

TEMA 6. CORRIENTE ALTERNA Y CIRCUITOS LRC.

1.- Introducción.

La mayor parte de la energía eléctrica que se utiliza hoy en día, se ha producido mediante **generadores eléctricos** en forma de corriente eléctrica alterna, por la ventaja que supone ésta sobre la corriente continua al transportarse a grandes distancias, a tensión elevada e intensidad débil, lo que reduce las pérdidas de energía por **efecto Joule**. Esta energía, para ser aprovechada, debe ser convenientemente transformada a tensiones menores y mayores intensidades, mediante **transformadores**, cuyo funcionamiento se basa en la inducción magnética.

Es necesario destacar que al conectar resistencias (R), condensadores (C) y autoinducciones (L) dentro de un circuito con un generador de corriente alterna, los potenciales y las corrientes exhiben un **comportamiento que depende del tiempo**. Estos circuitos muestran un comportamiento semejante a sistemas mecánicos armónicos **excitados por fuerzas periódicas exteriores**, estudiados en el primer tema del semestre, y en particular presentan el **fenómeno de la resonancia**, (**analogía mecánica** de los sistemas LRC con generador).

2.-Generadores y Transformadores de corriente alterna.

El **principio de funcionamiento** de un generador de corriente (alterna) se ve en la **figura 31.1**¹. Se basa en una espira que gira en el interior de un campo magnético (uniforme) de manera que aparece un flujo magnético variable).

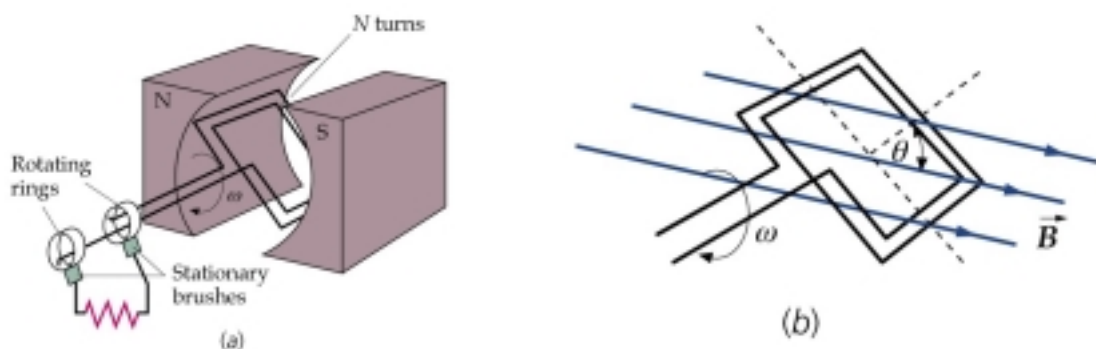


Figura 31.1. Generador de ca. Una bobina que gira con una frecuencia angular constante en el interior de un campo magnético uniforme genera una corriente alterna sinusoidal.

El flujo magnético vale:

$$\Phi_m = NBA \cos\theta$$

¹ Las figuras son cortesía de P. Tipler, libro recomendado en la bibliografía.

donde N es el número de espiras que hay en la bobina y A el área. Si mediante una fuente de energía hacemos girar la bobina con velocidad angular ω constante tendremos: como $\theta = \omega t + \delta$

$$\Phi_m = NBA \cos(\omega t + \delta) \rightarrow$$

$$\xi = - \frac{d\Phi_m}{dt} = + NBA\omega \sin(\omega t + \delta)$$

que también puede ser escrita, si consideramos que $\xi_{\text{m}\ddot{a}\text{x}} = NBA\omega$, como

$$\xi = \xi_{\text{m}\ddot{a}\text{x}} \sin(\omega t + \delta)$$

que como se observa es **una Fem inducida sinusoidal**. La energía necesaria para hacer girar la bobina procede de un salto de agua, de una turbina de vapor, etc.

