TEMA 16. RELATIVIDAD GENERAL

1.- Introducción.

La teoría de la relatividad que hemos desarrollado hasta aquí, es aplicable a observadores en movimiento relativo uniforme. Incluye además el electromagnetismo, al haber establecido la invariancia de la velocidad de la luz mediante las transformaciones del espacio y el tiempo de Lorentz. Esta teoría, en cambio difícilmente puede incluir la Gravitación. La forma establecida por Newton para la gravitación supone una acción a distancia instantánea, equivalente a imaginar una velocidad infinita de propagación para la interacción gravitatoria e incluso para las ondas gravitacionales.

La generalización de la teoría de la relatividad a los sistemas de referencia no inerciales, desarrollada por A.Einstein en 1916, recibe el nombre de ***teoría general de la relatividad***.

El desarrollo matemático de la teoría es bastante complicado, por lo que nos limitaremos a presentar algunos de sus resultados.

2. Sistemas de referencia no inerciales (Mecánica de Newton).

Sea un sistema F inercial, en el que se verifican las leyes de Newton, y el sistema F', no inercial, que se desplaza respecto del primero con velocidad no constante. Podemos considerar todo tipo de desplazamiento del sistema F', como por ejemplo:

a) El sistema F' se desplaza con aceleración **a** rectilínea constante a lo largo de los ejes x, x' que se hacen coincidir. Los orígenes de coordenadas se hacen coincidir en t=0. Las ecuaciones de transformación las obtenemos al derivar la relación entre coordenadas:

$$x'=x-\frac{1}{2}at^2 \rightarrow v'_x=v_x-at \rightarrow a'_x=a_x-a$$
$$y'=y, z'=z, t'=t$$

Obsérvese que las aceleraciones medidas para cualquier partícula no son las mismas, ya que en el sistema no inercial F' debe corregirse por la aceleración que lleva el propio sistema de referencia.

En consecuencia, las leyes de Newton no son directamente aplicables en el sistema de referencia F', ya que la fuerza medida pierde su proporcionalidad con la aceleración a'_x medida en el sistema. Para restituir la invariancia formal de las leyes de Newton en el sistema no inercial F', hay que considerar una fuerza ficticia (pseudo-fuerza)de valor *–ma*, que añadida a la fuerza real nos permite continuar usando formalmente la ley de Newton.

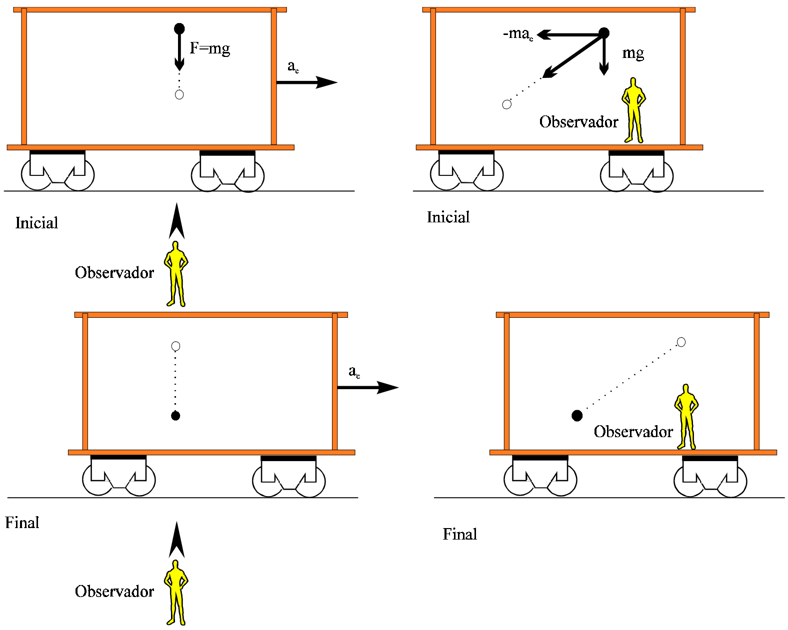

Figura 5.15 Se deja caer un objeto en el interior de un vagón que dispone de velocidad inicial cero y aceleración hacia la derecha a_C. El observador exterior (inercial) ve caer el objeto verticalmente. El observador sobre el vagón (no inercial) ve caer el objeto acelerado hacia atrás: esta aceleración se atribuye a una fuerza de inercia (pseudo-fuerza).

b) F' realiza una rotación uniforme con velocidad ω constante, alrededor del eje z, habiéndose hecho coincidir los dos sistemas de coordenadas en t=0.

