ÍNDICE

NÚMEROS.

ÁLGEBRA

GEOMETRÍA

FUNCIONES Y GRÁFICAS

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

PRÓLOGO

Este libro se ha escrito en tiempos de crisis económica y social.

El departamento de Matemáticas del IES Mediterrània de Benidorm decidió abaratar los costes de escolarización que suponen la compra de libros y mostrar su protesta a la política de recortes de gastos en Educación y al robo de parte significativa del salario de los profesores para dárselo a la Banca, responsable principal de la crisis, junto a los políticos sin escrúpulos de sus cúpulas directivas.

La idea original fue preparar materiales para 3º. Se elaboraron los temas y la colección de problemas que en fotocopia los alumnos manejan como libro al precio de 1'70 € por vez primera, durante el curso 2012-13. Conforme elaboraba los materiales abordé también los de 1º, consciente de que la repetición ridícula del curriculum me permitiría, con poco esfuerzo, ampliarlos a 2º y 4º, como así ha sido.

El texto teórico no fue pensado para los alumnos. Es un texto breve, pero preciso, y cargado de ejemplos aclaratorios de lo que debe saber un alumno al finalizar la Secundaria Obligatoria en España.

La colección de problemas es deudora de nuestra imaginación y de una selección de materiales encontrados en libros editados durante los últimos cinco años. Desarrolla la totalidad del currículo de Matemáticas.

El plan de normalización lingüística exigía que estuvieran redactados en valenciano, aunque más del 90% de los alumnos no lo tienen como lengua materna.

Cada una de las unidades didácticas de 3º y 4º viene acompañada de un resumen teórico y al menos 25 actividades, totalizando 759. Este material está a libre disposición de los alumnos del IES Mediterrània.

Benidorm, diciembre de 2012.

Rafael Valldecabres Rodrigo

Profesor de Matemáticas del IES Mediterrània.
Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Valencia (1982).
Licenciado en Geografía e Historia por la Universidad de Valencia (1997).
Ingeniero Técnico en Informática de Gestión por la Universidad de Granada (2007).
Graduado en Psicología por la UNED (2015).

1. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL.

El **sistema de numeración decimal** usa diez cifras arábigas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) y es *posicional* de manera que el valor de una cifra depende del lugar que ocupa. Por ser decimal, diez unidades de un orden forman una unidad de orden superior.

Los lugares reciben el siguiente nombre: unidad, decena, centena, unidad de millar, decena de millar, centena de millar, unidad de millón, decena de millón, centena de millón, unidad de millar de millón, etc.

Ejemplo: $12348 = 1 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 - 4 \cdot 10 - 8 \cdot 1$; doce mil trescientos cuarenta y ocho es igual a 1 decena de millar más 2 unidades de millar más 3 centenas más 4 decenas más 8 unidades.

2. LOS NUMEROS NATURALES COMO CODIGOS.

Además de para contar objetos o seres de una colección, los números naturales se utilizan como códigos de información. En este caso no tiene sentido operarlos.

Ejemplos de códigos son el código postal y el extinto prefijo telefónico.

Ejemplo: Cada provincia española tiene asignado un código de dos cifras que refleja el lugar que ocupa en orden alfabético. Así Alicante es el 03, Madrid tiene el 28 y Valencia el 46. Los municipios tienen asignado uno o varios números de tres cifras. Por ejemplo a Benidorm se le asignan el 500, 501 y 502. El código postal del Instituto IES Mediterrània es 03502, compuesto por el código provincial (03) y el número de localidad (502).
Los centros educativos tienen un código de 8 cifras, las 2 primeras son el código provincial y las seis siguientes una numeración asignada `por la Conselleria de Educación de la Generalitat Valenciana. El código de centro del Instituto IES Mediterrània es 03015128, compuesto por el código provincial (03) y el número de instituto (015128).

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES.

La suma y la multiplicación de números naturales tienen las siguientes propiedades:

Conmutativa: *el orden de los sumandos o de los factores no altera el resultado*
Asociativa: *el orden en que se efectúen las operaciones no altera el resultado*
Distributiva del producto sobre la suma: *el producto de un factor por una suma es igual a la suma de los sumandos que se obtienen de multiplicar el factor por cada sumando.*

Propiedad	***Suma***	***Multiplicación***
Conmutativa	$2+3=3+2$	$5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$
Asociativa	$(2+3)+4=2+(3+4)$	$2 \cdot (5 \cdot 6) = (2 \cdot 5) \cdot 6$
Distributiva	$4 \cdot (2+3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3$	

Si leemos la propiedad distributiva al revés el factor que aparece en todos los sumandos es un **factor común** que anteponemos a la suma.

Ejemplo: $132 = 48 + 84 = 4 \cdot 12 + 4 \cdot 21 = 4 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 7 = 4 \cdot 3 \cdot (4 - 7) = 12 \cdot 11 = 132$

La propiedad distributiva agiliza el cálculo mental:

Ejemplos: $18 \cdot 99 = 18 \cdot (100 - 1) = 1800 - 18 = 1782$; $18 \cdot 101 = 18 \cdot (100 + 1) = 1800 + 18 = 1818$;
$18 \cdot 110 = 18 \cdot (100 + 10) = 1800 + 180 = 1980$; $18 \cdot 90 = 18 \cdot (100 - 10) = 1800 - 180 = 1620$.

La división entera de números naturales verifica el llamado algoritmo de Euclides: *el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.* Si la división es exacta, como el resto es cero, entonces *el dividendo es el producto del divisor y del cociente*.

Ejemplo: Comprobar si al dividir 1002 entre 13 el cociente es 77 y el resto es 1.
En efecto $13 \cdot 77 = (10 + 3) \cdot 77 = 770 + 231 = 1001$ y sumando el resto $1001 + 1 = 1002$.

4. MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO.

Un número es **múltiplo** de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.
Un número es **divisor** de otro cuando está contenido en él un número exacto de veces.

Ejemplos: $18 = \dot{3}$ (se lee 18 es un múltiplo de 3) porque lo contiene 6 veces ($18 = 6 \cdot 3$).
$3|15$ (se lee 3 es divisor de 15, o 3 divide a 15) porque está contenido en él 5 veces ($15 = 5 \cdot 3$).
Que 17 no es múltiplo de 3 y 3 no es divisor de 16 se escribe así: $17 \neq \dot{3}$ y $3\nmid 16$.

En una división entera exacta, el dividendo es múltiplo del divisor y del cociente y estos son divisores del dividendo.

Ejemplo: Como $1001 = 77 \cdot 13$ las divisiones $1001 : 77$ y $1001 : 13$ son exactas. 1001 es múltiplo de 77 y 13 y de igual modo 77 y 13 son divisores de 1001.

5. CÁLCULO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO.

Para obtener de forma sencilla los divisores de un número se divide entre los números naturales hasta que *el cociente obtenido sea menor o igual que el divisor*.
Los divisores del número son los cocientes y divisores de todas las divisiones exactas.

Ejemplo: Para calcular los divisores de 12 lo dividimos entre 2, 3 y 4: $12 : 2 = 6$. $12 : 3 = 4$. $12 : 4 = 3$.
Todas las divisiones son exactas, por tanto $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Para calcular los divisores de 30 lo dividimos entre 2, 3, 4, 5 y 6:
$30 : 2 = 15$, $30 : 3 = 10$, $30 : 4 = 7$ y sobran 2,
$30 : 5 = 6$, $30 : 6 = 5$. Por tanto $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.
Para calcular los de 13 lo dividimos entre 2, 3, 4:
$13 : 2 = 6$ y sobra 1 , $13 : 3 = 4$ y sobra 1 , $13 : 4 = 3$ y sobra 1. Por tanto $D(13) = \{1, 13\}$.

6. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.

Gracias a la propiedad posicional del sistema métrico decimal podemos construir criterios que nos permiten saber cuando un número es divisible por otro sabiendo qué ocurre con la división de las potencias de 10 entre dicho número.

Por ejemplo: 10, 100, 1000, etc. se dividen de forma exacta entre 2 y entre 5. Bastará pues ver qué ocurre con la cifra de las unidades. Sin embargo 10, 100, 1000, etc. dan resto 1 al dividir entre 3 o entre 9.

Estas circunstancias justificarán las reglas siguientes:

Un número es divisible entre 2 si termina en 0, 2, 4, 6 u 8.
Un número es divisible entre 5 si termina en 0 ó en 5.
Un número es divisible entre 10 si lo es entre 2 y entre 5, es decir, si termina en 0.
Un número es divisible entre 100 si lo es entre 10 dos veces, es decir, si termina en 00.
Un número es divisible entre 4 si lo es el número formado por las decenas y las unidades.
Un número es divisible entre 25 si termina en 00, 25, 50 ó 75.
Un número es divisible entre 3 si la suma de sus cifras está en la tabla de multiplicar del 3.
Un número es divisible entre 9 si la suma de sus cifras está en la tabla de multiplicar del 9.

Como 6 y 8 son múltiplos de 2 sus criterios son sencillos:

Un número es divisible entre 6 si lo es entre 2 y entre 3.
Un número es divisible entre 8 si lo es entre 2 y entre 4.

Para completar los criterios nos faltan el del 7 y el del 11, algo más complicados:

Un número es divisible entre 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par es cero ó está en la tabla del 11.

Para averiguar si un número es divisible entre 7 se separan sus cifras en grupos de tres comenzando por las unidades; se multiplica, en cada grupo, la cifra de la derecha por 1, la cifra de en medio por 3 y la cifra de la izquierda por 2, se suman los resultados obtenidos en los grupos impares y se restan los resultados obtenidos en los grupos pares, si el resultado final es cero o está en la tabla del 7 el número es múltiplo de 7.

Ejemplo: Averiguar si 711, 1001, 1492, 1808, 2012 son múltiplos de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u 11.
Múltiplos de 2 (terminan en cifra par): 1492, 1808, 2012.
Múltiplos de 3 (la suma de las cifras está en la tabla del 3): 711.
Múltiplos de 4 (las dos últimas cifras lo son): 1492, 1808, 2012.
Múltiplos de 5 (acaban en 0 o en 5): ninguno.
Múltiplos de 6 (lo son de 2 y de 3 a la vez): ninguno.
Múltiplos de 7: 1001 ($-2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$)
Múltiplos de 8 (lo son de 2 y de 4 a la vez): 1492, 1808, 2012.
Múltiplos de 9 (la suma de las cifras está en la tabla del 9): 711.
Múltiplos de 10 (acaban en 0): ninguno.
Múltiplos de 11 (la diferencia de las sumas de cifras en lugar impar y lugar par está en la tabla del 11): 1001 ($1 + 0 - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$).

7. NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS.

Un número se dice **primo** si tiene dos divisores, él mismo y la unidad.
Un número se dice **compuesto** si tiene más de dos divisores.

La *unidad* y el *cero* no son ni primos ni compuestos.

Para averiguar si un número es primo hay que construir todos sus divisores y contarlos.

Ejemplos: 12 tiene 6 divisores, 30 tiene 8 y 13 tiene 2. Por tanto 13 es primo y 12 y 30 son compuestos.

Existen métodos sencillos para averiguar los primeros números primos.

1) Criba de Eratóstenes.

Se escriben todos los números naturales hasta el 100 en una tabla de 10 filas y 10 columnas.
Se tachan todos los números pares: comenzando por el 4, el primero de cada dos.
Se tachan todos los múltiplos de 3: comenzando con el 6, el primero de cada tres.
Se tachan todos los múltiplos de 5: comenzando con el 10, el primero de cada cinco.
Se tachan todos los múltiplos de 7: comenzando con el 14, el primero de cada siete.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los veinticinco números que quedan sin tachar son primos, a saber:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

☞ *Para tantear si un número es primo se obtiene el resto de su división entre 30. El resto obtenido ha de ser alguno de estos ocho primos: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ó 29. Esta condición es necesaria pero no suficiente: 169 = 30·5+19 y no es primo ya que 169=13·13.*

☞ *Para recordar los ocho restos obsérvese que 1 + 29 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17 = 30.*

2) Criba basada en que un primo difiere de un múltiplo de 6 en una unidad .

Se colocan del 1 al 102 en una tabla de 17 filas y 6 columnas.
Se tachan todos los números de las columnas del 2, 4, 6 (son pares) y del 3 (son múltiplos de 3), excepto el 2 y el 3.
Se tachan todos los números de la diagonal donde está el 5 hacia la izquierda (del 10 al 25) continuando por las diagonales paralelas del 30 (del 30 al 55), la diagonal del 60 (del 60 al 85) y la diagonal del 90 (del 90 al 100). Se trata de los múltiplos de 5.
Se tachan todos los números de la diagonal donde está el 7 hacia la derecha (del 14 al 42) continuando por las diagonales paralelas del 49 (del 49 al 84) y la diagonal del 91 (del 91 al 98). Se trata de múltiplos de 7.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102

Teorema fundamental de la aritmética. Todos los números naturales se pueden **descomponer** de forma única en un producto de factores que son números primos.

El procedimiento de descomposición se realiza dividiendo el número entre la secuencia de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., comenzando por el más pequeño, hasta que la división no sea exacta (pasamos al siguiente primo de la lista) o hasta que el cociente sea la unidad (hemos terminado).
En cada división exacta anotaremos el divisor como factor primo y el cociente se usará como nuevo dividendo.

120	$2 \cdot 5$
12	2
6	2
3	3
1	

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

En el ejemplo se ha reducido primero $10 = 2 \cdot 5$. A la derecha de la raya vertical aparecen los factores primos divisores. Los números de la izquierda son los sucesivos cocientes. Los restos, nulos, no se indican.

8. MÁXIMO COMUN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS.

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor de sus divisores comunes. Se abrevia mediante las letras **m.c.d**. indicando los números entre paréntesis, separados por comas. Se trata de un número menor o igual que todos ellos.

Para calcular el m.c.d. de varios números se descompone cada uno de ellos y se construye el producto de sus factores comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo: Para calcular el m.c.d.(180, 316, 444) descomponemos $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $316 = 2 \cdot 2 \cdot 79$ y $444 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$ y calculamos el producto de los factores comunes (2) elevados al menor exponente (2), es decir, $\text{m.c.d.}(180, 316, 444) = 2^2 = 4$.

Existe un método para calcular el **m.c.d**. de dos números que minimiza el número de divisiones y no requiere recordar los números primos.

Para calcular el m.c.d. de dos números se divide el mayor entre el menor hasta que la división sea exacta. Si la división no es exacta el nuevo dividendo es el divisor y el nuevo divisor es el resto. El último cociente es el m.c.d.

Ejemplo: Para calcular el m.c.d.(180, 444) dividimos $444 : 180 = 2 \text{ y sobran } 84$, a continuación dividimos $180 : 84 = 2 \text{ y sobran } 12$ y finalmente dividimos $84 : 12 = 7 \text{ y sobran } 0$ por lo que 12 (último cociente) es el m.c.d.

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor de sus múltiplos comunes. Se abrevia mediante las letras **m.c.m**. indicando los números entre paréntesis, separados por comas. Se trata de un número mayor o igual que todos ellos.

Para calcular el m.c.m. de varios números se descompone cada uno de ellos y se construye el producto de sus factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo: Para calcular el m.c.m.(240, 600, 960) descomponemos $240 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $600 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$ y $960 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ y calculamos el producto de los factores comunes (2, 3 y 5) y no comunes (ninguno) elevados al mayor exponente (6, 1, 2 respectivamente), es decir, $\text{m.c.m.}(240, 600, 960) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4800$. Obsérvese que $960 = \dot{240} = 4 \cdot 240$ y bastaría haber hallado el $\text{m.c.m.}(600, 960) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4800$.

Existe un método para calcular el **m.c.m**. de varios números sin realizar ninguna división. Basta obtener los múltiplos de los números (multiplicando por los naturales) hasta que aparezca un mismo número en las listas.

Ejemplo: Para calcular el $\text{m.c.m.}(600, 960)$ obtenemos

- los múltiplos de 600: 1200, 1800, 2400, 3000, 3600, 4200, **4800**, 5400, etc.
- los múltiplos de 960: 1920, 2880, 3840, **4800**, 5760, etc.

El m.c.m. es 4800.

1. DE LOS NUMEROS NATURALES A LOS ENTEROS.

Cuando en una resta de números naturales el sustraendo es mayor que el minuendo se genera una situación de falta o déficit que señalamos con un signo negativo.

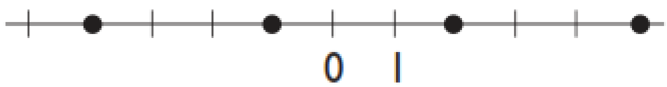
Ejemplo: Leovigildo tenía 78 € en su cuenta y se le ha cargado un recibo de 86 €. Su saldo será deficitario en 8 €. Escribiremos que el saldo es -8 €.

Los números enteros positivos son los naturales con signo positivo.
Los números enteros negativos son los naturales con signo negativo.
El número cero separa a los negativos de los positivos y carece de signo.
Los enteros positivos se suelen escribir sin el signo más.
Los enteros negativos se escriben entre paréntesis excepto si encabezan la expresión.

2. REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN DE LOS NUMEROS ENTEROS. VALOR ABSOLUTO.

Para representar los números enteros dibujamos una recta horizontal, fijamos un punto de origen que representa el número **cero** y a partir de él señalamos un segmento como una unidad de medida en cuyo extremo fijamos el número **uno**.
A la izquierda del cero colocamos los enteros negativos; a la derecha, los enteros positivos.

Ejemplo: En la figura aparecen representados los enteros positivos 2 y 5 y los negativos -4 y -1. ¿Sabrías cuál es cuál?



El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta al quitar el signo. Ejemplo: El valor absoluto de -25 es 25. El valor absoluto de +16 es 16.

Un número entero es **mayor que** otro si se representa a su derecha; en caso contrario, si se representa a su izquierda, será menor. Los negativos se ordenan de menor a mayor según valores absolutos decrecientes; los positivos según valores absolutos crecientes.

Ejemplo: Dados los números enteros -5, 7, -3, 0, -1, 4 se ordenan de mayor a menor así:
$-5 < -3 < -1 < 0 < 4 < 7$.

3. SUMA DE NÚMEROS ENTEROS.

Al **sumar** dos números enteros se distinguen dos casos:
*a) Tienen el **mismo** signo.* Se suman los valores absolutos y se añade el signo común.
*b) Tienen **distinto** signo.* Se restan los valores absolutos, el menor del mayor, y se añade el signo del mayor.

Ejemplo: $3 + 5 = 8$; $-3 + 5 = 2$; $3 - 5 = -2$; $-3 - 5 = -8$.

4. OPUESTO DE UN NÚMERO ENTERO. RESTA.

Dos números enteros son **opuestos** si su suma es cero.

El **opuesto** de un número entero es el número entero que tiene el mismo valor absoluto y signo contrario. El opuesto del opuesto de un número entero es él mismo.

Ejemplo: El opuesto de 3 es -3, el opuesto de -5 es $5 = -(-5) = -5$.

Para **restar** dos números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo: $3 - 5 = 3 + (-5) = -2$. $-3 - (-5) = -3 + (-5) = -8$. $3 - (-5) = 3 + 5 = 8$. $-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$.

5. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EXACTA DE NÚMEROS ENTEROS.

Regla de los signos. Al multiplicar o dividir dos números enteros del *mismo signo* el resultado tendrá signo **positivo**. Si tienen *distinto signo* el resultado tendrá signo **negativo**.
☞ *La regla de los signos se memoriza cantando "más por más, más; más por menos, menos; menos por más, menos; menos por menos, más".*

Para **multiplicar** dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y se añade el signo del resultado de acuerdo con la regla de los signos.

Ejemplo: $3 \cdot 5 = +15$. $-3 \cdot 5 = -15$. $-3 \cdot (-5) = +15$. $3 \cdot (-5) = -15$.

Para **dividir** dos números enteros se dividen sus valores absolutos y se añade el signo del resultado de acuerdo con la regla de los signos.

Ejemplo: $15 \div 5 = +3$. $-15 \div 5 = -3$. $-15 \div (-5) = -3$. $15 \div (-5) = -3$.

6. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. SACAR FACTOR COMÚN.

El producto de un número entero por una suma de enteros es igual a la suma de los productos de dicho número por cada sumando.

Ejemplo: $-3 \cdot (8 - 2 + 5) = -3 \cdot 8 + (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 = -24 + 6 - 15 = -33$.
Si sumamos primero los enteros entre paréntesis obtenemos idéntico resultado $-3 \cdot (8 - 2 + 5) = -3 \cdot 11 = -33$.

Sacar factor común consiste en escribir en forma de producto una suma en la que todos los sumandos poseen un mismo factor.

Ejemplo: $-24 + (-32) - (-96) + (-48) = 8 \cdot [-3 - (-4) - (-12) + (-6)]$ ya que 24, 32, 96 y 48 son todos múltiplos de 8.

7. OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS.

El orden de prioridad de las operaciones con números enteros es:
1º) Resolvemos las operaciones que estén dentro de paréntesis.
2º) Realizamos las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3º) Realizamos las sumas y las restas de izquierda a derecha.

Ejemplo: En cada paso realizamos la operación prioritaria y **repetimos el resto de la expresión no calculada:**
$18 : 9 + 5 - [(-15) \cdot 3 + 12 \cdot 4] = 18 : 9 + 5 - [(-45) + 4 \cdot 12] = 18 : 9 + 5 - [(-45) + 48] =$
$= 18 : 9 - 5 - (+3) = 18 : 9 + 5 - 3 = 2 + 5 - 3 = 7 - 3 = 4.$

1. NUMEROS ENTEROS: VALOR ABSOLUTO.

Véase N.1.2.1 y N.1.2.2

2. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS.

Véase N.1.2.3 y N.1.2.4

Para sumar más de dos números enteros existen dos métodos:

1) Sumar de dos en dos de izquierda a derecha.
2) Sumar los positivos de un lado, sumar los negativos de otro y sumar los resultados.

Ejemplo: Método 1. $5+(-7)+8+(-6)=-2+8+(-6)=-6+(-6)=0$

Método 2. $5+(-7)+8+(-6)=12+8+(-6)=[5-8]+[(-7)+(-6)]=13-13=0$

3. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EXACTA DE ENTEROS

Véase N.1.2.5 y N.1.2.6

4. OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS.

Véase N.1.2.7

Las operaciones de igual prioridad se resuelven de izquierda a derecha.

Cuando delante de un paréntesis aparece un signo menos podemos hacer la operación del paréntesis y luego cambiarla de signo o cambiar de signo los números que hay dentro del paréntesis y luego operar.

Ejemplo: Método 1. $-9+4-(-1+3)=-9+4-2=-9-4-2=-11+4=-7$.

Método 2. $-9+4-(-1+3)=-9+4-1-3=5-12=-7$

1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL.

Una **potencia** es la expresión abreviada de un producto de factores iguales.
La **base** es el factor que se repite y el **exponente** indica el número de repeticiones.

Ejemplo: $(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$. $2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Las potencias de *base negativa* y *exponente par* son positivas y las de *exponente impar*, negativas.

Ej: $(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -3^5 = -243$. $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +2^4 = 16$.

2. POTENCIA DE UN PRODUCTO Y DE UN COCIENTE.

La **potencia de un producto** es igual al producto de las potencias de los factores.
La **potencia de un cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y el divisor.

Ejemplo: $[2\cdot(-3)]^3 = 2\cdot(-3)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 2\cdot(-3) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 2^3\cdot(-3)^3$
Ej: $[12\div(-3)]^3 = 12\div(-3)\cdot 12\div(-3)\cdot 12\div(-3) = 12\cdot 12\cdot 12\div[(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)] = 12^3\div(-3)^3$.

3. PRODUCTO Y COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE. POTENCIA DE POTENCIA.

El **producto de potencias de la misma base** es otra potencia de igual base y de exponente la suma de los exponentes de los factores.

☞ *Todo número entero se puede escribir como potencia de base el número y exponente 1.*

El **cociente de potencias de la misma base** es otra potencia de igual base y de exponente la resta de los exponentes del dividendo y el divisor.

☞ *Una potencia de base cualquier número y exponente cero vale 1.*

La **potencia de una potencia** es otra potencia de igual base y de exponente el producto de los exponentes.

Ejemplo: $2^3\cdot 2^4 = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{3}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{4} = 2^{3+4} = 2^7$.

Ejemplo: $(-2)^4 : (-2)^3 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{4} : [\underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{3}] = (-2)^{4-3} = (-2)^1 = -2$.

Ejemplo: $1 = (-3)^5 : (-3)^5 = (-3)^{5-5} = (-3)^0 \to (-3)^0 = 1$.
Ejemplo: $[(-3)^2]^4 = [(-3)\cdot(-3)]^4 = \underbrace{\underbrace{(-3)\cdot(-3)}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}}_{4} = (-3)^8 = 3^8$.

Ejemplo: $13^1\cdot 13^3 : 13^2 = 13^{1+3-2} = 13^5$.

4. CUADRADOS PERFECTOS Y RAIZ CUADRADA EXACTA.

Se llaman **cuadrados perfectos** a los números naturales de la forma $a^2 = a\cdot a$ siendo a un entero. La secuencia de los primeros veinte cuadrados perfectos es:

$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, \ldots\}$.

La diferencia entre cuadrados perfectos consecutivos es la secuencia de los impares

$\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, \ldots\}$.

Ejemplos: $961 = 31 \cdot 31$ es un cuadrado perfecto. 915 no es un cuadrado perfecto porque $30 \cdot 30 = 900 < 915 < 961 = 31 \cdot 31$.

Se dice que el número a es la **raíz cuadrada exacta** del número b y se escribe $a = \sqrt{b}$ si $b = a \cdot a = a^2$

Ejemplo: La raíz cuadrada exacta de 625 es 25 porque $625 = 25 \cdot 25$.

5. RAIZ CUADRADA ENTERA. CALCULO DE LA RAIZ CUADRADA ENTERA POR APROXIMACIÓN.

La **raíz cuadrada entera** de un número es el mayor número entero cuyo cuadrado es menor o igual que dicho número.
La diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera es el **resto** de la raíz.

Ejemplo: La raíz cuadrada entera de 915 es 30 porque $30 \cdot 30 = 900 < 915$ mientras que $915 < 31 \cdot 31 = 961$.
El resto es 15 porque $915 - 30 \cdot 30 = 915 - 900 = 15$.

Para calcular el número de cifras de la raíz cuadrada entera de un número se forman grupos de dos en dos comenzando por las unidades. La raíz tendrá tantas cifras como grupos y comenzará por el número que representa la raíz entera del primer grupo.

Ejemplo: La raíz de 1958 tiene 2 cifras $\underbrace{\underbrace{19}\ \underbrace{58}}_{2}$ y será mayor o igual que 40 porque la raíz entera de 19 es 4.

Para terminar de calcular la raíz entera por aproximación procedemos a calcular la secuencia $\{40^2, 41^2, 42^2, 43^2, \ldots\}$ hasta exceder 1958:
$44 \cdot 44 = 1936 < 1958 < 2025 = 45 \cdot 45 \rightarrow$ La raíz entera de 1958 es 44 y el resto es 22.

6. REGLA DE CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA.

1) Formamos grupos de dos cifras comenzando por las unidades y calculamos la raíz entera del primer grupo que será el primer dígito de la raíz cuadrada resultado.
2) Restamos del primer grupo el cuadrado de la raíz entera hallada, bajamos el grupo siguiente y conformamos con el resto y las dos cifras bajadas un número cuya raíz entera cabe hallar.
3) Doblamos el resultado parcial y ensayamos añadirle una cifra hasta que el producto del número formado y dicha cifra añadida sea la raíz cuadrada entera buscada.
4) Hallamos el resto, bajamos el siguiente grupo y subimos la cifra añadida a la zona de resultados.
5) Nos reiteramos en 3 y 4 hasta que se agoten los grupos.
6) Para obtener cifras decimales se coloca la coma decimal en el resultado en el momento que se agoten los grupos y bajaremos grupos de 2 ceros a discreción.

1. POTENCIAS DE BASE ENTERA Y EXPONENTE NATURAL.

Véase N.1.3.1

2. OPERACIONES CON POTENCIAS DE LA MISMA BASE.

Véase N.1.3.2 y N.1.3.3

3. OPERACIONES CON POTENCIAS DEL MISMO EXPONENTE.

El producto de varias potencias de mismo exponente es otra potencia con la base igual al producto de las bases y el mismo exponente. $a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$

El cociente de dos potencias de mismo exponente es otra potencia con la base igual al cociente de las bases y el mismo exponente: $a^m : b^m = (a : b)^m$

Para hacer aparecer potencias con la misma base o el mismo exponente conviene descomponer las bases si no son números primos.

Ejemplo: $-216 : 8 \cdot (-5)^3 = -6^3 : 2^3 \cdot (-5)^3 = -(6:2)^3 \cdot (-5)^3 = -3^3 \cdot (-5)^3 = -[3 \cdot (-5)]^3 = -(-15)^3 = 15^3 = 3375$.

4. CUADRADOS PERFECTOS Y RAÍCES CUADRADAS.

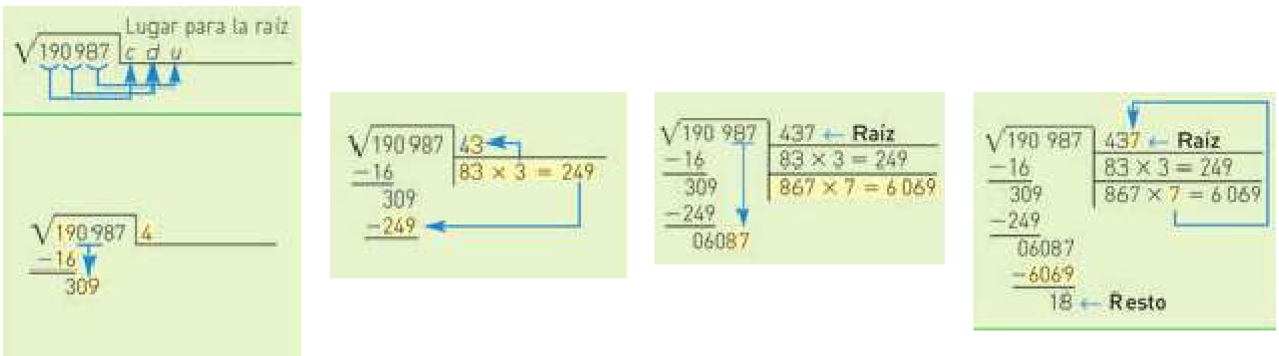
Véase N.1.3.4 y N.1.3.5

☞ *El resto de la raíz cuadrada entera es menor que el doble de la raíz más 1.*

Ejemplo: La raíz cuadrada entera de 35 es 5 y el resto es 10. El doble de la raíz más uno es once. En este caso, $10 < 11 = 2 \cdot 5 + 1$. Si construimos un tablero cuadrado de 5 filas y 5 columnas para ampliarlo a un cuadrado 6x6 faltaría añadir una fila más de 5, una columna más de 5 y una celda más, es decir, 2 veces 5 más 1.

5. RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO ENTERO. Véase N.1.3.6

Como ejemplo del algoritmo de extracción de la raíz véase el cálculo para $\sqrt{190987}$.



6. OPERACIONES CON RAÍCES CUADRADAS.

El producto, cociente y potencia de raíces cuadradas tiene las mismas propiedades que las potencias, a saber:

El producto de dos o más raíces cuadradas es otra raíz cuadrada con el radicando igual al producto de los radicandos. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

Ejemplo: $\sqrt{49}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{49\cdot 16}=\sqrt{7^2\cdot 4^2}=\sqrt{(7\cdot 4)^2}=7\cdot 4=28$

El cociente de dos raíces cuadradas es otra raíz cuadrada con el radicando igual al cociente de los radicandos. $\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b}$

Ejemplo: $\sqrt{36}:\sqrt{9}=\sqrt{36:9}=\sqrt{6^2:3^2}=\sqrt{(6:3)^2}=\sqrt{2^2}=2$

La potencia de base una raíz cuadrada es otra raíz cuadrada que tiene por radicando el de la raíz elevado al exponente de la potencia. $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}$.

Ejemplo: $(\sqrt{36})^5=\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}=\sqrt{36^5}=\sqrt{(6^2)^5}=\sqrt{(6^5)^2}=6^5$

☞ *Cuando el radicando tiene un exponente múltiplo de 2 la raíz cuadrada es la base del radicando elevada a la mitad de su exponente.*

7. JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES.

En las operaciones aritméticas que incluyen potencias y raíces el orden de prioridad es:

1) Paréntesis y corchetes.
2) Potencias y raíces.
3) Multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
4) Sumas y restas.

Ejemplo: $10+54:(-3)^2\cdot\sqrt{18+(-2)}=10+54:9\cdot\sqrt{16}=10+54:9\cdot 4=10+6\cdot 4=10+24=34.$

Ejemplo: $(4^2-\sqrt{10^2-8^2})^3:[5\cdot(-2)]^2\cdot\sqrt{1-(-24)}=(16-\sqrt{100-64})^3:(-10)^2\cdot\sqrt{25}=(16-\sqrt{36})^3:100\cdot 5=$
$=(16-6)^3:100\cdot 5=10^3:100\cdot 5=1000:100\cdot 5=10\cdot 5=50.$

1. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO.

Una potencia de exponente natural es una forma abreviada de expresar una multiplicación de un factor, la base, que se repite.

Ejs: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}$

Las potencias de **exponente negativo** se definen como la fracción inversa de la potencia con exponente positivo.

Ejs: $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$

Un número se dice que está expresado en **notación científica** si es el producto de un número real entre 1 y 10 y una potencia de base 10 y exponente entero.

Ejs: La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ Kg.
Sin embargo, no cumple la regla de notación científica $0,598 \cdot 10^{25}$ Kg aún siendo la misma cantidad.

2. RAIZ DE UN NÚMERO.

Un número b es la **raíz** n-sima de otro número a, llamado **radicando**, cuando $b^n = a$. Se escribe $b = \sqrt[n]{a}$. Cuando el índice de la raíz n vale 2 y 3 las raíces se llaman *cuadradas* y *cúbicas,* respectivamente.

Ejs: La raíz cuadrada de 169 es 13 porque $13^2 = 13 \cdot 13 = 169$.
También es -13 porque $(-13)^2 = -13 \cdot (-13) = 169$.
La raíz cúbica de -343 es -7 porque $(-7)^3 = (-7)(-7)(-7) = -343$.

3. NÚMERO DE RAÍCES. RAÍCES EQUIVALENTES.

El **número de raíces** reales de un radical es:
Dos, cuando el índice es par y el radicando positivo.
Una, cuando el índice es impar o el radicando es cero.
Cero, cuando el índice es par y el radicando negativo.

Dos radicales se dicen **equivalentes** si tienen el mismo valor.

Ejs: Los radicales $\sqrt{4}$ y $\sqrt[6]{64}$ son equivalentes porque valen 2 dado que $2 \cdot 2 = 4$ y $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

Se obtiene un radical equivalente si multiplicamos o dividimos el índice del radical y el exponente del radicando por un mismo número natural.

Ejs: Dado $\sqrt[3]{2^5}$ multiplicamos índice y exponente por 2 obteniendo el radical equivalente $\sqrt[6]{2^{10}}$.

4. POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO.

Una potencia de exponente fraccionario es un radical cuyo índice es el denominador del exponente siendo su numerador el exponente del radicando. Es decir, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Ejs: $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{100000} = \sqrt[3]{10^5} = 10^{\frac{5}{3}}$.

Los números mixtos y las reglas de las potencias sirven para simplificar el cálculo de radicales.

☞ *Recuérdese que la parte entera de un número mixto es el cociente de la división entera y el numerador es el resto.*

Ejs: Como $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ entonces $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$.
Como $\frac{5}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ entonces $\sqrt[3]{100000} = \sqrt[3]{10^5} = 10^{\frac{5}{3}} = 10^1 \cdot 10^{\frac{2}{3}} = 10\sqrt[3]{100}$.

En general para calcular radicales se descompone el radicando y se extraen factores que se repiten, al menos, *índice* veces: por cada *índice* factores iguales se extrae uno.

Ejs: $\sqrt[3]{100000} = \sqrt[3]{10^5} = \sqrt[3]{\underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10)}_{3} \cdot \underbrace{10 \cdot 10}_{2}} = \sqrt[3]{\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{3}}\sqrt[3]{\underbrace{10 \cdot 10}_{2}} = 10\sqrt[3]{100}$.

5. PROPIEDADES DE LOS RADICALES.

Aplicando la definición y las propiedades de las potencias con radicales del mismo índice se tiene:

1) *El producto de raíces del mismo índice es la raíz del producto* $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2) *El cociente de raíces del mismo índice es la raíz del cociente* $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$
3) *La potencia de la raíz es la raíz de la potencia* $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4) *La raíz de una raíz es la raíz producto* $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Ejs: $\sqrt[3]{10}\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{10 \cdot 500} = \sqrt[3]{5000} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 5} = 10\sqrt[3]{5}$;
$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{500}{10}} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$;
$(\sqrt[3]{16})^4 = \sqrt[3]{16^4} = \sqrt[3]{(2^4)^4} = \sqrt[3]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^{15} \cdot 2} = 2^5\sqrt[3]{2} = 32\sqrt[3]{2}$;
$\sqrt[4]{\sqrt[3]{8192}} = \sqrt[12]{8192} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}$.

Obsérvese que no hay ninguna regla para sumar y restar radicales, porque no se pueden sumar *churras con merinas*, ni *peras con manzanas*.

Es error frecuente escribir cosas como $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ y aún peor $3\sqrt{2} + 5\sqrt{4} = 8\sqrt{6}$.

6. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS QUE APLICAMOS A LOS RADICALES COMO POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO.

*Producto de potencias con la **misma base**: se suman los exponentes* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
*Cociente de potencias con la **misma base**: se restan los exponentes* $a^m \div a^n = a^{m-n}$
Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes $(a^m)^n = a^{mn}$
*Producto de potencias con el **mismo exponente**: se multiplican las bases* $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
*Cociente de potencias con el **mismo exponente**: se dividen las bases* $a^m \div b^m = (a \div b)^m$

Existen dos técnicas para calcular radicales. La primera se basa en **radicales equivalentes** y requiere el cálculo del mínimo común múltiplo de los índices.
La segunda se basa en **exponentes fraccionarios** y requiere sumar y restar fracciones.
Ambas utilizan en la parte final la descomposición factorial del radicando.

