el flujo magnético originado por él no es constante en el tiempo, por lo que se induce una *FEM a lo largo* del circuito. Para calcularla es necesario utilizar la definición del coeficiente de autoinducción en la forma:

$$\xi = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{FEM inducida.}$$

Inductancia mutua. Cuando dos circuitos, como los de la **figura 30.18** se encuentran próximos el flujo magnético que los atraviesa está influenciado por la corriente del otro circuito. Así, escribiremos:

$$\Phi_{m2} = L_2 I_2 + M_{12} I_1 \quad \text{y también} \quad \Phi_{m1} = L_1 I_1 + M_{21} I_2$$



**Figura 30.18** Dos circuitos contiguos. El campo magnético en P se origina por la contribución parcial de  $I_1$  e  $I_2$ . El flujo magnético a través de un circuito es la suma de dos términos proporcionales a  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente.

donde  $L$  representa el coeficiente de autoinducción de cada circuito y  $M_{12}$  es el **coeficiente de inductancia mutua** entre los dos circuitos.

<sup>5</sup> La densidad de espiras  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud:  $n = N/\lambda$

<sup>6</sup> Tanto las capacidades de los condensadores como las inductancias dependen únicamente de factores geométricos.

Los coeficientes de inductancia mutua cumplen las siguientes propiedades:

- 1) Dependen solamente de la disposición geométrica de los circuitos.
- 2) Siempre se cumple que  $M_{ki} = M_{ik}$  para toda pareja de circuitos considerados.

Demostred que esta última propiedad se verifica para dos solenoides concéntricos como los esquematizados en la figura 30.19.

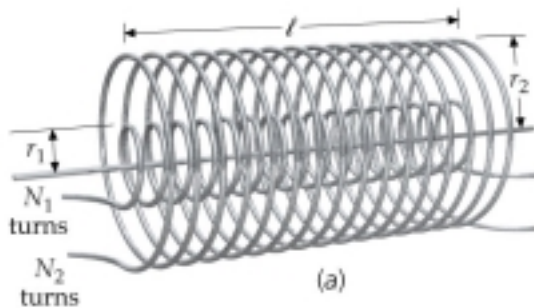


Figura 30.19 Dos solenoides concéntricos de igual longitud.

Demostración: Sea  $\lambda$  la longitud de los dos solenoides,  $r_1, N_1$ ,  $(r_2, N_2)$  el radio y número de espiras del solenoide interior (exterior).

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \rightarrow \Phi_{m2} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 n_2 n_1 \lambda (\pi r_1^2) I_1 \rightarrow$$

$$M_{2,1} = \frac{\Phi_{m2}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \lambda (\pi r_1^2) = M_{1,2}$$

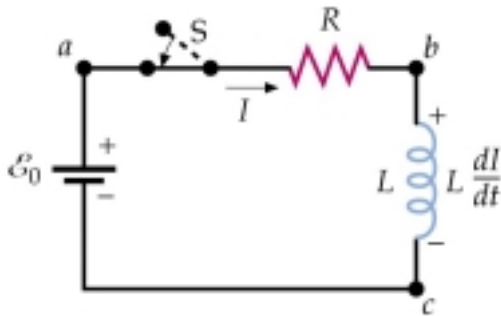
#### 4. Circuito RL.

Una inductancia realiza un papel en el campo magnético semejante al que lleva a cabo un condensador en un campo eléctrico: ambos son almacenes de energía. Además, existe una expresión para el campo magnético semejante a la que nos da la energía por la existencia de un campo eléctrico, deducida anteriormente con la ayuda del condensador de placas plano-paralelas.

El elemento en el que nos basaremos para el cálculo, es **un solenoide** que genera un campo magnético uniforme en su interior, cuya inductancia ya ha sido calculada.

Sea un circuito LR como el de **la figura 30.20**, con una autoinducción de coeficiente  $L$ , una resistencia óhmica  $R$  y una  $Fem$  de valor  $\xi_0$ . Cuando cerramos el circuito se genera una **fuerza electromotriz** por parte de la autoinducción que se opone a la variación de corriente. Aplicando **las leyes de Kirchhoff y la ley de Lenz**, tenemos:

$$\xi_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (\text{Ecuación 1.})$$