El principio de funcionamiento de un motor de corriente alterna es semejante si bien ahora se aplica una corriente alterna a la bobina procedente de una Fem externa. El resultado es un par de fuerzas que tienden a orientar el momento magnético de la espira con el campo magnético exterior. Si la corriente eléctrica alterna cambia de polaridad justamente cuando la espira pasa por la posición vertical, el par de fuerzas tiene siempre el mismo sentido y la espira girará siempre en la dirección conveniente.

2.1 Transformadores:

Los transformadores son dispositivos utilizados para elevar o disminuir el voltaje sin que haya pérdida de potencia. Consiste fundamentalmente en dos bobinas de hilo conductor enrolladas sobre un núcleo de hierro (Figura 31.25).

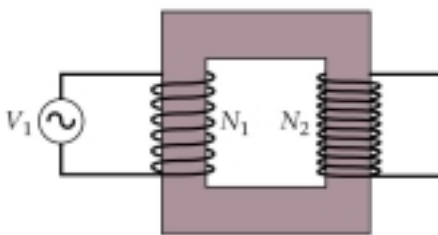


Figura 31.25. Un transformador con N_1 vueltas en el **primario** (bobina conectada a la fuente de potencia) y N_2 en el **secundario**.

Su funcionamiento se basa en que la corriente alterna inducida sobre el segundo circuito, por **inductancia mutua**, se ve incrementada considerablemente por el núcleo de hierro: **prácticamente todo el flujo magnético que se crea en la bobina 1, atraviesa la bobina 2.**

Queremos calcular la ddp. alterna ξ_2 , inducida en el circuito secundario, cuando el primario se conecta a un generador de alterna y de

amplitud V_1 , bajo la hipótesis de que el flujo magnético que atraviesa el núcleo de hierro en cada instante es el mismo en toda la estructura, de manera que no hay pérdida de potencia.

La fuerza electromotriz en la primera bobina vale $\xi_1 = V_1 \sin(\omega t)$. La ley de Faraday nos da la ecuación que debe cumplir la intensidad I_1 que recorre la bobina 1, relacionada con la variación de flujo magnético y con el coeficiente de autoinducción L . Así ocurre también en la bobina 2, pero mediante el coeficiente de inductancia mutua M , puesto que el flujo magnético variable genera una FEM ξ_2 :

$$\xi_1 = -L \frac{dI_1}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \xi_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{M}{L}$$

La relación M/L es constante², y por tanto la FEM ξ_2 exhibirá la misma dependencia armónica respecto del tiempo que ξ_1 .

Si introducimos las expresiones de L y M para solenoides:

$$L = \mu_0 A n^2 \lambda \quad M = \mu_0 A n_1 n_2 \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Un transformador es pues un aparato que sirve para manipular las amplitudes de los voltajes, manteniendo la misma dependencia temporal de la corriente alterna.

Por la hipótesis hecha de la conservación de potencia, podemos deducir la relación de intensidades entre el primario y el secundario:

$$P \text{ constante} \Rightarrow \xi_1 I_1 = \xi_2 I_2 \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{Relación inversa!}$$

Ejercicio: Demuestre que es más eficiente transmitir energía eléctrica con altos voltajes.

3. Elementos de un circuito de corriente alterna.

Para una mejor comprensión, estudiaremos los efectos de cada elemento por separado en un generador de corriente alterna.

² Obsérvese que en un transformador como el de la figura 31.25, el flujo magnético a través de cada espira es el mismo independientemente de su ubicación en el núcleo, y que los coeficientes M y L dependen fundamentalmente del número de espiras en cada bobina.

3.1 Circuito Resistivo.

El circuito de la **figura 31.2**, formado por un generador y una resistencia constituye este elemento. La aplicación de las leyes de Kirchoff, nos da:

$$\xi - IR = 0 \rightarrow I = \frac{\xi}{R} = \frac{\xi_{\max} \cos(\omega t)}{R} \rightarrow I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{R}$$

expresión que pone de manifiesto que en este circuito **ξ y I están en fase**.