Ejemplos con el mismo radicando usando la técnica de radicales equivalentes con el mismo índice:
$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[3\cdot 4]{2^{1\cdot 4}} \cdot \sqrt[4\cdot 3]{2^{7\cdot 3}} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2^{21}} = \sqrt[12]{2^{4+21}} = \sqrt[12]{2^{25}} = \sqrt[12]{2^{24}}\,\sqrt[12]{2} = 4\sqrt[12]{2}$;
$\frac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[3]{3^{13}}} = \frac{\sqrt[12]{3^{21}}}{\sqrt[12]{3^{52}}} = \sqrt[12]{3^{21-52}} = \sqrt[12]{3^{-31}} = \sqrt[12]{3^{-24}}\,\sqrt[12]{3^{-7}} = 3^{-2}\sqrt[12]{3^{-7}} = \frac{1}{3^2\sqrt[12]{3^7}} = \frac{1}{9\sqrt[12]{3^7}}$.

Los mismos ejemplos usando la técnica de exponentes fraccionarios:
$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^7} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{7}{4}} = 2^{\frac{4}{12}+\frac{21}{12}} = 2^{\frac{25}{12}} = 2^{\frac{24}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{12}} = 4\sqrt[12]{2}$
$\frac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[3]{3^{13}}} = \frac{3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{13}{3}}} = 3^{\frac{7}{4}-\frac{13}{3}} = 3^{\frac{21-52}{12}} = 3^{\frac{-31}{12}} = 3^{\frac{-24}{12}} \cdot 3^{\frac{-7}{12}} = 3^{-2} \cdot 3^{\frac{-7}{12}} = \frac{1}{9\sqrt[12]{3^7}}$.

7. OPERACIONES CON NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Para **sumar o restar** dos cantidades escritas en notación científica se extrae como factor común la menor de las potencias de 10, se suman o restan los factores no comunes y se restaura el formato de notación científica en el resultado.

Para **multiplicar o dividir** dos cantidades en notación científica se multiplican o dividen separadamente las partes decimales y las potencias y se restaura el formato de notación científica en el resultado.

☞ *Recuérdese que la parte decimal ha de ser un número real en el intervalo [1,10).*

También es útil darse cuenta que los divisores de la unidad más utilizados son la décima (10^{-1}), centésima (10^{-2}), milésima (10^{-3}), diezmilésima (10^{-4}), cienmilésima (10^{-5}) y millonésima(10^{-6}).

Ejemplos:
Dados los números $0'003$ y $3'6 \cdot 10^1$, reescribimos el primero en notación científica como 3 milésimas, es decir, $3 \cdot 10^{-3}$ y su producto es $3 \cdot 10^{-3} \cdot 3'6 \cdot 10^1 = 3 \cdot 3'6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^1 = 10'8 \cdot 10 = 1'08 \cdot 10^2$
mientras que su cociente vale $3 \cdot 10^{-3} \div 3'6 \cdot 10^1 = 3 \div 3'6 \cdot 10^{-3} \div 10^1 = 0'8\hat{3} \cdot 10^{-7} = 8'\hat{3} \cdot 10^{-6}$

Dados los números $a = 0'0000056$ y $b = 0'0000102$ los escribiremos en notación científica así
$a = 5'6 \cdot 10^{-6}$ y $b = 1'02 \cdot 10^{-5}$. Su suma valdrá:
$a + b = 5'6 \cdot 10^{-6} + 1'02 \cdot 10^{-5} = 10^{-6}(5'6 + 1'02 \cdot 10) = 10^{-6}(5'6 + 10'2) = 15'8 \cdot 10^{-6} = 1'58 \cdot 10^{-5}$
y su producto $a \cdot b = 5'6 \cdot 10^{-6} \cdot 1'02 \cdot 10^{-5} = 5'06 \cdot 1'02 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-5} = 5'712 \cdot 10^{-11}$.

1. FRACCIONES.

Una fracción expresa la parte de un todo. Ejemplo: $\frac{1}{4}$ nos dice que tenemos una cuarta parte del todo.
Se representa $\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$ donde el **denominador** es el número de partes en que se divide el *todo* y el **numerador** el número de *partes* que se tienen.

El denominador no puede ser cero ni negativo. La fracción es negativa si lo es su numerador y el signo se coloca indistintamente arriba o delante. Ej: $-\frac{3}{2}=\frac{-3}{2}$ es negativa.
☞ *Cualquier entero es el numerador de una fracción con denominador 1.* Ej: $-3=\frac{-3}{1}$.

2. FRACCIONES EQUIVALENTES. METODOS DE OBTENCION Y COMPROBACIÓN.

Dos fracciones son **equivalentes** si representan la misma parte del todo.
Para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada existen dos métodos:
1) Amplificar o multiplicar el numerador y el denominador por el mismo entero.
2) Simplificar o dividir el numerador y el denominador por el mismo entero.

Ejemplo: De $\frac{100}{18}$ obtenemos por simplificación las fracciones equivalentes $\frac{50}{24}=\frac{25}{12}$ y por amplificación $\frac{750}{360}$.

Regla de los productos cruzados. Dos fracciones son equivalentes si los productos cruzados son iguales. Ejemplo: La fracción $\frac{3}{5}$ es equivalente a $\frac{12}{20}$ porque el producto cruzado es igual $3\cdot 20=5\cdot 12=60$.

3. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES.

Una fracción se dice **irreducible** si el numerador y el denominador son primos entre si.
Una fracción se puede simplificar si no es irreducible y, por tanto, podemos dividir el numerador y el denominador por un divisor común.

Ejemplo: La fracción $\frac{3}{5}$ es irreducible porque 3 y 5 son primos entres si.
Ejemplo: La fracción $\frac{120}{600}$ no es irreducible y se simplifica dividiendo entre el m.c.d(120,600)=120: $\frac{120}{600}=\frac{120:120}{600:120}=\frac{1}{5}$.

4. REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMUN DENOMINADOR.

Para obtener fracciones con el mismo denominador existen dos métodos para obtener un nuevo denominador:

1) **Multiplicar los denominadores**.
2) **Calcular el m.c.m. de los denominadores.**

A continuación se amplifican los numeradores multiplicando por $\frac{\text{Nuevo denominador}}{\text{Viejo denominador}}$.
(En el primer método el coeficiente multiplicador es el producto de *los otros denominadores*).
Ejemplo: Reducir a común denominador $\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{5}{6}$.
METODO 1. Multiplicamos los denominadores: $\text{Nuevo denominador}=4\cdot 5\cdot 6=120$.
Calculamos los multiplicadores de los numeradores $5\cdot 6=30$, $4\cdot 6=24$, $4\cdot 5=20$.
Las fracciones equivalentes son $\frac{3\cdot 30}{120}=\frac{90}{120},\frac{1\cdot 24}{120}=\frac{96}{120},\frac{5\cdot 20}{120}=\frac{100}{120}$.

METODO 2. Calculamos el m.c.m. de los denominadores: $\text{Nuevo denominador}=\text{m.c.m.}(2^2,5,2\cdot 3)=60$.
Calculamos los multiplicadores de los numeradores $60:4=15$, $60:5=12$, $60:6=10$.
Las fracciones equivalentes son $\frac{3\cdot 15}{60}=\frac{45}{60};\frac{4\cdot 12}{60}=\frac{48}{60},\frac{5\cdot 10}{60}=\frac{50}{60}$.

5. COMPARACIÓN Y ORDENACIÓN DE FRACCIONES.

Si dos fracciones tienen *igual numerador* es mayor la de menor denominador.
Si dos fracciones tienen *igual denominador* es mayor la de mayor numerador.

En general, para **comparar u ordenar** fracciones se reducen a común denominador y se comparan u ordenan según el valor de los numeradores.

Ejemplo: Comparar $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$. Amplificamos la primera por 7 y la segunda por 5: $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35}$ y $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{10}{35}$.
Ya podemos compararlas al tener mismo denominador y resulta: $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}>\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$.

6. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES.

Para **sumar** fracciones se reducen a común denominador y se suman los numeradores.
Para **restar** fracciones se reducen a común denominador y se restan los numeradores.

Ejemplo: $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{21}{35}+\frac{10}{35}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$. Ejemplo: $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}-\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{21-10}{35}=\frac{11}{35}$

7. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES.

El resultado de **multiplicar** varias fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.
Ejemplo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$

La fracción **inversa** de una fracción es aquella que al multiplicar por la fracción da la unidad. La fracción inversa tiene el numerador y el denominador cambiados, es decir, la fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=\frac{a\cdot b}{a\cdot b}=1$. Ejemplo: La fracción inversa de $\frac{2}{7}$ es $\frac{7}{2}$.

Para **dividir** dos fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda, es decir, la fracción resultante es el producto cruzado de las fracciones.

Ejemplo: $\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 7}{2\cdot 5}=\frac{21}{10}$.

8. FRACCIONES IMPROPIAS. NUMEROS MIXTOS.

Una fracción es **impropia** si el valor absoluto del numerador es mayor que el denominador. En caso contario se dice que es **propia**.

Ejemplo: $\frac{7}{5}$ es fracción impropia. $\frac{2}{3}$ es fracción propia.

Las fracciones impropias se pueden expresar como suma de un número entero y una fracción propia, los llamados **números mixtos** en cuya notación se omite el signo de suma.

Ejemplo: $\frac{7}{5}$ se escribe $1\frac{2}{5}$ porque $1\frac{2}{5}=1+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$.
El número mixto $3\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 3+1}{3}=\frac{10}{3}$.
Para pasar de mixto a fracción se multiplica el entero por el denominador y se suma el numerador.
Para pasar de fracción a mixto se hace la división entera siendo el resto el numerador y el entero el cociente.

1. CIFRAS DECIMALES.

Los órdenes de magnitud que representan cifras decimales se escriben a la derecha de la coma decimal y reciben el nombre de décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, diezmillonésimas, etc. y equivalen a las siguientes fracciones $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$. $\frac{1}{10000}$. $\frac{1}{100000}$. $\frac{1}{1000000}$. $\frac{1}{10000000}$. etc. que se pueden representar como potencias negativas de base 10, a saber, 10^{-1} . 10^{-2} . 10^{-3} . 10^{-4} . 10^{-5} . 10^{-6} . 10^{-7} . etc.

Ejemplo: $40756'251 = 4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-3}$.

2. DECIMALES Y FRACCIONES. ORDENACIÓN.

Si dividimos el numerador de una fracción entre su denominador obtenemos un número decimal que puede tener:

- cero ó un número finito de decimales (se llaman **exactas**).
- un número infinito de decimales (se llaman **periódicas,** pues acaban repitiéndose).

El grupo de decimales que se repite se llama **periodo** y se señala con un gorrito sobre las cifras repetidas. Los decimales periódicos pueden ser:

- **puros,** toda la parte decimal es periódica.
- **mixtos,** hay cifras decimales que no se repiten *delante del periodo*.

Ej: 1, 2 y 3 dividido entre 6 produce los tres tipos de números decimales señalados:
$\frac{1}{6} = 0'1666\cdots = 0'1\hat{6}$ (periódico mixto), $\frac{2}{6} = 0'3333\cdots = 0'\hat{3}$ (periódico puro), $\frac{3}{6} = 0'5$ (exacto).

Para ordenar números decimales comenzamos por comparar las partes enteras y a continuación las cifras decimales por mayor orden de magnitud y nos detenemos cuando no sean iguales.
Para ordenar enteros, fracciones y número decimales los expresamos todos como números decimales.

3. SUMA Y RESTA DE NUMEROS DECIMALES.

Para **sumar y restar** números decimales los escribimos unos debajo de otros de forma que coincidan los órdenes de magnitud y los sumamos o restamos como si fueran enteros colocando en su lugar la coma decimal.

4. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NUMEROS DECIMALES POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS.

Para **multiplicar** un número decimal por la unidad seguida de ceros (potencias positivas de 10) corremos la coma hacia la *derecha* tantos lugares como ceros (indica el exponente). Ejemplo: $40756'251 \cdot 100 = 40756'251 \cdot 10^2 = 4075625'1$.

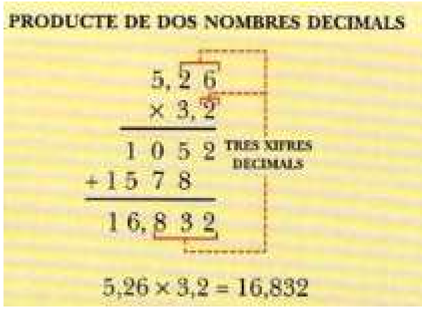
Para **dividir** un número decimal por la unidad seguida de ceros (potencias positivas de 10) corremos la coma hacia la *izquierda* tantos lugares como ceros (indica el exponente).

Ejemplo: $40756'251 : 1000000 = 40756'251 : 10^6 = 0'040756251$.

5. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NUMEROS DECIMALES.

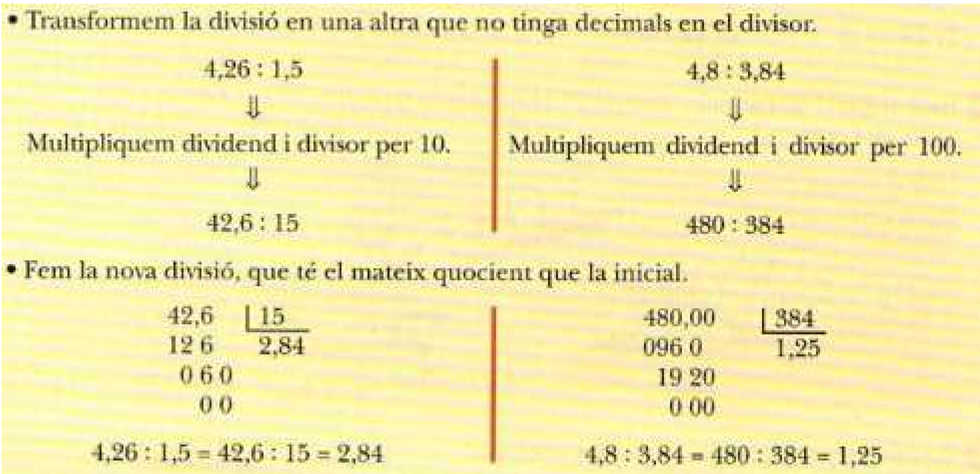
Para **multiplicar** varios números decimales los multiplicamos como si fueran enteros y al resultado le colocamos la coma decimal de forma que el número de cifras decimales sea la suma de los números de cifras decimales de los factores.

Ejemplo: $40736'251 \cdot 3'081$ tendrá 6 cifras decimales.



Para **dividir** dos números decimales el divisor no puede contener cifras decimales, por ello multiplicaremos dividendo y divisor por la potencia de 10 con exponente el número de decimales del divisor. A continuación, realizamos la división como si fueran enteros teniendo la precaución de colocar la coma en el cociente en el momento en que bajemos la primera cifra decimal del nuevo dividendo. La división termina cuando se obtiene resto cero o el cociente contiene las cifras decimales deseadas.

Ejemplo: $40736'251 : 3'081 = 40756251 : 3081$.



6. APROXIMACIÓN DE NUMEROS DECIMALES.

Existen dos métodos de aproximación:

1) *Truncamiento*. Consiste en despreciar los decimales a partir del siguiente al del orden de magnitud al que deseamos aproximarnos.
2) *Redondeo*. Consiste en truncar y sumar una unidad del orden de magnitud al que truncamos si la primera cifra despreciada es 5 o mayor que 5.

Ejemplos: Deseamos truncar y aproximar a las centésimas el número $1'\hat{6} = 1'666\ldots$

Si truncamos nos quedaremos con la aproximación por defecto $1'\hat{6} \approx 1'66$.

Si redondeamos nos quedaremos con la aproximación por exceso $1'\hat{6} \approx 1'67$ ya que las milésimas despreciadas eran $6 \geq 5$.

1. FRACCIONES EQUIVALENTES.

Véase N.1.4.1 y N.1.4.2.

2. COMPARACIÓN DE FRACCIONES. Véase N.1.4.4 y N.1.4.5.

3. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES. Véase N.1.4.6.

4. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES. Véase N.1.4.7.

5. POTENCIAS Y RAÍCES DE FRACCIONES.

Para calcular la potencia de una fracción se elevan numerador y denominador al exponente de la potencia: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Ejemplo: $(\frac{3}{5})^4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$.

Para calcular la raíz cuadrada de una fracción calculamos las raíces cuadradas del numerador y del denominador: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Ejemplo: $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \frac{5}{9}$.

6. OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES.

Se seguirá el siguiente orden de prioridad:
1) Paréntesis y corchetes, de dentro hacia fuera.
2) Potencias y raíces.
3) Multiplicaciones y divisiones, empezando por la izquierda.
4) Sumas y restas.

Ejemplos: $(\frac{4}{9})^6 : (\frac{4}{9})^4 - \frac{5}{3} : \frac{3}{2} = (\frac{4}{9})^{6-4} - \frac{5}{3} : \frac{3}{2} = (\frac{4}{9})^2 - \frac{10}{9} = \frac{16}{81} - \frac{10}{9} = \frac{16-90}{81} = \frac{-74}{81}$.
$(\frac{9}{2} + \frac{3}{4})^2 - [(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{7})] : \frac{2}{5} = (\frac{18+3}{4})^2 - [(\frac{8+5}{6}) - (\frac{7-2}{14})] : \frac{2}{5} = (\frac{21}{4})^2 - (\frac{13}{6} - \frac{5}{14}) : \frac{2}{5} = \frac{441}{16} - \frac{91-15}{42} : \frac{2}{5} = \frac{441}{16} - \frac{76}{42} : \frac{2}{5} = \frac{441}{16} - \frac{380}{84} = \frac{441}{16} - \frac{95}{21} = \frac{9261-1520}{336} = \frac{7741}{336}$.

7. EXPRESIÓN DECIMAL DE UNA FRACCIÓN. APROXIMACIONES DE UN NÚMERO DECIMAL. Véase N.1.5.2.

El grupo de cifras decimales que no se repite delante del período se llama *anteperiodo*.
Como no podemos manejar infinitas cifras decimales usamos **aproximaciones** que son números decimales con un número finito de cifras decimales próximas al número, bien por *exceso* (mayor), bien por *defecto* (menor).

Al usar una aproximación cometemos un **error** que disminuye si incrementamos el número de cifras decimales.

Ejemplo: $\frac{7}{9} = 0'\hat{7} = 0'7777\ldots$ se aproxima por exceso usando centésimas $\frac{7}{9} \approx 0'78$ y por defecto $\frac{7}{9} \approx 0'77$. La aproximación a las milésimas $\frac{7}{9} \approx 0'778$ es más precisa por que cometemos menos error.

8. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES.

Véase N.1.5.3, N.1.5.4 y N.1.5.5.

Para calcular raíces cuadradas de números decimales es necesario que el número de cifras decimales sea par, razón por la cual si es impar añadiremos un cero.
El procedimiento puede verse en N.1.3.6 prestando especial atención al paso 6).

9. NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Un número se dice que está expresado en **notación científica** si es el producto de un número real entre 1 y 10 y una potencia de base 10 y exponente entero.

Ejs: La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ Kg.
Sin embargo, no cumple la regla de notación científica $0,598 \cdot 10^{25}$ Kg aún siendo la misma cantidad.

10.FRACCION CORRESPONDIENTE A UN NÚMERO DECIMAL.

Dado un número decimal con un número finito de cifras decimales (*exacto*) o con un número infinito de cifras decimales que se repiten (*periodo*), con (*mixto*) o sin anteperiodo (*puro*) se puede obtener una fracción equivalente, llamada *generatriz*:

1) **Decimal exacto**. La fracción se forma colocando el número sin coma en el numerador y la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales en el denominador.
2) **Decimal periódico puro**. La fracción se forma colocando el número sin coma en el numerador y tantos nueves como cifras decimales en el denominador.
3) **Decimal periódico mixto.** La fracción se forma colocando el número sin coma menos el número sin coma hasta la última cifra del anteperiodo en el numerador y tantos nueves como cifras decimales del periodo seguidas por tantos ceros como cifras decimales del anteperiodo en el denominador.

Ejemplos: Las fracciones generatrices de $0'045$, $0'057057057\ldots$, $0'225777\ldots$ son $\frac{45}{1000}$, $\frac{57}{999}$ y $\frac{2257-225}{9000} = \frac{2032}{9000}$ que se simplifican a $\frac{9}{200}$, $\frac{19}{333}$ y $\frac{254}{1125}$ respectivamente.

1. FRACCIONES. NUMEROS RACIONALES.

Se obtiene una **fracción equivalente** al multiplicar o dividir el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número entero distinto de cero.

Todas las fracciones equivalentes expresan el mismo valor, resultado de dividir numerador entre denominador, y definen un mismo **número racional**.

La **fracción irreducible** es el representante de un número racional que no se puede simplificar.

Ejs: $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} = \frac{15}{20} = 0'75$; $\frac{200}{300} = \frac{200\div 100}{300 : 100} = \frac{2}{3} = 0'\hat{6}$

$\frac{5}{2}$ es la fracción irreducible que representa al número racional $2'5 = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \ldots$

2. OPERACIONES CON FRACCIONES.

Para **sumar o restar** fracciones se reducen a común denominador y se suman o restan los numeradores. El resultado se simplifica hasta que sea irreducible.

Para obtener un común denominador hay dos técnicas:

a) calcular el **mínimo común múltiplo** de los denominadores

b) **multiplicar denominadores**. Los numeradores se calculan multiplicando *cada* numerador por los *otros* denominadores que no son el suyo.

Ejemplo con el mínimo común múltiplo:
Como el m.c.m.(2,3,4)=12 entonces $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1\cdot 6}{2\cdot 6} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 4} - \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{6+8-9}{12} = \frac{5}{12}$.

El mismo ejemplo con la técnica de multiplicar denominadores:
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1\cdot 3\cdot 4+2\cdot 2\cdot 4-3\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{12+16-18}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

El resultado de **multiplicar dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ej: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(-3)}{4} = \frac{1\cdot 2\cdot (-3)}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{-6}{24} = \frac{-1}{4}$.
En el producto de factores antes de multiplicar es conveniente simplificar los que aparecen arriba y abajo:
$\frac{1\cdot 2\cdot (-3)}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1\cdot \cancel{2}\cdot (-\cancel{3})}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 4} = \frac{-1}{4}$

Para **dividir dos fracciones** basta multiplicar una por la fracción inversa de la otra, lo cual equivale a *multiplicar en cruz.*

Ej: $\frac{2}{3} : \frac{(-3)}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{(-3)} = \frac{8}{-9} = \quad \frac{8}{9}$.

El resultado o es un número racional positivo o negativo o es cero.
Por tanto, el signo se coloca delante de la fracción.
Cuando se tiene un "castillo" de fracciones es útil utilizar los inversos.

Ej: $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$.

3. EXPRESION DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL.

La expresión decimal de cualquier número racional puede ser **exacta** (tiene un número finito de decimales), **periódica pura** (tiene un número infinito de decimales que se repiten todos ellos siguiendo un patrón llamado *periodo*) o **periódica mixta** (tiene un número infinito de decimales los primeros de los cuales no se repiten y forman el *ante-periodo,* el resto de decimales se repite).

Ej: 2, 3 y 4 dividido entre 12 produce los tres tipos de racionales:
$\frac{2}{12} = 0'1\hat{6}$ (periódico mixto), $\frac{3}{12} = 0'25$ (exacto), $\frac{4}{12} = 0'\hat{3}$ (periódico puro).

Para pasar de la expresión decimal a la fraccionaria se procede según los casos:
Sea x el número racional.
CASO EXACTA. Si x tiene n decimales $\frac{10^n}{10^n}x$ es una fracción equivalente con numerador entero.
CASO PERIODICA PURA. Sea m el número de decimales del periodo.
Entonces $\frac{10^m-1}{10^m-1}x$ es una fracción equivalente con numerador entero.
CASO PERIODICA MIXTA. Sea m el número de decimales del periodo y p el número de decimales del ante-periodo.
Entonces $\frac{(10^m-1)10^p}{(10^m-1)10^p}x$ es una fracción equivalente con numerador entero.

Ejemplos: Partimos de las expresiones decimales $0'25$, $0'\hat{3}$ y $0'1\hat{6}$ que son exacta, periódica pura y periódica mixta, respectivamente. En estos casos $n = 2$. $m = p = 1$. Por tanto:
$\frac{100}{100} \cdot 0'25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.
$\frac{10-1}{10-1} \cdot 0'\hat{3} = \frac{3'\hat{3}-0'\hat{3}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$
$\frac{(10-1)10}{(10-1)10} \cdot 0'1\hat{6} = \frac{16'\hat{6}-1'\hat{6}}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

4. NUMEROS IRRACIONALES.

Los números cuya expresión decimal ni es exacta ni es periódica, es decir, que tienen infinitas cifras decimales que no se repiten se llaman **irracionales**.
Ejemplo de irracionales son las raíces cuadradas y cúbicas no exactas.

Ejs: $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales, las primeras son $1'4142135623730950488016887242097\ldots$
$\sqrt[3]{2}$ tiene infinitas cifras decimales, las primeras son $1'2599210498948731647672106072782\ldots$

Otros irracionales son números con nombre propio en las matemáticas como π, que es la razón entra la longitud de un círculo y su diámetro, o la razón áurea ϕ que es la forma de dividir el segmento unidad en dos partes que guardan la proporción $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$.

Ejs: π tiene infinitas cifras decimales, las primeras son $3'1415926535897932384626433832795\ldots$
ϕ tiene infinitas cifras decimales, las primeras son $1'6180339887498948482045868343656\ldots$
El inverso de ϕ tiene las mismas cifras decimales que él: $0'6180339887498948482045868343656\ldots$

El conjunto que reúne los números racionales e irracionales forma los **números reales**.

5. APROXIMACIONES Y ERRORES.

Como la inmensa mayoría de los números tienen infinitas cifras decimales, en la práctica, al tomar mediciones realizamos aproximaciones de su valor auténtico.

Las aproximaciones pueden ser por **defecto** o por **exceso**, según que el valor sea menor o mayor que el número real aproximado.

Los dos métodos de aproximación más usuales son **truncamiento** y **redondeo**.

En el primero, se desprecian los decimales a partir de un cierto orden de magnitud.

En el segundo se tiene en cuenta el primer decimal a ignorar y cuando esta cifra es 5 o mayor que 5 se añade una unidad del orden de magnitud pedido.

Ejs: Arquímedes obtuvo diversas aproximaciones de π, entre ellas, los racionales $\frac{22}{7}$ y $\frac{355}{113}$.

Si truncamos $\frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$ a las centésimas obtenemos una aproximación por defecto $3'14$, mientras que si la truncamos a las milésimas obtenemos $3'142$ y sería una aproximación por exceso.

Si truncamos $\frac{355}{113} = 3'14159292035398230088495575221 24\ldots$ a las millonésimas obtenemos una aproximación por defecto $3'141592$, mientras que si la redondeamos a las millonésimas obtenemos $3'141593$ dado que el primer decimal que despreciamos es un 9, que es mayor que 5, y sería una aproximación por exceso. Ambas aproximaciones difieren del valor real en menos de una millonésima (10^{-6}).

El **error absoluto** es la diferencia en valor absoluto entre el número y la aproximación elegida. El **error relativo**, que suele expresarse como porcentaje, es el cociente entre el error absoluto y el número, y permite comparar la bondad de medidas heterogéneas.

Ej: El error absoluto que se comete al aproximar $\frac{10}{3} \approx 3'3$ es $\frac{10}{3} - 3'3 = \frac{10}{3} - \frac{33}{10} = \frac{100-99}{30} = \frac{1}{30}$.

Para calcular el error absoluto conviene colocar como minuendo el número mayor ya que así se evita calcular el valor absoluto, reduciéndose el cómputo a una resta.

El error relativo sería $\frac{\frac{1}{30}}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 1\%$.

6. INTERVALOS Y SEMIRRECTAS.

A cada número real se le puede asignar un punto de la recta y viceversa.

Se llama **intervalo** al conjunto de números reales comprendidos entre dos números reales ordenados que se llaman *extremos*.

Se utilizan paréntesis para indicar que el extremo no está incluido y corchetes para indicar que sí está incluido. Los extremos se separan con comas.

Los intervalos pueden ser **cerrados** si incluyen a los extremos, **abiertos**, si los excluyen y **semiabiertos** (o semicerrados) si incluyen un extremo pero no el otro.

Los números reales inferiores o superiores a uno dado configuran una **semirrecta**. Simbólicamente se representa el otro extremo como infinito positivo o negativo.

Ejemplos. Dados los reales $a = 3$ y $b = 5$ se pueden construir los con ellos como extremos los intervalos cerrado [3, 5], abierto (3, 5), semiabierto por la izquierda (3, 5] y semiabierto por la derecha [3, 5).

La semirrecta cerrada $[3, -\infty)$ incluye todos los reales mayores o iguales que 3.

La semirrecta abierta $(5, +\infty)$ incluye todos los reales mayores que 5.

La semirrecta cerrada $(-\infty, 3]$ incluye todos los reales menores o iguales que 3.

La semirrecta abierta $(-\infty, 5)$ incluye todos los reales menores que 3. La recta $\mathbb{R}$ es $(-\infty, -\infty)$.

Los extremos se dibujan sobre la recta con un círculo relleno o vacío según estén o no incluidos, respectivamente.

1. EXPRESIONES DECIMALES.

Véase N.3.1.3.

2. NUMEROS REALES.

Véase N.3.1.4.

Los conjuntos numéricos cumplen la siguiente inclusión $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Los números reales que no son racionales forman el conjunto de los irracionales $\mathbb{I}$, por lo tanto, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

3. EXPRESIÓN APROXIMADA DE UN NÚMERO REAL.

Véase N.3.1.5.

4. LA RECTA REAL. VALOR ABSOLUTO.

Véase N.3.1.6.

El valor absoluto de un número real es la distancia del punto de la recta que lo representa al origen.

Como se trata de una distancia es siempre positivo o nulo. La distancia entre dos puntos de la recta *a* y *b* es el valor absoluto de sus diferencia, es decir, $|a-b|$.

La función valor absoluto se define así: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Ejemplo: Los números reales que cumplen $|x| = 6$ son dos $\{-6, 6\}$. Los números reales cuyo valor absoluto es menor que 3 son los comprendidos entre -3 y 3.

5. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS.

Véase N.3.1.6.

Un entorno abierto de radio *r* centrado en *a* es el intervalo abierto $(a-r, a+r)$.

Si se incluyen los extremos el entorno se dice cerrado: $[a-r, a+r]$.

Utilizando el valor absoluto:

$(a-r, a+r) \equiv |x-a| < r$ y $[a-r, a+r] \equiv |x-a| \leq r$.

Ejemplo: el entorno abierto centrado en 4 de radio 2 es $|x-4| < 2$ que equivale al intervalo abierto $(4-2, 4+2) = (2, 6)$. En efecto, $-2 < x-4 < 2 \rightarrow -2+4 < x-4+4 < 2+4 \rightarrow 2 < x < 6$.

Los números reales cuyo valor absoluto es mayor que 3 son los pertenecientes a las semirrectas $(-\infty, -3)$ y $(3, +\infty)$ que juntas se representan como $(-\infty, -3) \cup (3, -\infty)$, cuyo complemento en la recta es el intervalo cerrado $[-3, 3]$, equivalente al entrono cerrado centrado en el origen de radio 3.

6. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Véase N.3.2.1.

7. RADICALES. POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO.

Véase N.3.2.2, N.3.2.3 y N.3.2.4.

8. OPERACIONES CON RADICALES.

Véase N.3.2.5 y N.3.2.6.

9. RADICALES SEMEJANTES. RACIONALIZACIÓN.

Dos radicales son semejantes si representan el mismo valor real. Si se multiplica o divide el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número se obtiene un radical equivalente: baste observar que, escritos con exponente fraccionarios, ambos exponentes son fracciones equivalentes.

Racionalizar una expresión fraccionaria con radicales es encontrar otra expresión equivalente cuyo denominador no contiene raíces. Los dos métodos más usuales son: **completar el radical** del denominador a exponente entero (cuando el denominador está factorizado) o **utilizar la expresión conjugada** (cuando el denominador es una suma o una resta con raíces cuadradas).

Ejemplo 1: Para $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ conseguimos "completar a entero" el exponente fraccionario del denominador multiplicando y dividiendo por $\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$. En efecto $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^{1+2}}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{3}$.

Ejemplo 2: $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ se racionaliza multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ y aplicando la identidad notable "suma por diferencia=diferencia de cuadrados": $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

☞ *Evita los siguientes errores frecuentes operando con radicales:*

$$\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b \qquad \sqrt{a \pm b} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \qquad \frac{\cancel{\sqrt{a}}}{\cancel{\sqrt{a}} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

10.LOGARITMO DE UN NÚMERO REAL. PROPIEDADES.

Dado un número real positivo a distinto de 1 se llama logaritmo en base a de un número N al exponente al hay que elevar la base para obtener dicho número.

Es decir, $\log_a N = b \iff a^b = N$.

Las bases más utilizadas son $a = 2$ (logaritmo binario), $a = 10$ (logaritmo decimal) y $a = e = 2'718281828\ldots$ (logaritmo neperiano o natural).

Ejemplo: $\log_2 64 = 6$ ya que $2^6 = 64$. $\log_{10} 10000 = 4$ ya que $10^4 = 10000$. $\log_e e^3 = 3$ ya que $e^3 = e^3$.

Los logaritmos de cualquier base a tienen las siguientes propiedades:

1) El logaritmo de la base es la unidad. $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$.
2) El logaritmo de la unidad en cualquier base es cero. $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$.
3) El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c = x + y$ ya que $b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
4) El logaritmo del cociente es la resta del los logaritmos del numerador y del denominador. $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c = x - y$ ya que $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
5) El logaritmo de la potencia es el exponente por el logaritmo de la base. $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ ya que $\log_a b^c = \log_a(b \cdot b \ldots b) = \log_a b + \log_a b + \cdots + \log_a b = c \log_a b$.
6) La relación existente entre los logaritmos de un mismo número *N* en distintas bases *a* y *b* es $\log_b N = \log_b a \cdot \log_a N$.

Las propiedades de los logaritmos permiten transformar expresiones algebraicas o numéricas de productos o cocientes en sumas y restas.

Ejemplo: Calcular el logaritmo decimal de $A = \frac{100bc^3}{\sqrt{d}}$. Aplicando la propiedad del cociente
$\log A = \log(100bc^3) - \log d^{\frac{1}{2}}$, aplicando la propiedad del producto
$\log A = \log(100bc^3) - \log d^{\frac{1}{2}} = \log 10^2 + \log b + \log c^3 - \log d^{\frac{1}{2}}$, aplicando la propiedad de la potencia
$\log A = \log(100bc^3) - \log d^{\frac{1}{2}} = \log 10^2 - \log b + \log c^3 - \log d^{\frac{1}{2}} = 2\log 10 + \log b + 3\log c - \frac{1}{2}\log d$.

Ejemplo: Sabiendo que $\log 2 \approx 0'3010$ calcular los logaritmos decimales de 20, 5, 0'2 y 1/16.
$\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 0'3010 + 1 \approx 1'3010$.
$\log 5 = \log(\frac{10}{2}) = \log 10 - \log 12 = 1 - 0'3010 \approx 0'6990$.
$\log 0'2 = \log(\frac{2}{10}) = \log 2 - \log 10 = 0'3010 - 1 \approx -0'6990$.
$\log(\frac{1}{16}) = \log(\frac{1}{2^4}) = \log 1 - 4\log 2 = 0 - 4 \cdot 0'3010 \approx -1'2040$.

Ejemplo: Calcular el logaritmo decimal de la base natural. $\log e = \ln 10 \cdot \ln e = \ln 10 \approx 2.3026$.

Igualmente permiten hacer "descender" expresiones en el exponente, facilitando la resolución de ecuaciones exponenciales.

Ejemplo: Resolver la ecuación $100 = 2^x$. Tomando logaritmos decimales en ambos lados de la expresión tenemos que $\log 100 = \log 2^x = x \cdot \log 2 \to x = \frac{\log 100}{\log 2} = \frac{\log 10^2}{\log 2} = \frac{2}{\log 2} \approx \frac{2}{0'3010} \approx 6'64$.

☞ *Evita los siguientes errores frecuentes operando con logaritmos:*

$$\ln(x+y) = \ln x + \ln y \qquad \ln(x-y) = \ln x - \ln y \qquad \ln(xy) = \ln x \ \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\ln x}{\ln y} \qquad \frac{\ln x}{\ln y} = \ln x - \ln y$$

1. MAGNITUDES Y CANTIDADES.

Cualquier cualidad que podemos medir se llama **magnitud**.
Para medir una magnitud comparamos su cantidad o valor con el de un patrón que llamamos **unidad** y determinamos el número de veces que lo contiene.

2. UNIDADES DE MEDIDA.

Las unidades del Sistema Internacional de Medidas son:

El metro para las longitudes.
El metro cuadrado para las superficies.
El metro cúbico para los volúmenes.
El gramo para las masas.
El litro para las capacidades.
El grado para los ángulos.
La hora para el tiempo.

Los múltiplos anteponen a la unidad los prefijos griegos
deca=diez, hecto=cien, kilo=mil, miria=diez mil
Los divisores anteponen a la unidad los prefijos latinos
deci=décima, centi=centésima, mili=milésima.
En el sistema sexagesimal los divisores del grado y la hora son el minuto y el segundo.
(*60 segundos=1 minuto; 60 minutos=1 hora/1 grado*)

3. UNIDADES DE LONGITUD.

El metro es *aproximadamente* la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre y con *exactitud* la distancia que recorre la luz en $\frac{1}{299792458}$ segundos.
Las unidades de longitud sirven para medir objetos unidimensionales o distancias entre puntos. Los múltiplos y divisores del metro son:

	milímetro	*centímetro*	*decímetro*	*metro*	*decámetro*	*hectómetro*	*kilómetro*
abreviatura	mm	cm	dm	m	dam	hm	km
valor (m)	0’001	0’01	0’1	1	10	100	1000

4. UNIDADES DE SUPERFICIE.

El metro cuadrado es la superficie de un cuadrado de un metro de lado.
Las unidades de superficie sirven para medir objetos bidimensionales (áreas).
Los múltiplos y divisores del metro cuadrado son:

	milímetro cuadrado	*centímetro cuadrado*	*decímetro cuadrado*	*metro cuadrado*	*decámetro cuadrado*	*hectómetro cuadrado*	*kilómetro cuadrado*
abreviatura	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	dam^2	hm^2	km^2
valor (m^2)	0’000001	0’0001	0’01	1	100	10000	1000000

Para la medición de fincas rústicas es frecuente usar como unidad el ***área***, equivalente al decámetro cuadrado, su múltiplo la ***hectárea*** ($1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10000 \; m^2$) y su divisor la ***centiárea***, equivalente a un metro cuadrado ($1 \text{ a} = 100 \text{ ca};\ 1 \text{ a} = 1 \; m^2$).