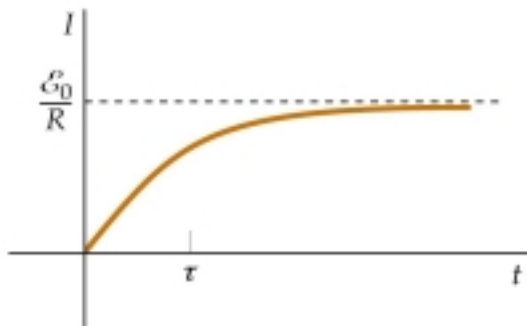


**Figura 30.20** Circuito LR. Al cerrarlo se genera una fuerza contra electromotriz.

que integrada<sup>7</sup> nos da la variación de la intensidad en el circuito en función del tiempo como:

$$I = \frac{\xi_0}{R} \left( 1 - e^{-Rt/L} \right) = I_f \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

donde  $\tau = L/R$  es **la constante de tiempo característica del circuito** y  $I_f$  la intensidad alcanzada finalmente en el circuito. En la **figura 30.21** se ve la función exponencial de crecimiento de la intensidad del circuito vs el tiempo.



**Figura 30.21** Variación de la intensidad de corriente en función de t en un circuito LR.

El **papel del inductor** en el circuito es **oponerse al cambio** brusco de corriente en él, de manera que la corriente final se alcanza suavemente. Una vez se ha alcanzado el valor final de la corriente, el inductor almacena una energía, como vamos a ver, pero no realiza ninguna acción sobre el circuito.

<sup>7</sup> Es necesario separar las variables de integración I y t, integrar, calcular antilogos y aplicar las condiciones de contorno:  $I = \xi_0/R$  para  $t \rightarrow \infty$ ,  $I = 0$  para  $t = 0$ .



#### 4.1 Energía magnética en una autoinducción.

Multiplicando la ecuación 1 por la intensidad encontramos:

$$\xi_0 I = I^2 R + L I \frac{dI}{dt}$$

donde:

- el primer término representa la potencia suministrada por la batería al circuito,
- el segundo es la potencia disipada por efecto Joule en la resistencia,
- el último término con el coeficiente L representa la potencia que incide sobre la autoinducción.

Obsérvese que si la corriente va aumentando, la potencia que se suministra al inductor es positiva, y en consecuencia la energía interna  $U_L$  del inductor debe aumentar. Por el contrario, si la corriente disminuye, la potencia es negativa, lo que quiere decir que el circuito exterior absorbe potencia del inductor. Matemáticamente:

$$\frac{dU_L}{dt} = L I \frac{dI}{dt} \rightarrow U_L = \int dU_L = \int_0^{I_f} L I dI = \frac{1}{2} L I_f^2$$

que representa la energía almacenada en una bobina autoinductora, cuando la corriente pasa de intensidad nula a valer  $I_f$ . Esta expresión es semejante a la que nos da la energía almacenada en un condensador C con una carga Q:

$$U_L = (1/2) L I_f^2 \text{ expresión semejante a } U_C = (1/2) Q^2 / C.$$

#### 5. Energía del campo magnético.

Como en el caso eléctrico, se puede interpretar esta energía como la que corresponde a la existencia del campo magnético, es decir, la energía almacenada al crear el campo en la región del espacio en el que éste existe, y que toma un valor proporcional al cuadrado del campo.

Explícitamente, para el campo magnético:

$$\eta_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{E_{\text{magnética}}}{\text{Unidad de Volumen}}$$

que representa la densidad de energía magnética en los puntos en los que existe el campo. Por el hecho de existir campo magnético en una región del espacio, podemos considerar que tenemos una densidad de energía almacenada.

**Demostración:**

Vamos a considerar el solenoide ideal para determinar la densidad de energía en el campo magnético. Usaremos las expresiones de la inductancia y del campo magnético uniforme generado en el interior del solenoide. Tenemos:

|   |  |
|---|--|
| <p>Para el campo magnético</p> $U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 A \lambda n^2 I^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A \lambda$ <p>donde hemos usado el coeficiente de autoinducción del solenoide y la expresión del campo B</p> $B = \mu_0 n I \quad L = \mu_0 n^2 A \lambda$ <p>Como <math>A \lambda</math> es el volumen, deducimos:</p> $\eta_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_{\text{mag}}^2}{\text{Unidad de Vol.}}$ | <p>Para el campo eléctrico, condensador plano</p> $U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (E d)^2$ $U_C = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (A d)$ <p>donde hemos usado la capacidad del condensador plano.</p> <p>Como <math>A d</math> es el volumen, deducimos para la densidad de energía eléctrica</p> $\eta_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ |
|---|--|

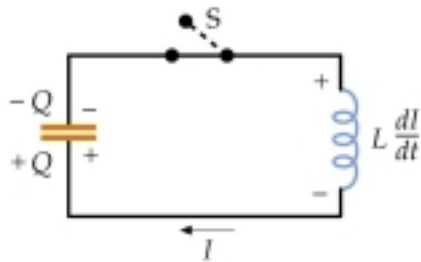
Cuando ambos tipos de campos está presentes, la densidad de energía global, toma el valor:

$$\eta = \eta_m + \eta_{el} = \frac{1}{2} \left( \frac{B^2}{\mu_0} + \epsilon_0 E^2 \right)$$