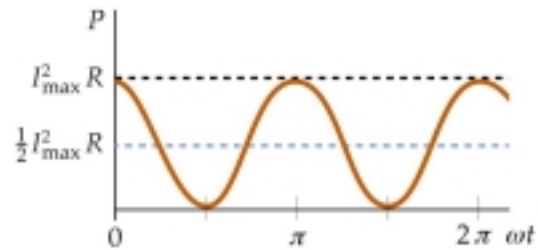
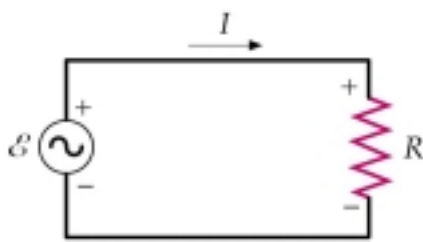


Figura 31.3 Potencia disipada en el circuito anterior en función del tiempo. Concepto de **potencia media y valores eficaces**. **Figura 31.2** Circuito Resistivo. Suponemos: $\xi = \xi_{\max} \cos(\omega t)$

La potencia disipada en la resistencia, por efecto Joule, es función del tiempo, y toma el valor instantáneo (**Figura 31.3**):

$$P_{\text{ins}} = I^2 R = I_{\max}^2 R \cos^2(\omega t) \rightarrow P_{\text{media}} = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R$$

donde se supone que el alumno sabe calcular **el valor medio** de la función $\cos^2(\omega t)$ en un período (**ejercicio**)³.

3.1.1 Valores eficaces.

Los valores medios de la intensidad I y de la *Fem* ξ son nulos durante un período. En cambio, como se acaba de ver, los valores medios de I^2 y ξ^2 son:

$$I_{\text{med}}^2 = \langle I^2 \rangle = \langle I_{\max}^2 \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}^2, \text{ también } \xi_{\text{med}}^2 = \frac{1}{2} \xi_{\max}^2$$

expresiones que nos permiten definir el valor eficaz de cualquier magnitud que varíe de manera sinusoidal como:

$$I_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max} \quad \text{también} \quad \xi_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\max}$$

³ El valor medio de una función $f(t)$ en el intervalo $[a, b]$ se define como: $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$, de manera que las áreas $(b-a) \langle f(t) \rangle = \int_a^b f(t) dt$ sean iguales.

Es interesante darse cuenta de que la potencia media suministrada al circuito, se obtiene sin factores, directamente de los valores eficaces. Así:

$$P = VI = V_{\max} I_{\max} \cos^2(\omega t) \rightarrow P_{\text{media}} = V_{\max} I_{\max} \langle \cos^2(\omega t) \rangle \rightarrow$$

$$P_{\text{media}} = (1/2) V_{\max} I_{\max} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} = I_{\text{ef}}^2 R = \xi_{\text{ef}}^2 / R$$

expresión que da sentido físico a las magnitudes eficaces como aquellas que directamente nos permiten calcular la potencia absorbida por el circuito o por el elemento.

3.2 Circuito con un condensador.

Sea un circuito como el de la **figura 31.7**, formado por un generador de alterna y un condensador, sobre el que aplicamos la regla de malla de Kirchoff,

$$\xi - V_c = 0 \rightarrow V_c = \xi_{\max} \cos(\omega t) = Q/C \rightarrow Q = C \xi_{\max} \cos(\omega t)$$

teniendo en cuenta que $I = dQ/dt$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C \xi_{\max} \sin(\omega t) = I_{\max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

donde se ha definido como $I_{\max} = \omega C \xi_{\max}$ y se usa $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$.