5. UNIDADES DE VOLUMEN.

El metro cúbico es el espacio que ocupa un cubo de un metro de arista.
Las unidades de volumen sirven para medir objetos tridimensionales.
Los múltiplos y divisores del metro cúbico son:

	milímetro cúbico	*centímetro cúbico*	*decímetro cúbico*	*metro cúbico*	*decámetro cúbico*	*hectómetro cúbico*	*kilómetro cúbico*
abreviatura	mm^3	cm^3	dm^3	m^3	dam^3	hm^3	Km^3
valor (m^3)	0’000000001	0’000001	0’001	1	1000	1000000	1000000000

6. UNIDADES DE CAPACIDAD Y DE MASA.

El litro es la unidad de capacidad. Las unidades de capacidad sirven para medir áridos (*trigo*), líquidos (*agua*) y gases (*neón*). Los múltiplos y divisores del litro son:

	mililitro	*centilitro*	*decilitro*	*litro*	*decálitro*	*hectólitro*	*kilólitro*
abreviatura	ml	cl	dl	l	dal	hl	kl
valor (l)	0’001	0’01	0’1	1	10	100	1000

El gramo es la unidad de masa y equivale a la masa de un mililitro de agua. Las unidades de masa sirven para medir cualquier objeto pesante. Los múltiplos y divisores del gramo son:

	miligramo	*centigramo*	*decigramo*	*gramo*	*decágramo*	*hectógramo*	*kilógramo*
abreviatura	mg	cg	dg	g	dag	hg	kg
valor (l)	0’001	0’01	0’1	1	10	100	1000

Múltiplos muy usados del kilogramo son la ***tonelada*** métrica (t) y el ***quintal*** métrico (q), equivalentes a 1000 y 100 kg respectivamente.

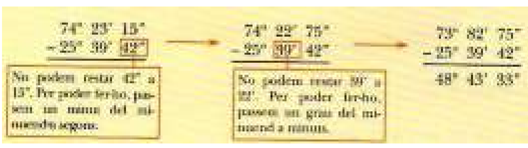
7. RELACION ENTRE VOLUMEN Y CAPACIDAD.

La equivalencia entre medidas de capacidad y volumen es la siguiente:

1 kilolitro equivale a 1 metro cúbico ($kl=m^3$).
1 litro equivale a 1 decímetro cúbico ($l=dm^3$).
1 mililitro equivale a 1 centímetro cúbico ($ml=cc=cm^3$).

Ejemplo: Un botella de vino de 75 cl. ocupa 0’75 dm^3

8. OPERACIONES EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL.



9. SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS DEL REINO DE VALENCIA EN EPOCA FORAL.

El sistema de pesos y medidas de época foral estuvo vigente desde 1240, creado por Jaime I el Conquistador, hasta mediados del siglo XIX y aún era usado por los labradores valencianos en la primera mitad del siglo XX. No era un sistema decimal.
Para las longitudes era antropomórfico.
Presentaba variaciones de carácter local y para determinados productos.

Medidas monetarias (*lliura, sou i diner*).
Medidas de longitud (*braça, alna, colze, pam, quart, dit, linea*).
Medidas de peso (*tona, càrrega, quintar, rova grossa i rova prima, lliura, unça, quart, argenç, gra).*
Medidas de peso para carne (*rova, lliura, unça).*
Medidas de peso para pescado, lino, cáñamo y seda (*càrrega, rova, lliura, unça).*
Medidas de superficie (*jovada, cafissada, fanecada, quartó i braça quadrada).*
Medidas de capacidad para áridos (*cafís, fanega, barcella, almut, quarteró)*
Medidas de capacidad para vino (*tonell, bóta, pipa, càrrega, cànter, quart, mitja)*
Medidas de capacidad para aceite (*càrrega, rova, lliura)*

Equivalencias.
1 lliura = 20 sous; 1 sou = 12 diners

1 braça = 9 pams; **1 alna = 4 pams = 0’906 m**.; 1 colze = 2 pams; 1 pam = 4 quarts
1 quart = 3 dits; 1 dit = 12 línees

1 tona = 8 càrregues; 1 càrrega = 10 roves grosses i 12 primes; 1 quintar = 4 roves primes

1 rova grossa = 36 lliures (para lana, especias y metales)
1 rova prima = 30 lliures (para el resto)
1 rova carnissera = 12 lliures carnisseres
1 rova pescatera = 24 lliures pescateres

1 lliura = 12 unces = 355 g.
1 lliura carnissera= 36 unces = 1065 g.
1 lliura pescatera= 18 unces = 532’5 g.

1 unça = 4 quarts; 1 quart = 4 argenços; 1 argenç = 36 grans

1 tonell = 100 pipes; 1 bóta = 60 cànters; 1 pipa = 40 cànters; 1 càrrega = 15 cànters
1 cànter = 4 quarts = 10’77 l. (vino); 1 quart = 2 mitges

1 càrrega = 12 roves
1 rova = 30 lliures = 11’93 l. (aceite); 1 lliura = 12 unces

1 cafís = 6 fanegues; 1 fanega = 2 barcelles; **1 barcella = 4 almuts = 16’75 l (áridos).**
1 almuts = 4 quarterons; 1 quarteró = 2 mitges.

1 jovada = 6 cafissades; 1 cafissada = 6 fanecades; **1 fanecada = 4 quartons = 831’09 m^2**
1 quartó = 50 braces quadrades; 1 braça quadrada = 81 pams quadrats.

1. RAZÓN Y PROPORCIÓN NUMÉRICA.

La **razón** entre dos números a y b es su cociente $\frac{a}{b}$ y expresa el número de veces que uno de ellos contiene al otro.

Ejemplo: Dos hermanos tienen 12 y 4 años. La razón de sus edades es $\frac{12}{4}$ lo que significa que el mayor tiene el triple de edad que el menor ya que 12 contiene exactamente tres veces a 4.

Una **proporción** es la igualdad de dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee "*a es a b como c es a d*". En una proporción hay 4 términos, dos extremos (a y d) y dos medios (b y c), y se verifica que *el producto de los extremos es igual al producto de los medios*.

Ejemplo: Las medidas en cm en el plano y en la realidad de una habitación guardan la siguiente proporción $\frac{1}{600} = \frac{6}{900}$. En efecto se cumple que $4 \cdot 900 = 6 \cdot 600 = 3600$ lo que significa que cada cm en el plano se corresponde con 150 cm en la realidad.

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

Dos magnitudes se dicen **directamente proporcionales** cuando al aumentar o disminuir una de ellas la otra aumenta o disminuye en la misma razón.

Ejemplo: El peso de la fruta y su coste total son magnitudes directamente proporcionales. Si 1 kg de fruta cuesta 2 €, 4 kg costarán 8 €. Hemos cuadruplicado la cantidad de fruta y se ha cuadruplicado el coste.

Cuando se expresan las cantidades de dos magnitudes en forma tabular, cada una de ellas en una fila, si las razones entre cantidades correspondientes se mantienen constantes las magnitudes son directamente proporcionales.
La constante se llama **razón de proporcionalidad**.

Ejemplo: De la venta de entradas en un cine sabemos que

Recaudación (€)	**45**	**135**	**360**	**450**
Nº entradas vendidas	10	30	80	100

Las magnitudes son directamente proporcionales y la razón de proporcionalidad es $\frac{45}{10} = \frac{135}{30} = \frac{150}{80} = \frac{450}{100} = 4'5$, que representa el precio de una entrada al cine.

3. REDUCCIÓN A LA UNIDAD. REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA.

Para resolver problemas donde intervienen dos magnitudes directamente proporcionales existen dos métodos:

1º) *Reducción a la unidad*. Consiste en averiguar el valor que corresponde a una unidad de una de las magnitudes para calcular el valor que corresponde a cualquier otra cantidad de dicha magnitud mediante una multiplicación.

2º) *Regla de tres simple directa*. Correspondientes a dos magnitudes, son conocidas tres de las cuatro cantidades que intervienen. Se colocan en la misma fila cada magnitud y sus cantidades llamando x a la desconocida. Se forma una proporción y se aplica la propiedad fundamental de las proporciones lo que permite averiguar la cantidad desconocida.

Ejemplo: Un automóvil consume 2’5 litros de gasolina en 50 km. Si quedan en el depósito 16 litros ¿cuántos km podrá recorrer sin repostar? Abordaremos la solución por los dos métodos. Obsérvese que las operaciones realizadas son las mismas.

REDUCCION A LA UNIDAD. Averiguamos cuántos km recorre con 1 litro de gasolina dividiendo $\frac{50}{2'5} = 20$ km. Ahora multiplicamos por 16, litros que nos quedan, para obtener el resultado final : $16 \cdot 20 = 320$ km.

REGLA DE TRES. Las magnitudes son gasolina y recorrido, las cantidades 2’5 y 16 litros, 50 y x km. Formamos la tabla y la proporción y aplicamos la regla fundamental:

Gasolina (l)	**2’5**	**16**
Recorrido (km)	50	x

$\frac{2'5}{50} = \frac{16}{x} \rightarrow 2'5 \cdot x = 50 \cdot 16 \rightarrow x = \frac{50 \cdot 16}{2'5} = 320$ km.

4. PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO.

Un **porcentaje o tanto por ciento** es una razón con denominador cien y expresa cuántas unidades se tienen de cada 100. Se expresa con el símbolo %.

Ejemplos. El 24’6% de la población activa española está en el paro. En el caso de los jóvenes de 15 a 25 años el porcentaje asciende al 55%. En Andalucía el porcentaje supera el 33%. Los bonos del Estado a 10 años producen un interés del 7’2% mientras que las letras del Tesoro a 6 meses se pagan al 3’25%. Las cuentas corrientes bancarias pagan un 0’1% de interés anual y cobran un 25% de intereses de descubierto.

Para las propiedades demográficas (natalidad, mortalidad), la composición de mezclas y la prevalencia de las enfermedades, entre otros, se suele utilizar el tanto por mil y se expresa con el símbolo $^{o}/_{oo}$.

Ejemplo. Las tasas de natalidad y mortalidad en España a comienzos del siglo XX eran del 34’9 $^{o}/_{oo}$ y del 26’6 $^{o}/_{oo}$. Su diferencia es la tasa de crecimiento vegetativo que en 1900 fue del 8’3 $^{o}/_{oo}$.

La salinidad de las aguas del Atlántico es del 35$^{o}/_{oo}$ mientras que las del Mediterráneo suben al 38$^{o}/_{oo}$.

5. CÁLCULO Y PROBLEMAS CON PORCENTAJES.

El **tanto por ciento de una cantidad** se calcula multiplicando por el tanto y dividiendo entre cien. El **tanto por mil de una cantidad** se calcula multiplicando por el tanto y dividiendo entre mil.

Para averiguar la cantidad total a la que corresponde un porcentaje podemos aplicar la regla de tres. Los **problemas con porcentajes** suelen plantear incrementos y disminuciones porcentuales de un precio o importe base. Se resuelven mediante reglas de tres en las que las dos magnitudes reflejan los precios *antes y después* de la variación.

Ejemplo: En un curso de 35 estudiantes el 60% son alumnas ¿Cuántas chicas hay?

El 60% de 35 es $60 \cdot 35 : 100 = 2100 : 100 = 21$ alumnas.

Ejemplo: La cifra de parados españoles asciende a 5 700 000 personas. Si representan un 25% de la población activa ¿Cuál es la población activa española?

El 25% de x es 5 700 000 luego $25 \cdot x : 100 = 5700000 \rightarrow x = 5700000 \cdot 100 : 25 = 22800000$ trabajadores.

Ejemplo: Margarita ha comprado un coche nuevo cuyo precio sin IVA es de 16 000 €. Como lo compró antes del 1 de septiembre de 2012 ha pagado un 18% de IVA. Si lo hubiera comprado después hubiera pagado un IVA del 21% . Calcula los precios totales y la diferencia. El 18% de 16000 es $18 \cdot 16000 : 100 = 288000 : 100 = 2880$ € de IVA. Precio total $16000 + 2880 = 18880$ €. El 21% de 16000 es $21 \cdot 16000 : 100 = 336000 : 100 = 3360$ € de IVA. Precio total $16000 + 3360 = 19360$ €. El ahorro es el 3% de 16000: $3 \cdot 16000 : 100 = 48000 : 100 = 480$ €.

Ejemplo: Narciso ha aprovechado las rebajas para comprar una camisa cuyo precio era de 55 €. Si le han hecho un descuento del 40% ¿cuánto ha pagado por la camisa?. Ha pagado el 60% de 55: $60 \cdot 55 : 100 = 3300 : 100 = 33$ €.

1. PROPORCION NUMÉRICA.

Véase N.1.8.1.

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

Véase N.1.8.2.

3. REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

Para repartir una cantidad de forma directamente proporcional a otras tres o más cantidades se procede de la siguiente forma:

1) Se calcula la constante de proporcionalidad como razón entre la cantidad a repartir y la suma de las otras cantidades.
2) Se multiplica dicha razón por cada una de las otras cantidades siendo los resultados el reparto a realizar.
3) Se comprueba que el reparto es correcto: la cantidad es la suma de los resultados.

Ejemplo: El sultán Omar desea repartir 105 camellos de forma proporcional a la edad de sus tres hijos Ali, Ben i Bufat que son respectivamente 6, 7 y 8 años. Hallamos la constante de proporcionalidad que será $k=\frac{105}{6+7+8}=\frac{105}{21}=5$. Como Alí tiene 6 años recibirá $6k=6\cdot 5=30$ camellos, Ben recibirá $7k=7\cdot 5=35$ y Bufat recibirá $8k=8\cdot 5=40$. Comprobamos que la suma da la totalidad de los camellos: $30+35+40=105$ camellos.

4. TANTO POR CIENTO O PORCENTAJE.

Véase N.1.8.4.

5. VARIACIONES PORCENTUALES.

Véase N.1.8.5.

6. INTERES SIMPLE.

El beneficio que produce el dinero se llama **rédito o interés**. La cantidad que se invierte se llama **capital** y el porcentaje que permite calcular el interés se llama **tipo de interés**.

Interés simple es el que produce un depósito bancario y se caracteriza por no reinvertir los réditos. **Interés compuesto** es el que produce un préstamo y se caracteriza por reinvertir los réditos, es decir, los intereses generan a su vez intereses.

Para calcular el interés simple *i* se multiplica el capital *C* por el tipo de interés anual *r* y por la fracción de año *t* que ha permanecido invertido: $i=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}$.

Si el tiempo se expresa en meses o en días la fórmula es: $i=\frac{C\cdot r\cdot t}{1200}$ ó $i=\frac{C\cdot r\cdot t}{36000}$.

☞ *La banca considera años de 360 días para pagar intereses y de 365 días para cobrarlos.*

Ejemplo: Pelayo ha invertido 60 000 € en letras del Tesoro con vencimiento 1 año a un tipo de interés simple del 3’25% anual ¿Cuánto recibirá de rédito? Recibirá $i=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}=\frac{60000\cdot 3'25\cdot 1}{100}=1950$ €.

7. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

Dos magnitudes se dicen **inversamente proporcionales** cuando al aumentar o disminuir una de ellas la otra disminuye o aumenta en la misma razón.

Ejemplo: El número de días que cuesta finalizar una obra y el número de obreros que intervienen en ella son magnitudes inversamente proporcionales.

Cuando se expresan las cantidades de dos magnitudes en forma tabular, cada una de ellas en una fila, si los productos de cantidades correspondientes se mantienen constantes las magnitudes son inversamente proporcionales. La constante se llama **razón de proporcionalidad inversa**.

Ejemplo: De la presión y temperatura de un gas sabemos que

Presión (mm Hg)	**500**	**1000**	**1500**	**2000**
Temperatura (ºK)	300	150	100	75

Las magnitudes son inversamente proporcionales y la razón de proporcionalidad es $500 \cdot 300 = 1000 \cdot 150 = 1500 \cdot 100 = 2000 \cdot 75 = 150000$.

8. REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

Para repartir una cantidad de forma inversamente proporcional a otras tres o más cantidades se reparte la cantidad de forma directamente proporcional a los inversos de las otras cantidades.

Ejemplo: Repartir 468 en partes inversamente proporcionales a 5, 6 y 15. Replanteamos el problema como un reparto directamente proporcional de 468 a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{15}$. Calculamos $k = \frac{468}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}} = \frac{468}{\frac{6}{30}+\frac{5}{30}+\frac{2}{30}} = \frac{468 \cdot 30}{13} = 36 \cdot 30 = 1080$. Multiplicamos la constante por cada inverso para obtener el resultado: $1080 \cdot \frac{1}{5} = 216$, $1080 \cdot \frac{1}{6} = 180$ y $1080 \cdot \frac{1}{15} = 72$. Comprobamos que las partes suman la cantidad total: $216 + 180 + 72 = 468$.

Ejemplo: Villalba y Villazur han de contribuir a sufragar la obra de un puente que cuesta 110 000€ de manera inversamente proporcional a la distancia de cada pueblo al puente. Si Villalba está a 8 km y Villazur a 12 km ¿Cuánto pagará cada pueblo?

Repartimos 110 000 de forma directamente proporcional a $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$:

La constante es $k = \frac{110000}{\frac{1}{8}-\frac{1}{12}} = \frac{110000}{\frac{3}{24}-\frac{2}{24}} = \frac{24 \cdot 110000}{3+2} = \frac{2640000}{5} = 528000$ y en el reparto corresponde a Villalba $528000 \cdot \frac{1}{8} = 66000$ € y a Villazur $528000 \cdot \frac{1}{12} = 44000$ €. La suma total es $66000 + 44000 = 110000$ €.

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Dos magnitudes se dicen **directamente proporcionales** si el cociente de las cantidades correspondientes es un valor fijo, la *constante de proporcionalidad*.

Si al aumentar una magnitud la otra también aumenta la proporcionalidad puede ser directa; si la otra disminuye puede ser inversa.

Ej: Adalberto cambia el mismo día y en la misma oficina bancaria 90£ y 150£ obteniendo por ellas 105’30 € y 175’50€, respectivamente. Las cantidades monetarias en libras y euros guardan proporción directa ya que a más libras más euros y la constante de proporcionalidad es el cambio: $\frac{105'3}{90} = \frac{175'5}{150} = 1'17$€/£.

2. REPARTOS PROPORCIONALES DIRECTOS.

Se basan en la propiedad de que al sumar cantidades de dos magnitudes directamente proporcionales las sumas correspondientes también son directamente proporcionales y con la misma constante de proporcionalidad.

En la proporción escribiremos las cantidades correspondientes de magnitudes directamente proporcionales en la misma parte de la fracción, bien arriba bien abajo.

Repartir una cantidad *M* **en proporción directa** a las cantidades *a, b y c* consiste en resolver el problema de magnitudes directamente proporcionales siguiente:

M	***x***	***y***	***z***
a+b+c	*a*	*b*	*c*

es decir, $\frac{M}{a+b+c} = \frac{x}{a}$, $\frac{M}{a+b+c} = \frac{y}{b}$ y $\frac{M}{a+b+c} = \frac{z}{a}$.

Ej: La sociedad anónima Gamba Fresca tiene dos socios, Belisario y Celedonio, que aportaron un capital de 3.000 € y 5.000€ en su constitución, respectivamente. En 2011 Gamba Fresca obtuvo un beneficio de 2.400€ ¿Cómo se ha de distribuir la ganancia?
La solución es la proporción $\frac{3000}{x} = \frac{5000}{y} = \frac{3000+5000}{2400}$ de donde los beneficios de Belisario son $x = \frac{3000 \cdot 2400}{8000} = 900$€ y los de Celedonio $y = \frac{5000 \cdot 2400}{8000} = 1500$€.

3. PORCENTAJES Y PROPORCIONALIDAD. PROBLEMAS.

La proporcionalidad directa se expresa en porcentajes o tantos por ciento.
El **tanto por uno** se obtiene al expresar la constante en forma decimal.
El **tanto por ciento** se obtiene multiplicando el tanto por uno por 100.

Ej: ¿Qué porcentaje sobre el capital supuso el beneficio de 2011 en la sociedad anónima Gamba Fresca?
El tanto por uno sería $\frac{2400}{8000} = \frac{1}{3} = 0'\hat{3}$ que se corresponde con un $0'\hat{3} = 33'\hat{3}\%$ del capital.

Si a la cantidad c se le aplica un **incremento** del $r\%$ el resultado final es $c \cdot (1 + \frac{r}{100})$.
Si a la cantidad c se le aplica un **decremento** del $r\%$ el resultado final es $c \cdot (1 - \frac{r}{100})$

Ej: El gobierno socialista rebajó en mayo de 2010 el sueldo de los profesores un 7’5%. Si el profesor Dionisio ganaba 1.800 € al mes. ¿Cuánto gana ahora?
Sueldo rebajado=$1800 \cdot (1 - \frac{7'5}{100}) = 1800 \cdot 0'925$ =1.665 €.

Si a una cantidad c se le aplica una **variación** del $r_1\%$ y a continuación otra variación del $r_2\%$ el resultado final es $c \cdot (\frac{1+r_1}{100}) \cdot (\frac{1+r_2}{100})$.

Ej: Si en el fututo le subieran el salario a Dionisio un 7’5% ¿cuánto ganará?
¿Por qué no volverá a ganar 1.800 €?
Posible sueldo futuro=$1665 \cdot (1 + \frac{7'5}{100}) = 1665 \cdot 1'075$ =1.789’875 €.
Observa que el tanto por uno encadenado es $(1 - \frac{7'5}{100})(1 + \frac{7'5}{100}) = 0'925 \cdot 1'075 = 0'991375 < 1$.

4. PROPORCIONALIDAD INVERSA.

Dos magnitudes se dicen **inversamente proporcionales** si el producto de las cantidades correspondientes es un valor fijo, la *constante de proporcionalidad inversa*.
En la proporción escribiremos las cantidades correspondientes de magnitudes inv. proporcionales en distinta parte de la fracción: una, arriba; la otra, abajo.

Ej: Tres pintores pintan un edificio en 60 jornadas. ¿Cuánto tardarían 5 pintores? La cantidad de trabajo necesaria para pintar el edificio, medida en días-hombre, es la constante de proporcionalidad inversa. Se cumple que $3 \cdot 60 = 180 = 5 \cdot x \to x = \frac{180}{5} = 36$ jornadas será el tiempo empleado por la cuadrilla de 5.

5. REPARTOS PROPORCIONALES INVERSOS.

Hacer un reparto proporcionalmente inverso a las cantidades a , b y c es hacer un reparto proporcional directo a las cantidades $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$.

Ej: Eulogio desea repartir 18.600€ entre sus tres sobrinos Facundo, Gaudencio e Hilario, de manera inversamente proporcional a sus sueldos mensuales que son, respectivamente, de 600€, 900€ y 1.200€ ¿Cuánto recibirá cada sobrino? Solución: Sumamos los inversos de los sueldos $\frac{1}{600} + \frac{1}{900} + \frac{1}{1500} = \frac{15+10+6}{9000} = \frac{31}{9000}$. Se trata de repartir por cada 31 €, 15€ para Facundo, 10€ para Gaudencio y 6€ para Hilario. Es decir, $\frac{15}{x} = \frac{10}{y} = \frac{6}{z} = \frac{31}{18600}$,
de donde $x = \frac{18600 \cdot 15}{31} = 600 \cdot 15 = 9000$€ para Facundo,
$y = \frac{18600 \cdot 10}{31} = 600 \cdot 10 = 6000$€ para Gaudencio y $z = \frac{18600 \cdot 6}{31} = 600 \cdot 6 = 3600$€ para Hilario.

6. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA.

Intervienen al menos 3 magnitudes que guardan 2 a 2 proporcionalidades directas o inversas. Con tres magnitudes se plantean tres posibles casos: proporcionalidad compuesta directa-directa, directa-inversa e inversa-inversa.

Los problemas de proporcionalidad compuesta se pueden resolver por reducción a la unidad o aplicando la **regla de tres compuesta**:

1) Se compara cada magnitud con la que presenta la incógnita para decidir si la proporción entre ellas es directa o inversa.
2) Se establece una razón con la magnitud incógnita y se iguala a otra que es el producto de las razones de las otras dos magnitudes. Estas se escriben en la misma parte de la fracción si es directa o al contrario si es inversa.

METODO DE REDUCCION A LA UNIDAD

PROPORCIONALIDAD DIRECTA-DIRECTA. El hotel T-Torras de Benidorm cobró a 4 parejas de recién casados 1.200€ por 5 días de alojamiento. ¿Cuánto cobrará a 7 parejas por 10 días de alojamiento?
A más días más coste. A más huéspedes más coste. La magnitud huésped y la magnitud estancia guardan relación directamente proporcional con el coste.
Se plantea $\frac{1200}{4\cdot 5} = \frac{x}{7\cdot 10}$ de donde $x = \frac{7\cdot 10\cdot 1200}{4\cdot 5} = 70\cdot 60 = 4200$ €.
La cantidad $\frac{1200}{20} = 60$€ representa el coste diario del alojamiento de una pareja.

PROPORCIONALIDAD INVERSA-INVERSA. Levantar la estructura del edificio IN ILLO TEMPORE ha costado el esfuerzo de 6 obreros durante 500 jornadas de 8 horas de trabajo. Si hubieran participado 10 obreros a razón de 10 horas diarias ¿cuántas jornadas habrían tardado?
A más horas menos jornadas. A más obreros menos jornadas. La magnitud horario y la magnitud número de obreros guardan relación inversamente proporcional con las jornadas a emplear en la construcción.
Se plantea $6\cdot 8\cdot 500 = 10\cdot 10\cdot x$ de donde $x = \frac{6\cdot 8\cdot 500}{10\cdot 10} = 48\cdot 5 = 240$ jornadas.
La cantidad $6\cdot 8\cdot 500 = 24000$ horas-hombre representa el esfuerzo total para levantar el edificio.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA-INVERSA. Un peregrino recorrió 480 Km del camino de Santiago en 20 días caminando 6 horas diarias. Si este año planea ampliar el recorrido a 720 Km, caminando 8 horas diarias ¿cuántos días tardará?
A más horas diarias menos días de peregrinación. A más distancia más días de peregrinación. La magnitud horario de caminata es inversamente proporcional a la duración del peregrinaje mientras que el recorrido es directamente proporcional. Se plantea $\frac{480}{20\cdot 6} = 4 = \frac{720}{x\cdot 8}$ de donde $x = \frac{720}{4\cdot 8} = 22'5$ días de peregrinación.
La cantidad $\frac{480}{20\cdot 6} = 4$ Km/h representa la velocidad media del peregrino caminando.

METODO DE REGLA DE TRES COMPUESTA

Clientes	**4**	**7**
Factura	1200	x
Días	5	10

Clientes-Factura: Directa
Días-Factura: Directa
$\frac{1200}{x} = \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{10} = \frac{20}{70} \rightarrow x = \frac{70}{20}\cdot 1200 = 4200$ €

Obreros	**6**	**10**
Jornadas	500	x
Horario	8	10

Obreros-Jornadas: Inversa
Horas-Jornadas: Inversa
$\frac{500}{x} = \frac{10}{6}\cdot\frac{10}{8} = \frac{100}{48} \rightarrow x = \frac{500}{100}\cdot 48 = 240$ días

Distancia	**480**	**720**
Jornadas	20	x
Horario	6	8

Distancia-Jornadas: Directa
Horas-Jornadas: Inversa
$\frac{20}{x} = \frac{480}{720}\cdot\frac{8}{6} = \frac{80}{90} \rightarrow x = \frac{20}{80}\cdot 90 = 22'5$ días

1. REGULARIDADES Y SUCESIONES.

Una secuencia de números presenta una **regularidad** si a la vista de unos pocos se pueden obtener los demás.

Ejemplo: En $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7} \ldots$ la secuencia continua con $\frac{5}{9}$ porque para obtener el siguiente arriba sumamos 1 y abajo sumamos 2.

Una **sucesión** es una correspondencia que a cada número natural n asocia un número real a_n.
La sucesión se representa $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ y de forma simplificada $\{a_n\}$.
Cada número se llama **término**. El subíndice expresa el lugar que ocupa.

Ejemplos: La sucesión de los cuadrados de los números naturales es $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\} = \{1, 4, 9, \ldots\}$.
El término que continúa seria el cuarto y valdría $a_4 = 4^2 = 16$.
La sucesión "Potencias de 2" se usa mucho en Informática y es $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\} = \{1, 4, 8, 16, \ldots\}$. Los términos décimo, vigésimo, trigésimo, cuadragésimo, cuando se utilizan como medidas de capacidad de memoria, reciben el nombre *kilobyte, megabyte, gigabyte* y *terabyte* (KB, MB, GB y TB) y son respectivamente $a_{10} = 2^{10} = 1.024$, $a_{20} = 2^{20} = 1'048.576$, $a_{30} = 2^{30} = 1.073'741.824$, $a_{40} = 2^{40} = 1''099.511'627.776$La sucesión $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\} = \{1'9, 1'99, 1'999, \ldots\}$ en la que el subíndice o lugar que ocupa el término señala el número de decimales 9 que contiene, define el número real 2 mediante aproximaciones por defecto. La sucesión $\{a_1, a_2, a_3 \ldots\} = \{1'7, 1'67, 1'667, \ldots\}$ define el racional $\frac{5}{3}$ con aproximaciones por exceso redondeadas.

2. TERMINO GENERAL. SUCESIONES RECURRENTES.

El término que ocupa el lugar enésimo es el **término general** y su expresión permite calcular cualquier término de la sucesión sabiendo el lugar que ocupa.

Ejemplos: En $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7} \ldots\}$ el numerador se obtiene sumando 1 al lugar que ocupa mientras que el denominador se obtiene multiplicando por 2 y sumando 1, por tanto, $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$.
La sucesión de los múltiplos de 5, es decir, los resultados de la tabla del 5 tiene término general $5n$.

Una sucesión se dice **recurrente** cuando sus términos pueden calcularse a *partir de los anteriores conocidos* mediante una expresión algebraica.

Ejemplo: En $\{1'9, 1'99, 1'999, \ldots\}$ un término se obtiene sumando 9 unidades decimales del lugar que ocupa al término anterior partiendo de 1'9 luego $a_1 = 1'9$, $a_n = a_{n-1} + 9 \cdot 10^{-n}$ para $n \geq 2$.
En $\{1'7, 1'67, 1'667, \ldots\}$ un término se obtiene restando del término anterior 1 unidad decimal del lugar anterior al que ocupa y sumando 7 unidades decimales del lugar que ocupa, partiendo de 1'7 luego $a_1 = 1'7$, $a_n = a_{n-1} - 10^{-n+1} + 7 \cdot 10^{-n}$ para $n \geq 2$.
La sucesión de Fibonacci se define a partir de los dos primeros términos $a_1 = a_2 = 1$ y de la fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$, con la que cada término se construye como la suma de los dos anteriores.
La sucesión es {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...}.

3. OPERACIONES CON SUCESIONES.

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ y un número real k se pueden construir las siguientes sucesiones: producto de un número y una sucesión$\{k \cdot a_n\}$, suma de dos sucesiones $\{a_n + b_n\}$ y producto de dos sucesiones $\{a_n \cdot b_n\}$.

4. PROGRESIONES ARITMETICAS.

Una sucesión $\{a_n\}$ es una **progresión aritmética** si cada término se obtiene del anterior sumando una cantidad fija d, la diferencia.

El **término general** de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Ejemplos: La sucesión más sencilla, la de los números naturales, es una progresión aritmética de diferencia 1. La sucesión de los números enteros pares positivos es una progresión aritmética de diferencia 2, al igual que la sucesión de los números enteros impares positivos. Los términos generales son $a_n = n$, $b_n = 2n$, $c_n = 2n-1$ respectivamente porque $a_1 = c_1 = 1$, $b_1 = 2$ y las diferencias son 1, 2 y 2 respectivamente con lo que las fórmulas quedan $a_n = 1 + (n-1)1 = 1 + n - 1 = n$, $b_n = 2 + (n-1)2 = 2 + 2n - 2 = 2n$ y $c_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$.

5. SUMA DE TERMINOS CONSECUTIVOS DE UNA PROGRESION ARITMETICA.

La **suma** de los primeros n términos de una progresión aritmética es $S_n = \frac{a_1 \cdot a_n}{2} n$.

Para demostrar esta fórmula sea $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ la suma buscada. Entonces también es $S_n = a_n + \cdots + a_2 + a_1$ y sumando ambas igualdades término a término se obtiene $S_n + S_n = 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)$.

Pero los n términos de esta suma valen todos lo mismo, $a_1 + a_n$, ya que por ejemplo $a_2 + a_{n-1} = a_1 + \cancel{d} + a_n - \cancel{d} = a_1 + a_n$. Luego es $2S_n = n(a_1 + a_n)$.

Ejemplos: La suma de los 100 primeros naturales es 5.050, la suma de los primeros 50 pares es 2.550 y de los 25 primeros impares es 625. En efecto $S_{100} = \frac{1+100}{2}\cdot 100 = 101 \cdot 50 = 5050$, $S_{50} = \frac{2+100}{2}\cdot 50 = 51\cdot 50 = 2550$ y $S_{25} = \frac{1+49}{2}\cdot 25 = 25 \cdot 25 = 625$.

6. PROGRESIONES GEOMETRICAS.

Una sucesión $\{a_n\}$ es una **progresión geométrica** si cada término se obtiene del anterior multiplicado por una cantidad fija r, la razón.

El **término general** de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Ejemplos: Las potencias positivas de 10 forman una progresión geométrica de razón 10: {10, 100, 1000, ...}.
Las potencias negativas de 10 forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{10}$: $\{\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\}$.
Las potencias de 2 forman una progresión geométrica de razón 2: {2, 4, 8, 16, ...}.

7. SUMA DE TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA.

La **suma** de los primeros n términos de una progresión geométrica es $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$.
Para el cálculo es necesario que $r \neq 1$. La progresión geométrica con $r = 1$ tiene $S_n = n$.
Si $|r| < 1$ se puede calcular la suma infinita $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$.

Para demostrar esta fórmula sea $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}$ la suma buscada. Entonces $S_n r = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n$ y restando de ésta expresión la primera queda $S_n r - S_n = S_n(r-1) = a_1 r^n - a_1 = a_n r - a_1 \to S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$.

Ejemplos: La suma de las primeras 10 potencias de 2 es 2046, en efecto $S_{10} = \frac{2^{10}\cdot 2 - 2}{2-1} = 2^{11} - 2 = 2046$.
La suma infinita de las potencias de ½ es $S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. La suma de las n primeras potencias negativas de 10 es

$$S_n = \frac{(\frac{1}{10})^n\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}-1} = \frac{\frac{1}{10^{n+1}}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}-\frac{10}{10}} = \frac{(1-10^n)10}{10^{n+1}(1-10)} = \frac{1-10^n}{-9\cdot 10^n} = \frac{10^n-1}{9\cdot 10^n} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9\cdot 10^n} = \frac{1}{9}(1-10^{-n}).$$

1. VARIABLES Y CONSTANTES.

Cuando de una cantidad no está determinado su valor éste se representa con una letra.
Si la cantidad siempre vale lo mismo dicha letra es una **constante**.
Si puede cambiar su valor la llamaremos **variable**.

Ejemplos: La razón de la longitud de cualquier circunferencia a su diámetro es siempre la constante π.
En un triángulo podemos representar la medida de su base y de su altura por las variables b y h.

Cuando combinamos letras, números y operaciones aritméticas estamos usando el lenguaje algebraico para expresar informaciones numéricas.

Ejemplos: La longitud de una circunferencia de radio variable r es la expresión $2 \cdot \pi \cdot r$.
El área de un triángulo cuya base y altura valen b y h se calcula con la expresión $\frac{b \cdot h}{2}$.

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras ligados mediante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potenciación.
Las letras conforman la *parte literal*; los números, el *coeficiente*.

Ejemplo: La expresión algebraica $3xyz^2 = 3 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z$ tiene coeficiente 3 y parte literal xyz^2.

3. VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA.

Para obtener el valor de una expresión algebraica necesitamos conocer el valor que toman cada una de las letras que intervienen y realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potenciación indicadas en la expresión.

Ejemplo: En un triángulo de base 8 cm y altura 6 cm el área vale $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ cm^2.

4. SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Dos expresiones algebraicas se pueden sumar y restar si tienen la misma parte literal.
Para ello se suman o restan los coeficientes y se yuxtapone la parte literal.

Ejemplos: La suma de $3xy$ más $7xy$ vale $3xy + 7xy = 10xy$ ya que sumamos los coeficientes 3 y 7 y añadimos la parte literal xy. No podemos sumar $3xy^2$ más $7x^2y$ porque sus partes literales no son iguales $xy^2 = xyy \neq xxy = x^2y$.

5. IGUALDADES E IDENTIDADES. ECUACIONES.

Dos expresiones algebraicas unidas mediante el signo de la igualdad forman una **identidad** si *siempre es cierta* la igualdad, con independencia del valor que tomen las variables.
Cuando solo es *cierta para algunos valores* de las variables forman una **ecuación**.

Ejemplo: La igualdad $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ es una identidad porque se cumple para cualquier valor de x.
La igualdad $-1 = x^2 - 2x$ es una ecuación porque solo se cumple para $x = -1$.

6. SOLUCIONES DE UNA ECUACION.

Las letras o variables de una ecuación se llaman **incógnitas**.
Resolver una ecuación es hallar el valor de las incógnitas que hacen que la igualdad sea cierta. Estos valores se llaman **soluciones**.

Ejemplo: La ecuación $2x+5=1$ tiene de incógnita la letra x y su solución es $x=-2$ porque $2\cdot(-2)+5=-4+5=1$.

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo: Las ecuaciones $2x+5=1$ y $4x-4=-12$ son equivalentes porque su solución es $x=-2$.

7. REGLAS DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO. RESOLUCION DE ECUACIONES.

Si sumamos o restamos una misma cantidad en ambos lados de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

☞ *Esta regla equivale a decir "lo que está sumado (a la incógnita) pasa al otro lado restando y viceversa".* Ejemplo: La ecuación $2x+5=1$ es equivalente a $2x=-4$ porque la hemos obtenido restando 5 en ambos lados.

Si multiplicamos o dividimos por una misma cantidad en ambos lados de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

☞ *Esta regla equivale a decir "lo que está multiplicado (a la incógnita) pasa al otro lado dividiendo y viceversa".* Ej.: La ecuación $2x=-4$ es equivalente a $x=-2$ porque la hemos obtenido dividiendo entre 2 ambos lados.

En resumen, cualquier operación aritmética que se haga en un lado de la ecuación ha de realizarse idénticamente en el otro lado de la ecuación.