**6. Circuito LC (sin generador).**

La figura 31.11 muestra un circuito simple sin inductancia y un condensador, denominado circuito LR y que no dispone de resistencia óhmica. Suponemos que inicialmente el condensador se encuentra cargado con  $Q_0$  y que se cierra el circuito en  $t=0$ . Aplicando Kirchoff tenemos<sup>8</sup>:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow \left| I = \frac{dQ}{dt} \right| \rightarrow L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$



**Figura 31.11.** Circuito LC con el condensador cargado inicialmente. Al descargarse, la inductancia origina una fuerza contraelectromotriz.

<sup>8</sup> Recordemos que el sentido de la intensidad de malla al aplicar las leyes de Kirchoff se puede elegir arbitrariamente. La configuración del condensador y la autoinducción de la figura corresponde al condensador cargándose con intensidad creciente con el tiempo.

Observemos la analogía matemática y física que existe entre un circuito RL y una masa  $m$  unida a un muelle elástico:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{ANÁLOGA} \quad L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

la propiedad **inercial** de la masa la juega la inductancia, el desplazamiento de la posición de equilibrio es la carga  $Q$  del condensador que obviamente **oscila**, y finalmente la elasticidad del muelle está representada ahora por la inversa de la capacidad del condensador:  **$k \leftrightarrow 1/C$** . (Ver **apéndice**).

Si resolvemos la ecuación siguiendo los mismos pasos que en el muelle:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad Q = Q_0 \cos(\omega t + \delta)$$

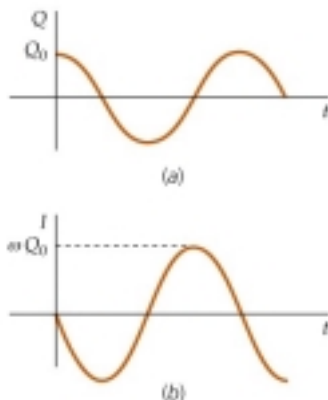
La carga total del condensador oscila en este circuito entre los valores  $+Q_0$  y  $-Q_0$ , con una **frecuencia angular  $\omega$ , propia o natural** del circuito. Además  $Q_0$  y  $\delta$  son las constantes de integración.

Observemos que este **circuito** (ideal) **no es disipativo**, pues la energía almacenada en el condensador inicialmente ( $U_{el}$ ) pasa a quedar almacenada en la inductancia ( $U_m$ ) y así sucesivamente, como ocurre en el caso del muelle entre la energía potencial y cinética, quedando su suma constante. Así, considerando que  $I = dQ/dt$ , y el valor de  $\omega^2 = 1/LC$ , tenemos:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_0^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

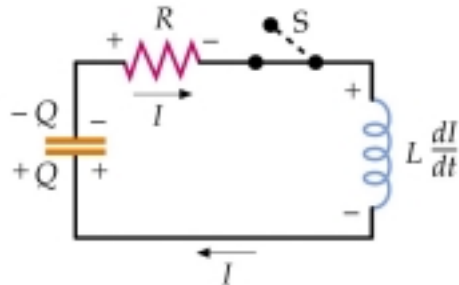
$$U_{tot} = U_e + U_m = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = U_{inic}$$



**Figura 31.12.**  $Q(t)$  y  $I(t)$  para un circuito LC. Comparadlas con el desplazamiento y la velocidad de un objeto unido a un muelle elástico. (Ver **apéndice** del tema).

## 7. Circuito LCR (sin generador)

La inserción en el circuito anterior de una resistencia, que por efecto Joule es un elemento disipativo, permite extender la analogía mecánica con un muelle al caso del **movimiento amortiguado**. **Figura 31.13.**



**Figura 31.13.** Circuito LCR, sin generador.

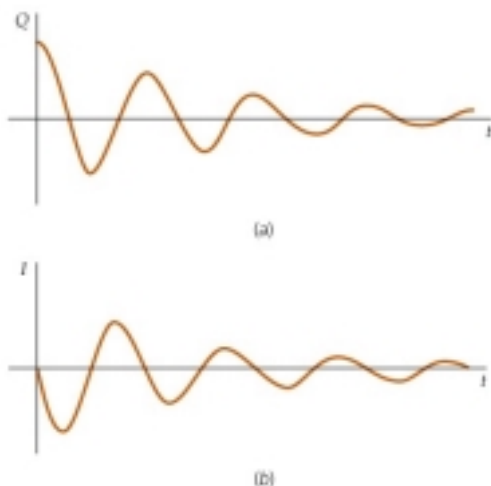
Considerando que la  $I=dQ/dt$ , y las leyes de Kirchhoff, deducimos:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = 0 \rightarrow L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

ecuación análoga al caso del movimiento amortiguado, donde la **resistencia disipativa R**, desempeña ahora el papel del coeficiente de viscosidad.