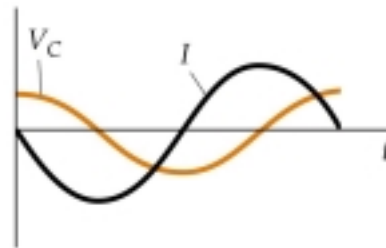
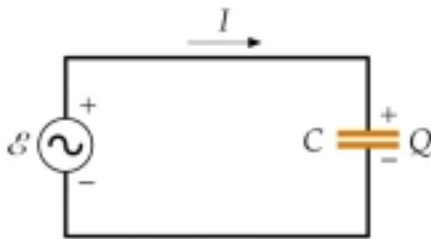


Figura 31.7 Circuito con un condensador. Suponemos:

$$\xi = \xi_{\max} \cos(\omega t)$$

Figura 31.8 Corriente y tensión de un condensador, sometido a un generador alterno, en función del tiempo. La tensión máxima aparece $\pi/2$ radianes después de haberlo hecho la intensidad (desfase).

Aparece un **desfase** entre el voltaje aplicado sobre el condensador y la intensidad de corriente que lo recorre (**figura 31.8**), con lo que el voltaje queda retardado 90° sobre la intensidad.

Podemos ahora relacionar la corriente con la *Fem* y definir **una reactancia capacitiva X_c** de la forma:

$$I_{\max} = \omega C \xi_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{1/\omega C} \rightarrow X_c = \frac{1}{\omega C}$$

de manera que se cumple:

$$I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{X_C} \text{ y también } I_{\text{ef}} = \frac{\xi_{\text{ef}}}{X_C}$$

que justifica el nombre de reactancia atribuido: la reactancia capacitiva depende de la frecuencia de la corriente en el circuito y se mide en Ohms. La reactancia capacitiva disminuye con la frecuencia de la corriente.

Obsérvese el diferente comportamiento de un condensador en corriente continua y alterna. En corriente continua el condensador se carga y a partir de este momento ya no deja pasar corriente a su través. En corriente alterna, el condensador se comporta como si realmente fluyera carga continuamente a su través, al cargarse sus placas positiva y negativamente de forma alternada, siguiendo al generador. Si se duplica la frecuencia del generador, se duplica el flujo de carga a las placas, de manera que se duplica la intensidad del circuito: esto explica que su reactancia disminuya con ω .

Potencia consumida: al contrario que en las resistencias, en los condensadores no se consume potencia del generador de alterna, pues:

$$P_{\text{ins}} = \xi I = -\xi_{\max} I_{\max} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rightarrow \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$$

y en consecuencia los condensadores no consumen energía.

3.3 Circuitos con una autoinducción.

La figura 31.5 muestra un circuito con una autoinducción pura, que crea una Fem contraelectromotriz. Despreciando la resistencia, y aplicando Kirchoff:

$$\xi - V_L = 0 \rightarrow V_L = \xi_{\max} \cos(\omega t)$$

$$\text{Considerando que } V_L = L \frac{dI}{dt} \rightarrow dI = \frac{\xi_{\max}}{L} \cos(\omega t) dt$$

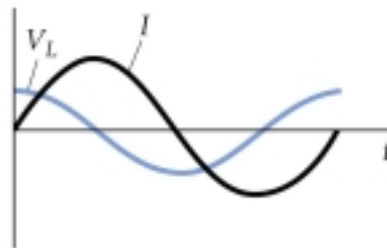
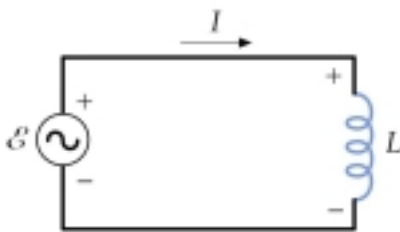


Figura 31.5 Generador de corriente alterna, $\xi = \xi_{\max} \cos(\omega t)$, con una bobina de autoinducción L .

Figura 31.6 Corriente y tensión de la bobina inductora en función del tiempo. La intensidad queda retardada respecto de la tensión en un cuarto de período, es decir $\pi/2$ radianes.