Para resolver una ecuación se seguirán los siguientes pasos:
1º) Quitar los paréntesis aplicando la propiedad distributiva.
2º) Quitar los denominadores *aplicando la regla del producto* con un múltiplo común.
3º) Operar y simplificar los términos.
4º) Trasponer los términos semejantes al mismo lado de la ecuación *usando la regla de la suma*. Sumar los términos semejantes.
5º) Despejar la incógnita *aplicando la regla del producto* al coeficiente de la incógnita.

Ejemplo: Resolver la ecuación $3\cdot(x-7)=5\cdot(x-1)-4x$.
Quitamos los paréntesis: $3x-21=5x-5-4x$
Operamos y simplificamos los términos: $3x \quad 21-\underbrace{5x \quad 4x} \quad 5-x \quad 5$.

Transponemos las incógnitas a la izquierda, los números a la derecha y sumamos: $3x-x=21-5\rightarrow 2x=16$.
Aplicamos la regla del producto y despejamos la incógnita: $x=\frac{16}{2}=8$.

Ejemplo: Resolver la ecuación $\frac{x}{4}+\frac{5}{2}-\frac{x}{6}=5$.
Quitamos denominadores multiplicando por m.c.m(4,2,6)=12: $\frac{12x}{4}+\frac{12\cdot 5}{2}-\frac{12x}{6}=12\cdot 5\rightarrow 3x+30-2x=60$
Operamos y simplificamos los términos: $\underbrace{3x-2x}-30=x-30=60$

Transponemos las incógnitas a la izquierda, los números a la derecha y sumamos: $x=60-30=30$.
La incógnita queda despejada: $x=30$.

1. NÚMEROS Y LETRAS. USO DE LETRAS PARA EXPRESAR PROPIEDADES Y RELACIONES. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

En una expresión con letras éstas pueden representar cualquier número.
Las propiedades de los objetos matemáticos se pueden expresar de forma abreviada utilizando letras, números y signos de operaciones.

Ejemplo: Los triángulos planos tiene la propiedad de que la suma de sus tres ángulos son dos rectos lo cual se expresa así:
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$.

Con letras expresamos de forma concisa las relaciones entre magnitudes. Las expresiones literales que se obtienen se llaman **fórmulas**.

Ejemplo: La fórmula l^2 permite calcular el área de cualquier cuadrado asignado un valor a la medida de su lado l. Así el cuadrado de lado $l = 7$ m tiene un área de $l^2 = 7^2 = 49$ m^2

Véase A.3.5.1.

2. VALOR NUMERICO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA.

Véase A.3.5.2.

3. MONOMIOS Y POLINOMIOS.

Véase A.3.5.3 y A.3.5.4.

4. OPERACIONES CON MONOMIOS.

Véase A.3.5.3.

5. OPERACIONES CON POLINOMIOS.

Véase A.3.5.6.
Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio entre el monomio divisor. El resultado no siempre es otro polinomio.

Ejemplo: $(x^4 - 2x^2 z) : 2x^3 = (x^4 : 2x^3) - (2x^2 z : 2x^3) = x : 2 - z : x$.

6. POTENCIAS DE POLINOMIOS. IGUALDADES NOTABLES.

Véase A.3.5.7.

1. IGUALDADES Y ECUACIONES.

Véase A.3.6.1.

2. SOLUCIONES DE UNA ECUACION.

Véase A.3.6.1 y A.3.6.2.

3. REGLAS DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO.

Véase A.3.6.2.

4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Véase A.3.6.3.

5. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Véase A.3.6.4, A.3.6.5 y A.3.6.6.

6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES.

Véase A.3.7.2 y A.3.7.3.

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.
Las letras se llaman **variables o incógnitas**. Se suelen representar en Matemáticas con las minúsculas x, y, z, t, u, v, w.

Ejemplos: La expresión $2b + 2h$ permite calcular el perímetro de un rectángulo de base b y altura h.
La expresión $0'21p$ permite calcular el 21% de IVA de un artículo de precio p.
La expresión $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ nos da la distancia al cuadrado entre dos puntos del plano de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La expresión $\frac{4\pi r^3}{3}$ da el volumen de una esfera de radio r.
La expresión $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ nos da la media aritmética de tres cantidades x_1, x_2, x_3.
La expresión $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ da el número de permutaciones de n elementos.

2. VALOR NUMERICO DE UNA EXPRESION. EXPRESIONES EQUIVALENTES.

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las variables por valores concretos y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplos: El perímetro de un rectángulo de base $b = 3$ y altura $h = 5$ es $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$.
El IVA de un reloj de precio $p = 200$€ es $0'21 \cdot 200 = 42$€. La distancia al cuadrado entre los puntos $(2, 3)$ y $(-1, -2)$ es $[2-(-1)]^2 + [3-(-2)]^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$.
El volumen de una canica de radio $r = 3$ cm es $\frac{4\pi 3^3}{3} = 4 \cdot 3^2 \cdot \pi = 36\pi$ cm.
La media aritmética de tres notas de 7, 8 y 10 es $\frac{7+8+10}{3} = \frac{25}{3} = 8'\hat{3}$.
Las distintas formas de ordenar 6 libros son las permutaciones de 6 elementos : $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Dos expresiones algebraicas son **equivalentes** si sus valores numéricos son iguales para cualquier sustitución de las variables.

Ejemplo: Las expresiones $(x+1)^2$ y $x^2 + 2x + 1$ son equivalentes dado que se puede comprobar que tienen siempre el mismo valor. Así, si $x = 0$, $(x+1)^2 = (0+1)^2 = 1 = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = x^2 + 2x + 1$ y de la misma forma si, por ejemplo, $x = 2$ tenemos $(x+1)^2 = (2+1)^2 = 9 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = x^2 + 2x + 1$.

3. MONOMIOS. OPERACIONES CON MONOMIOS.

Un **monomio** es un producto de cifras y letras.
Las cifras se llaman **coeficientes** y las letras, **parte literal**.
El **grado** del monomio es la cantidad de letras de su parte literal.

Ejemplo: $3xxyyy = 3x^2y^3$ es un monomio de grado 5 con coeficiente 3 y parte literal x^2y^3.

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Ejemplo: $-3x^2z$ y $5zx^2$ son monomios semejantes de grado 3 y parte literal x^2z.

Para **sumar y restar monomios semejantes** basta sumar y restar los coeficientes y yuxtaponer la parte literal común.

Ejemplo: $-3x^2z + 5zx^2 = (-3+5)xxz = 2xxz = 2x^2z$.

No se pueden sumar o restar monomios no semejantes.

Ejemplo: $-3x^2z$ y $5xz^2$ no se pueden sumar porque su parte literal no coincide: $xxz \neq xzz$.

Para **multiplicar y dividir** monomios se multiplican y dividen los coeficientes como números y las partes literales como potencias de la misma base para cada letra.

Ejemplos: Dados los monomios $5z$ y $250z^3$ su producto es $5z \cdot 250z^3 = (5 \cdot 250) \cdot (zz^3) = 1250z^4$ y su cociente $\frac{5z}{250z^3} = \frac{5}{250} \cdot \frac{z}{z^3} = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{1}{50z^2}$
Dados los monomios $36x^2z$ y $4xz$ su producto es $36x^2z \cdot 4xz = (36 \cdot 4) \cdot (x^2x) \cdot (zz) = 144x^3z^2$ y su cociente es $\frac{36x^2z}{4xz} = \frac{36}{4} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{z}{z} = 9 \cdot x \cdot 1 = 9x$.

4. POLINOMIOS.

Un **polinomio** es una suma indicada de monomios no semejantes.
El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de sus monomios.
Los polinomios de 2 y 3 monomios se llaman **binomios y trinomios**.
El monomio de grado cero se llama **término independiente**.

Ejemplo: $x^4 + 3x^2 + 1$ es un trinomio de grado 3 con término independiente igual a 1.

Un polinomio se dice **completo** si tiene todos sus términos hasta el grado.
Un polinomio se dice **ordenado** si lo están sus monomios según el grado.
Los polinomios se representan con letras mayúsculas a partir de la P, indicando entre paréntesis las variables: $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ ....

Ejemplos: $P(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ está ordenado pero es incompleto pues le faltan los términos en x^3 y x.
$Q(x) = x^2 + 4x + 4$ es un trinomio de segundo grado completo y ordenado con término independiente 4.
$R(x) = x^5 - 3x + x^2$ está desordenado e incompleto y no tiene término independiente.

5. SUMA Y DIFERENCIA DE POLINOMIOS.

Para **sumar y restar polinomios** basta sumar y restar los monomios semejantes.

Ejemplos:
$P(x) + Q(x) = (x^4 + 3x^2 + 1) + (x^2 + 4x + 4) = x^4 + (3x^2 + x^2) + 4x + (1 + 4) = x^4 + 4x^2 + 4x + 5.$
$Q(x) - R(x) = (x^2 + 4x + 4) - (x^5 + x^2 - 3x) = -x^5 + (x^2 - x^2) + [4x - (-3x)] + 4 = -x^5 + 7x + 4$

6. PRODUCTO DE POLINOMIOS.

Para **multiplicar dos polinomios** basta multiplicar cada monomio del primero por cada monomio del segundo y sumar los monomios semejantes que resulten.

Ejemplo: Como P y Q tiene 3 términos y grados 4 y 2, resultarán 9 sumandos y grado 6.
$P(x) \cdot Q(x) = (x^4 + 3x^2 - 1) \cdot (x^2 + 4x + 4) = x^4x^2 + x^4 \cdot 4x + x^4 \cdot 4 + 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot 4x + 3x^2 \cdot 4 + 1x^2 + 1 \cdot 4x + 1 \cdot 4 =$
$= x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^4 + 12x^3 + 12x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 4x + 4.$

7. POTENCIAS DE POLINOMIOS. IDENTIDADES NOTABLES.

Para **elevar un polinomio a una potencia** de exponente natural basta multiplicarlo por si mismo tantas veces como indica el exponente.

7.1 El **cuadrado de una suma** de dos términos es igual al cuadrado del 1º más el cuadrado del 2º *más* el doble del producto del 1º por el 2º.

7.2 El **cuadrado de una diferencia** de dos términos es igual al cuadrado del 1º más el cuadrado del 2º *menos* el doble del producto del 1º por el 2º.

7.3 La **suma por la diferencia** de dos términos es igual a la *diferencia* de sus *cuadrados*.

7.4 El **cuadrado de un trinomio** es igual al cuadrado del 1º más el cuadrado del 2º más el cuadrado del 3º más el doble del 1º por el 2º más el doble del 1º por el 3º más el doble del 2º por el 3º.

7.5 El **cubo de una suma** de dos términos es igual al cubo del 1º más el cubo del 2º más el triple del cuadrado del 1º por el 2º más el triple del cuadrado del 2º por el 1º.

Si los términos son a , b y c las identidades notables son las fórmulas:
$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$, $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ y
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$.

Ejemplo: Dados $a = x$ y $b = 1$ entonces $(x+1)^2 = x^2+1^2+2\cdot x\cdot 1 = x^2+2x+1$,
$(x-1)^2 = x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1 = x^2-2x+1$ y $(x+1)(x-1) = x^2-1^2 = x^2-1$.
Dado $S(x) = 2x+3$ entonces $S^4(x) = (2x+3)^4 = (2x+3)(2x+3)(2x+3)(2x+3)$ y haciendo uso del cuadrado de una suma como $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$; aplicando ahora el cuadrado de un trinomio será
$S^4(x) = (4x^2+12x+9)^2 = 16x^4+144x^2+81+96x^3+72x^2+216x = 16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$.

Demostraciones de las identidades notables aplicando la multiplicación.
1) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb = aa+2ab+bb = a^2+2ab+b^2$
2) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = aa-ab-ba+bb = aa-2ab+bb = a^2-2ab+b^2$
3) $(a+b)(a-b) = aa-\cancel{ab}+\cancel{ba}-bb = a^2-b^2$
4) $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc =$
$= aa+bb+cc+ab+ba+ac+ca+bc+cb = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
5) $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+b^2+2ab)(a+b) = a^2a+a^2b+b^2a+b^2b+2aba+2abb =$
$= a^3+a^2b+2a^2b+b^2a+2b^2a+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Ejemplo: Si $a = \sqrt{3}$ y $b = \frac{2}{3}$ entonces $(a+b)^2 = (\sqrt{3})^2+(\frac{2}{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = 3+\frac{4}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{27+4}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{31}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$,
$(a-b)^2 = (\sqrt{3})^2+(\frac{2}{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = 3+\frac{4}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{27+4}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{31}{9}-\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(\frac{31}{3}-4\sqrt{3})$.
$(a+b)(a-b) = (\sqrt{3}+\frac{2}{3})(\sqrt{3}-\frac{2}{3}) = (\sqrt{3})^2-(\frac{2}{3})^2 = 3-\frac{4}{9} = \frac{27-4}{9} = \frac{23}{9}$.

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS.

Véase A.3.5.1, A.3.5.2 y A.3.5.4.

2. OPERACIONES CON POLINOMIOS.

Véase A.3.5.5 y A.3.5.6 (suma, resta y multiplicación).
Véase A.3.5.7 (potencia).

Para **dividir** dos polinomios se divide el monomio de mayor grado del polinomio dividendo $D(x)$ entre el monomio de mayor grado del polinomio divisor $d(x)$, obteniendo el primer monomio del polinomio cociente $C(x)$. Este monomio se multiplica por el polinomio divisor y el resultado parcial se resta del polinomio dividendo, desapareciendo su monomio de mayor grado. Se continúa este procedimiento con el nuevo dividendo hasta que el resto $R(x)$ sea de grado inferior al grado del divisor.

En el algoritmo de la división se cumple que $D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$.

Ejemplo:

Dividir $D(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2x + 7$ entre $d(x) = 2x^2 - x - 1$.

La división comienza planteando el cociente de monomios $\frac{8x^3}{2x^2} = 4x$.

El cociente es $C(x) = 4x - 4$ y el resto $R(x) = 10x + 3$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -\,4x^2 & +\,2x & +\,7 & 2x^2 + x - 1 \\
\cline{5-5}
-8x^3 & -\,4x^2 & +\,4x & & 4x - 4 \\
\cline{1-4}
 & -\,8x^2 & +\,6x & +\,7 & \\
 & +\,8x^2 & +\,4x & -\,4 & \\
\cline{2-4}
 & & 10x & +\,3 &
\end{array}
$$

3. IDENTIDADES NOTABLES.

Véase A.3.5.7.

4. REGLA DE RUFFINI.

Es una regla práctica para dividir polinomios entre binomios de la forma $x \pm a$.
Para dividir $D(x)$ entre $x \pm a$ se escriben en la 1ª fila todos los coeficientes (incluso los nulos) de los monomios de $D(x)$, ordenados de forma decreciente. En la 2ª fila se coloca, en una columna a la izquierda, el término independiente del binomio divisor cambiado de signo, que llamaremos raíz; a su derecha y debajo del primer coeficiente se coloca un cero. En la 3ª fila se sumarán los números de las filas 1ª y 2ª. Como el primer número a sumar de la 2ª fila es un cero, el primer número de la 3ª fila coincide con el primer coeficiente de $D(x)$. Los restantes números de la 2ª fila se obtienen multiplicando la raíz por los números de la columna anterior de la 3ª fila.
Los coeficientes del cociente son los números de la 3ª fila excepto el último que es el resto.

Ejemplo: Dividir $D(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8$ entre $x - 2$.

		3	-5	0	-8	Coeficientes de $D(x)$
Raíz	2	0	6	2	4	Productos por la raíz
		3	1	2	-4	Fila de sumas
		Coeficientes del cociente			Resto	

El cociente es $C(x) = 3x^2 + x + 2$ y el resto $R = -4$.

5. TEOREMAS DEL RESTO Y DEL FACTOR.

Teorema del resto. El resto de la división del polinomio $D(x)$ entre el binomio $x - a$ es $D(a)$, el valor del polinomio en a.

Ejemplo: El resto de dividir $D(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8$ entre $x - 2$ es $D(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 8 = 24 - 20 - 8 = -4$.

Teorema del factor. Un polinomio $D(x)$ tiene como factor el binomio $x - a$ si el valor del polinomio en a es nulo: $D(a) = 0$.

Ejemplo: El polinomio $D(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8$ no tiene como factor $x - 2$ porque $D(2) = -4 \neq 0$.

Demostraciones de los teoremas del resto y del factor.
Por el algoritmo de Euclides D(x)=(x-a)C(x)+R(x). Por tanto D(a)=R(a) (teor. del resto) y si D(a)=0 entonces (x-a) es divisor exacto de D(x) (teor. del factor).

6. RAÍZ DE UN POLINOMIO. RAICES ENTERAS.

Dado el polinomio $P(x)$ las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ se denominan raíces o ceros del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra. Un polinomio de grado n puede tener como máximo n raíces reales.

Las raíces enteras de un polinomio han de ser divisores de su término independiente. Basta observar que el producto de los términos independientes del divisor y del cociente es igual al término independiente del dividendo.

7. FACTORIZACIÓN. POLINOMIOS IRREDUCIBLES.

Si un polinomio de grado n $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene n raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ puede factorizarse como $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$, aplicando de forma recurrente el teorema del factor a sus raíces.

Ejemplo: Para factorizar $2x^2 - 14x + 24$ resolvemos la ecuación $2x^2 - 14x + 24 = x^2 - 7x + 12 = 0$ cuyas raíces son 3 y 4 (fórmula de Cardano-Vieta) con lo que $2x^2 - 14x + 24 = 2(x - 3)(x - 4)$.

Los polinomios que no se pueden factorizar se llaman **irreducibles**. Son irreducibles todos polinomios de primer grado y los de segundo sin raíces reales.

Ejemplo: $x^2 - x + 1$ es irreducible porque $x^2 - x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales al ser el discriminante negativo $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

8. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO.

Para factorizar, es decir, descomponer en factores irreducibles un polinomio se despliegan todas las estrategias que permiten averiguar sus raíces: sacar factor común, aplicar el teorema del factor, aplicar la regla de Ruffini, resolver una ecuación de 2º grado, aplicar identidades notables o aplicar la regla de Cardano-Vieta.

Ejemplo: Descomponer $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3x + 3$. Como el polinomio es de tercer grado intentamos la regla de Ruffini con divisores del término independiente 3. El divisor más sencillo es 1.

Como $P(1) = 4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 4 - 4 - 3 + 3 = 0$ por el teorema del resto 1 es raíz y $x - 1$ es factor.

	4	**-4**	**-3**	**3**
1	**0**	**4**	**0**	**-3**
	4	**0**	**-3**	**0**

Finalmente el cociente $4x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir, $4x^2 - 3 = (2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$ y el polinomio se descompone así: $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})$.

9. OPERACIONES CON EXPRESIONES RACIONALES.

Una expresión racional es el cociente de dos polinomios.

Para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales se utilizan las reglas de operar de las fracciones habiendo factorizado previamente los polinomios y simplificando factores, si procede.

La operación de obtener el mínimo común múltiplo (máximo común divisor) consiste en obtener una factorización común que sea múltiplo (divisor) de los denominadores (polinomios).

Ejemplo: Calcular $\frac{x^2+6x+5}{x^4-1} - \frac{x^2+2x+1}{x^3-1}$. Factorizamos los numeradores aplicando la regla de Cardano-Vieta:
$x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$.
Aplicamos la identidad notable diferencia de cuadrados igual a suma por diferencia al primer denominador:
$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.
Como $1^3 - 1 = 0$ dividimos $x^3 - 1 : x - 1 = x^2 + x + 1 \rightarrow x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
El cálculo pedido es

$$\frac{x^2+6x+5}{x^4-1} - \frac{x^2+2x+1}{x^3-1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x+5)}{(x-1)\cancel{(x+1)}(x^2+1)} - \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+5)(x^2+x+1)-(x^2+1)(x+1)^2}{(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{x^3+x^2+x+5x^2+5x+5-(x^4+2x^3+x^2+x^2+2x+1)}{(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{-x^4-x^3+3x^2-x+4}{(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(-x^2-x+4)}{(x-1)\cancel{(x^2+1)}(x^2+x+1)} = \frac{-x^2-x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

La factorización de $-x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 4 = (x^2 + 1)(-x^2 - x + 4)$ se ha hecho con Geogebra.

1. ECUACION CON DOS INCOGNITAS.

La expresión general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, también llamada ecuación diofántica, es $ax + by = c$. Las letras *a* y *b* se llaman coeficientes y la letra *c* término independiente. Las soluciones son pares de números.

Ejemplo: La solución general de la ecuación $x + 2y = 20$ es $x = 20 - 2y = 2(10 - y)$ y las soluciones particulares se obtienen dando valores a la incógnita *y*. Tres de ellas serían:
$y = 0 \to x = 20$. $y = 1 \to x = 10(10 - 1) = 18$. $y = 2 \to x = 10(10 - 2) = 16$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES. SOLUCIONES DE UN SISTEMA.

Véase A.3.6.7

3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR TABLAS.

Veamos el método, aplicable a sistemas con soluciones enteras, con un ejemplo.

Dado el sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 14x + 8y = 104 \end{cases}$ se prepara la siguiente tabla de 4 filas donde hemos rellenado la fila 3ª con el valor que da la 1ª ecuación y la fila 1ª con valores consecutivos, ajustando el valor de la fila 2ª para que se cumpla la 1ª ecuación.

La solución es la columna sombreada por ser la única que verifica la 2ª ecuación.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$x + y$	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$14x + 8y$	86	92	98	104	110	116	122	128	134

4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR SUSTITUCION DE INCOGNITAS.

Véase A.3.6.9

5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR REDUCCION DE INCOGNITAS.

Véase A.3.6.9

6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS.

Véase A.3.7.5

1. IDENTIDADES Y ECUACIONES.

Una **identidad** es la igualdad de dos expresiones algebraicas.
Una **ecuación** es una identidad que es verdadera para determinados valores de las incógnitas.
Resolver una ecuación es hallar sus **soluciones**, es decir, los valores de las incógnitas que la hacen cierta.

Ejemplo: La igualdad $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ es una identidad pues es siempre cierta, mientras que $(x+1)^3 = 0$ es cierta solo cuando la incógnita o variable x vale -1. Se dice que -1 es solución de la ecuación la cual se resuelve tomando raíces cúbicas $(x+1)^3 = 0 \rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1 = 0 \rightarrow x = -1$.

2. ECUACIONES EQUIVALENTES. REGLA DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Una ecuación es como una balanza en equilibrio. Cada platillo representa un término de la ecuación, el izquierdo y el derecho. Si descompensamos un platillo añadiendo o quitando peso debemos añadir o quitar el mismo peso en el otro platillo.

La regla fundamental del álgebra dice que las soluciones de una ecuación no varían si realizamos en ambos lados de la ecuación la misma operación de sumar, restar, multiplicar o dividir por cierta cantidad.

☞ *En la práctica lo que está sumando/restando pasa al otro lado restando/sumando; lo que está multiplicando/dividiendo pasa al otro lado dividiendo/multiplicando.*

Ejemplo: En la ecuación $\frac{x}{4} - \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = 3$ molestan los denominadores del término de la izquierda. Si multiplicamos ambos lados por 16 las soluciones de la ecuación son las mismas y ésta queda $\frac{16x}{4} - \frac{16x}{8} + \frac{16x}{16} = 16 \cdot 3$, es decir, $4x - 2x + x = 48$, que es equivalente a la ecuación de partida.

3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Una **ecuación de primer grado** es un polinomio de grado **uno** que vale cero.
La forma general reducida de estas ecuaciones es $P(x) = a \cdot x + b = 0$.
La solución de esta ecuación es $x = \frac{-b}{a}$ y se obtiene:

1) Sumando $-b$ en ambos lados de la ecuación: $ax + \cancel{b} - \cancel{b} = 0 - b = -b$
2) Multiplicando por el inverso de a: $\frac{1}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} \cdot x = \frac{1}{a} \cdot (-b) = \frac{-b}{a}$.

Ejemplo: En la ecuación $4x + 36 = 0$, sumamos -36 y queda: $4x + \cancel{36} - \cancel{36} = 0 - 36 \rightarrow 4x = -36$. Multiplicamos por el inverso de 4: $\frac{1}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}x = \frac{1}{4}(-36) \rightarrow x = -9$. En la práctica, 36 que está sumado a la incógnita pasa al otro lado restando. De igual manera, 4 que está multiplicado a la incógnita pasa al otro lado dividiendo.

Si la ecuación no tiene la forma general:
1) Sumamos en ambos lados de la ecuación los monomios semejantes

2) Se elige en qué lado de la ecuación quedarán los términos con la incógnita, dejando los términos independientes en el otro lado.
3) Transponemos los monomios que no se encuentren en el lado correcto cambiándolos de signo.
4) Sumamos, de nuevo, monomios semejantes si los hay.
5) Despejamos la incógnita dividiendo por su coeficiente.

Ejemplo: Resolver la ecuación $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} - 9 = \frac{3x}{12} - 18$. En el término de la izquierda podemos sumar los dos primeros monomios reduciéndolos a común denominador y queda $\frac{4x}{6} - \frac{x}{6} - 9 = \frac{3x}{6} + 9 = \frac{x}{2} + 9$. La nueva ecuación es $\frac{x}{2} + 9 = \frac{3x}{12} - 18$. Trasponemos las incógnitas a la izquierda y los términos independientes a la derecha: $\frac{x}{2} - \frac{3x}{12} = -9 - 18$. Sumamos monomios semejantes: $\frac{6x}{12} - \frac{3x}{12} = \frac{3x}{12} = \frac{x}{4} = -27$.
Despejamos finalmente la incógnita: $x = -27 \cdot 4 = -108$

4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Una **ecuación de segundo grado** es un polinomio de grado **dos** que vale cero.
La forma general reducida de estas ecuaciones es $P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.
Si la ecuación carece de término en x o término independiente se dice **incompleta**.
Los tres tipos de ecuaciones incompletas son: $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 = 0$.

Ejemplos: Son ecuaciones incompletas de 2º grado: $3x^2 + 15x = 0$, $4x^2 - 64 = 0$, $17x^2 = 0$.
Es ecuación completa de 2º grado $x^2 - 7x + 12 = 0$, en la cual $a = 1$, $b = -7$ y $c = 12$.

5. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INCOMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.

La solución de la ecuación incompleta (1) $ax^2 = 0$ es $x_1 = 0$.

Las soluciones de la ecuación incompleta (2) $ax^2 + c = 0$ son $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
Obsérvese que c y a han de tener distinto signo para que exista la raíz cuadrada.

Las soluciones de la ecuación incompleta (3) $ax^2 + bx = 0$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-b}{a}$.

Ejemplos: $3x^2 + 15x = 0 \rightarrow 3x(x+5) = 0 \rightarrow 3x = 0 \wedge x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = -5$.
$4x^2 - 64 = 0 \rightarrow 4x^2 = 64 \rightarrow x^2 = \frac{64}{4} = 16 \rightarrow x = \sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow x_1 = -4 \wedge x_2 = 4$.
$17x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$.

Demostraciones
1) $ax^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$.
2) Despejando x^2 y sacando raíz cuadrada $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
3) Sacando factor común $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \wedge ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-b}{a}$.

6. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN COMPLETA DE SEGUNDO GRADO.

Las soluciones de la ecuación completa (4) $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ejemplo: En la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$ los coeficientes son $a = 1$, $b = -7$, $c = 12$ por tanto
$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1} = \frac{7+\sqrt{49-48}}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$ y $x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1} = \frac{7-\sqrt{49-48}}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$

Demostración
Multiplicamos ambos lados por $4a$: $4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot c = 4a \cdot 0 = 0$
Restamos $4ac$: $4a^2x^2 + 4abx + \cancel{4ac} - \cancel{4ac} = -4ac$
Sumamos b^2: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
Observamos que $4a^2x^2 = (2ax)^2$, $4abx = 2 \cdot (2ax) \cdot b$ y $b^2 = (b)^2$
Aplicamos la identidad notable cuadrado de una suma: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
Sacamos raíz cuadrada: $\sqrt{(2ax+b)^2} = 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$
Despejamos x pasando b a restar y $2a$ a dividir: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Si llamamos **discriminante** al valor $\Delta = b^2 - 4ac$. El número de soluciones de la ecuación de segundo grado será 2, 1 o ninguna según que Δ sea positivo, cero o negativo.

Ejemplo: La ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$ tiene dos soluciones porque $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0$.
La ecuación $x^2 - x + 1 = 0$ no tiene solución real porque $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$
La ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una solución porque $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$.

Regla de Cardano-Vieta. Dos números son soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ si y solo si verifican que su producto es c y su suma es $-b$.

Ejemplo: En la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$ los coeficientes son $a = 1$, $b = -7 = -(3+4)$, $c = 12 = 3 \cdot 4$, por tanto las soluciones son 3 y 4, números que multiplicados dan 12 y sumados 7.
Una ecuación de 2º grado que tiene por soluciones -1 y 2 es $x^2 - x - 2 = 0$ pues $b = -(-1+2) = -1$, $c = (-1) \cdot 2 = -2$.

Demostración
Sean x_1 y x_2 dichos números. Por ser soluciones es cero el producto
$(x - x_1)(x - x_2) = xx - xx_2 - x_1x + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ y comparando con el formato general observamos que debe ser $a = 1$, $b = -(x_1 + x_2)$ y $c = x_1 \cdot x_2$.
Viceversa, si la ecuación es $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ aplicando la fórmula general
$x = \frac{-[-(x_1+x_2)]\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{2} = \frac{x_1+x_2\pm\sqrt{x_1^2-x_2^2+2x_1x_2-4x_1x_2}}{2} = \frac{x_1+x_2\pm\sqrt{(x_1-x_2)^2}}{2} =$
$= \frac{x_1+x_2\pm(x_1-x_2)}{2} \to x = \frac{2x_1}{2} = x_1 \wedge x = \frac{2x_2}{2} = x_2$.

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. SOLUCION DE UN SISTEMA. SISTEMAS EQUIVALENTES.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** tiene el formato general $ax + by + c = 0$.
Un **sistema** es un conjunto de ecuaciones lineales que han de satisfacerse a la vez.
En el caso de dos incógnitas x , y hacen falta dos ecuaciones para hallar la **solución del sistema** que es el par de valores (x_1, y_1) que satisface *a la vez* ambas ecuaciones.

Ejemplo: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$ es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La solución del sistema es $x = 8$, $y = 4$ dado que estos números verifican $\begin{cases} 8 + 4 = 12 \\ 8 - 4 = 4 \end{cases}$.

Las soluciones de un sistema no varían si alteramos las ecuaciones aplicando la regla fundamental del álgebra, esto es, realizando la misma operación en ambos lados de una ecuación. Se dice que el sistema resultante es **equivalente** al original.

Ejemplo: $\begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{y}{5} = 12 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 4 \end{cases}$ es un sistema equivalente a $\begin{cases} 5x + 6y = 360 \\ 3x - 2y = 48 \end{cases}$ que se ha obtenido multiplicando la primera ecuación por 30 y la segunda por 12 a fin de eliminar los denominadores.

8. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS.

Resolver un sistema es hallar su solución.

Si es de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} ax + by = r_1 \\ cx + dy = r_2 \end{cases}$ se trata de hallar el par (x_1, y_1) solución que verifica $\begin{cases} ax_1 + by_1 = r_1 \\ cx_1 + dy_1 = r_2 \end{cases}$.

Al intentar resolver el sistema pueden ocurrir tres cosas: que tenga una solución (diremos que el sistema es *compatible determinado),* que no tenga solución (*incompatible)* o que tenga infinitas soluciones (*compatible indeterminado).*

Ejemplos: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$ es un sistema lineal compatible determinado y su solución es (8,4).

El sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$ es compatible indeterminado porque la 2ª ecuación es la 1ª por 2.
Por tanto, el sistema solo proporciona una ecuación $x + y = 12$ cuya solución es $y = 12 - x$, es decir, el par solución es $(x, 12 - x)$ que puede tomar infinitos valores para las variables.

El sistema $\begin{cases} x + y = 12 \\ x + y = 4 \end{cases}$ es incompatible porque es imposible que la suma de dos cantidades sea 4 y 12 a la vez.

9. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. METODOS DE SUSTITUCIÓN, REDUCCION, IGUALACIÓN Y GRÁFICO.

Exponemos el procedimiento general de cada método y lo aplicamos a resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} 5x+6y=360 \\ 3x-2y=48 \end{array}\right.$.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

1) Se elige una ecuación y una incógnita a despejar en dicha ecuación.

2) Se sustituye el valor obtenido de la incógnita en la otra ecuación, que queda reducida a una ecuación de primer grado en la otra incógnita.

3) Se resuelve la ecuación de primer grado averiguando el valor de la otra incógnita.

4) Se obtiene el valor de la incógnita despejada en 1) por sustitución.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{l} 5x+6y=360 \\ 3x-2y=48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{360-6y}{5} \\ 3\cdot\left(\frac{360-6y}{5}\right)-2y=48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{360-6y}{5} \\ 1080-18y-10y=240 \end{array}\right.$
$\to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{360-6y}{5} \\ 1080-240=28y \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{360-6y}{5} \\ y=\frac{840}{28}=30 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{360-6\cdot 30}{5}=\frac{180}{5}=36 \\ y=30 \end{array}\right.$

MÉTODO DE IGUALACIÓN.

5) Se elige una incógnita y se despeja en ambas ecuaciones.

6) Se igualan los valores obtenidos quedando una ecuación de primer grado en la otra incógnita.

7) Se resuelve la ecuación de primer grado averiguando el valor de la otra incógnita.

8) Se obtiene el valor de la incógnita despejada en el primer paso por sustitución.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{l} 5x+6y=360 \\ 3x-2y=48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x=\frac{360-6y}{5} \\ x=\frac{48+2y}{3} \end{array}\right. \to \left\{ \frac{360-6y}{5}=\frac{48+2y}{3} \right. \to \left\{ 3\cdot(360-6y)=(48+2y)\cdot 5 \right.$
$\to \left\{ 1080-18y=240-10y \right. \to \left\{ 840=28y \to y=30 \to x=\frac{48+2\cdot 30}{3}=36. \right.$

MÉTODO DE REDUCCIÓN.

Para averiguar el valor de la y

9) Se multiplica la 1ª ecuación por el coeficiente de la x en la 2ª ecuación.

10) Se multiplica la 2ª ecuación por el coeficiente de la x en la 1ª ecuación.

11) Se restan ambos resultados quedando una ecuación de primer grado en y que resolvemos.

Para averiguar el valor de la x

12) Se multiplica la 1ª ecuación por el coeficiente de la y en la 2ª ecuación.

13) Se multiplica la 2ª ecuación por el coeficiente de la y en la 1ª ecuación.

14) Se restan ambos resultados quedando una ecuación de primer grado en x que resolvemos.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{l} 5x+6y=360 \\ 3x-2y=48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} 3\cdot 5x+3\cdot 6y=3\cdot 360 \\ 5\cdot 3x-5\cdot 2y=5\cdot 48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} 15x+18y=1080 \\ 15x-10y=240 \end{array}\right.$
$\to \cancel{15x}-\cancel{15x}+18y-(-10y)=1080-240 \to 28y=840 \to y=\frac{840}{24}=30.$
$\left\{\begin{array}{l} 5x+6y=360 \\ 3x-2y=48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} -2\cdot 5x-2\cdot 6y=-2\cdot 360 \\ 6\cdot 3x-6\cdot 2y=6\cdot 48 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} -10x-12y=-720 \\ 18x-12y=288 \end{array}\right.$
$\to -10x-18x\cancel{-12y}-(\cancel{-12y})=-1008 \to -28x=-1008 \to x=\frac{-1008}{-28}=36.$

MÉTODO GRÁFICO.

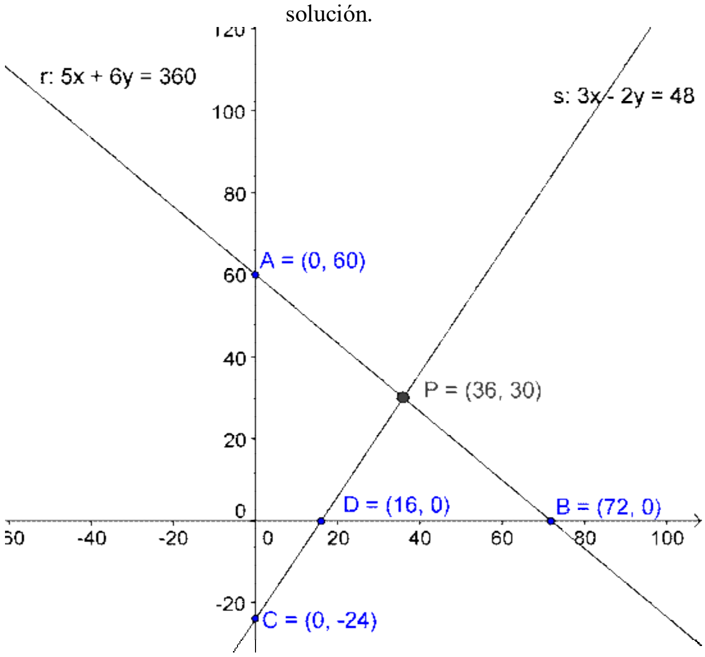
Cada ecuación representa una recta que dibujaremos con 2 puntos. La solución del sistema será el *punto intersección* de ambas rectas. Si las rectas son *paralelas* el sistema no tiene solución. Si es la *misma recta* tiene infinitas soluciones.

15) Se despeja la y en ambas ecuaciones.
16) Se rellena una tabla de valores (x, y) para cada ecuación.

☞ *Bastan dos puntos, por ejemplo,* $x_1 = 0$, $y_2 = 0$ *que son fáciles de calcular.*

17) Se dibujan los dos pares de puntos y las rectas que los unen.
18) El punto intersección es la solución.

Ejemplo: $\begin{cases} 5x + 6y = 360 \\ 3x - 2y = 48 \end{cases}$. Calculamos los puntos A y B para la 1ª ecuación; C y D para la 2ª. P es la solución.



1. ECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO.

Véase A.3.6.3 y A.3.6.4, A.3.6.5 y A.3.6.6.

2. RESOLUCIÓN DE OTRO TIPO DE ECUACIONES.

La técnica de resolución consiste en reducirlas a ecuaciones de grado 1 ó 2.

Una **ecuación bicuadrada** está compuesta por 3 términos, uno de ellos el término independiente y de los otros dos uno tiene grado doble que el otro. Se resuelven mediante un cambio de variable que las transforma en una ecuación de segundo grado.