Como en el caso del movimiento amortiguado, ahora la carga Q disminuye y oscila con el tiempo en la forma:

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega' t + \delta) \quad \text{siendo}^9: \\ \alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega'^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_0^2 - \alpha^2$$



**Figura 31.14** Gráficas de la evolución de la carga en el condensador y de la intensidad en función del tiempo, para un circuito RLC.

Comparadlas con las gráficas del desplazamiento y la velocidad de un móvil en el m.v.a.s, con fuerza viscosa. (Ver **apéndice** del tema).

La constante  $\alpha$  aquí definida juega el mismo papel que  $\lambda$ , en el oscilador mecánico amortiguado.

La constante  $\alpha$  rige la pérdida de carga en el condensador, que se produce de forma exponencial. Esta  **$\alpha$  únicamente depende de R y L**, y se

<sup>9</sup> Recordar que existen dos constantes de integración a determinar por condiciones iniciales:  $Q_0$  y  $\delta$ .

relaciona con la constante  $\tau$  obtenida para los circuitos RL:  $\alpha=1/(2\tau)$ . Como la energía del circuito es proporcional a  $Q^2$ , resulta que el ritmo de pérdida de energía  $E(t)$  del circuito es exponencial, decreciendo como:

$$Q=Q_0 e^{-\alpha t} \rightarrow E(t)=E_0 e^{-2\alpha t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Finalmente, siguiendo la analogía mecánica, la frecuencia angular de las oscilaciones del circuito  $\omega'$  resulta ser diferente de la natural o propia  $\omega$  por causa de la resistencia: **ralentizándose el período de las oscilaciones**. Si  $\omega'$  toma valor cero, tenemos **movimiento crítico amortiguado**.

## 8. Energía en circuitos RLC.

Ya hemos visto que cuando en el circuito no existe el elemento disipativo representado por la resistencia  $R$ , la energía magnética y la energía eléctrica oscilan de manera que la suma de ambos permanece constante. Es lo mismo que pasa en el **oscilador armónico, sin fricción**, entre la energía potencial y cinética, cuya suma es la energía mecánica que permanece constante.

Al introducir la resistencia, si ésta es pequeña, la carga y la corriente oscilan con una frecuencia **próxima** al valor natural  $\omega_0$ , pero la amplitud de las oscilaciones va amortiguándose con el tiempo, de forma exponencial. Los valores de la carga y la corriente van disminuyendo y en consecuencia **disminuye también la energía disponible en el circuito**.

Conviene analizar este hecho más detalladamente: multiplicamos la ecuación diferencial del circuito RLC por la intensidad  $I$ , obteniendo:

$$IL \frac{dI}{dt} + I \frac{Q}{C} + I^2 R = 0$$

- El primer término representa el ritmo con el que se extrae o se almacena energía en la inductancia. En efecto, es la derivada de  **$(1/2)LI^2$** , y que puede ser positiva o negativa.
- El segundo término representa el ritmo con el que se extrae o almacena energía en el condensador, ya que se trata de la derivada respecto del tiempo de la cantidad  **$(1/2)Q^2/C$** , valor que de nuevo puede ser positivo o negativo.
- El último término  **$I^2 R$**  es el ritmo con que se disipa energía del circuito en la resistencia por efecto Joule, y **éste es siempre positivo**.

Lectura recomendada:

*Propiedades magnéticas de los superconductores*. P. Tipler, pág 998.

## APÉNDICE

Tabla de analogía entre un circuito RC y RL

|                                  | Parámetro circuito RC | Parámetro circuito RL |
|----------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Variable dependiente             | Q                     | I                     |
| Coeficiente de la variable       | 1/C                   | R                     |
| Coef. de $d(\text{variable})/dt$ | R                     | L                     |
| Constante temporal $\tau$        | RC                    | L/R                   |

Tabla de analogía entre los circuitos RLC y el movimiento armónico amortiguado.

|                                     | Circuito RLC | Movimiento armónico |
|-------------------------------------|--------------|---------------------|
| Variable                            | Q            | x                   |
| Coef de la variable                 | 1/C          | k                   |
| Coef. de $d(\text{variable})/dt$    | R            | b                   |
| Coef de $d^2(\text{variable})/dt^2$ | L            | m                   |