Las ecuaciones de transformación son ahora:

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$
$$Z' = z; t' = t$$

donde se observa que en general, ya en este caso sencillo, las transformaciones de la velocidad y de la aceleración requieren derivadas relativamente difíciles.

Un caso muy sencillo aquí, es aquel en el que una partícula gira alrededor del eje z, precisamente con una velocidad angular ω. La partícula está sometida a una fuerza centrípeta, por ejemplo mediante una cuerda. Ahora bien, la partícula descrita desde el sistema de referencia F' se encuentra en reposo, a pesar de que el observador F' ve y mide la tensión que la cuerda ejerce sobre la partícula. ¡No se verifica la segunda ley de Newton!. Con este fin, el observador F' deberá añadirle una fuerza ficticia adicional: la denominada ***fuerza centrífuga***, que considerada restablecerá la forma matemática de la segunda ley de Newton aplicable a F'.

2. Fuerzas de inercia.

Las leyes de Newton son tan sólo válidas para sistemas de referencia inerciales. Cuando el observador se sitúa en un sistema de referencia no inercial es necesario añadir fuerzas ficticias que sirven para que las leyes de Newton continúen siendo válidas, en su expresión formal matemática en este sistema no inercial.

Estas fuerzas ficticias, denominadas **pseudofuerzas,** o fuerzas de inercia, sirven para que la segunda ley de Newton $F_{neta}=m\cdot a$, continúe siendo válida en el sistema no inercial. *Ejemplo*: objeto dejado caer en una vagoneta en movimiento acelerado (Figura 5.15[1]).

Otro sistema de referencia no inercial típico es el constituido por un observador sobre una plataforma giratoria con velocidad angular constante, representado en la figura 5.17.

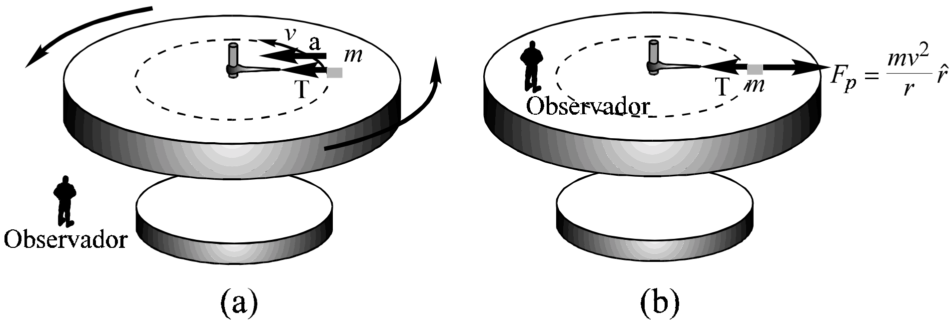

Figura 5.17 Sistema no inercial, constituido por un observador sobre una plataforma en rotación.

El observador (inercial) fuera de la plataforma ve que el bloque, ligado al pivote central, describe un círculo con velocidad $v=\omega r$ constante, puesto que está acelerado hacia el centro de la plataforma por la fuerza no equilibrada de la tensión de la cuerda T. La aceleración que actúa es la centrípeta, de valor: v^2/r.

Ahora bien, el observador (no inercial) sobre la plataforma, ve que le bloque está en reposo en su sistema, a pesar de que sobre él actúa la tensión de la cuerda T, por lo que debemos aplicar la **fuerza** de inercia denominada **centrífuga**, que equilibra la tensión. Esta es una pseudofuerza que restablece la aplicabilidad formal de la segunda ley de Newton.

[1] P. Tipler, Tercera Edición.

La fuerza centrífuga parece completamente real cuando nos encontramos sobre el autobús y éste toma una curva con velocidad.

Fuerza de Coriolis. En la figura 5.18 se observa el fenómeno que ocurre cuando una partícula es lanzada sobre una plataforma giratoria. En el sistema inercial (exterior a la plataforma) la partícula sigue una trayectoria recta como establece la ley de Newton. En cambio, en el sistema de la plataforma (no inercial) la partícula se desvía hacia la derecha: es necesario, por tanto, añadir en el sistema de la plataforma una fuerza para que matemáticamente continúe siendo válida la ley de Newton: esta es la fuerza de Coriolis. La fuerza de Coriolis debe tenerse en cuenta en la Tierra, ya que gira sobre sí misma cada día, y es responsable, por ejemplo del sentido del movimiento de rotación de las borrascas y de los ciclones.