Ejemplo: La ecuación $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$ es bicuadrada y mediante el cambio de variable $t = x^2$ se transforma en la ecuación de segundo grado $t^2 + 6t + 9 = 0$ cuya solución doble es $t = 3$. Por tanto $x = \sqrt{t} = \sqrt{3} = \pm\sqrt{3}$ son soluciones dobles de la ecuación original.
Ejemplo: La ecuación $e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$ es bicuadrada y mediante el cambio de variable $t = e^x$ se transforma en la ecuación de segundo grado $t^2 + 2t + 1 = 0$ cuya solución doble es $t = 1$. Por tanto $x = \ln 1 = 0$ es solución doble de la ecuación original.

Una **ecuación polinómica de grado mayor que dos** es un polinomio de grado mayor que dos igualado a cero. Se resuelven factorizando el polinomio e igualando a cero los factores.

Ejemplo: La ecuación $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$ es del tipo $P(x) = 0$ con $\mathrm{grado(P(x))} > 2$. Factorizamos extrayendo factor común x^2 y aplicando la identidad notable "cuadrado de una suma":
$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x^2 + 6x + 9) = x^2(x + 3)^2 = 0 \to x_1 = 0 , x_2 = -3$, ambas raíces dobles.

Una **ecuación racional** es una fracción algebraica (cociente de dos polinomios) o suma de ellas igualada a cero. Se resuelven reduciéndolas a una única fracción e igualando a cero su numerador.

Ejemplo: La ecuación $\frac{2}{x} - 1 = \frac{9x}{x+4}$ se reduce a
$\frac{2}{x} - 1 - \frac{9x}{x+4} = 0 = \frac{2(x+4) - x(x+4) - 9x \cdot x}{x(x+4)} = \frac{2x + 8 - x^2 - 4x - 9x^2}{x(x+4)} = \frac{-10x^2 - 2x + 8}{x(x+4)} \to -10x^2 - 2x + 8 = 0 = 5x^2 + x - 4$
y la solución de la ecuación de 2º grado es $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10} \to x_1 = \frac{4}{5} , x_2 = -1$.

Una **ecuación radical** es aquella en la que la incógnita aparece en el radicando. Si los radicales son cuadrados y a lo sumo dos, se resuelve aislándolos de uno en uno y elevando al cuadrado.

Ejemplo: La ecuación $\sqrt{x+3} + \sqrt{4x} = 4$ se resuelve aislando el primer radical $\sqrt{x+3} = 4 - \sqrt{4x}$, elevando al cuadrado $x + 3 = (4 - \sqrt{4x})^2 = 16 + 4x - 8\sqrt{4x}$, aislando el radical que queda $8\sqrt{4x} = 16 + 4x - x - 3 = 13 + 3x$ y elevando al cuadrado $64 \cdot 4x = (13 + 3x)^2 = 169 + 78x + 9x^2 \to$ $9x^2 + 78x - 256x + 169 = 0 \to 9x^2 - 178x + 169 = 0$. Finalmente se resuelve la ecuación de 2º grado:
$x = \frac{178 \pm \sqrt{178^2 - 4 \cdot 9 \cdot 169}}{2 \cdot 9} = \frac{178 \pm 160}{18} \to x_1 = \frac{18}{18} = 1 , x_2 = \frac{338}{18} = \frac{169}{9}$.

3. ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES.

Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita aparece en el argumento o en la base de un logaritmo. Se resuelven aplicando las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo: Para resolver la ecuación $\ln x^3 - \ln x = \ln(2x+3)$ aplicamos al término de la izquierda la propiedad del logaritmo de un cociente y queda $\ln \frac{x^3}{x} = \ln x^2 = \ln(2x+3) \rightarrow x^2 = 2x+3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
Resolvemos la ecuación de segundo grado $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$, $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$.
Como no existen logaritmos de números negativos sólo es válida la solución $x_1 = 3$.

Una **ecuación exponencial** es aquella en la que la incógnita aparece en el exponente de una potencia.

Existen tres técnicas de resolución:

1) Reduciendo la ecuación a una igualdad con potencias de la misma base e igualando los exponentes.
2) Aplicando un cambio de variable si es una ecuación bicuadrada.
3) Aplicando logaritmos para hacer descender la incógnita.

Ejemplo: Para resolver la ecuación $4^x = 1024$ factorizamos 4 y 1024: $(2^2)^x = 2^{10} \rightarrow 2^{2x} = 2^{10}$.
Una vez obtenidas potencias con la misma base igualamos los exponentes: $2x = 10 \rightarrow x = 5$.

Ejemplo: Para resolver la ecuación $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$ factorizamos 9:
$(3^2)^x - 10 \cdot 3 \cdot 3^x + 81 = (3^x)^2 - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$.
Se trata de una ecuación bicuadrada que se reduce a una de segunda grado haciendo el cambio de variable $3^x = t$:
$t^2 - 30t + 81 = 0 \rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900-644}}{2} = \frac{30 \pm 16}{2} \rightarrow t_1 = \frac{30+16}{2} = 23$, $t_2 = \frac{30-16}{2} = 7$.
Deshacemos el cambio y resulta que $3^x = 23$, $3^x = 7$.
Como 23 y 7 son factores primos distintos de 3 estas ecuaciones solo admiten solución con el tercer método:
Tomamos logaritmos naturales $\ln 3^x = x \ln 3 = \ln 27 \rightarrow x = \frac{\ln 27}{\ln 3}$; $\ln 3^x = x \ln 3 = \ln 7 \rightarrow x = \frac{\ln 7}{\ln 3}$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. RESOLUCIÓN.

Véase A.3.6.7, A.3.6.8 y A.3.6.9.

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser **compatibles determinados** (si tienen una *única solución*), **compatibles indeterminados** (si tienen *infinitas soluciones*) e **incompatibles** (si *no tienen solución*).

Para conocer el número de soluciones basta comparar los coeficientes de las incógnitas y término independiente de cada par de ecuaciones para ver si guardan o no una razón de proporcionalidad.

Si no existe razón de proporcionalidad alguna el sistema es compatible determinado.

Si existe razón de proporcionalidad en incógnitas y término independiente el sistema es compatible indeterminado.

Si existe razón de proporcionalidad en las incógnitas pero no entre los términos independientes el sistema es incompatible.

Ejemplos: $\left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right.$ es compatible determinado (1 solución) porque $\frac{3}{1} \neq \frac{1}{2}$.

$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{array} \right.$ es compatible indeterminado (infinitas soluciones) porque $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$.

$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 5 \end{array} \right.$ es incompatible (ninguna solución) porque $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{5}$.

5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES.

Los sistemas de ecuaciones no lineales pueden ser de muy diversa tipología.
En general se aplica el método de sustitución.
Abordaremos únicamente por su interés algunos ejemplos de:

a) Los sistemas que combinan ecuaciones de primer grado (rectas) y de segundo (cónicas).
b) Los sistemas que combinan ecuaciones de primer grado con ecuaciones exponenciales o logarítmicas.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$. Aplicaremos la técnica de sustitución despejando en la 2ª ecuación $y = \frac{x}{2}$ y llevando este valor a la 1ª ecuación: $x^2 - x(\frac{x}{2}) = 6 \rightarrow \frac{x^2}{2} = 6 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 2\sqrt{3}$.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} \log x^3 - \log y = 6 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$. Aplicando las propiedades de los logaritmos queda $\begin{cases} \log(x^3 y) = \log 10^6 \\ \log(xy) = \log 10^4 \end{cases}$. Tomando antilogaritmos queda $\begin{cases} x^3 y = 10^6 \\ xy = 10^4 \end{cases}$. Si dividimos ambos ecuaciones desaparece la y: $\frac{x^3 y}{xy} = x^2 = \frac{10^6}{10^4} = 100 \rightarrow x = 10$. Finalmente de la 2ª ecuación obtenemos que $y = \frac{10^4}{x} = \frac{10^4}{10} = 10^3 = 1000$.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4\cdot 2^x \quad 5\cdot 5^y = 7 \end{cases}$. Aplicaremos la técnica de sustitución despejando en la 1ª ecuación $2^x = 3 + 5^y$ y llevando este valor a la 2ª ecuación $4\cdot(3+5^y) - 5\cdot 5^y = 12 + 4\cdot 5^y - 5\cdot 5^y = 12 - 5^y = 7$.
Despejamos y obtenemos la igualdad de dos potencias con la misma base: $5^y = 12 - 7 = 5 \rightarrow y = 1$.
Conocido el valor de y calculamos el de x: $2^x = 3 + 5^y = 3 + 5 = 8 = 2^3 \rightarrow x = 3$.

1. TRADUCCION DEL LENGUAJE VERBAL AL ALGEBRAICO.

Diccionario básico de expresiones castellano-lenguaje algebraico.

Expresión en castellano	*Expresión algebraica*
La cantidad desconocida, el número buscado	x
Tiene, es	$=$
El número anterior, el anterior de un número	$x-1$
El número siguiente, el siguiente de un número	$x+1$
Tres números enteros consecutivos	$x-1$, x , $x+1$
El doble del número	$2\cdot x = 2x$
El triple del número	$3\cdot x = 3x$
La mitad del número	$\frac{x}{2}$
La tercera parte del número	$\frac{x}{3}$
El cuadrado del número	x^2
El cubo del número	x^3
El cuadrado del siguiente	$(x+1)^2$
El cubo del anterior	$(x-1)^3$
El momento actual, la edad que tengo	t
Hace un año	$t-1$
Hace 5 años	$t-5$
El año que viene	$t+1$
Dentro de 3 años	$t+3$
El triple de mi edad	$3t$
La mitad de mi edad	$\frac{t}{2}$
La edad que tendré dentro de 5 años	$t+5$
La edad que tenía hace 3 años	$t-3$
La velocidad de un móvil en Km /h	v
El espacio que recorre en 3 horas	$3v$
El espacio que recorre en 5 horas	$5v$
El tiempo que tarda en recorrer 80 Km	$\frac{80}{v}$
El tiempo que tarde en recorrer 100 Km	$\frac{100}{v}$
El espacio recorrido a 50 Km/h	$50t$
El espacio recorrido a 80 Km/h	$80t$

☞ *Regla general: Leer la frase al revés, distinguiendo números y sus operaciones.*

Ejemplo: El cuadrado del siguiente de un número menos la quinta parte del anterior: el anterior $(x-1)$, la quinta parte $(\frac{x-1}{5})$, menos $(-\frac{x-1}{5})$, siguiente de un número $(x+1)$, el cuadrado $(x+1)^2$. En resumen, $(x+1)^2-\frac{x-1}{5}$.

Ejemplo: Doa automóviles parten al mismo tiempo de dos ciudades A y B separadas 60 Km.
El que parte de A viaja hacia B a 60 Km/h. El que parte de B viaja hacía A a 90 Km/h. ¿Dónde se encontrarán?

Solución: Tiempo en el que se encontrarán: t. Distancia recorrida por el que parte de A: $60t$. Distancia recorrida por el que parte de B: $90t$. Cuando se encuentren habrán recorrido entre los dos $60t+90t=150t=60$, que es la distancia que separa ambas ciudades. Esta última ecuación permite calcular $t = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$ horas y a partir de aquí el punto donde se encuentran: $60t = 60 \cdot \frac{2}{5} = \frac{120}{5} = 24$. Se encontrarán a 24 Km de la ciudad A.

2. PROCEDIMIENTO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1) Leer varias veces el enunciado del problema para facilitar su compresión y la localización de los datos suministrados.
2) Identificar las incógnitas. ¿Qué nos preguntan?
3) Asignar letras a las incógnitas.
4) Subrayar el lenguaje que recoge las relaciones entre los datos y las incógnitas.
5) Escribir en lenguaje algebraico las ecuaciones que vinculan datos e incógnitas.
6) Resolver la ecuación o el sistema hallado.
7) Comprobar la bondad de las soluciones estudiando su factibilidad.
8) Comprobar que las soluciones verifican las ecuaciones.

Ejemplo: <u>Un padre</u> <u>tiene el triple</u> de edad <u>que su hijo</u>. <u>Dentro de 10 años tendrá</u> sólo <u>el doble</u>. <u>¿Qué edad tienen</u> ambos <u>ahora</u>? Solución: Nos preguntan la edad actual del padre y del hijo. Sea x la edad del padre. Sea y la edad del hijo. La primera frase se escribe $x = 3y$. Dentro de 10 años su edad será $x + 10$ e $y + 10$ respectivamente. Luego la segunda frase se escribe $x + 10 = 2(y + 10)$. Tenemos el sistema $\begin{cases} x = 3y \\ x + 10 = 2(y + 10) \end{cases}$ que podemos resolver por sustitución, pues la primera ecuación tiene despejada la x. La segunda ecuación es $3y + 10 = 2y + 20$ y su solución $3y - 2y = 20 - 10 \to y = 10$. Hallamos por sustitución que $x = 3y = 3 \cdot 10 = 30$. Aunque se trata de un progenitor muy joven, es factible que un padre tenga 30 años y su hijo 10. Comprobamos que dentro de 10 años tendrá el doble: $30 + 10 = 40$ años tendrá el padre y $10 + 10 = 20$ años el hijo, justo la mitad.

3. RESOLUCIÓNDE PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1R GRADO.

Ejemplo 1: Repartir 212 € entre dos personas de modo que la una tenga 49 € menos que la otra.

Sea x el importe de la persona que recibe más dinero. Entonces la otra recibe el resto que son $212 - x$. El problema señala que $x = 212 - x + 49$. La solución de la ecuación es $x + x = 212 + 49 \to 2x = 261 \to x = \frac{261}{2} = 130'50€$ y por tanto $212 - x = 212 - 130'50 = 81'50€$ recibe la otra, que son 49€ menos.

Ejemplo 2: Se ha vendido $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ de una pieza de paño y quedan 18 m. Hallar la longitud de la pieza.

Sea x la longitud de la pieza. Entonces se ha vendido $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6}$ y si sumamos el residuo 18 m obtendremos la pieza entera, es decir, $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 18 = x$, que es la ecuación a resolver. Multiplicando por 12, mínimo común múltiplo de los denominadores:
$\frac{12x}{3} + \frac{12x}{4} + \frac{12x}{6} + 12 \cdot 18 = 12x \to 4x + 3x + 2x + 216 = 12x \to 216 = 12x - 9x = 3x \to$
$\to x = \frac{216}{3} = 72$m. Efectivamente, un tercio son 24 m, un cuarto son 18 m y un sexto 12 m. Se vendieron 54 m y quedaron 18 m.

Ejemplo 3: Una persona lega su fortuna a 4 sobrinos; deja al mayor $\frac{1}{3}$, al siguiente $\frac{1}{4}$, al tercero $\frac{1}{5}$ y al menor, el resto, que son 5 200 €. ¿Cuál era la fortuna del tío?

Sea x la herencia en euros. Entonces la suma de lo legado a los sobrinos es $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 5200$ y debe coincidir con x. La ecuación a resolver es $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 5200 = x$. Multiplicando por 60, mínimo común múltiplo de los

denominadores:
$\frac{60x}{3}+\frac{60x}{4}+\frac{60x}{5}+60\cdot 5200=60x \rightarrow 20x+15x+12x+312000=60x \rightarrow 312000=60x-47x=13x \rightarrow$
$\rightarrow x=\frac{312000}{13}=24000$€. Efectivamente, un tercio son 8.000€, un cuarto 6.000€, un quinto son 4.800€ y el resto hasta 24.000 son los 5.200€ que recibe el menor.

Ejemplo 4: En una librería se han vendido 20 libros a dos precios distintos, 8 € y 12 €, obteniéndose 192 € en total ¿Cuántos libros de cada precio se han vendido?

Aunque aparentemente hacen falta dos variables resolveremos el problema con una sola. Sea x el número de libros vendidos a 8 €. Entonces $20-x$ será el número de libros vendidos a 12 €. Los ingresos por la venta de los 20 libros serán: $8x$, los que valen a 8, $12\cdot(20-x)=240-12x$, los que valen a 12, y en total $8x+240-12x=192$.
Resolvemos la ecuación de grado uno:
$240-192=12x-8x \rightarrow 48=4x \rightarrow x=\frac{48}{4}=12$ libros a 8 € y el resto, $20-x=20-12=8$ libros a 12 €.

Ejemplo 5: La infancia de Diofanto ocupó un sexto de su vida; después, una doceava parte hasta que su mejilla se cubrió de vello. Paso la séptima parte hasta contraer matrimonio, cinco años más tarde nació su primogénito que murió al alcanzar la mitad de la edad que su padre llegó a vivir. Tras 4 años de profunda pena, Diofanto murió. ¿Cuántos años vivió Diofanto, padre del álgebra?.

Sea x los años que vivió Diofanto. La secuencia de etapas a sumar es $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$ y debe coincidir con x.
La solución de la ecuación $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x \rightarrow \frac{84x}{6}+\frac{84x}{12}+\frac{84x}{7}+5\cdot 84+\frac{84x}{2}+4\cdot 84=84x \rightarrow$
$\rightarrow 14x+7x+12x+420+42x+336=84x \rightarrow 756=84-75x=9x \rightarrow x=\frac{756}{9}=84$ años vivió Diofanto.

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 2º GRADO.

Ejemplo 1: Dividir 113 en dos partes cuyo producto sea igual a 3 102.

Sea x una de las partes. El resto hasta 113 será la otra, es decir, $113-x$. El enunciado exige que $x(113-x)=3102$.
Multiplicamos y dejamos la ecuación en formato general: $113x-x^2=3102 \rightarrow x^2-113x+3102=0 \rightarrow$
Los coeficientes son: $a=1$, $b=-113$, $c=3102$ y aplicando la fórmula:
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-113)\pm\sqrt{(-113)^2-4\cdot 1\cdot 3102}}{2\cdot 1}=\frac{113\pm\sqrt{12769-12408}}{2}=\frac{113\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{113\pm 19}{2} \rightarrow$
$\rightarrow x_1=\frac{132}{2}=66 \wedge x_2=\frac{94}{2}=47$. En efecto, $66+47=113$ y $66\cdot 47=3102$

Ejemplo 2: Dentro de tres años la edad de un niño será cuadrado perfecto; y hace tres años su edad era precisamente la raíz de ese mismo cuadrado. ¿Qué edad tiene?

Sea x la edad del niño. La edad hace 3 años era $x-3$. La edad dentro de 3 años será $x+3$. Se nos dice que $x+3=(x-3)^2$.
La ecuación a resolver será $x+3=x^2-6x+9 \rightarrow x^2-7x+6=0 \rightarrow a=1$, $b=-7$, $c=6$. Aplicamos la fórmula:
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{7\pm 5}{2} \rightarrow x_1=\frac{12}{2}=6 \wedge x_2=\frac{2}{2}=1$.
Solo es válida la primera edad porque si el niño tuviera 1 año no habría nacido hace 3. Teniendo 6 años, hace 3 tenía 3 y dentro de 3 tendrá 9 años, que es el cuadrado de 3.

Ejemplo 3: Determina los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que se diferencian en 7 cm y que la hipotenusa mide 17 cm.

Sea x la medida del cateto grande. Entonces el otro mide $x-7$ cm. El teorema de Pitágoras dice que $17^2=x^2+(x-7)^2$.

Desarrollamos el cuadrado y queda la ecuación
$289 = x^2 - x^2 - 14x + 49 \to 2x^2 - 14x - 240 = 0 \to x^2 - 7x - 120 = 0$.
Los coeficientes son: $a = 1$, $b = -7$, $c = -120$ y aplicando la fórmula:
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot(-120)}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm\sqrt{49+480}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{529}}{2} = \frac{7\pm 23}{2} \to x_1 = \frac{30}{2} = 15 \wedge x_2 = \frac{-16}{2} = -8$
.
La solución negativa no es válida pues un cateto ha de tener medida positiva. Por tanto un cateto mide 15 cm y el otro 8 cm.
Se verifica que $15^2 - 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$.

Ejemplo 4: ¿Cuál es el número que añadido a su raíz cuadrada da una suma de 650?

En lugar de llamar x al número buscado le vamos a llamar x^2. De esta forma su raíz cuadrada es $\sqrt{x^2} = x$ y el enunciado nos informa que $x^2 - x = 650$. La ecuación a resolver tiene $a = 1$, $b = 1$, $c = -650$. Aplicando la fórmula:
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-650)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{1+2600}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{2601}}{2} = \frac{-1\pm 51}{2} \to x_1 = \frac{50}{2} = 25 \wedge x_2 = \frac{-52}{2} = -26$
.
El número buscado es $x^2 = 25^2 = 625$ que al añadirle 25 da 650.
También la solución negativa es válida pues $(-26)^2 + (-26) = 676 - 26 = 650$.

Ejemplo 5: Un anciano decía a sus nietecitos: *Multiplicando mi edad por su cuarta parte y sexta parte y dividiendo el producto por los $\frac{8}{9}$ de la misma hallaréis 243 años.* ¿Qué edad tenía?

Sea x la edad del anciano. El enunciado dice $\frac{x\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{x}{6}}{\frac{8}{9}x} = 243$. La ecuación a resolver es
$\frac{x\cdot x\cdot x}{4\cdot 6} = 243\cdot\frac{8}{9}\cdot x \to \frac{x^3}{24} = 27\cdot 8x = 216x \to x^{\cancel{3}2} = 24\cdot 216\cancel{x} = 5184\cancel{x} \to x^2 = 5184 \to x = \sqrt{5184} = 72$
años.

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS LINEALES DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS.

Ejemplo 1: En una granja se crían gallinas y conejos. Si contamos cabezas son 50, si contamos las patas son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Sea x el número de gallinas e y el número de conejos. Con el total de cabezas tenemos una ecuación $x + y = 50$. Con el total de patas tenemos la otra ecuación necesaria para el sistema $2x + 4y = 134$. Obsérvese que $2x = 2\cdot x$ es el producto de las patas que tiene una gallina (2) por el número de gallinas (x). Análogamente $4y = 4\cdot y$ es el producto de las patas que tiene un conejo (4) por el número de conejos (y). El sistema es $\left\{\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 2x + 4y = 134 \end{array}\right.$.

Multiplicando la 1ª por 2 y restando de la 2ª $\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ 2x + 4y = 134 \end{array}\right. \to 2y = 34 \to y = 17$.

Multiplicando la 1ª por 4 y restando $\left\{\begin{array}{l} 4x + 4y = 200 \\ 2x + 4y = 134 \end{array}\right. \to 2x = 66 \to x = 33$.

Hay 33 gallinas (66 patas) y 17 conejos (68 patas).

Ejemplo 2: El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudó 1.962’50 €. Si los adultos pagaban 4 € y los niños 1’50 €. ¿Qué número de adultos y de niños acudieron?

Sea x el número de niños e y el número de adultos. Con el total de entradas tenemos una ecuación $x + y = 600$. Con el total recaudado tenemos la otra ecuación necesaria para el sistema $1'5x + 4y = 1962'5$. Obsérvese que $1'5x = 1'5\cdot x$ es el producto del precio de una entrada de niño (1’50) por el número de niños (x). Análogamente

$4y = 4 \cdot y$ es el producto del precio de la entrada de adulto (4) por el número de adultos (y). El sistema es $\begin{cases} x + y = 600 \\ 1'5x + 4y = 1962'5 \end{cases}$.

Multiplicando la 1ª por 4 y restando $\begin{cases} 4x + 4y = 2400 \\ 1'5x + 4y = 1962'5 \end{cases} \rightarrow 2'5x = 437'5 \rightarrow x = \frac{437'5}{2'5} = 175$ niños.

Por tanto acudieron $600 - 175 = 425$ adultos.

Ejemplo 3: Un barco tiene camarotes dobles (2 camas) y sencillos (1 cama). En total tiene 47 camarotes y 79 camas. ¿Cuántos camarotes tiene de cada tipo?

Sea x el número de camarotes dobles e y el número de camarotes sencillos. Con el total de camarotes tenemos una ecuación $x + y = 47$. Con el total de camas tenemos la otra ecuación necesaria para el sistema $2x + y = 79$. Obsérvese que $2x = 2 \cdot x$ es el producto del número de camas por camarote (2) por el número de camarotes dobles (x). El número de camarotes sencillos y camas contenidos en ellos es el mismo (y). El sistema es $\begin{cases} x + y = 47 \\ 2x + y = 79 \end{cases}$.

Restando la 1ª de la 2ª queda $2x + \cancel{y} - (x + \cancel{y}) = 79 - 47 \rightarrow x = 32$ camarotes dobles.

El número de camarotes sencillos será $47 - 32 = 15$.

En los *problemas de mezclas* típicamente una ecuación la ofrecen los **productos mezclados** y la otra **su cuantificación** en términos de coste o valor.

Ejemplo 4: Un vinatero mezcla vino de mejor calidad, a $2'45$ € el litro, con vino corriente, a $1'10$ € el litro. Si necesita 450 litros de mezcla a $2'15$ € el litro ¿qué cantidad de cada vino mezclará?.

Sea x el número de litros de vino bueno e y el número de litros de vino corriente. Con el total de litros de la mezcla tenemos una ecuación $x + y = 450$. Con el precio de la mezcla la otra $2'45x + 1'1y = 2'15 \cdot 450$. Obsérvese que $2'45x = 2'45 \cdot x$ es el producto del precio de un litro de vino bueno (2'45) por el número de litros (x), $1'1y = 1'10 \cdot y$ es el producto del precio de un litro de vino corriente (1'10) por el número de litros (y) y $2'15 \cdot 450$ es el producto del precio de un litro de vino mezclado (2'15) por el número de litros de la mezcla (450). El sistema es $\begin{cases} x + y = 450 \\ 2'45x + 1'1y = 2'15 \cdot 450 \end{cases}$.

Multiplicando la 1ª por 2'45 y restándole la 2ª queda:

$\cancel{2'45x} + 2'45y - (\cancel{2'45x} + 1'1y) = 2'45 \cdot 450 - 2'15 \cdot 45 \rightarrow 1'35y = 0'3 \cdot 450 = 135 \rightarrow y = \frac{135}{1'35} = 100$ litros de vino corriente que mezclaremos con $x = 450 - y = 450 - 100 = 350$ litros de buen vino.

Ejemplo 5: Se ha comprado alcohol de quemar a 2'5 euros/litro y se ha mezclado con otro de 2'7 euros/litro. Halla la cantidad que entra de cada clase para obtener 100 litros de mezcla de 2'55 euros/litro.

Sea x el número de litros de alcohol caro e y el número de litros de alcohol más barato. Con el total de litros de la mezcla tenemos una ecuación $x + y = 100$. Con el precio de la mezcla la otra $2'7x + 2'5y = 2'55 \cdot 100$. Obsérvese que $2'7x = 2'7 \cdot x$ es el producto del precio de un litro de alcohol caro (2'7) por el número de litros (x), $2'5y = 2'5 \cdot y$ es el producto del precio de un litro de alcohol barato (2'5) por el número de litros (y) y $2'55 \cdot 100$ es el producto del precio de un litro de alcohol mezclado (2'55) por el número de litros de la mezcla (100). El sistema es $\begin{cases} x + y = 100 \\ 2'7x + 2'5y = 2'55 \cdot 100 \end{cases}$.

Multiplicando la 1ª por 2'7 y restándole la 2ª queda:

$\cancel{2'7x} + 2'7y - (\cancel{2'7x} + 2'5y) = 2'7 \cdot 100 - 2'55 \cdot 100 \rightarrow 0'2y = 0'15 \cdot 100 = 15 \rightarrow y = \frac{15}{0'2} = 75$ litros de alcohol más barato que mezclaremos con $x = 100 - y = 100 - 75 = 25$ litros de alcohol caro.

Ejemplo 6: Se mezclan café de 7'80 euros el kilo con café de 7 euros el kilo ¿Cuánto café de cada precio mezclaremos para obtener 200 kilos a 7'48 euros el kilo?

Sea x el número de kilos de café caro e y el número de kilos de café más barato. Con el total de kilos de la mezcla tenemos una ecuación $x + y = 200$. Con el precio de la mezcla la otra $7'8x + 7y = 7'48 \cdot 200$. Obsérvese que $7'8x = 7'8 \cdot x$ es el producto del precio de un kilo de café caro (7'80) por el número de kilos (x), $7y = 7 \cdot y$ es el producto del precio de un kilo de café barato (7) por el número de litros (y) y $7'48 \cdot 200$ es el producto del precio de un kilo de café mezclado (7'48) por el número de kilos de la mezcla (200). El sistema es $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 200 \\ 7'8x + 7y = 7'48 \cdot 200 \end{array} \right.$.

Multiplicando la 1ª por 7'8 y restándole la 2ª queda:

$\cancel{7'8x} + 7'8y - (\cancel{7'8x} + 7y) = 7'8 \cdot 200 - 7'48 \cdot 200 \rightarrow 0'8y = 0'32 \cdot 200 = 64 \rightarrow y = \frac{64}{0'8} = 80$ kilos de café más barato que mezclaremos con $x = 200 - y = 200 - 80 = 120$ kilos de café caro.

1. DESIGUALDADES E INECUACIONES. SOLUCIONES DE INECUACIONES.

Una **desigualdad** es una expresión algebraica que relaciona dos términos mediante los signos menor, menor que, mayor o mayor que.

Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparece uno o más valores desconocidos, las incógnitas.

Resolver una inecuación es hallar los valores (soluciones) que la hacen cierta.

Estos valores, excepto si son aislados, se suelen expresar como operaciones de intervalos.

Ejemplos: La inecuación $x^2 < 0$ no tiene soluciones porque no existe ningún cuadrado negativo.
La inecuación $x^2 - 4 < 0$ la cumple cualquier real cuyo valor absoluto sea menor que 2, es decir, el conjunto de números entre -2 y 2, o sea, el intervalo abierto $(-2, 2)$.
La inecuación $x^2 - 4 \leq 0$ la cumplen los valores anteriores, 2 y -2, es decir, los reales del intervalo cerrado $[-2, 2]$.
La inecuación $x^2 - 4 > 0$ la cumplen los reales cuyo valor absoluto es mayor que 2, es decir, los negativos menores que 2 y los positivos mayores que 2: $(-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$. $\bigcup$ significa unión. $\bigcap$ significa intersección.

2. REGLAS DE RESOLUCIÓN DE INECUACIONES.

Son las mismas que las de resolución de ecuaciones (la operación que se haga al término de la izquierda ha de hacerse al término de la derecha), excepto que la multiplicación por un número negativo invierte el signo de la desigualdad.

Ejemplo: Resolver la inecuación $2x + 2 < 4x + 8$. Restamos $2x$ en ambos lados: $-2x + 2x + 2 < -2x + 4x + 8 \rightarrow 2 < 2x + 8$
Restamos 2 en cada lado: $2 - 2 < 2x + 8 - 2 \rightarrow 0 < 2x + 6$. Restamos 6 en cada lado: $0 - 6 < 2x + 6 - 6 \rightarrow -6 < 2x$.
Dividimos por 2 (como es positivo no cambia la desigualdad): $\frac{-6}{2} < \frac{2x}{2} \rightarrow -3 < x$. La solución es la semirrecta $(-3, +\infty)$.
En la práctica se trasponen las equis a la derecha y los números a la izquierda: $2 - 8 < 4x - 2x \rightarrow -6 < 2x$ y se despeja la equis: $\frac{-6}{2} = -3 < x$.

3. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Una inecuación de primer grado siempre se puede reducir a una expresión de alguno de los siguientes tipos que indica la solución: $x < a$ (semirrecta abierta con los reales menores que *a)*, $x \leq a$ (semirrecta cerrada con los reales menores o iguales que *a)*, $x > a$ (semirrecta abierta con los reales mayores que *a)*, $x \geq a$ (semirrecta cerrada con los reales mayores o iguales que *a)*.

Ejemplo: Resolver $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{5} < x - 4$. Para quitar denominadores multiplicamos ambos lados por 15:
$\frac{15x}{3} + \frac{15(x+1)}{5} < 15(x - 4) \rightarrow 5x + 3(x + 1) < 15(x - 4)$. Quitamos paréntesis aplicando la propiedad distributiva:
$5x + 3x + 3 < 15x - 60$. Trasponemos los números a la izquierda, las equis a la derecha: $60 + 3 < 15x - 5x - 3x$.
Sumamos y despejamos la equis: $63 < 7x \rightarrow \frac{63}{7} = 9 < x$. La solución es $(9, +\infty)$.

Ejemplo: Resolver $x + \frac{1-x}{6} < 2 - \frac{2+x}{4}$. Para quitar denominadores multiplicamos ambos lados por 12:
$12x + \frac{12(1-x)}{6} < 12 \cdot 2 - \frac{12(2+x)}{4} \rightarrow 12x + 2(1 - x) < 24 - 3(2 + x)$.
Quitamos paréntesis aplicando la propiedad distributiva: $12x + 2 - 2x < 24 - 6 - 3x$.
Trasponemos los números a la derecha, las equis a la izquierda: $12x - 2x + 3x < 24 - 6 - 2$.
Sumamos y despejamos la equis: $13x < 26 \rightarrow x < \frac{26}{13} = 2$. La solución es $(-\infty, 2)$.

4. INECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR. INECUACIONES RACIONALES.

Las inecuaciones polinómicas y racionales pueden resolverse mediante factorización y el análisis de los signos siguiendo el siguiente procedimiento:

1) Se factorizan todos los polinomios.
2) Se ordenan todas las raíces de menor a mayor.
3) Se divide la recta real en fragmentos abiertos según las raíces halladas (fila 1 de la tabla de signos).
4) Se colocan en columna todos los factores distintos, ordenados según las raíces (columna 1 de la tabla de signos).
5) Se rellena la tabla de signos comenzando en la columna del primer fragmento con todos los valores negativos e incorporando un signo positivo por arriba en la siguiente columna. La última columna debe quedar con todos los signos positivos.
6) Si existe alguna constante negativa se añade una fila de signos negativos.
7) Se añade la fila cómputo total del signo en la que no intervienen factores de grado par o constantes positivas (siempre positivos). Se aplica la regla de los signos a cada columna.
8) Se localizan las columnas cuyo signo corresponde al de la inecuación. Se decide si corresponde incluir los extremos y se unen los intervalos solución.

Ejemplo: Resolver $x^2-7x+10\geq 0$. Las soluciones de $x^2-7x+10=0$ son $x_1=2$, $x_2=5$. Por tanto las raíces ordenadas son $\{2,5\}$ y la recta fragmentada es $(-\infty,2)$, $(2,5)$, $(5,-\infty)$. Los factores ordenados son $(x-2)$, $(x-5)$. La tabla de signos y la fila de cómputo total son:

	$(-\infty,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
$(x-2)$	Menos	Más	Más
$(x-5)$	Menos	Menos	Más
$(x-2)\cdot(x-5)$	Más	Menos	Más

La solución será la unión de los fragmentos 1 y 3 (Positivo: Más) incluyendo extremos (mayor o igual): $(-\infty,2)\bigcup(5,-\infty)$.

Ejemplo: Resolver $\frac{x+1}{x-3}\leq 0$. Conocemos de entrada los factores y las raíces: las raíces ordenadas son $\{-1,3\}$ y la recta fragmentada es $(-\infty,-1)$, $(-1,3)$, $(3,-\infty)$. Los factores ordenados son $(x+1)$, $(x-3)$. La tabla de signos y la fila de cómputo total son:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$(x+1)$	Menos	Más	Más
$(x-3)$	Menos	Menos	Más
$(x+1):(x-3)$	Más	Menos	Más

La solución será el fragmento 2 (Negativo: Menos), incluyendo el extremo izquierdo (menor o igual), pero no el derecho, que anula el denominador: $[-1,3)$.

5. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO.

La solución de sistemas con inecuaciones de primer grado se reduce a calcular el intervalo o semirrecta solución de todas ellas a la vez.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x-2>1-2x \\ 3x+4>x+2 \end{cases}$. Resolvemos la 1ª inecuación: $x+2x>1+2\rightarrow 3x>3\rightarrow x>1$.
Resolvemos la 2ª inecuación: $3x-x>2-4\rightarrow 2x>-2\rightarrow x>-1$. Ambas se cumplen cuando $x>1$.
La solución es la semirrecta abierta $(1,+\infty)$.

Para resolver un sistema de dos inecuaciones con dos incógnitas utilizaremos el método gráfico.

1) Se convierte cada inecuación en una ecuación y, por tanto, en una recta.
2) Se representan las rectas en el plano obteniendo dos puntos de cada una. Si la inecuación no incluye el signo igual la recta se pinta con trazo discontinuo.
3) Se señalan con flechas de dirección qué semiplanos verifican cada inecuación. Para ello se toma un punto sencillo de valorar (el origen, si no está sobre ninguna recta, o un punto sobre un eje) y se comprueba si cumple o no la inecuación.
4) Se sombrea qué región intersección (de las cuatro que se forman) verifica ambas inecuaciones. Esta es la región solución.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} 2x - y > -6 \\ x + y - 4 > 0 \end{cases}$. El sistema de rectas sería $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 4 \end{cases}$, más fácil de evaluar al tener la ye despejada.

Una posible tabla de valores para las rectas de trazo discontinuo (no incluyen el igual) sería:

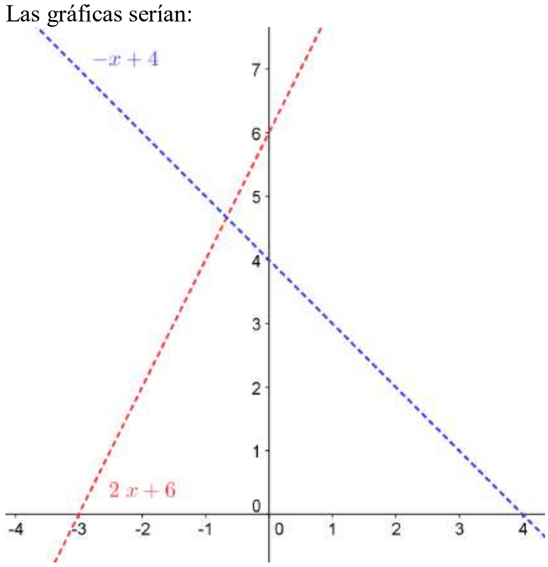
x	$y = 2x + 6$	$y = -x + 4$
0	$2 \cdot 0 + 6 = 6$	$-0 + 4 = 4$
1	$2 \cdot 1 + 6 = 8$	$-1 + 4 = 3$

La comprobación de los semiplanos y la región solución la ensayamos con el punto origen y el punto (0,5):

Punto	$y < 2x + 6$	$y > -x + 4$
(0,0)	$0 < 2 \cdot 0 + 6 = 6$	$0 > -0 + 4 = 4$
Cumple (0,0)	Si	No
(0,5)	$0 < 2 \cdot 0 + 6 = 6$	$0 > -5 + 4 = -1$
Cumple (0,5)	Si	Si

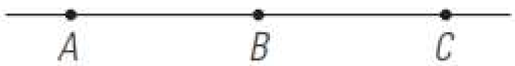
La región solución está por encima de la recta azul y a la derecha de la recta roja, donde se halla (0,5).