Integrando e identificando la constante de integración como la componente de cc del circuito, que podemos considerar nula, tenemos:

$$I = \frac{\xi_{\max}}{\omega L} \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t) \text{ donde } I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{\omega L}$$

- El efecto del inductor **es desfasar la corriente 90° respecto del voltaje**, como se observa en la **figura 31.6**. La intensidad se puede escribir como **$I = I_{\max} \cos(\omega t - \pi/2)$** .

Se puede definir como antes una **reactancia inductiva X_L** , que se mide en Ohms y depende de la frecuencia de la corriente ω :

$$X_L = \omega L \rightarrow I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{X_L} \text{ ; y también: } I_{\text{ef}} = \frac{\xi_{\text{ef}}}{X_L}$$

Observamos que en un circuito con autoinducción, **la resistencia efectiva al paso de la corriente aumenta con su frecuencia ω** . Esto es razonable, puesto que los inductores reaccionan oponiéndose a los cambios en el flujo de corriente, que son mayores si la frecuencia aumenta.

Finalmente podemos comprobar que tanto la reactancia inductiva, como la capacitiva, no consumen energía de la fuente exterior. (**Ejercicio**).

4. Fuerza electromotriz alterna en circuito RLC en serie.

La analogía mecánica que hemos seguido en este tema se extiende también al caso que nos ocupa. **Un circuito RLC con generador** de corriente alterna, se comporta como un sistema mecánico oscilante, sometido a viscosidad y a una fuerza exterior armónica (**el oscilador armónico forzado**).

El generador de alterna en el circuito **juega el mismo papel** que la fuerza exterior en el sistema mecánico, y para poder seguir leyendo el presente tema, el estudiante debe tener claros los conceptos de frecuencia propia (natural) del sistema, el **fenómeno de resonancia** y sus curvas, y que la solución general del movimiento es la **superposición** de una solución transitoria⁴ (que disminuye exponencialmente en el tiempo, la del oscilador amortiguado), y una **solución estacionaria** que permanece **constante** con el tiempo, así como que el **sistema forzado** vibra con la frecuencia de la fuerza exterior⁵.

⁴ La solución transitoria (oscilador amortiguado) incluye las dos constantes de integración de la ecuación diferencial, mientras que la solución estacionaria depende sólo de los parámetros físicos del problema y no de las condiciones iniciales.

⁵ Se recomienda el repaso del tema 1 del semestre.

La **frecuencia propia** (natural) de un circuito LC se ha visto que es:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y la analogía mecánica nos permite avanzar que ésta es precisamente la frecuencia propia (natural) del circuito RLC.

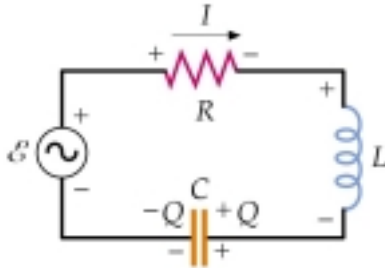


Figura 31.16 Circuito RLC impulsado por una Fem de ca.

La **figura 31.16** muestra un circuito RLC en serie con un generador de alterna, donde aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff:

$$\xi_{\max} \cos(\omega t) - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0 \rightarrow L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \xi_{\max} \cos(\omega t)$$

ecuación semejante a la del oscilador impulsado por una fuerza exterior armónica de frecuencia ω , donde ω_0 es la propia o natural (ver apéndice):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t) \quad , \text{donde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Siguiendo la analogía mecánica, podremos escribir para la carga Q en la solución estacionaria: $\omega_0^2 = 1/\sqrt{LC}$

$$Q = Q_{\max} \sin(\omega t - \delta) \rightarrow I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta)$$

donde $I_{\max} = \omega Q_{\max}$

$$Q_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{\sqrt{L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2 \omega^2}}$$

$$I_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} = \frac{\xi_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\xi_{\max}}{Z}$$

donde, como se ve en la última expresión, el nombre de **la variable Z** como **impedancia total del circuito**, queda justificado, además de medirse en **Ohms**.