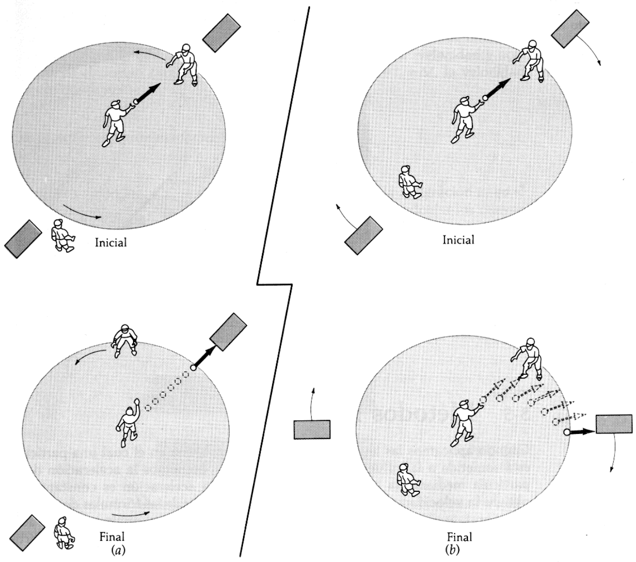

Figura 5.18 Lanzamiento sobre una plataforma giratoria. El observador inercial, fuera de la plataforma, describe una trayectoria rectilínea para la pelota lanzada, aunque no la intercepta el receptor. El observador sobre la plataforma (no inercial) ve que el receptor se encuentra en reposo y es la bola la que se desvía: debe añadir una fuerza inercial para explicar la trayectoria curva de la bola. Esta es la fuerza de Coriolis.

3. Principio de equivalencia.

La relatividad especial ha puesto de manifiesto la equivalencia física entre todos los sistemas de referencia inerciales e incluso la escritura formalmente invariable de las leyes de la física en estos sistemas: la covariancia.

¿Qué ocurre en los sistemas de referencia no inerciales?

Cuando los sistemas de referencia se encuentran acelerados uno respecto del otro, la covariancia deja de ser válida y las leyes se escriben formalmente de forma diferente, como pasa por ejemplo en la Tierra con la aceleración de Coriolis. Ahora bien, entre los sistemas de referencia no inerciales existe una ley fundamental, enunciada por Einstein en 1911, que recibe el nombre de **Principio de Equivalencia**, y que dice:

Es imposible distinguir mediante ningún experimento entre un sistema de referencia con aceleración y otro inercial, pero sometido a un campo gravitacional escogido de forma apropiada, siempre que las observaciones sean efectuadas a escala local.

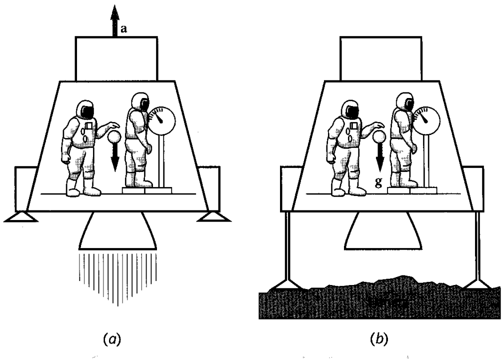

Figura E 39.1. Los resultados experimentales en un sistema de referencia acelerado (a) no pueden distinguirse de los que se obtienen en un campo gravitatorio uniforme (b) si las aceleraciones cumplen que a=g.

A partir de este principio aparecen una serie de consecuencias importantes que condujeron al establecimiento de la relatividad general o ***teoría de la gravitación*** por Einstein.

3.1 Masa gravitacional y masa inercial.

La masa gravitacional m_g es el parámetro que caracteriza a un cuerpo cuando se encuentra sometido a la fuerza de la gravitación en un campo gravitacional. Así, la ley de la gravitación de Newton trabaja con la masa gravitacional:

$$\vec{F} = \frac{GMm_g}{r^2}\vec{u}_r$$

Por otra parte, la masa inercial m_i es el parámetro que aparece explícitamente en la segunda ecuación de Newton, oponiéndose al cambio de velocidad y que expresa la proporcionalidad entre masa y aceleración:

$$\vec{F} = m_i a$$

El principio de equivalencia establece explícitamente que:

$$m_g = m_i$$

Una primera consecuencia del principio es que todos los cuerpos caen con la misma velocidad (aceleración) en un determinado campo gravitacional, de forma independiente de su masa, densidad y composición atómica o nuclear (relación protones/neutrones: la quinta fuerza)[2].