Las gráficas serían:

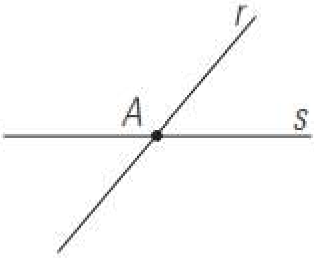


1. PUNTOS Y RECTAS.

El **punto**, magnitud sin dimensión, es el elemento esencial de la geometría.
Los puntos se nombran con letras mayúsculas.
Dos puntos determinan una **recta** que tiene dimensión uno y longitud infinita.



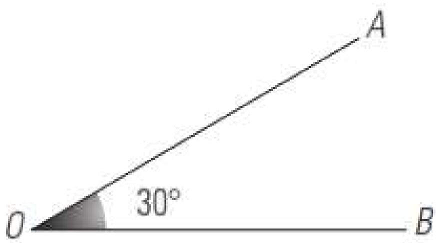
Las rectas se nombran con letras minúsculas. En el plano, de dimensión 2, dos rectas o se cortan en un punto (**secantes**) o no se cortan (**paralelas**).



Un punto de una recta la divide en dos **semirrectas** de longitud infinita.
El trozo finito de recta comprendido entre dos puntos de ella se llama **segmento**.

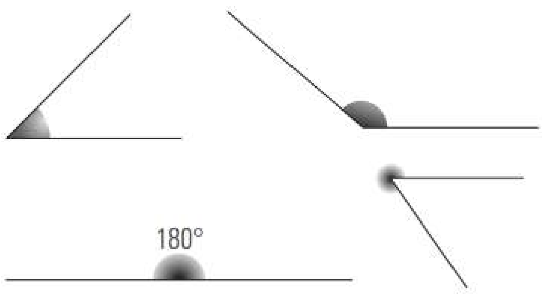
2. ÁNGULOS.

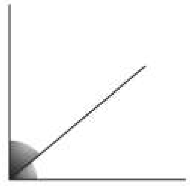
Un **ángulo** es la figura formada por dos semirrectas con idéntico punto de origen que recibe el nombre de **vértice**.
Los **lados** del ángulo son las semirrectas que lo conforman.



La **amplitud** de los ángulos se mide con el sistema sexagesimal en grados, minutos y segundos.
Cuando las dos semirrectas conforman una recta el ángulo se dice **llano** y mide 180º.
El ángulo mitad de un ángulo llano se llama **ángulo recto** y mide 90º**.**

Los ángulos menores que un llano se llaman **convexos** y los mayores **cóncavos**.
Según su amplitud los ángulos se clasifican en **agudos** (menos de 90º), **rectos** (90º) y **obtusos** (más de 90º).





Dos ángulos se dicen **complementarios** si la suma de sus amplitudes es un recto.

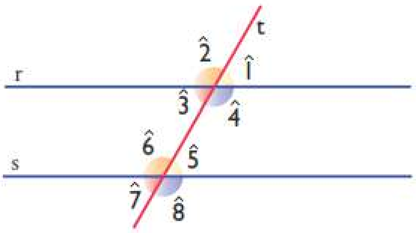
Dos ángulos se dicen **suplementarios** si la suma de sus amplitudes es un llano.

3. ÁNGULOS IGUALES.

Dos rectas paralelas cortadas por una secante determinan ocho ángulos:

Los ángulos opuestos por un vértice son iguales.

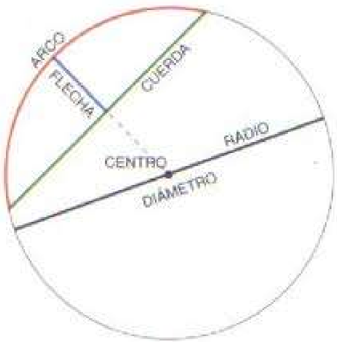
Los ángulos de lados paralelos o son iguales (*si están del mismo lado de la secante*) o son suplementarios (*si están en distinto lado de la secante*).



$$\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7}$$
$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8}$$

4. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO. FIGURAS CIRCULARES.

Una **circunferencia** es una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto fijo interior llamado **centro**.

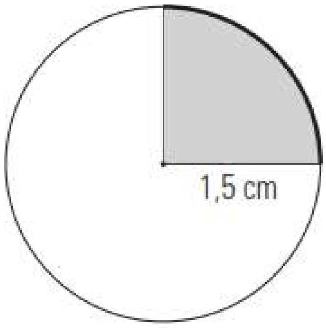


Los elementos de la circunferencia son:
centro, punto fijo.
radio, segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
diámetro, segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.
cuerda, cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia.
arco, cada una de las dos partes en que una cuerda divide a la circunferencia.

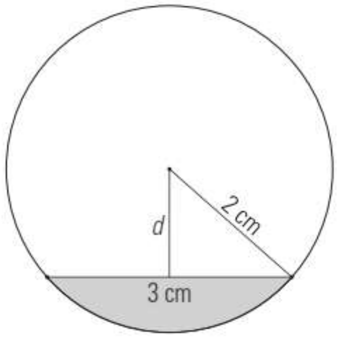
Un **círculo de centro** O **y radio** r es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al centro es menor o igual que la longitud del radio.
La circunferencia, que tiene una dimensión, es el borde del círculo, que tiene dos.
Las figuras circulares son:

- *Sector circular*, parte de un círculo comprendida entre dos radios.
- *Segmento circular*, parte de un círculo comprendida entre una cuerda y su arco.

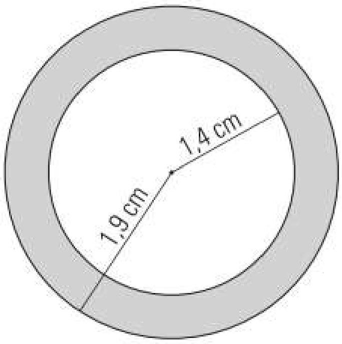
- *Corona circular*, puntos del plano comprendidos entre dos circunferencias de mismo centro y distinto radio.



Sector circular de radio 1’5 cm y 90º



Segmento circular de 3 cm de cuerda

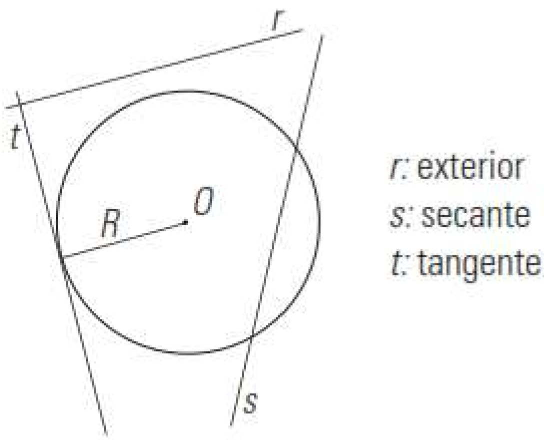


Corona circular de radios 1’9 y 1’4 cm

5. POSICIONES DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA. POSICIONES DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

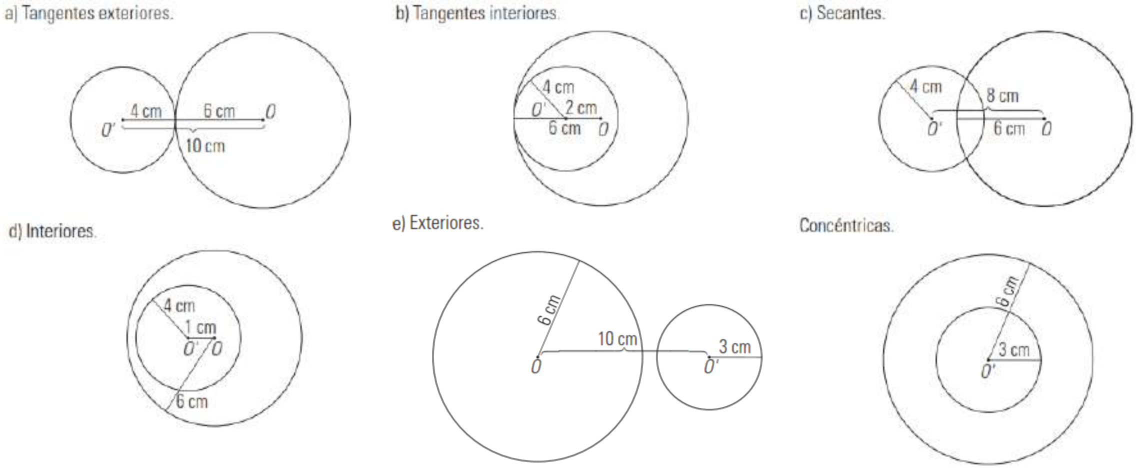
Dadas una recta r y una circunferencia C las **posiciones relativas** que pueden adoptar sobre el plano según el número de puntos comunes son:

- Secantes, se cortan en dos puntos (2).
- Tangentes, se tocan en un punto (1).
- Exteriores, no se cortan (0).



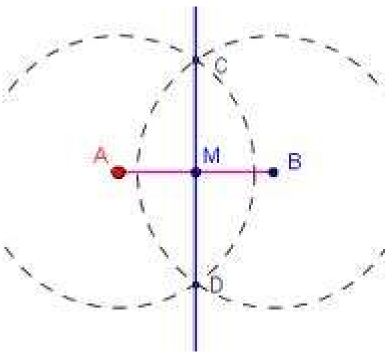
Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 las **posiciones relativas** que pueden adoptar sobre el plano según el número de puntos comunes son:

- Se cortan
  - *Tangentes exteriores*, la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios (1).
  - *Tangentes interiores,* la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios (1).
  - *Secantes,* la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia (2).
- No se cortan (0)
  - *Exteriores*, la distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios.
  - *Interiores*, la distancia entre los centros es menor que la resta de los radios.



6. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

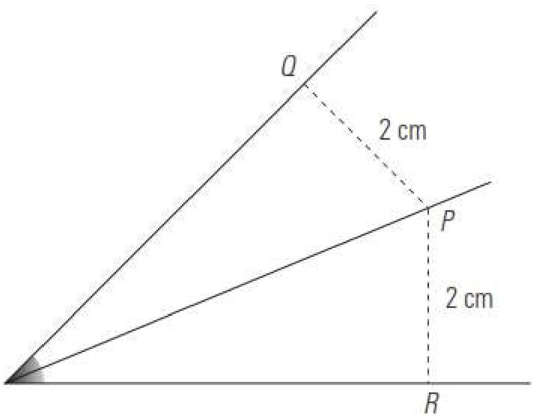
La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular que pasa por su punto medio.



Para construir la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ abrimos el compás con radio superior a la mitad del segmento; con centros en A y B trazamos sendos arcos que se cortan en sendos puntos C y D que unidos determinan la mediatriz buscada. En la figura M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

7. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.

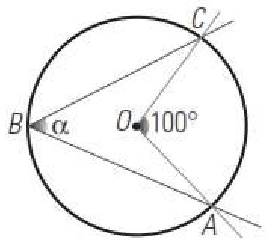


Para construir la bisectriz de un ángulo abrimos el compás y con centro en el vértice trazamos un arco que cortará los lados en sendos puntos Q y R, con la misma abertura y centro en Q y R trazamos sendos arcos interiores que se cortarán en un punto P.
La recta que une el vértice y el punto P es la bisectriz buscada y es equidistante de los lados.

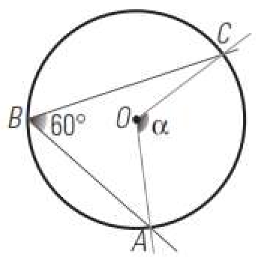
8. ANGULOS CENTRALES Y ÁNGULOS INSCRITOS.

Ángulo central es el determinado por el centro y dos radios de una circunferencia. Los arcos de circunferencia tienen la medida angular de sus ángulos centrales.

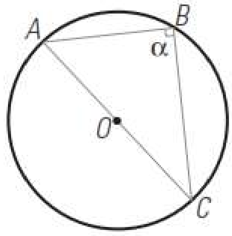
Ángulo inscrito es el determinado por un punto de la circunferencia y dos segmentos circulares uno de cuyos extremos es dicho punto. Uno o ambos segmentos puede ser tangente a la circunferencia.



Conocido el ángulo central (100º) el ángulo inscrito es su mitad: 50º



Conocido el ángulo inscrito (60º) el ángulo central es el doble: 120º



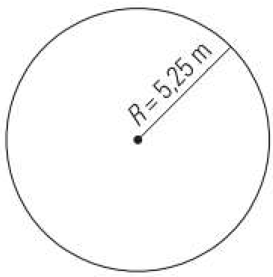
Conocido el ángulo central (180º) el ángulo inscrito es su mitad: 90º

9. LONGITUDES DE CIRCUNFERENCIAS Y DE ARCOS.

La relación entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro es una cantidad constante que recibe el nombre π (pi) y vale aproximadamente 3’14159265.

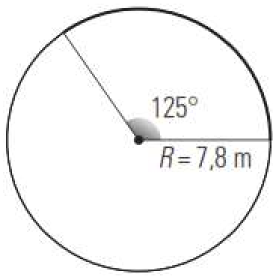
La **longitud de la circunferencia** de radio r es el producto $2 \cdot \pi \cdot r$.

La **longitud de un arco de circunferencia** de radio r y amplitud n^o es $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{n}{360}$.



Ejemplo:

La longitud de la circunferencia es
$L = 2 \cdot \pi \cdot r =$
$= 2 \cdot \pi \cdot 5'25 = 10'5\pi$ m

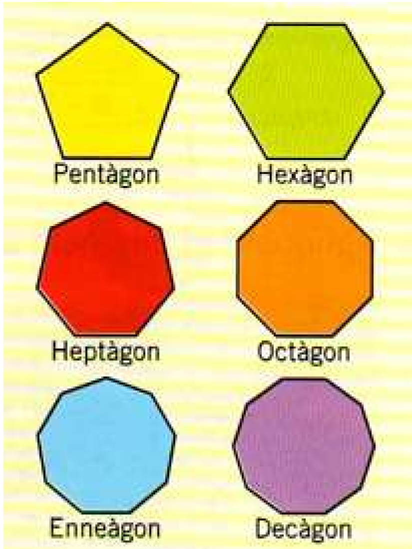


Ejemplo:

La longitud del arco de circunferencia es
$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{n}{360} =$
$= 2 \cdot \pi \cdot 7'8 \cdot \frac{125}{360} \approx$
$\approx 17'01$ m

1. POLÍGONOS.

Una **línea poligonal** es la unión sucesiva de segmentos de recta.
Un **polígono** es la región del plano determinada por una línea poligonal cerrada.
Se clasifican en *convexos y cóncavos* según que sus ángulos sean todos convexos o tenga alguno cóncavo, respectivamente.
Un **polígono regular** es un polígono cuyos lados y ángulos son todos iguales.



Los elementos de un polígono regular son:
Centro, punto que equidista de los vértices.
Radio, segmento que une el centro y un vértice.
Apotema, segmento que une el centro con el punto medio de cada lado.
Diagonal, segmento que une dos vértices no adyacentes.
Ángulo central, cualquier ángulo determinado por dos radios.

Según el **número de lados** los polígonos se llaman *triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, eneágono, decágono, undecágono, dodecágono*, etc.

Para construir un polígono regular, *conocido el radio*, se dibuja una circunferencia de radio el deseado que lo va a circunscribir. A continuación se traza un diámetro $\overline{AB}$ y se divide en tantas partas iguales como lados tendrá el polígono, con apoyo de una recta auxiliar y el teorema de Tales.
Desde los extremos A y B y abertura el diámetro se traza sendos arcos que se cortaran en el punto C. La recta que une C y la segunda división del diámetro cortan a la circunferencia en el punto P. El segmento $\overline{AP}$ es la medida del lado del polígono.

Para construir un polígono regular, *conocido el lado*, se dibuja una circunferencia de radio el lado y se construye el hexágono regular de lado $\overline{AB}$ igual a dicho radio. Se construye la mediatriz de $\overline{AB}$ y se divide el radio en 6 partes iguales. A partir del centro y sobre el diámetro tomamos la parte tantas veces como queramos señalando sucesivamente 7, 8, 9, etc. Las marcas señalan el centro de la circunferencia circunscrita al polígono que deseamos. Pintada la circunferencia sobre ella llevamos la medida del lado.

2. TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS.

Un **triángulo** es un polígono de tres lados.

Según la medida de sus lados se clasifican en **equiláteros** (*los tres iguales*), **isósceles** (*dos iguales*) y **escalenos** (*los tres desiguales*).

Según la medida de sus ángulos se clasifican en **rectángulos** (*un ángulo recto*), **acutángulos** (*todos los ángulos agudos*) y **obtusángulos** (*un ángulo obtuso*).

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados.

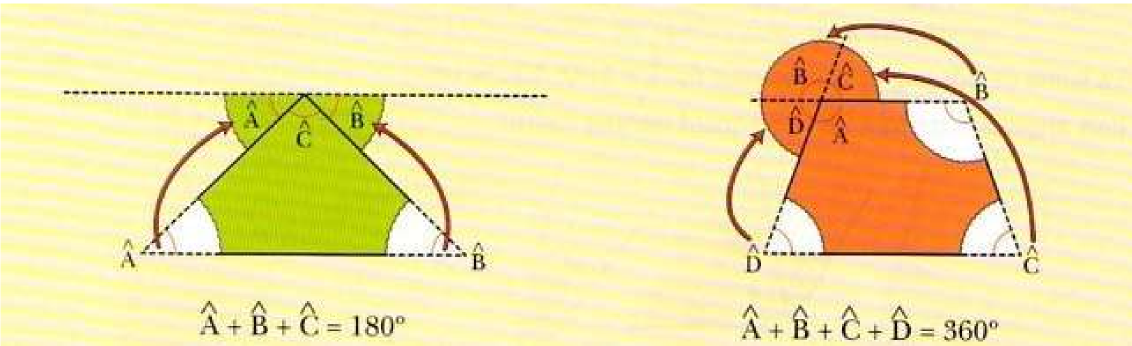
Según el paralelismo de sus lados se clasifican en **paralelogramos** (*2 pares de lados paralelos*), **trapecios** (*1 par de lados paralelos*) y **trapezoides** (*ningún par de lados paralelos*).

Los cuadriláteros paralelogramos se clasifican en **cuadrados** (*4 lados y 4 ángulos iguales*), **rectángulos** (*4 ángulos iguales y lados paralelos iguales*), **rombos** (*4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos*) y **romboides** (*lados paralelos iguales y ángulos iguales dos a dos*).

Los trapecios se llaman *isósceles* si los lados no paralelos son iguales.
Los trapecios se llaman *rectángulos* si un lado es perpendicular a los lados paralelos.

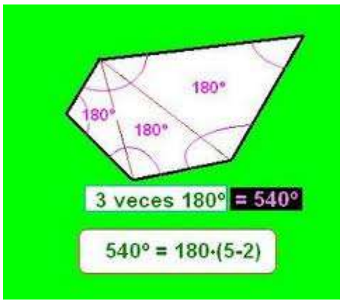
3. SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO.

La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º.



Cualquier polígono se puede dividir en triángulos trazando las diagonales desde un vértice.

Desde un vértice de un polígono de n lados se pueden trazar $n-2$ diagonales.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180^0 \cdot (n-2)$.

4. POLÍGONOS IGUALES.

Dos **polígonos son iguales** si tienen el mismo número de lados y sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales.

5. CRITERIOS DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS.

Dos **triángulos son iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales.

Existen otros criterios menos exigentes para la igualdad de triángulos:

Criterio 1. Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales.
Criterio 2. Dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales.
Criterio 3. Dos triángulos son iguales si tienen un lado y los ángulos contiguos a él iguales.

6. MEDIATRICES Y BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO.

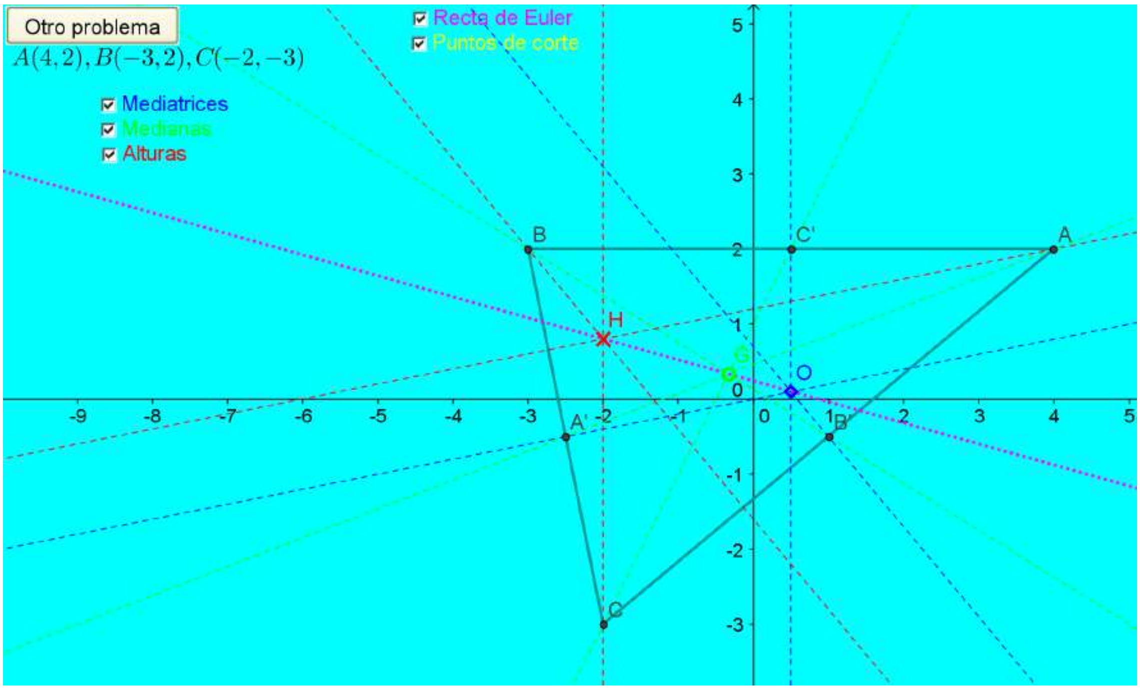
Las **mediatrices** de un triángulo son las mediatrices de cada uno de sus lados. Se cortan en un punto llamado *circuncentro* que es el centro de la circunferencia que pasa por sus vértices.

Las **bisectrices** de un triángulo son las bisectrices de cada uno de sus ángulos interiores. Se cortan en un punto llamado *incentro* que es el centro de la circunferencia inscrita.

7. ALTURAS Y MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO.

Las **alturas** de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el pie de la perpendicular al lado opuesto que pasa por él. Se cortan en un punto llamado *ortocentro.*

Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Se cortan en un punto llamado *baricentro*.

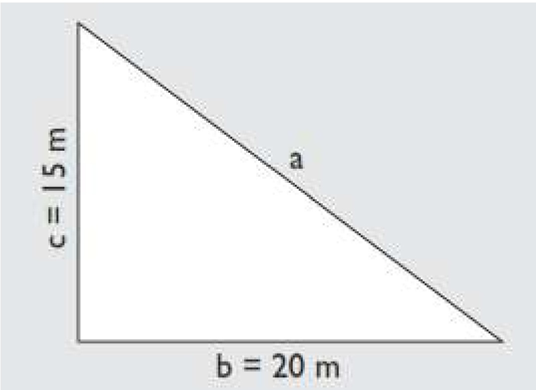


1. PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS.

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados, es decir, es la medida unidimensional de su borde.

2. TEOREMA DE PITAGORAS. CÁLCULO DE DISTANCIAS.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
El teorema sirve para calcular la distancia entre dos puntos del plano.



Ejemplo:
Calcula el perímetro del triángulo rectángulo de la figura.

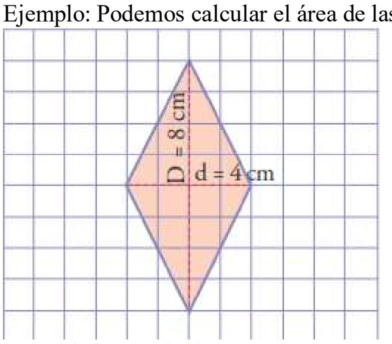
En primer lugar calcularemos la medida de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 \rightarrow$
$\rightarrow a = \sqrt{625} = 25$ m.

El perímetro será la suma de los tres lados:
$P = a + b + c = 25 + 20 + 15 = 60$ m.

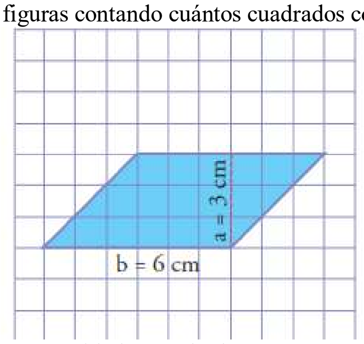
3. ÁREA DE UNA SUPERFICIE.

El **área** de una figura plana es la medida de la superficie que ocupa.
Un **metro cuadrado** es la cantidad de superficie que ocupa un cuadrado de un metro de lado.

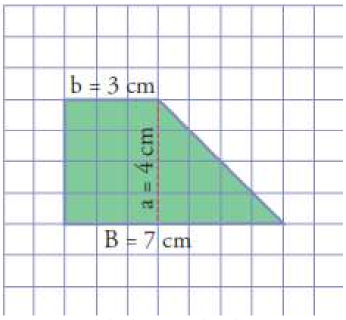
Ejemplo: Podemos calcular el área de las figuras contando cuántos cuadrados contienen. Un cuadro es la unidad: el cm^2



16 unidades cuadradas



18 unidades cuadradas



20 unidades cuadradas

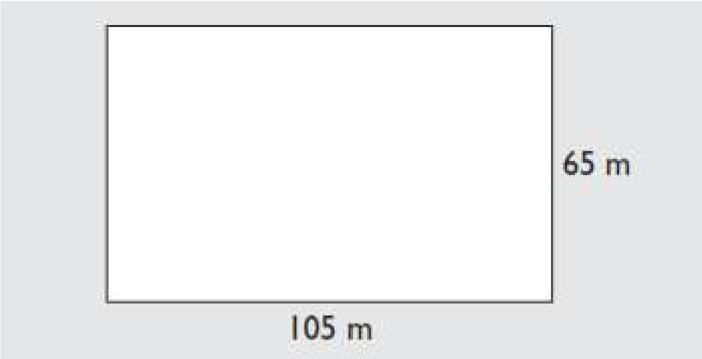
4. ÁREA DEL RECTÁNGULO Y DEL CUADRADO.

El **área de un rectángulo** es el producto de su base por su altura.

$$A_{Rectangulo} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$

El **área de un cuadrado** es el producto del lado por si mismo.

$$A_{Cuadrado} = \text{lado} \cdot \text{lado} = l \cdot l = l^2$$



Ejemplo: Un campo de fútbol mide de largo 105 m y de ancho 65 m. Queremos reponer el césped, que cuesta 25 €/m^2. ¿Cuánto tenemos que pagar?

El césped tiene un área de $A = b \cdot h = 105 \cdot 65 = 6825 \text{ m}^2$
Costará $6825 \cdot 25 = 170625$ €.

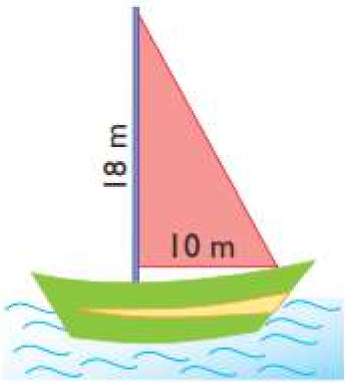
5. ÁREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIÁNGULO.

El **área de un paralelogramo** es el producto de su base por su altura.

$$A_{Paralelogramo} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$

El **área de un triángulo** es la mitad del producto de su base por su altura.

$$A_{Triangulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$



Ejemplo: La vela de un barco es de lona y tiene forma de triángulo rectángulo; sus catetos miden 10 m y 18 m.
El metro cuadrado de lona vale 18,5 €.
¿Cuánto cuesta la lona para hacer la vela?

La lona tiene un área de $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 18}{2} = 90 \text{ m}^2$
Costará $90 \cdot 18'5 = 1660$ €.

6. ÁREA DEL TRAPECIO. ÁREA DE POLÍGONOS.

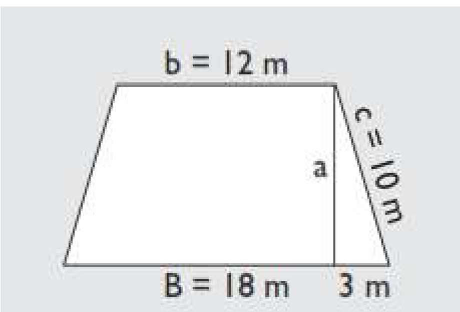
El **área de un trapecio** es el producto de la semisuma de sus bases por su altura.

$$A_{Trapecio} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

El **área de un polígono regular** es la mitad del producto de su perímetro por su apotema.

$$A_{\text{Polígono regular}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

El **área de un polígono cualquiera** se obtiene por *triangulación*, sumando las áreas de los triángulos en que se descompone.



Ejemplo: Las bases de un trapecio isósceles miden 18 m y 12 m, y cada uno de los dos lados iguales, 10 m.
Calcula su perímetro y su área.

Para el perímetro basta sumar los cuatro lados:
$P = B + b + c + c = 18 + 12 + 10 + 10 = 50$ m.
Para el área necesitamos calcular la altura a mediante el teorema de Pitágoras: $10^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91} \approx 9'54$ m.

El área del trapecio será $A = \frac{(B+b) \cdot a}{2} = \frac{(18+12) \cdot 9'54}{2} = 143'1 \text{ m}^2$

7. ÁREA DEL CÍRCULO. ÁREA DE FIGURAS CIRCULARES.

El **área de un círculo** es el producto del número π por el cuadrado de su radio.

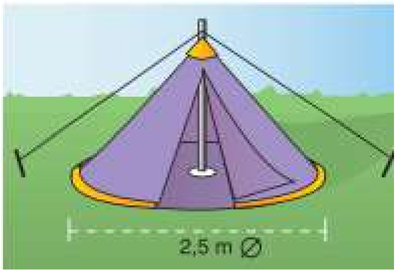
$$A_{Círculo} = \pi \cdot r^2$$

El **área de una corona circular** es la diferencia del área del círculo mayor y del círculo menor.

$$A_{\text{Corona circular}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

El **área de un sector circular** se obtiene mediante una regla de tres, según la amplitud del sector medida en grados.

$$A_{\text{Sector circular}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{n}{360}$$



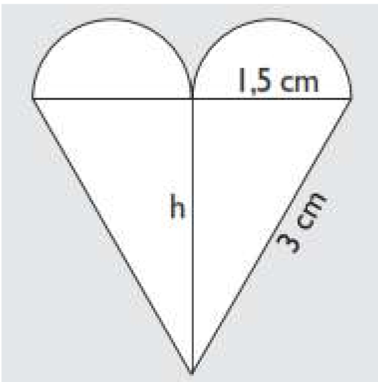
Ejemplo: La base de una tienda de campaña es de lona y tiene forma circular; su diámetro mide 2,5 m. Si el metro cuadrado de lona vale 48 €, ¿cuánto cuesta la lona de la base?

El área de la base es: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1'25^2 = 1'5625\pi$ m^2.

El coste de la lona será $1'5625\pi \cdot 48 = 75\pi \approx 235'5$ €.

8. CÁLCULO DE ÁREAS COMPUESTAS.

Si una figura plana está compuesta por polígonos o figuras circulares su área se puede calcular sumando las áreas de estos.
Si una figura plana está compuesta por un polígono o figura circular al que se ha quitado otro su área se puede calcular restando las áreas de estos.

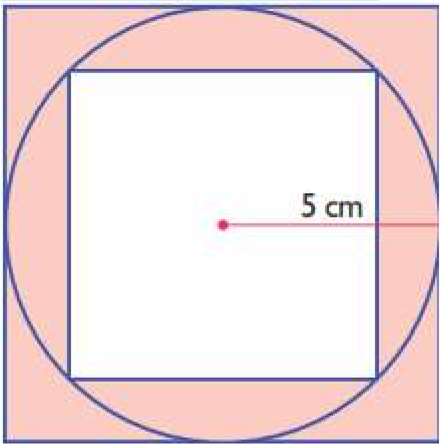


Ejemplo: Halla el área del corazón de la figura.

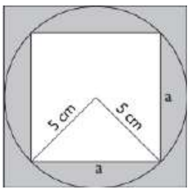
La figura se compone de dos semicírculos de radio r=0'75 cm y un triángulo equilátero de lado 3 cm. Para el área del triángulo necesitamos conocer su altura h, mediante el teorema de Pitágoras:

$3^2 = 1'5^2 + h^2 \to 9 = 2'25 + h^2 \to h^2 = 9 - 2'25 = 6'75 \to$
$\to h = \sqrt{6'75} \approx 2'60$ cm.

El área del corazón será:
$\pi \cdot r^2 + \frac{b \cdot h}{2} = 0'75^2\pi + \frac{3 \cdot 2'60}{2} = 0'525\pi + 3'90 \approx 5'67$ cm^2



Ejemplo: Calcula el área sombreada de la figura.
Necesitamos conocer a, el lado del cuadrado pequeño que está inscrito en el círculo cuyo radio es de 5 cm.



Si miramos en la figura de la izquierda el triángulo nos permite calcular el valor del lado del cuadrado mediante el teorema de Pitágoras:
$5^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 \to 25 = \frac{2a^2}{4} \to a^2 = 50$

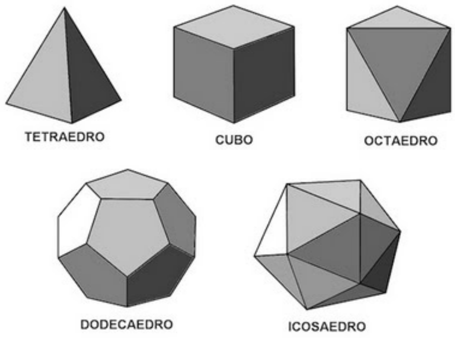
El área pedida será $10^2 - a^2 = 100 - 50 = 50$ cm^2

1. POLIEDROS.

Un **poliedro** es un cuerpo tridimensional limitado por cuatro o más polígonos planos.
Los elementos de un poliedro son:

Caras, cada uno de los polígonos que lo delimitan.
Aristas, cada lado común a dos caras.
Vértices, cada punto común a tres o más aristas.

Los poliedros en los que las caras son iguales y en cada vértice confluye el mismo número de caras se llaman **poliedros regulares**. Hay cinco:

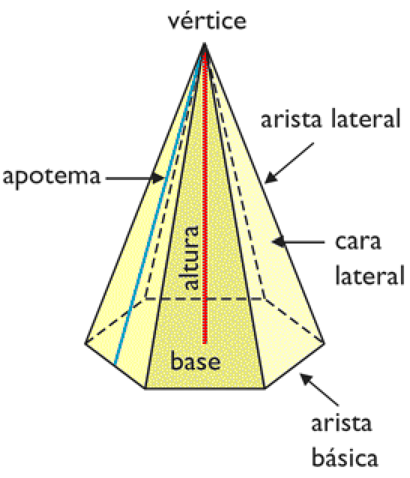


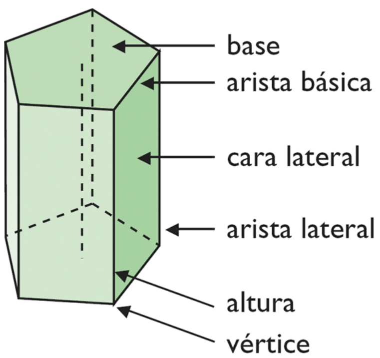
Tetraedro, cuatro caras triangulares, cuatro vértices.
Cubo, seis caras cuadradas, ocho vértices.
Octaedro, ocho caras triangulares, seis vértices.
Dodecaedro, doce caras pentagonales, treinta vértices.
Icosaedro, veinte caras triangulares, treinta vértices.

2. PRISMAS Y PIRÁMIDES.

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos bases iguales y paralelas y caras laterales que son paralelogramos.
Un prisma es **regular** si sus bases son polígonos regulares y sus caras laterales, rectángulos.
Un **ortoedro** es un prisma regular de base rectangular.

Una **pirámide** es un poliedro que tiene como base un polígono y caras laterales que son triángulos y confluyen en un vértice común.
Una pirámide es **regular** si su bases es un polígono regular y sus caras laterales, triángulos isósceles.

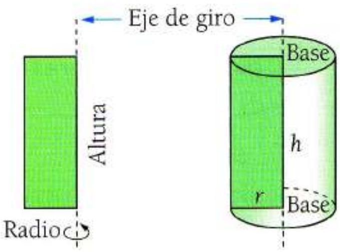




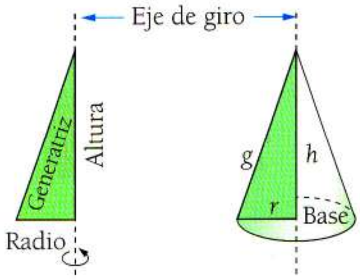
Tanto el prisma como la pirámide, al cortarlos por una arista de la base y una arista lateral, se pueden desarrollar en sus polígonos limitantes sobre el plano.

3. CILINDROS, CONOS Y ESFERAS.

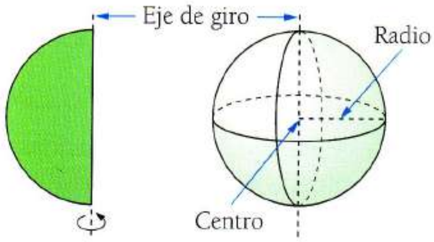
Un rectángulo al girar sobre uno de sus lados genera un **cilindro**.
Un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos genera un **cono**.
Medio círculo al girar sobre su diámetro genera una **esfera**.
La **generatriz** es el lado opuesto al lado que gira.



Cilindro



Cono



Esfera

Cilindro, cono y esfera son *cuerpos de revolución*.
El cilindro y el cono se pueden desarrollar sobre el plano cortándolos por la generatriz, obteniéndose dos círculos y un rectángulo, un círculo y un sector circular, respectivamente.

La esfera no se puede desarrollar sobre el plano.