La analogía mecánica nos permite también escribir **el desfase** existente entre la corriente I y la FEM alterna:

$$\tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

donde se ha usado la definición de las reactancias.

Observaciones:

- Si $\delta > 0$ (< 0) la intensidad I se adelanta (retrasa) sobre la FEM
- Q_{\max} y δ **no** son ahora constantes de integración.

4.1 Concepto de impedancia.

La corriente adopta la dependencia temporal del generador, con **su frecuencia ω** y una amplitud que viene **modulada** por la impedancia:

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta) = \frac{\xi_{\max}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

donde la impedancia toma el valor:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

de manera que la amplitud de la intensidad es la del voltaje aplicado dividido por la impedancia total, de forma semejante a lo que pasa en corriente continua:

- **La impedancia en los circuitos de alterna juega el mismo papel que la resistencia en los de corriente continua.**

Una diferencia importante cabe señalar entre la impedancia y la resistencia: **la impedancia depende de la frecuencia ω** de funcionamiento del circuito, y por tanto de la frecuencia de la Fem aplicada, comportamiento que radica en las reactancias capacitiva e inductiva que dependen explícitamente de la **frecuencia ω del generador.**

Este comportamiento se puede comprender con bases físicas. La inductancia se opone a los cambios de corriente y estos son tanto mayores cuanto más lo es la frecuencia del generador. De hecho, la inductancia no tiene efectos para corrientes estáticas, es decir, si $\omega \rightarrow 0$. Esta característica se ve reflejada en la expresión de la reactancia inductiva como $L\omega$. Los condensadores tienen exactamente el comportamiento contrario: no dejan pasar la corriente cuando ésta es constante, y acumula muy poca carga cuando la frecuencia es elevada, de manera que tiene pocos efectos sobre la corriente. Así $X_C = 1/C\omega$.

4.2 Resonancia.

La amplitud de la corriente a través del circuito, así como la amplitud de la carga en el condensador o la caída de potencial entre los bornes de cualquier elemento del circuito RLC, presentan el fenómeno de la resonancia. Todas estas amplitudes son inversamente proporcionales a la **impedancia del circuito, que varía y depende de la frecuencia ω** del generador introducido. Cuando Z se hace mínima, todas las amplitudes se hacen máximas, y diremos que se presenta el **fenómeno de resonancia**. (Figura 31.19).

De la expresión de la impedancia se deduce que la condición de resonancia aparece cuando:

$$X_L = X_C \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Como ya sabíamos, **la condición de resonancia** consiste en que la **frecuencia ω** del generador se haga coincidir con la **frecuencia ω_0** propia del sistema⁶.

Tanto **el valor** de todas las amplitudes, como **la agudeza de las curvas** de resonancia se incrementa a medida que la resistencia R se hace menor.

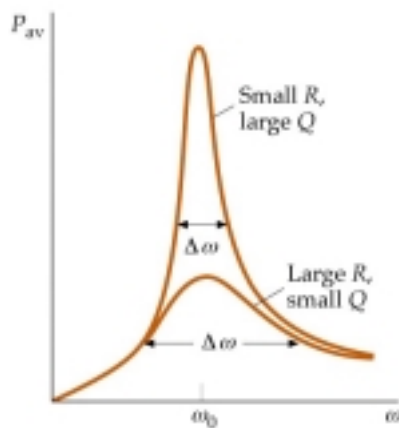


Figura 31.19. Potencia media en función de la frecuencia del generador para un circuito RLC. La resonancia aparece cuando esta frecuencia coincide con la frecuencia natural del circuito. Para R pequeñas el factor Q es grande, y la curva es aguda.

Los fenómenos de resonancia tienen muchas aplicaciones en circuitos de emisión y recepción de señales: radio y televisión. Así, una manera de sintonizar un receptor es variar la capacidad de un condensador variable, haciendo coincidir la frecuencia propia del circuito con la de emisión de la señal de radio, recibida en el circuito de la antena.