[2] Observad que esta propiedad no aparece para los otros campos, como el electromagnético en el que el parámetro correspondiente (la carga, por ejemplo que aparece en la ley de Coulomb) no es proporcional a la masa inercial.

$$\frac{GMm_g}{r^2} = m_i a$$

de manera que si $m_g = m_i$ la aceleración no depende de la masa del cuerpo.

La igualdad entre masa gravitacional e inercial se ha comprobado experimentalmente en una parte sobre 10^{11} (experimentos de Eotvos etc.)

4. La desviación gravitacional de la luz.

Imaginemos que un haz de luz entra por un orificio dentro de un ascensor con un movimiento uniformemente acelerado con aceleración g (como se ve en la figura 40.24). Si la anchura del ascensor es L, la luz llegará a la otra cara del ascensor a una distancia Δ por debajo del punto diametralmente opuesto:

$$\Delta = \frac{1}{2} g \left(\frac{L}{c} \right)^2$$

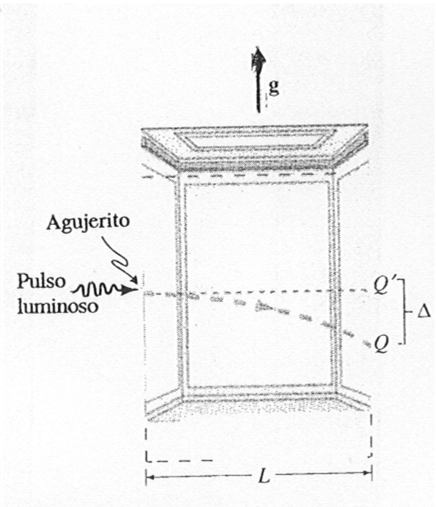

Figura 40.24. Un haz luminoso penetra en un ascensor acelerado con *g* hacia arriba. En lugar de llegar a Q' el haz incide sobre Q. Un observador en el interior del ascensor ve que el haz de luz describe una trayectoria parabólica.

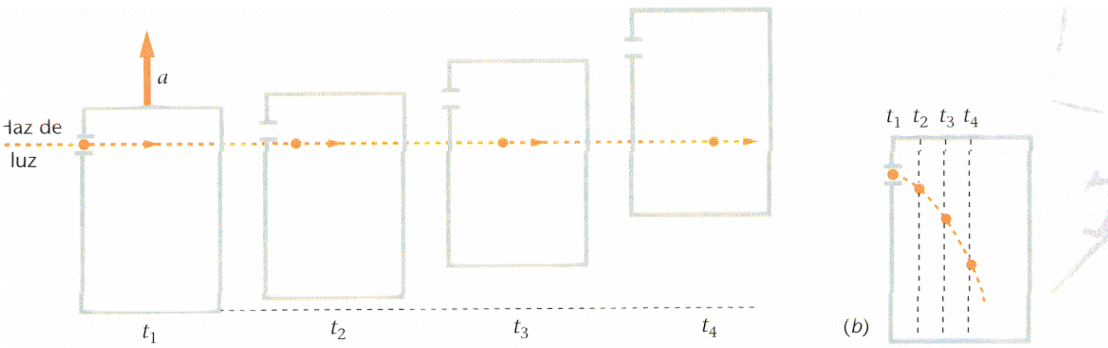

Figura E 39.2. Un haz de luz moviéndose a través de un elevador acelerado uniformemente. La posición del haz se muestra en instantes t_i diferentes. En el sistema de referencia del elevador, la luz describe una trayectoria parabólica, semejante a la caída de un grave.

Un observador en el interior del ascensor describirá que la luz ha caído una distancia Δ. Ahora bien, el principio de equivalencia nos afirma que el observador no puede distinguir si es el elevador el que está acelerado o si el ascensor se encuentra en reposo en el interior pero de un campo gravitatorio uniforme. Es evidente por tanto, que si el principio de equivalencia es válido, la luz debe caer (sufrir desviaciones) cuando atraviesa campos gravitacionales. Obsérvese además que la distancia caída es exactamente la misma que caería un objeto material.

Así pues, son dos las consecuencias que deducimos del P. de equivalencia:

1) Todo ente que transporte energía cae con la misma aceleración en un campo gravitacional: cuerpo con masa, neutrinos, fotones, etc.
2) La luz, al pasar cerca de las estrellas, sufrirá desviaciones (que en este caso serán observables).(Figura E 39.3).