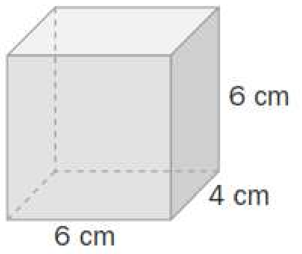
4. VOLUMEN DE UN CUERPO.

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.
Es una medida tridimensional obtenida comparando cuántas veces contiene el cuerpo a un cuerpo de volumen unitario.

5. VOLUMEN DEL ORTOEDRO Y DEL CUBO.

El **volumen del ortoedro** se calcula multiplicando su largo por su ancho por su alto.

$$V_{Ortoedro} = alto \cdot ancho \cdot alto = a \cdot b \cdot c$$

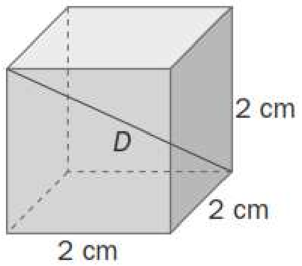


Ejemplo: Halla el volumen del ortoedro de la figura.

El volumen del ortoedro se calcula $V = a \cdot b \cdot c = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 144$ cm^3

El **volumen del cubo** se calcula elevando su arista al cubo.

$$V_{Cubo} = arista \cdot arista \cdot arista = a \cdot a \cdot a = a^3$$



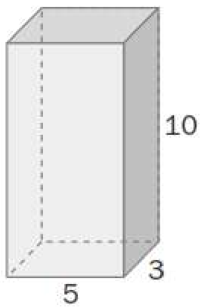
Ejemplo: Halla el volumen del cubo de la figura.

El volumen del cubo se calcula $V = a^3 = 2^3 = 8$ cm^3

6. VOLUMEN DEL PRISMA Y DE LA PIRÁMIDE.

El **volumen del prisma** se calcula multiplicando el área de su base por su altura.

$$V_{Prisma} = \text{Area base} \cdot altura = A_B \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h$$



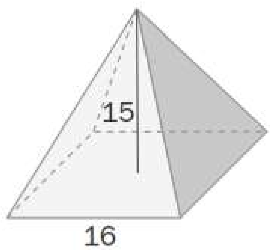
Ejemplo: Halla el volumen del prisma de la figura.

La base es un rectángulo cuya área es: $A_B = a \cdot b = 5 \cdot 3 = 15$

El volumen del prisma se calcula $V_P = A_B \cdot h = 15 \cdot 10 = 150$

El **volumen de la pirámide** se calcula como un tercio del producto del área de su base por su altura.

$$V_{Piramide} = \frac{\text{Area base} \cdot altura}{3} = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\frac{P \cdot a}{2} \cdot h}{3}.$$



Ejemplo: Halla el volumen de la pirámide de la figura.

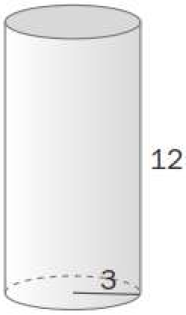
La base es un cuadrado cuya área es: $A_B = l \cdot l = 16 \cdot 16 = 256$

El volumen de la pirámide se calcula $V_P = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{256 \cdot 15}{3} = 1280$

7. VOLUMEN DEL CILINDRO, DEL CONO Y DE LA ESFERA.

El **volumen del cilindro** se calcula multiplicando el área de su base por su altura.

$$V_{Cilindro} = \text{Area base} \cdot altura = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



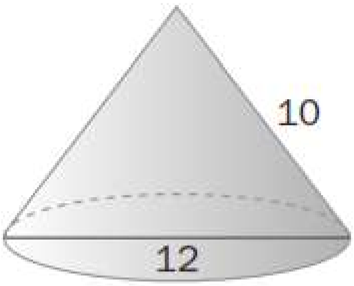
Ejemplo: Halla el volumen del cilindro de la figura.

La base es un círculo cuya área es: $A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

El volumen del cilindro se calcula $V_C = A_B \cdot h = 9\pi \cdot 12 = 108\pi$

El **volumen del cono** se calcula como un tercio del producto del área de su base por su altura.

$$V_{Cono} = \frac{\text{Area base} \cdot altura}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$



Ejemplo: Halla el volumen del cono de la figura.

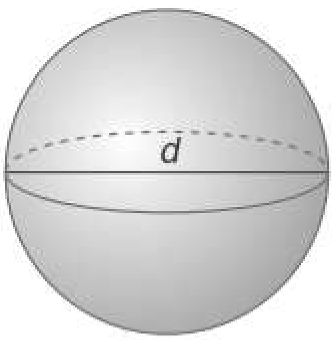
La base es un círculo cuya área es: $A_B = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$

Conocemos la generatriz del cono lo que permite hallar la altura mediante el teorema de Pitágoras: $10^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow h = 8$

El volumen del cilindro se calcula $V_C = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{36\pi \cdot 8}{3} = 96\pi$

El **volumen de la esfera** se calcula como cuatro tercios del producto del número π por su radio al cubo.

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$



Ejemplo: Halla el volumen de la esfera de la figura sabiendo que d=12.

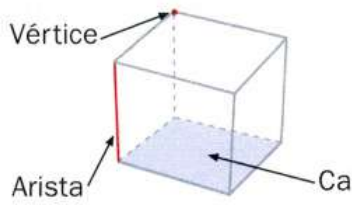
El radio será la mitad del diámetro informado: $r = \frac{12}{2} = 6$

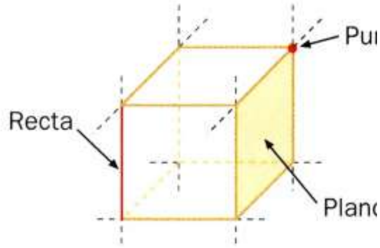
El volumen de la esfera se calcula

$V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 8 \cdot 36 \cdot \pi = 288\pi$

1. PLANOS, RECTAS Y PUNTOS EN EL ESPACIO.

En un cubo aparecen los elementos básicos de la geometría: puntos, rectas y planos. Las caras forman parte de planos, las aristas son segmentos de recta y los vértices, puntos.

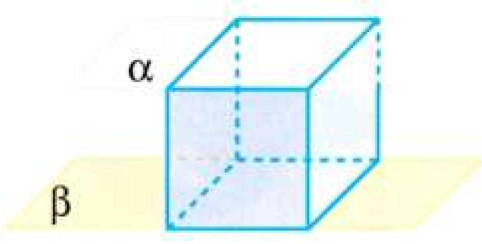




2. POSICIONES DE RECTAS Y PLANOS.

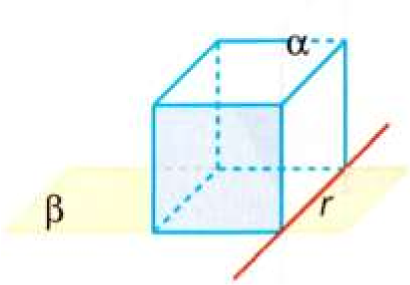
Posiciones de dos planos

Paralelos



No tienen ningún punto en común

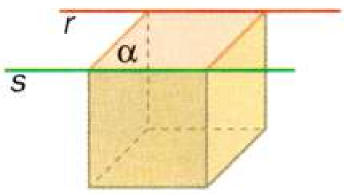
Secantes



Se cortan en una recta

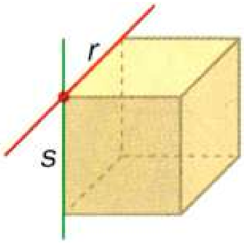
Posiciones de dos rectas

Paralelas



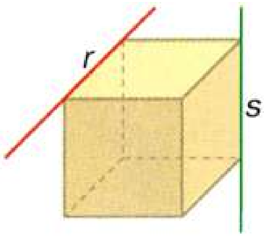
No tienen puntos en común y están en el mismo plano

Secantes



Se cortan en un punto

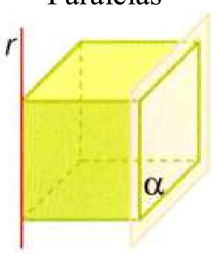
Se cruzan



No tienen puntos en común y no están en el mismo plano

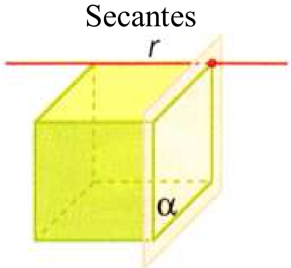
Posiciones de recta y plano

Paralelas



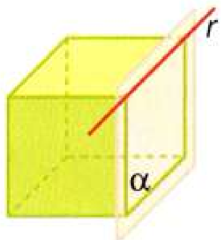
No tienen puntos en común

Secantes



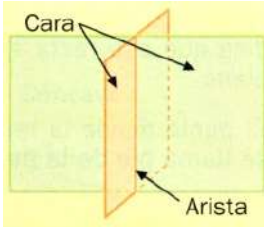
Se cortan en un punto

Recta contenida en plano



Todos los puntos de la recta están en el plano

3. ANGULOS DIEDROS.



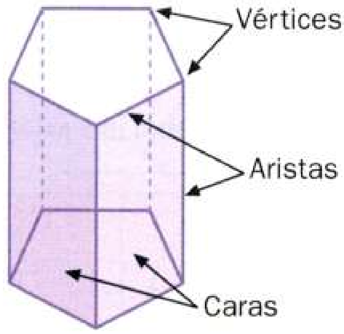
Dos planos se cortan en una recta que divide el espacio en cuatro partes llamadas diedros.

Caras del diedro son los semiplanos que forman el ángulo diedro y **arista** la recta común a las caras.

4. RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES.

Una recta es perpendicular a un plano si lo es a dos rectas cualesquiera contenidas en el plano y que pasan por su pie.

5. POLIEDROS. ELEMENTOS.



Un poliedro es la región cerrada del espacio determinada por polígonos.

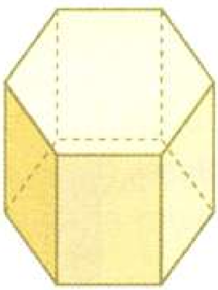
Caras son los polígonos limitantes.

Aristas son los lados de las caras.

Vértices son los puntos de encuentro de tres o más caras.

Un poliedro es **convexo** si todos sus ángulos diedros son convexos y **cóncavo** si alguno de sus ángulos diedros lo es.

Poliedro Convexo



Se puede apoyar sobre cualquier cara

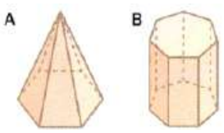
Poliedro Cóncavo

No se puede apoyar sobre las caras del ángulo cóncavo

En los poliedros convexos se cumple la **relación de Euler**:

caras + vértices = aristas + 2.

Ejemplo: Comprueba que los poliedros A y B de las figuras cumplen la relación de Euler.



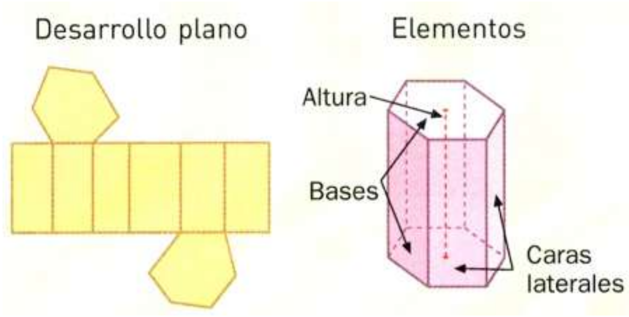
A tiene 7 caras (la base hexagonal y los 6 triángulos laterales), 7 vértices (los de la base y la cúspide) y 12 aristas (6 en la base y 6 en las caras laterales): 7+7=12+2=14.

B tiene 9 caras (dos bases heptagonales y los 7 rectángulos laterales), 14 vértices (7 en cada base) y 21 aristas (7 en cada base y 7 en las caras laterales): 9+14=21+2=23.

6. PRISMAS. PIRÁMIDES.

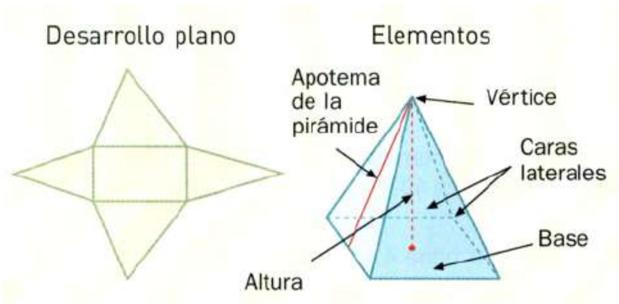
Un prisma es un poliedro que tiene los siguientes elementos:

Dos caras paralelas que son polígonos iguales y se llaman **bases**.
Las caras restantes son paralelogramos y se llaman **caras laterales**.
La distancia entre las bases es la **altura** del prisma.



Un prisma es regular si su base es un polígono regular siendo su *apotema* el segmento que une el centro con la mitad del lado y su *radio* el segmento que une el centro con los vértices. Un paralelepípedo es un prisma con todas sus caras paralelogramos.

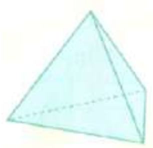
Una pirámide es un poliedro que tiene los siguientes elementos:
Una cara poligonal que se llama **bases**.
Las caras restantes son triángulos, se llaman **caras laterales** y confluyen en un **vértice** o cúspide.
La distancia de la cúspide a la base es la **altura** de la pirámide.
Al cortar una pirámide con un plano paralelo a la base se obtiene un **tronco de pirámide**.



7. POLIEDROS REGULARES. OTROS POLIEDROS.

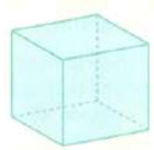
Un poliedro regular tiene todas sus caras iguales y son polígonos regulares. Existen cinco.

Tetraedro



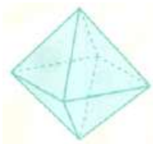
4 caras triángulos equiláteros

Hexaedro o cubo



6 caras cuadrados

Octaedro



8 caras triángulos equiláteros

Dodecaedro

12 caras pentágonos regulares

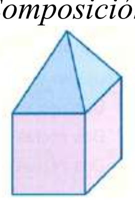
Icosaedro

20 caras triángulos equiláteros

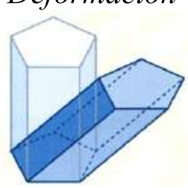
A partir de poliedros dados podemos componer otros utilizando cuatro técnicas.

Truncamiento

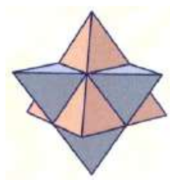
Composición



Deformación



Intersección

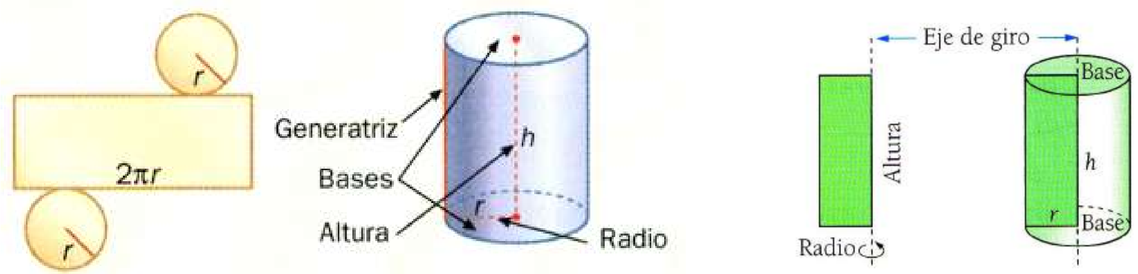


8. CILINDROS. CONOS. ESFERAS.

Un **cilindro recto** es un cuerpo de revolución generado al girar un rectángulo sobre uno de sus lados llamado **generatriz**.

La distancia entre las bases circulares es la **altura** del cilindro.

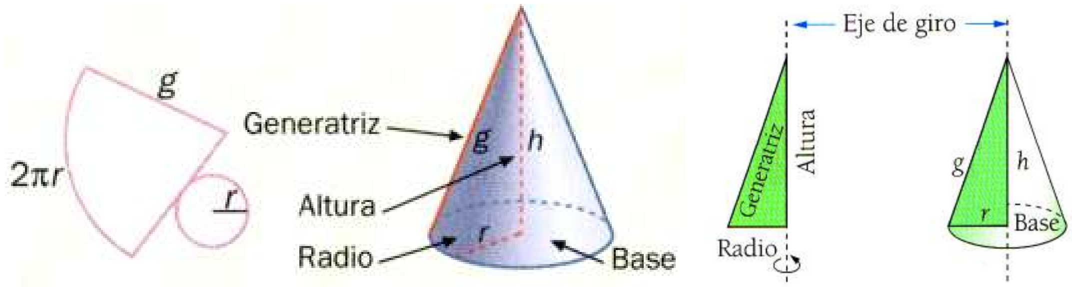
El desarrollo plano de un cilindro consta de un rectángulo, de base la longitud de la circunferencia de la base y altura la generatriz, y dos círculos cuyo radio es la medida del otro lado del rectángulo.



Un **cono recto** es un cuerpo de revolución generado al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos. La hipotenusa se llama **generatriz**.

La distancia del vértice a la base es la **altura** del cono.

El desarrollo plano de un cono consta de un sector circular, cuya amplitud es la longitud de la circunferencia de la base y radio la generatriz, y un círculo cuyo radio es la medida del otro cateto del triángulo. Al cortar un cono con un plano perpendicular al eje de giro se obtiene un **tronco de cono**.

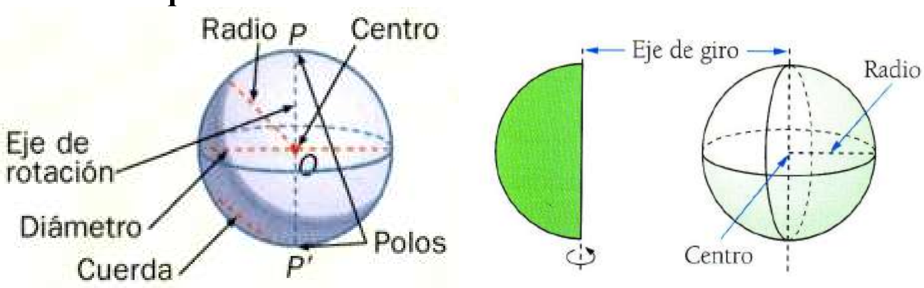


Una **esfera** es un cuerpo de revolución generado al girar un semicírculo sobre su diámetro.

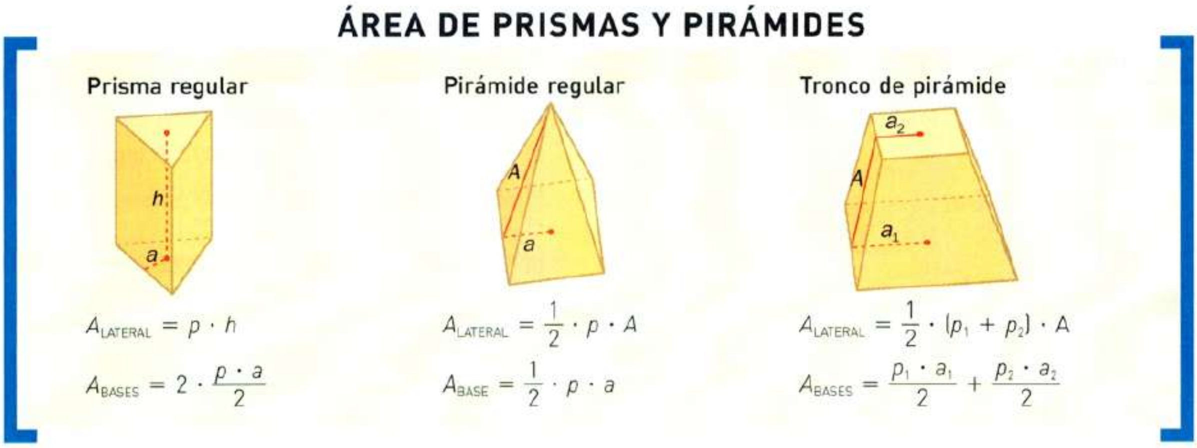
El centro y el radio del semicírculo son el centro y el radio de la esfera.

Los puntos de corte del eje de giro con la esfera son los **polos**.

La esfera no tiene desarrollo plano. Al cortarla con un plano perpendicular al eje de giro se obtiene un **casquete esférico**.



1. AREAS DE PRISMAS REGULARES, PIRÁMIDES Y TRONCOS DE PIRÁMIDES. Véase G.3.10.5

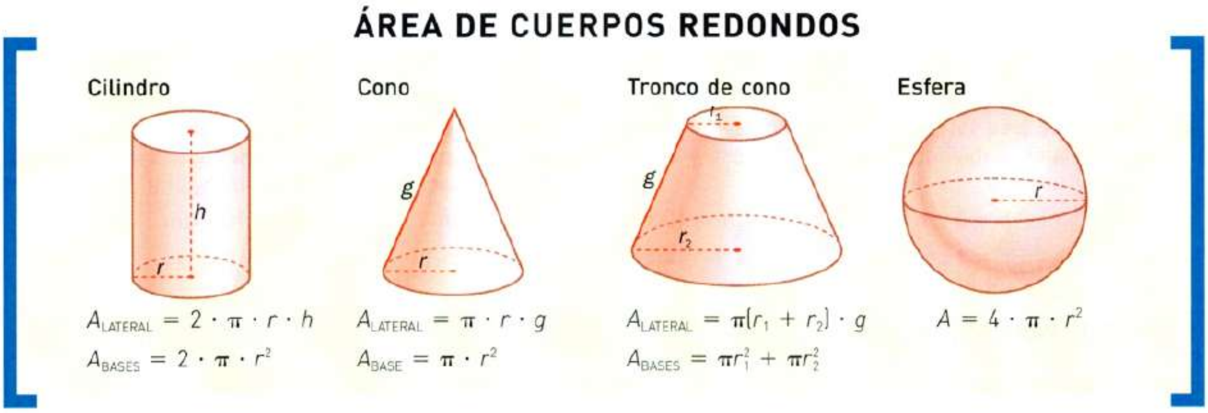


La pirámide de Kefren tiene una altura de 275 codos y un lado de la base cuadrada de 412 codos. Calcular el área de la base, el área lateral y el área total.

Solución: $A_{BASE} = 412 \cdot 412 = 169744$ codos^2, $A_{LATERAL} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 412 \cdot 275 = 226600$ codos^2 y $A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = 169744 + 226600 = 396344$ codos^2

2. AREAS DE CILINDROS, CONOS, TRONCOS DE CONO Y ESFERA.

Véase G.3.10.5



La columna de Trajano tiene 30 metros de altura y 4 metros de diámetro.
El Atomium de Bruselas está formado por nueve esferas de 18 metros de diámetro.
Los Trulli de Alberobello (Italia) son casas con techo cónico de 4 m de altura que se sustenta sobre muros cilíndricos de 30 m^2 de base circular.

Calcular el área lateral de la columna de Trajano. $A_{LATERAL} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 30 = 120\pi$ m^2.
Calcular el área total de las esferas del Atomium. $9A_{ESFERA} = 9 \cdot 4\pi \cdot r^2 = 36\pi \cdot 9^2 = 2916\pi$ m^2.
Calcular el área lateral de los Trulli de Alberobello.
$A_{BASE} = 30 = \pi \cdot r^2 \rightarrow r^2 = \frac{30}{\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{30}{\pi}}$, luego por el teor. de Pitágoras $g^2 = r^2 + h^2 = \frac{30}{\pi} + 4^2$ y
$A_{LATERAL} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot \sqrt{\frac{30}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{30}{\pi} + 16} = \sqrt{30\pi}\sqrt{\frac{30}{\pi} + 16}$ m^2

3. VOLUMENES. UNIDADES DE CAPACIDAD. RELACION ENTRE VOLUMEN Y CAPACIDAD.
Véase N.1.7.5, N.1.7.6 y N.1.7.7.

4. VOLUMEN DE PRISMAS Y DE PIRAMIDES.
Véase G.3.10.6.

Calcular el volumen de la pirámide de Kefren en codos cúbicos.
Solución: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 169744 \cdot 275 = 15{,}559.866.\hat{6}$ codos^3

5. VOLUMEN DE CILINDROS, CONOS Y ESFERAS.
Véase G.3.10.6.

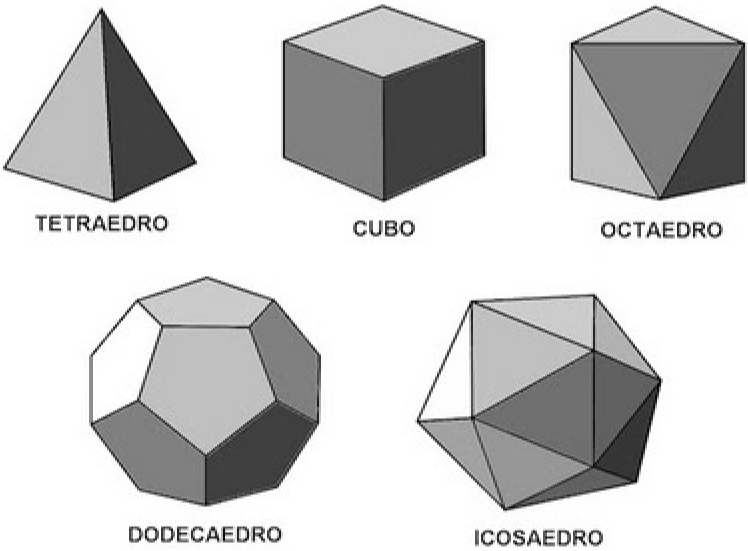
Calcular el volumen de la columna de Trajano. $V = A_{BASE} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 30 = 120\pi$ m^3
Calcular el volumen de los techos de los Trulli de Alberobello.
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 4 = 40$ m^3
Calcular el volumen total de las esferas del *Atomium*. $V = 9 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{36}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 8748\pi$ m^3

1. POLIEDROS.

Un poliedro es un cuerpo geométrico tridimensional limitado por cuatro o más caras poligonales planas. Una **arista** es la recta donde confluyen dos caras. Un **vértice** es el punto donde confluyen tres o más aristas.

En los poliedros convexos, aquellos que se pueden apoyar en cualquiera de sus caras, se verifica la **fórmula de Euler**:
el número de caras más número de vértices es igual al número de aristas más 2.

Un poliedro es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales. Existen cinco poliedros regulares: *tetraedro* (4 triángulos equiláteros), *cubo o hexaedro* (6 cuadrados), *octaedro* (8 triángulos equiláteros), *dodecaedro* (12 pentágonos regulares) e *icosaedro* (20 triángulos equiláteros).



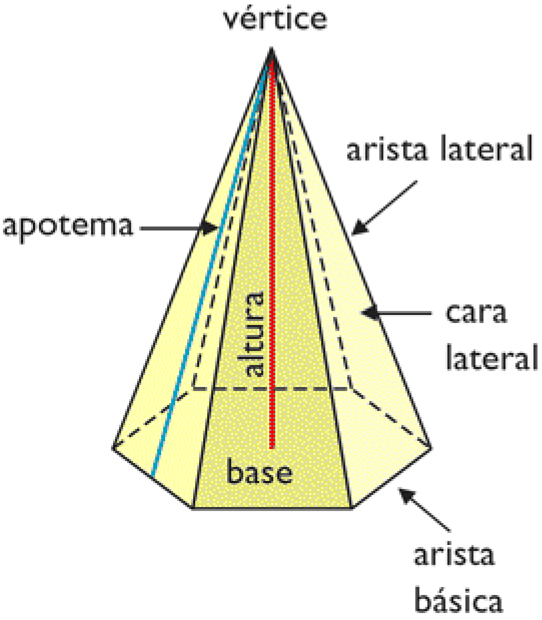
Fórmula de Euler

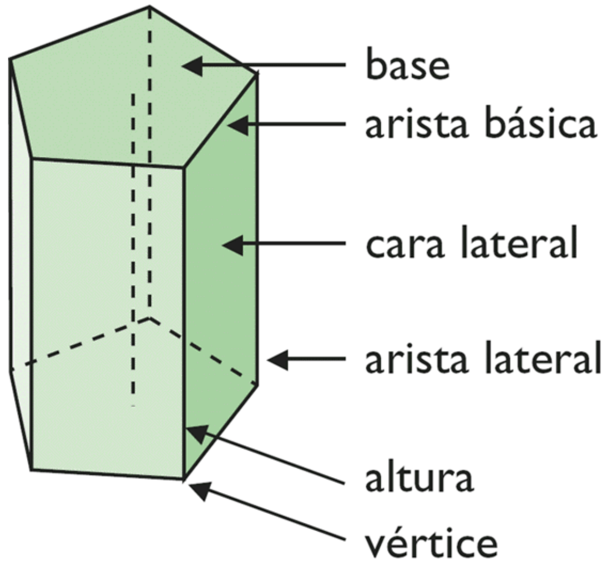
Poliedro	*C*	*V*	*A*
Tetraedro	4	4	6
Cubo	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	30	20
Icosaedro	20	30	12

2. PRISMAS Y PIRAMIDES.

De acuerdo con las características de las caras que los conforman los poliedros se pueden clasificar en **prismas**, **pirámides** y **troncos de pirámides.**

Los *prismas* tienen como bases dos polígonos iguales y paralelos y como caras laterales tantos paralelogramos como lados tiene la base.
Las *pirámides* tienen una sola base poligonal y caras laterales triangulares que confluyen en el vértice de la cúspide.
Un *tronco de pirámide* o pirámide truncada se obtiene seccionando una pirámide con un plano paralelo a la base obteniéndose caras laterales trapezoidales.



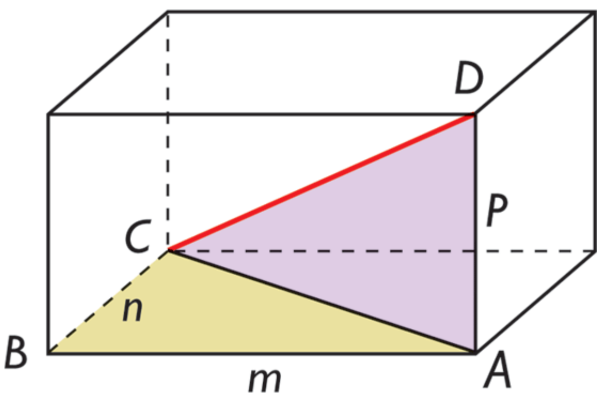


Ejemplos: La pirámide de Keops en Gizeh (Egipto) es un ejemplo de pirámide cuadrangular de 230’36 m de arista básica y 146’59 m de altura. ¿Cuánto medirá la arista lateral y la apotema de la cara triangular?

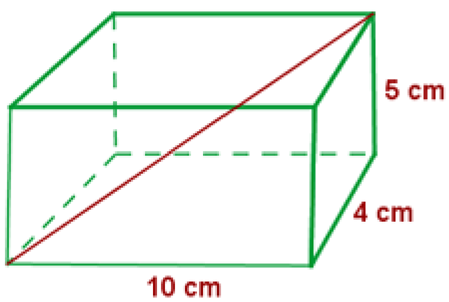
El edificio del Pentágono en Washington es un prisma pentagonal regular de 921 pies de lado y 77’30 pies de altura ¿Cuál es la superficie de sus caras laterales externas?

Teorema de Pitágoras en el espacio. En un ortoedro el cuadrado de su diagonal es la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones: largo, ancho y alto.

$$\overline{CD} = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$



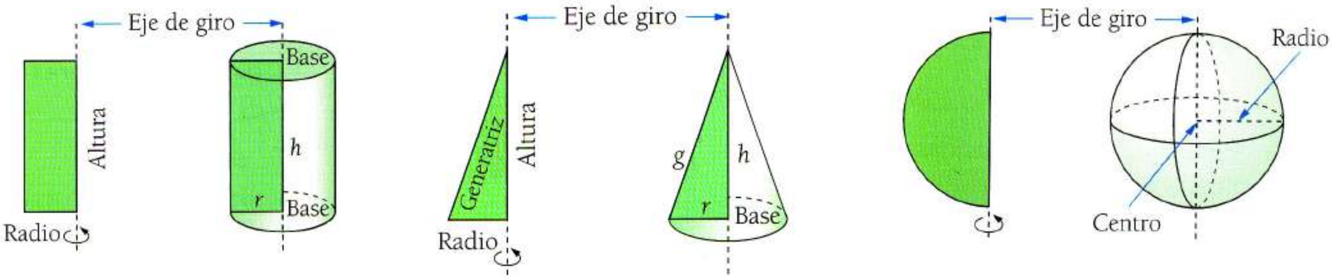
Ejemplo: Calcula la diagonal del ortoedro de la figura



$$D = \sqrt{10^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{100 + 16 + 25} = \sqrt{141} \text{ cm}$$

3. CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

Los **cuerpos de revolución** son los cuerpos geométricos que se forman al girar una figura plana alrededor de un eje.
Los más importantes son el *cilindro* (un rectángulo gira alrededor de uno de sus lados), el *cono* (un triángulo rectángulo gira alrededor de un cateto) y la *esfera* (un semicírculo gira alrededor de un diámetro).
Se llama **generatriz** al lado externo de la figura que gira conformando el borde del cuerpo de revolución. En el cilindro es el lado paralelo al eje; en el cono, el otro cateto que no es eje y en la esfera, la semicircunferencia que abraza el eje diametral.



4. SIMETRIA EN POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

Una recta es **eje de simetría** de un cuerpo si al girar el cuerpo alrededor de ella un determinado ángulo se superpone consigo mismo.

Un plano que contiene un eje de simetría es **plano de simetría** si divide el cuerpo en dos mitades que son imagen especular la una de la otra.

En los cuerpos de revolución el eje de giro es un eje de simetría y cualquier plano que contiene al eje de giro es un plano de simetría.

5. ÁREAS DE POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

Distinguiremos el **área lateral**, conformada por las caras laterales, y el **área de la/s base**/s. La suma de ambas será el **área total** que se corresponde con la superficie de la figura que resulta al desarrollar el cuerpo sobre un plano.

Figura	***Área lateral (A_L)***	***Área total***	***Variables***
Prisma regular recto	$P \cdot h$	$2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} + P \cdot h$	P perímetro base, a apotema, h altura
Pirámide regular recta	$\frac{P \cdot h_c}{2}$	$\frac{P \cdot a}{2} + \frac{P \cdot h_c}{2} = \frac{P}{2} \cdot (a + h_c)$	P perímetro base, a apotema h_c altura cara
Cilindro	$2\pi \cdot r \cdot h$	$2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi r(r+h)$	r radio, h altura
Cono	$\frac{2\pi \cdot r \cdot g}{2} = \pi r g$	$\pi \cdot r^2 + \pi r g = \pi r(r+g)$	r radio, g generatriz
Esfera		$4\pi r^2$	r radio

6. VOLUMENES DE POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN.

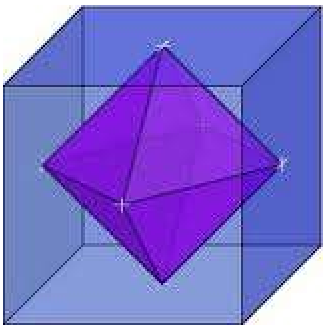
El volumen se calcula multiplicando el área de la base por la altura del cuerpo.
Si termina en punta (pirámide, cono) se divide además entre 3.

Figura	***Volumen***	***Variables***
Prisma regular recto	$\frac{P \cdot a}{2} \cdot h$	P perímetro base, a apotema, h altura
Pirámide regular recta	$\frac{P \cdot a}{2} \cdot \frac{h}{3}$	P perímetro base, a apotema, h altura
Cilindro	$\pi \cdot r^2 \cdot h$	r radio, h altura
Cono	$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{3}$	r radio, h altura
Esfera	$\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$	r radio

En el cono y la pirámide es frecuente conocer la generatriz o la altura de la cara lateral triangular, respectivamente.
A partir de ellos y utilizando el teorema de Pitágoras podemos calcular la altura:

$$g^2 = h^2 + r^2 \ (cono)$$
$$h_c^2 = h^2 + a^2 \ (pirámide).$$

Ejemplo: Calcula el volumen del espacio interior al hexaedro y exterior al octaedro sabiendo que la arista de éste mide $\sqrt{72}$ cm.



La arista del octaedro es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son la mitad de la arista del cubo, que llamaremos h pues coincide con la altura del octaedro. Para hallar h aplicaremos el teorema de Pitágoras al triángulo mencionado: $(\sqrt{72})^2 = (\frac{h}{2})^2 + (\frac{h}{2})^2 \rightarrow 72 = \frac{h^2}{2} \rightarrow h = \sqrt{144} = 12$ cm.
El volumen del octaedro será $V_O = \sqrt{72} \cdot \sqrt{72} \cdot \frac{h}{3} = 24h$ cm^3.
El volumen del cubo $V_C = h^3$ cm.
El volumen pedido será la diferencia
$h^3 - 24h = h(h^2 - 24) = 12(12^2 - 24) = 12 \cdot 120 = 1440$ cm^3

7. AREAS Y VOLUMENES DE CUERPOS COMPUESTOS.

La mayoría de los cuerpos que nos rodean, en especial los construidos por el hombre, son poliedros (una caja, un envase tipo *tetrabrick*) y cuerpos de revolución (un rodillo, una bola de rodamiento) o composiciones de ellos (un podio, una cápsula de medicamento).

Si superponemos a un cilindro un casquete semiesférico del mismo radio obtenemos la forma de edificios como el Panteón de Agripa o un observatorio astronómico.

Si superponemos a un prisma rectangular una pirámide rectangular de la misma base obtenemos la forma de las torres campanario o *campanile*.

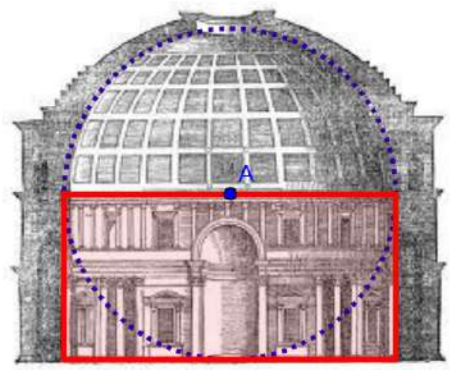
Si superponemos a un cono invertido una semiesfera tenemos un helado de bola.

Un lápiz afilado es un cono pegado a un cilindro y rematado por una semiesfera.

A veces se sustrae una figura a otra como cuando se fabrican moldes: una semiesfera o un cono sustraídos de un cubo.

Las áreas y volúmenes de figuras compuestas se obtienen sumando o restando las áreas y volúmenes de las figuras que las componen.

Ejemplo 1: El Panteón tiene una cúpula semicircular de 150 pies de diámetro. El cuerpo cilíndrico que la sostiene tiene la misma altura que el radio de la cúpula. Calcula el volumen del Panteón.