⁶ En realidad, la resonancia aparece para la frecuencia que hace máxima la amplitud, que resulta ser menor y próxima a ω_0 ; recordad la analogía mecánica; las resistencias R suelen ser pequeñas en comparación con la reactancia.

4.3 Potencia en circuitos de corriente alterna.

La fase δ que nos ha aparecido en la solución de los circuitos RLC nos ha pasado un poco desapercibida, si bien su papel más allá de representar el retraso entre la intensidad del circuito y el voltaje aplicado para la fuente de potencia, **queda de relieve cuando se examina la potencia disipada en el circuito.**

La fase δ , dada por la expresión $\tan \delta = (X_L - X_C)/R$ juega un papel muy importante en la potencia disipada en el circuito RLC.

Sabemos que la potencia se disipa en el circuito únicamente en la resistencia R , mientras que la energía acumulada en el inductor y en el condensador no se disipa, más bien se almacena temporalmente y vuelve al circuito. Así, la potencia instantánea vale:

$$P = I^2 R = \frac{[\xi_{\max} \cos(\omega t - \delta)]^2}{Z^2} R$$

que si bien es siempre positiva, oscila entre un máximo $\xi_{\max}^2 R/Z^2$ y cero, dependiendo del valor de la R . El valor promedio en un ciclo es:

$$\langle P \rangle = \frac{\xi_{\max}^2 R}{Z^2} \langle \cos^2(\omega t - \delta) \rangle \rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{\xi_{\max}^2 R}{Z^2} \rightarrow$$

$$\left| Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 = R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right|$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{\xi_{\max}^2 R \omega^2}{L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \rightarrow \langle P \rangle_{\text{res}} = \frac{1}{2} \frac{\xi_{\max}^2}{R}$$

al ir aumentando la frecuencia impulsora ω hasta llegar a ω_0 la potencia disipada exhibe el comportamiento característico de un **pico de resonancia**, de manera que la potencia disipada es máxima para $\omega = \omega_0$. (figura 31.19).

El fenómeno de resonancia no sólo lo exhibe la potencia consumida de la FEM (y por tanto disipada en la resistencia), sino también la energía almacenada en el circuito (en el condensador y la autoinducción), que también es máxima bajo la condición de resonancia, como se observa en la expresión de la carga y la intensidad del circuito.

El factor Q de calidad de la resonancia valdrá:

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E} = \omega_0 \frac{m}{b} \rightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

donde hemos usado la analogía del oscilador mecánico y la definición dada en el tema 1.

Factor de potencia.

A partir de la definición del desfase δ entre la intensidad y el voltaje del generador, se demuestra que:

$$\cos \delta = \frac{R}{Z}$$

De manera que la potencia media suministrada al circuito para el generador y que por efecto Joule se disipa en la resistencia se puede escribir como:

$$\langle P \rangle = P_{\text{media}} = I_{\text{ef}}^2 R = I_{\text{ef}}^2 Z \cos \delta = \xi_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta$$

donde la magnitud δ recibe el nombre de factor de potencia del circuito. En la resonancia $\cos \delta = 1$ y para un circuito sin resistencia el valor es cero.

Lecturas recomendadas:

Concepto de amplitud de banda, diodos rectificadores, filtros e igualación de impedancias. P. Fishbane página 996 y siguientes. P. Tipler (3ª Edición) página 923.

Motores eléctricos, P. Tipler página 1034. (4ª Edición).

Apéndice.

Tabla. Analogía entre los circuitos RLC y el oscilador forzado mecánico.

	Circuito	Oscilador
Variable Dep.	Carga Q	Posición x
Coefi. de la variable	1/C	k
Coef de prim. derivada	R	b
Coef de seg derivada	L	m
Fuente de energía	$\xi_{\text{max}} \cos(\omega t)$	$F_0 \cos(\omega t)$
Frecuencia propia ω_0	$\sqrt{1 / LC}$	$\sqrt{k / m}$