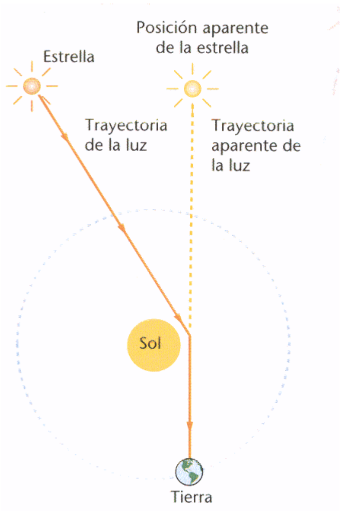

Figura E 39.3. Desviación (muy exagerada) de un haz de luz al pasar cerca de una estrella muy masiva como el Sol.

5. Desplazamiento gravitacional hacia el rojo.

No debe confundirse con el desplazamiento hacia el rojo observado por Hubble en las galaxias alejadas (por efecto Doppler). Aquí ocurre que la luz al caer gravitacionalmente, como se acaba de describir, sufre también un cambio de frecuencias.

Imaginemos, como en la figura 40.26, que una fuente emite un haz luminoso (a) en presencia de un campo gravitatorio. De acuerdo con el principio de Equivalencia, un sistema de referencia (b) acelerado en el vacío uniformemente con aceleración g, debe describir exactamente lo mismo. La luz tarda $t=x/c$ en llegar al detector, y éste habrá adquirido una velocidad $v=g\cdot t=g\cdot x/c$. Así pues, la frecuencia f' que observa el detector por efecto Doppler vale:

$$\frac{f'}{f}=\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}\cong 1+\frac{v}{c}=1+\frac{gx}{c^2}$$

Podemos considerar ahora el factor g·x como un potencial[3] gravitacional ϕ, puesto que antes se ha expresado la energía potencial de un cuerpo de masa *m* en las proximidades de la Tierra como $E_p=mgx=m\phi$. Sustituyendo:

$$\frac{f'}{f}=1+\frac{\phi}{c^2}\rightarrow\frac{\Delta f}{f}=\frac{f'-f}{f}=\frac{\phi}{c^2}$$

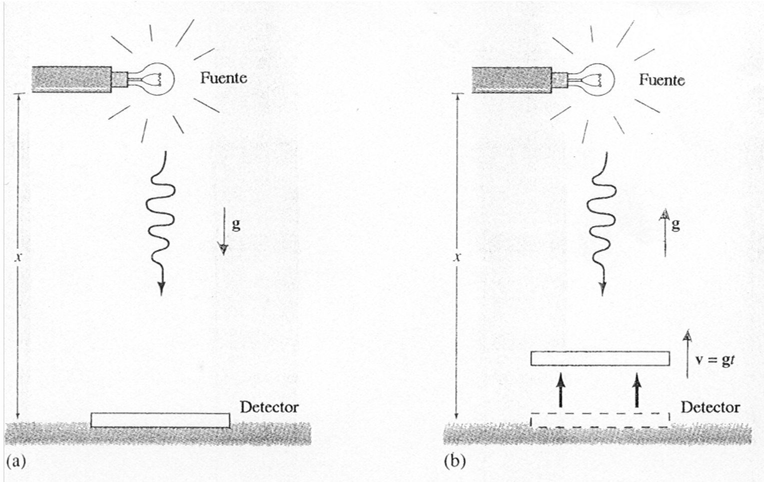

Figura 40.26. a) Una fuente *monocromática* envía un pulso luminoso, sometido a la gravedad terrestre. B) en el espacio libre repetimos el experimento pero ahora el detector se acelera con g hacia la fuente.

Apliquemos ahora el resultado a una estrella de masa *M*, eligiendo el origen de potenciales en el infinito: un cuerpo de masa *m* que pasara por las proximidades de la estrella tendría una energía potencial:

$$E_p=-\frac{GMm}{R}\rightarrow\ \phi=-\frac{GM}{r}$$

donde ϕ representa el potencial gravitacional que hemos asignado a la estrella. Entre la frecuencia de emisión de la luz en la superficie de la estrella, y la que observa un telescopio en el espacio libre (o en la Tierra) habrá un desplazamiento hacia el rojo, dado por el signo menos, de valor:

$$\frac{\Delta f}{f}=-\frac{GM}{Rc^2}$$

Así, para el Sol, con $M=2\times10^{30}$ kg y $R=7\times10^{8}$ m se obtiene un $\Delta f/f=2.12\ 10^{-6}$, confirmada experimentalmente con buena precisión.

[3] Definimos el potencial gravitacional como la energía potencial de un sistema por unidad de masa.