El volumen que encierra la cúpula es media esfera de radio 75 pies: $V_{SS} = \frac{4}{6}\pi r^3 = \frac{4}{6}\pi 75^3$.

El volumen del cilindro sustentador, dado que la altura y radio son iguales, será: $V_C = 4\pi r^2 h = 4\pi r^2 r = 4\pi 75^3$.

En total el volumen del Panteón es:
$V_P = V_{SS} + V_C = \frac{4}{6}\pi 75^3 + 4\pi 75^3 = (4 + \frac{4}{6})\pi 75^3 =$
$= \frac{24+4}{6}\pi 75^3 = \frac{14}{3}\pi 421875 = 1968750\pi$ pies cúbicos.

Ejemplo 2: Calcula los volúmenes de los cuerpos de las figuras 1 y 2.

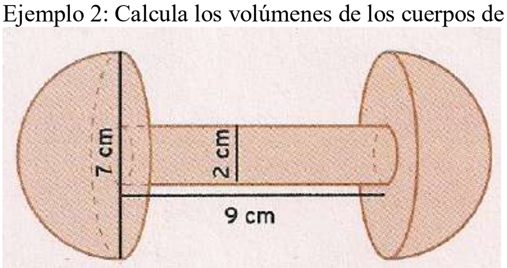


Figura 1
Las dos semiesferas conforman un esfera de radio 3'5 cm.
El cilindro tiene radio 1 y altura 9 cm.
El volumen total será:
$V_T = V_E + V_C = \frac{4}{3}\pi r_E^3 + \pi r_C^2 h =$
$= \frac{4}{3}\pi \cdot 3'5^3 + \pi \cdot 1^2 \cdot 9 = \frac{4}{3}\pi \cdot 42'875 + \pi \cdot 9 = 66'1\hat{6}\pi$ cm^3

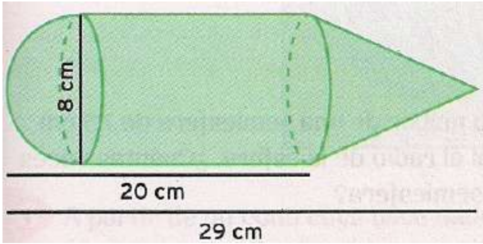
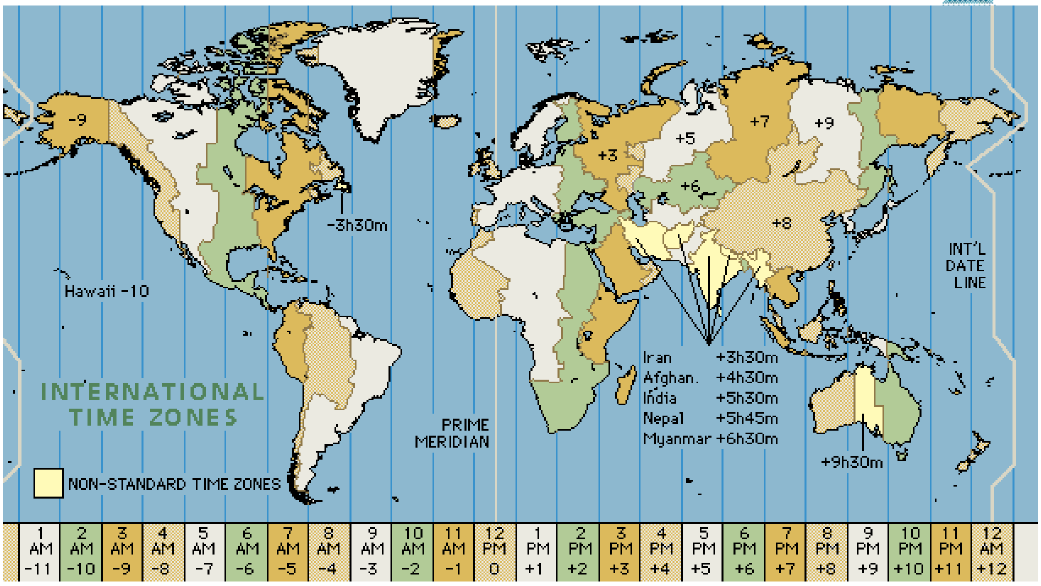


Figura 2
La figura es la composición de una semiesfera, un cilindro y un cono de radio 4 cm y alturas 16 y 9 cm respectivamente.
$V_T = V_{SS} + V_{CI} + V_{CO} = \frac{4}{6}\pi r^3 + \pi r^2 h_{CI} + \frac{1}{3}\pi r^2 h_{CO} =$
$= \frac{4}{6}\pi \cdot 4^3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 16 + \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 9 = \frac{128}{3}\pi + 256\pi + 48\pi =$
$= \frac{1040}{3}\pi = 346'\hat{6}\pi$ cm^3.

8. LA SUPERFICIE TERRESTRE. COORDENADAS GEOGRAFICAS.

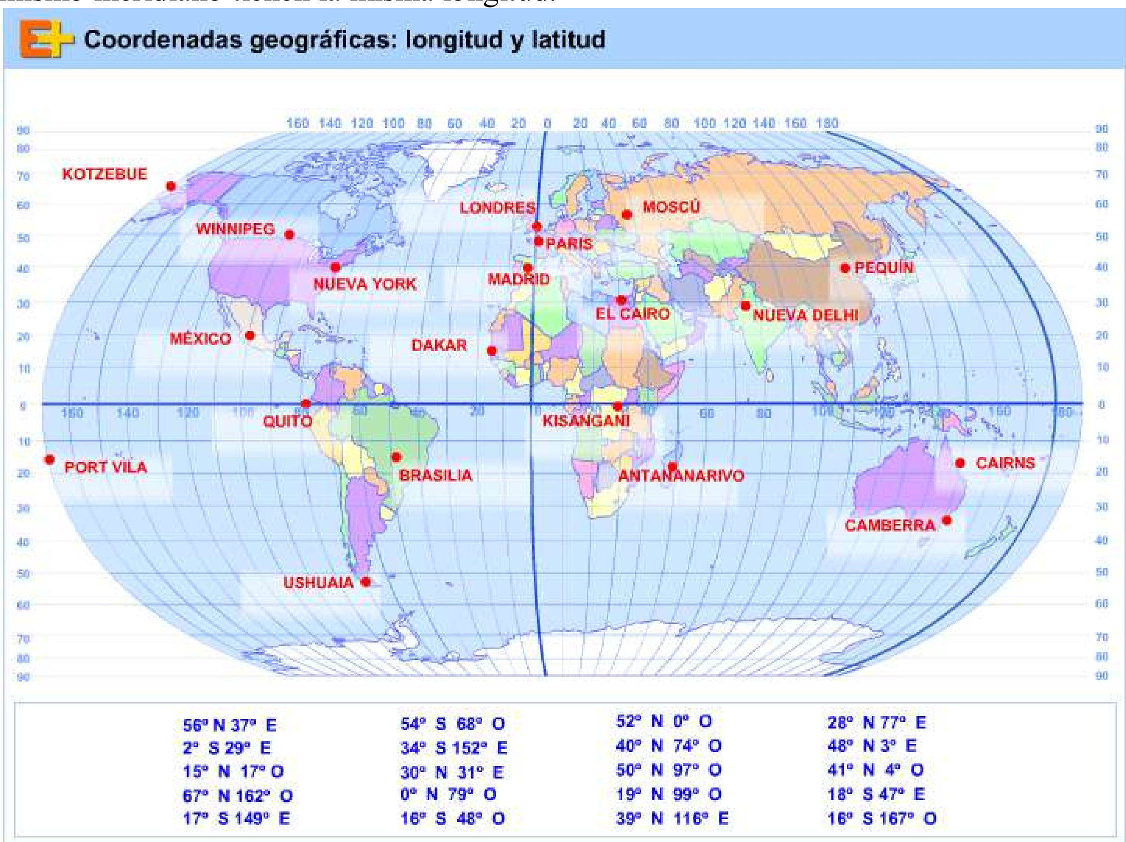
La Tierra es aproximadamente una esfera de 6.371 Km de radio que gira en torno de un eje cuyos extremos se llaman polos norte y sur.

Las semicircunferencias que pasan por los polos se llaman **meridianos**. La superficie está dividida en 24 gajos verticales llamados **husos horarios** cuya amplitud angular es de 15º. La circunferencia máxima perpendicular a los meridanos es el **ecuador**.



Las circunferencias paralelas al ecuador se llaman **paralelos**. Dos de ellos tienen nombre especial el *trópico de Cáncer* y el *trópico de Capricornio* situados a 23º 27' por encima y por debajo del ecuador, respectivamente.

Un punto en la superficie de la Tierra se localiza mediante su latitud y su longitud.
La latitud oscila entre 90º N y 90º S y es la altura angular del paralelo del lugar sobre el ecuador. Todos los puntos situados en el mismo paralelo tienen la misma latitud.
La longitud oscila entre 180º O y 180º E y es la anchura angular del meridiano del lugar y el *meridano de Greenwich* que se toma como referencia 0º. Todos los puntos situados en el mismo meridiano tienen la misma longitud.



1. INSTRUMENTOS DE MEDIDA.

Medida directa de una magnitud es el valor numérico que se obtiene al utilizar un instrumento de medida.

Ejemplos: instrumentos de medida habituales son una regla graduada y una cinta métrica para las longitudes, una jarra o un vaso para las capacidades de líquidos, una báscula para el peso de objetos, un reloj para la medida del tiempo o un transportador para medir ángulos.

2. ESTIMACION DE MEDIDAS.

Estimar una medida es averiguar un valor aproximado sin utilizar de forma directa un instrumento de medida.

Ejemplos: Hacemos estimaciones de la altura de las personas comparándolas con nosotros, de pequeñas distancias mediante el conteo de pasos o de palmos y de cualquier magnitud a "ojo de buen cubero", que es una expresión que nos refiere persona experta en estimaciones (los fabricantes de cubas para el vino).

3. ERRORES DE MEDIDA Y ACOTACION. PRECISIÓN.

La medida exacta de una cantidad está acotada, es decir, comprendida entre un valor por defecto (menor) y un valor por exceso (mayor) que proporciona el instrumento de medida.

Ejemplo: Al medir la longitud de un lápiz afilado con una regla la punta se encuentra entre los 177 mm y los 178 mm, cotas inferior y superior de la medida exacta.

La **precisión** de una medida viene dada por la precisión del instrumento de medida.
Error absoluto es la diferencia entre la medida aproximada y la medida exacta.

Ejemplo: La precisión de la regla es milimétrica, como no podemos conocer la medida exacta del lápiz, tampoco podemos saber el error absoluto cometido pero sí diremos que la cota de error es menor que un milímetro al otorgar al lápiz una medida de 177'5 mm.

4. MEDIDA DEL TIEMPO.

Las unidades de tiempo astronómico más usadas son el año y el día, que se corresponden con el período de traslación de la Tierra alrededor del sol y de rotación de la misma en torno al eje. Los múltiplos del año son el lustro (5), la década (10), el siglo (100) y el milenio (1000). Los múltiplos del día son la semana (7), el mes (30), el trimestre (90) y el semestre (180).
El día tiene 24 horas, cada hora tiene 60 minutos y cada minuto 60 segundos.

Una medida de tiempo puede estar expresada en forma **compleja**, si la expresamos con más de unidad, o **incompleja**, si la expresamos con una única unidad.

Ejemplo: Los resultados de una prueba atlética de 1500 m se expresan en minutos, segundos y centésimas de segundo de forma compleja (Fermín Cacho corrió los 1500 en 3:29.15 significa que tardó 3 minutos 29 segundos y 15 centésimas de segundo en recorrer kilómetro y medio). Sin embargo la prueba de marathon añade también las horas (Abebe Bikila corrió la marathon en 2h 08:14.3 significa que tardó 2 horas 8 minutos 14 segundos y 3 décimas de segundo).

5. OPERACIONES CON MEDIDAS DE TIEMPO.

Nos centraremos en mediciones en horas, minutos y segundos.

Para pasar de segundos a minutos y de minutos a horas *dividimos* entre 60. Para pasar de horas a minutos y de minutos a horas *multiplicamos* por 60. Para pasar directamente de segundos a horas y viceversa *dividimos/multiplicamos* por 3600.

Ejemplo: Miguel Delibes en su obra “La hoja roja” hace repetir al protagonista cuántos segundos son 75 años de vida. ¿Podrías ayudar a calcularlo? Calculamos primero cuántos segundos tiene una hora: $60 \cdot 60 = 3.600$ s. Multiplicando por 24 obtenemos los segundos de un día: $3600 \cdot 24 = 86.400$ s. Para el año multiplicamos por 365: $86400 \cdot 365 = 3.153_1600.000$ s. Finalmente multiplicamos por 75: $3153600000 \cdot 75 = 236.520_1000.000$ s. Como cada cuatro años hay uno bisiesto ¿cómo mejorarías el resultado obtenido?

Las operaciones en forma incompleja son operaciones con números decimales.

☞ *Una hora y media se escribe 1’5 h como incomplejo y 1h 30 min como complejo. Es error frecuente escribir 1’30. No lo cometas.*

Para **sumar o restar** en forma compleja sumamos o restamos las cantidades correspondientes a las mismas unidades.

Si al sumar se excede de 60 en los segundos o en los minutos dividiremos entre 60 sumando el cociente a la unidad de orden superior y dejando el resto como resultado.

Si al restar el sustraendo es mayor que el minuendo se quitará una unidad del orden superior y se añadirá 60 al minuendo.

Ejemplo: Alberto Contador tardó los siguientes tiempos en tres etapas de montaña de la Vuelta a España 2012: 2h 30:45.5, 3h 18:50.7 y 4h 44:55.8. ¿Cuál fue el tiempo total que empleó? Comenzamos sumando los segundos: $45'5 + 50'7 + 55'8 = 152$ s, como excede de 60 dividimos entre 60: $152 : 60 = 2$ min y sobran 32 s. Pasemos ahora a sumar los minutos: $30 + 18 + 55 + 2 = 105$ min, como excede de 60 dividimos entre 60: $105 : 60 = 1$ h y sobran 45 min. Sumamos finalmente las horas: $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ h. El tiempo total 10h 45:32.

Ejemplo: Si Alejandro Valverde invirtió 10h 47:15 en las misma etapas ¿Qué ventaja le sacó Contador a Valverde?
Como no podemos restar los segundos transformos un minuto del tiempo de Valderde en segundos, el tiempo quedará como 10h 46:75 y ya podemos restar: $46 - 45 = 1$ min, $75 - 32 = 37$ s. La diferencia a favor de Contador 1:37.

Para **multiplicar en forma compleja por un número natural** multiplicaremos cada cantidad por el número y aplicaremos el exceso de 60 como en la suma.

Ejemplo: Una atleta etíope de una carrera de 5 000 m pasa el primer km en 2:55.8. ¿En cuanto tiempo estimas que terminará la prueba si sigue corriendo a ese ritmo? Comencemos por los segundos: $55'8 \cdot 5 = 279$ s, dividimos entre 60 para obtener cuántos minutos y segundos son: $279 : 60 = 4$ min y sobran 39 s. Sigamos con los minutos $2 \cdot 5 = 10$ min y sumándole 4 obtenemos el resultado final: 14:39.0 es el tiempo estimado.

Para **dividir en forma compleja por un número natural** dividiremos cada cantidad, empezando por la unidad de orden superior por el número y transformaremos el resto en unidades de orden inferior multiplicando por 60 y añadiendo el resultado a la unidad siguiente. El último resto es sobrante medido en la unidad inferior.

Ejemplo: El palentino Mariano Haro corrió los 10 000 m en 28:25.6. ¿A cómo pasó cada km suponiendo ritmo constante? Comenzamos la división por los minutos: $28 : 10 = 2$ min y sobran 8. Transformamos el resto en segundos y los añadimos $8 \cdot 60 + 25'6 = 505'6$. Dividimos ahora los segundos: $505'6 : 10 = 50'56$ s. El ritmo de Haro fue de 2:50.56.

6. MEDIDA DE ANGULOS.

Los ángulos se miden en el sistema sexagesimal de forma compleja en grados, minutos y segundos. También se miden en radianes de forma incompleja. Las transformaciones funcionan como las medidas de tiempo asimilando grados con horas.

Ejemplo: Un ángulo llano mide 180° que equivalen a π radianes. El círculo completo son 360° equivalentes a 2π radianes. Mediante una regla de tres averiguamos cuánto es un radián en grados, minutos y segundos. Si π son 180 uno serán x: $x = \frac{180}{\pi} = 57,295779513082320876798154814105^\circ$. Es decir 57º y pico. Pasemos el pico a minutos multiplicando la parte decimal por 60:
$0,295779513082320876798154814105 \cdot 60 = 17,746770784939252607889288884631$. Es decir 17' y pico. Pasemos el pico a segundos multiplicando por 60: $0,746770784939252607889288884631 \cdot 60 = 44,8$. Es decir 44" y pico. Un radián son 57º17'44"8.

7. OPERACIONES CON MEDIDA DE ANGULOS.

Son idénticas a las medidas de tiempo.

Ejemplo: Dos ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ de un triángulo miden 61º 30' 44" y 37º 33' 58" respectivamente.

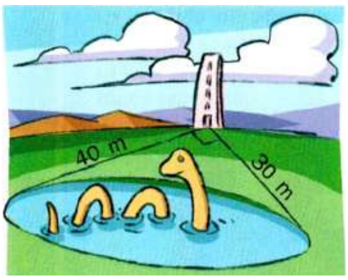
Hallar el valor del ángulo $\hat{C}$ restante y trisecarlo. Sumaremos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ y lo restaremos de 180º para obtener el valor de $\hat{C}$. A continuación dividiremos el resultado entre 3. Seguiremos el orden segundos, minutos, grados en la suma y resta; el orden inverso en la división. $44 + 58 = 102$" equivalentes a 1' 42". $30 + 33 + 1 = 64$' equivalentes a 1º 4'. $61 + 37 + 1 = 99$º. Por lo tanto $\hat{C} = 180^o - 99^o4'42'' = 179^o59'60'' - 99^o4'42'' = 80^o55'18''$. Procedemos a trisecar el ángulo dividiendo por 3: $80 : 3 = 26$ y sobran 2º equivalentes a 120' que sumamos a los 55:
$120 + 55 = 175$'. Dividimos los minutos $175 : 3 = 58$ y sobra 1' que son 60" que sumamos a los 18:
$60 + 18 = 78$". Dividimos los segundos $78 : 3 = 26$". La trisección de $\hat{C}$ mide 26º58'26".

8. TEOREMA DE PITAGORAS. MEDIDAS INDIRECTAS. RECONOCIMIENTO DE TRIANGULOS RECTANGULOS.

Véase G.3.8.4 y G.1.13.2.

☞ *El teorema de Pitágoras caracteriza a los triángulos rectángulos. Si las medidas de los lados a, b y c de un triángulo no verifican $a^2 + b^2 = c^2$ el triángulo no tiene un ángulo recto.*

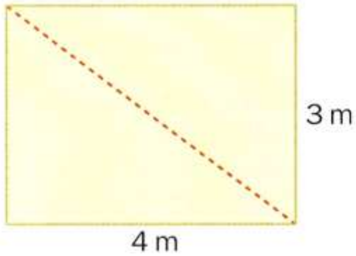
Ejemplo: Los lados de un triángulo miden 50, 120 y 130 cm. ¿Es rectángulo?
$130^2 = 16900$ y tambien $50^2 + 120^2 = 2500 + 14400 = 16900$. Luego es rectángulo.
Los lados de otro triángulo miden 11,9 y 2 cm. ¿Es rectángulo?
$11^2 = 121$ mientras que $9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$. Luego no es rectángulo.



El teorema permite hallar distancias inaccesibles.
Por ejemplo para hallar la medida del largo del lago de la figura, como las medidas indicadas se corresponden con los catetos de un triángulo rectángulo, la medida pedida es la hipotenusa:
$c^2 = 40^2 + 30^2 = 1600 + 900 = 2500 \rightarrow c = \sqrt{2500} = 50$ m.

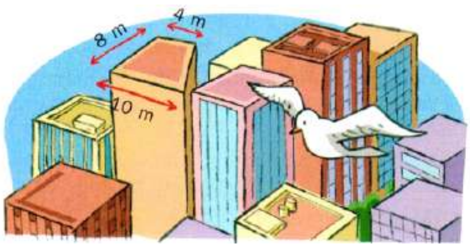
9. CÁLCULO DE DISTANCIAS.

El teorema de Pitágoras permite calcular la distancia entre dos puntos que son los vértices de un triángulo rectángulo o tienen alguna relación con él. Veamos algunos ejemplos:

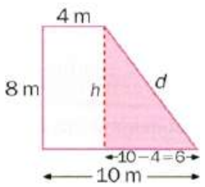


El dormitorio de Paula es un rectángulo de 3 por 4 m
¿Cuál es la mayor distancia que puede recorrer dentro de él en línea recta?

Sol: Dicha distancia es la diagonal del rectángulo que coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 3 y 4:
$d^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \to d = \sqrt{25} = 5$ m

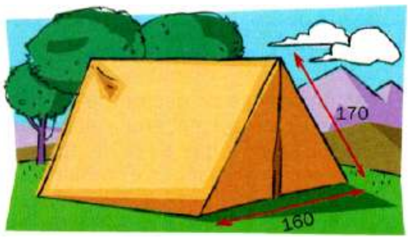


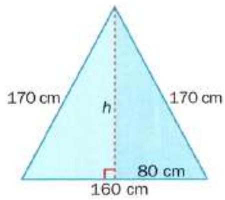
El trazado de un rascacielos es como el de la figura.
Calcula la medida del lado oblicuo.



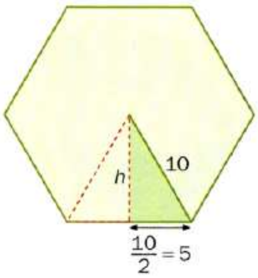
Sol: Se trata de calcular el valor de d en el dibujo. Como los catetos del triángulo rectángulo miden h=8 y 6 el lado pedido cumple el teor.de Pitágoras:
$d^2 = h^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \to d = \sqrt{100} = 10$

Calcula la altura de la tienda de campaña.





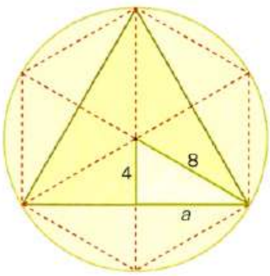
Sol: Se trata de calcular el valor de h en el dibujo. Como un cateto del triángulo rectángulo mide 80 y la hipotenusa mide 170 cm el oro cateto cumple el teorema de Pitágoras:
$170^2 = h^2 + 80^2 \to h = \sqrt{28900 - 6400} = 150$



Calcula la apotema de un hexágono de 10 cm de lado.

Sol: El triángulo rectángulo del dibujo lo forman la hipotenusa, que coincide con el lado porque un hexágono se forma con 6 triángulos equiláteros, un cateto, que es la mitad del lado del hexágono, y el otro cateto, que es la apotema pedida. Por el teorema de Pitágoras:

$10^2 = h^2 + 5^2 \to h = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ cm



Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 decímetros de radio como en la figura.

Sol: El triángulo rectángulo del dibujo lo forman la hipotenusa, que coincide con el radio, un cateto que es la mitad del radio debido a las propiedades del baricentro, y el otro cateto *a* que es la mitad del lado buscado.

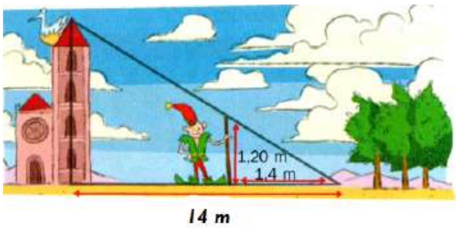
$8^2 = a^2 + 4^2 \to a = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ dm

1. FIGURAS SEMEJANTES. TRIANGULOS SEMEJANTES.

Dos figuras semejantes tienen la misma forma.
En ellas los segmentos respectivos que las conforman son proporcionales.
El cociente de dos de ellos se llama **razón de semejanza** o escala.
Dos triángulos son semejantes si tienen iguales los ángulos y los lados proporcionales.

2. TEOREMA DE TALES.

Véase G.3.8.3.



Calcula a qué altura ha anidado la cigüeña.

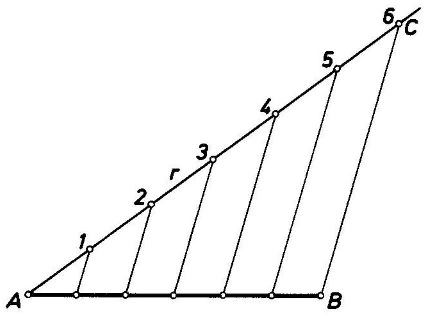
El dibujo contiene dos triángulos rectángulos semejantes en posición de Tales, por tanto sus lados serán proporcionales, es decir:

$$\frac{x}{1'20} = \frac{14}{1'40} \to x = \frac{14 \cdot 1'2}{1'4} = 12 \text{ m}$$

3. DIVISION DE SEGMENTOS EN PARTES IGUALES.

El teorema de Tales proporciona el fundamento para la división de cualquier segmento en un número dado de partes iguales.

1) Se traza una semirrecta *r* en uno de los extremos *A* del segmento.
2) Con un compás abierto con una medida arbitraria se señalan sobre la semirrecta tantos puntos (del 1 al 6) como partes queremos obtener.
3) Se une el último punto *C* con el otro extremo *B* del segmento y se trazan paralelas a *CB* por los otros puntos. Estas dividirán el segmento en partes iguales.

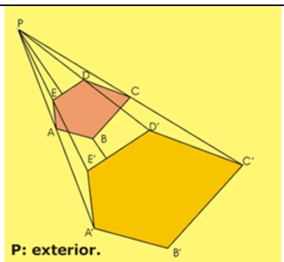


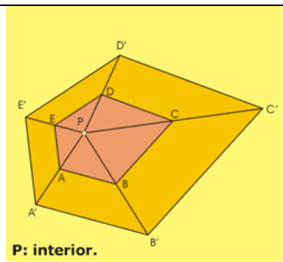
4. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS.

Existen 3 criterios para determinar la semejanza de dos triángulos más laxos que la definición.
Criterio 1. Dos triángulos son semejantes si sus **tres lados** son **proporcionales**.
Criterio 2. Dos triángulos son semejantes si tienen los **tres ángulos iguales**.
Criterio 3. Dos triángulos son semejantes si tienen **dos lados proporcionales y el ángulo** que forman **igual**.

5. CONSTRUCCION DE POLIGONOS SEMEJANTES.

El método de Tales para construir polígonos semejantes usa el teorema de Tales y/o la posibilidad de descomponer un polígono cualquiera en triángulos.





En la figura de la izquierda, desde un punto exterior P se trazan segmentos que pasan por los vértices. En la del centro el punto es interior. Prolongando proporcionalmente los segmentos se obtienen pentágonos semejantes al pequeño.

6. RAZON DE SEMEJANZA DE FIGURAS Y ÁREA.

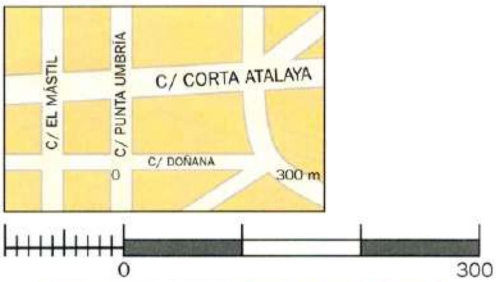
En dos figuras semejantes con razón de semejanza k la razón de sus áreas es igual a k^2.

Ejemplo: Dados dos pentágonos semejantes siendo las medidas de los lados del mayor el triple que las del menor tienen áreas en proporción $3^2 = 9 : 1$.

7. MAPOS Y PLANOS. MAQUETAS. MEDIDAS Y CALCULOS CON ESCALAS

Un mapa es la representación gráfica plana de parte de la superficie terrestre.
Un plano es un dibujo de un objeto de dimensiones proporcionales a las reales.
Una maqueta es una reproducción a tamaño reducido de un objeto que guarda proporción en sus medidas.
En mapas, planos y maquetas la razón de semejanza recibe el nombre de **escala**.
La escala es la razón entre una longitud determinada de la representación y la medida real correspondiente.

Ejs: Un mapa político a escala 1:100000, un plano de un piso a escala 1:50, una maqueta de un puente a escala 1:20. En el mapa 1 cm representa 1 km, en el plano 1cm representa ½ m y en la maqueta 1 m representa 20 m.



Para conocer la longitud de la calle Doñana, desde la esquina con la calle el Mástil hasta la esquina con la calle Punta Umbría, medimos con la regla obtenido 0’8 cm. Aplicamos la escala gráfica 1:100 y obtenemos $0'8 \cdot 100 = 80$ m. A fin de obtener más precisión a veces se acompaña un talón, que divide la unidad en partes iguales como el de la figura que nos permite medir mm.

Calcula la distancia en línea recta de Madrid a París.

Midiendo con una regla hallamos que en el mapa es de 38 mm. La escala gráfica indica que 15 mm equivalen a 500 km. Haciendo una regla de tres obtenemos la distancia real en línea recta:

$$\frac{15}{500} = \frac{38}{x} \to x = \frac{38 \cdot 500}{15} = 1266'\hat{6} \text{ Km}$$

1. FIGURAS SEMEJANTES.

Dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma.

Ejemplos: Las figuras de una fotografía y los objetos o seres reales fotografiados. Una maqueta de una construcción y la construcción realizada de acuerdo con ella.

Los puntos, lados y ángulos correspondientes en una semejanza se llaman **homólogos**.

Dos figuras planas semejantes tienen los lados homólogos *proporcionales* y los ángulos homólogos *iguales*. El cociente entre lados homólogos en figuras semejantes se llama **razón de semejanza**.

Ejemplos: Dos cuadrados cualesquiera son semejantes. Su razón de semejanza es el cociente de la medida de sus lados. Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes pues tienen tres ángulos iguales de 60º y tres lados iguales, que guardarán la proporción del cociente de la medida de sus lados.

2. MEDIDA DE FIGURAS SEMEJANTES.

La razón de semejanza que se utiliza en maquetas, planos y mapas se llama **escala**.

Ejemplo: En un mapa topográfico a escala 1:20.000 una distancia de 1 cm equivale a 20.000 cm=200 m en la realidad.

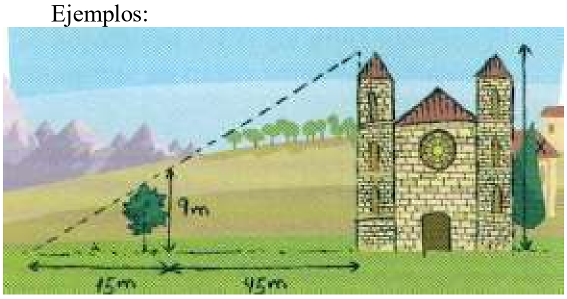
Dos figuras semejantes con razón de semejanza k tienen sus áreas en razón k^2 y sus volúmenes en razón k^3.

Ejemplo: Considerados un cubo de arista 9 cm y otro de arista 18 cm la razón de semejanza será $k = \frac{18}{9} = 2$. Considerado el cubo grande, cada cara tendrá una superficie $k^2 = 2^2 = 4$ veces la del pequeño y su volumen será $k^3 = 2^3 = 8$ veces el volumen del cubo pequeño.

3. TEOREMA DE TALES.

Véase A.3.8.3.

Ejemplos:

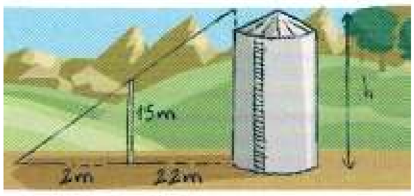


Calcular la altura del campanario.

En la figura aparecen dos triángulos en posición de Tales por lo que se tiene la siguiente proporcionalidad: $\frac{15}{15+45} = \frac{9}{x} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 60}{15} = 36 \text{ m}$

Calcular la altura del silo.

En la figura aparecen dos triángulos en posición de Tales por lo que se tiene la siguiente proporcionalidad: $\frac{2}{2+22} = \frac{15}{h} \rightarrow h = \frac{15 \cdot 24}{2} = 180 \text{ m}$



4. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS.

Existen tres criterios de semejanza de triángulos:

- Criterio 1. Dos ángulos iguales.
- Criterio 2. Tres lados proporcionales.
- Criterio 3. Dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.

Demostración-uso del criterio 1: Dados dos triángulos con dos ángulos iguales, α y β, el tercer ángulo también será igual pues valdrá $180-(\alpha+\beta)$. Ajustando el pequeño dentro del grande haciendo coincidir un ángulo y los lados que lo comprenden se forma una figura de triángulos en posición de Tales de donde se concluye la proporcionalidad de los lados homólogos.

Demostración-uso del criterio 2: Dados dos triángulos con lados homólogos proporcionales, ajustando el pequeño dentro del grande haciendo coincidir dos lados homólogos se observa que los terceros lados son paralelos y se forma una figura de triángulos en posición de Tales de donde se concluye la igualdad de ángulos homólogos.

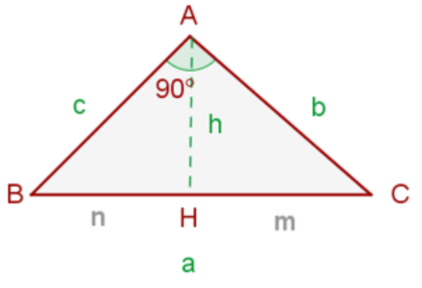
Demostración-uso del criterio 3: Dados dos triángulos con dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido igual, ajustando el pequeño dentro del grande haciendo coincidir el ángulo se observa que los terceros lados son paralelos y se forma una figura de triángulos en posición de Tales de donde se concluye la proporcionalidad del tercer lado y la igualdad de los otros dos ángulos.

5. CONSECUENCIAS DE LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. TEOREMA DE LA ALTURA.

Todos los triángulos equiláteros son semejantes (criterio 1).
Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes (criterio 3).
La razón de los perímetros de dos triángulos semejantes es la razón de semejanza.
El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y su longitud es la mitad de éste (teorema de Tales).
La razón de semejanza de dos polígonos semejantes es igual a la razón de sus lados o de sus diagonales (cualquier polígono se descompone en triángulos).

Teorema de la altura. En un triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional de los segmentos en que la divide: $h=\sqrt{m\cdot n} \iff h^2=m\cdot n$.

Demostración:



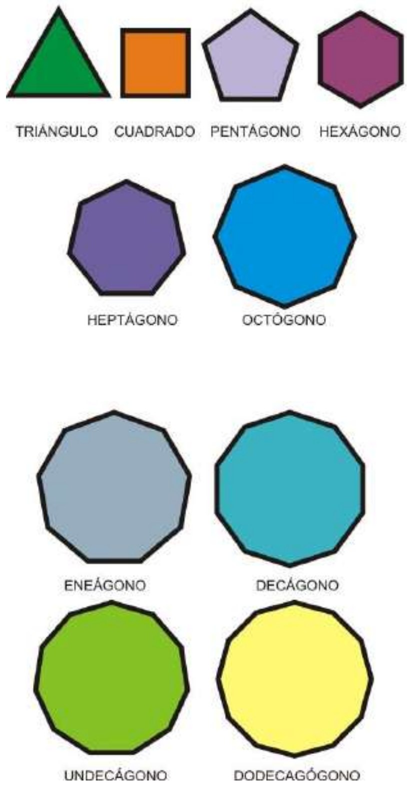
En el triángulo rectángulo de la figura se ha trazado la altura h sobre la hipotenusa BC, dividiéndola en dos segmentos BH y HC cuyas medidas se representan por n y m. Los triángulos rectángulos ABH y AHC son semejantes por el criterio 1. Luego se cumple la proporción de sus catetos homólogos: $\frac{h}{n}=\frac{m}{h} \to h^2=m\cdot n$, c.s.q.d.

Ejemplo: La altura de un triángulo rectángulo mide 7 cm y divide a la hipotenusa en dos segmentos m y n tales que $4m=n$. Calcula m y n. Solución: Aplicando el teorema de la altura $h^2=mn \to 7^2=m\cdot 4m=4m^2 \to m=\sqrt{\frac{7^2}{4}}=\frac{7}{2}\,cm \to n=4m=4\cdot\frac{7}{2}=14\,cm.$

1. POLÍGONOS. ELEMENTOS ESENCIALES.

Un **polígono** es una figura plana cerrada, limitada por segmentos de recta concatenados denominados **lados**. El punto de encuentro de dos lados es un **vértice**. La recta que une dos vértices distintos no consecutivos se denomina **diagonal**.

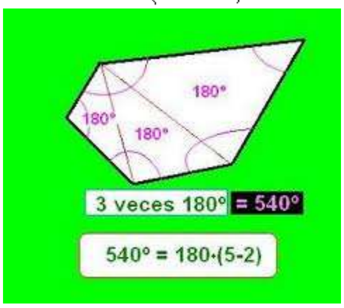
Los polígonos se clasifican según el *número de lados* en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, etc.



La **suma de los ángulos** de un triángulo es 180º.

En un polígono de n lados el número de diagonales que parten de un vértice es $n-3$ (se excluyen el propio vértice y los dos contiguos). El **número** total de **diagonales** será $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Estas diagonales dividen el polígono en $n-2$ triángulos y la **suma de los ángulos del polígono** será $180^o\cdot(n-2)$.



2. TRIÁNGULOS. CLASIFICACION. PUNTOS Y RECTAS NOTABLES.

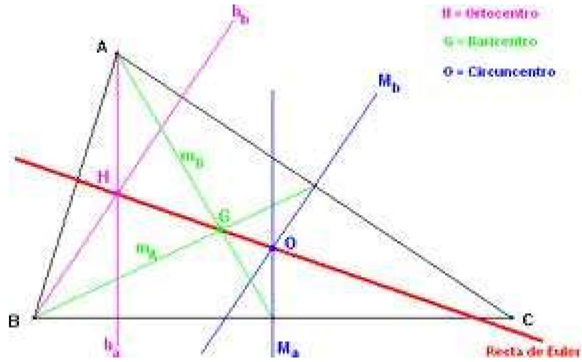
Los triángulos se clasifican en *equiláteros, isósceles y escaleno* según tengan 3 lados (ángulos) iguales, 2 lados (ángulos) iguales o los tres desiguales, respectivamente.

Los triángulos se clasifican en *obtusángulos, rectángulos y acutángulos* según que el mayor de los ángulos sea obtuso (mayor de 90º), recto (igual a 90º) o agudo (menor de 90º).

En todo triángulo cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.
☞ *Teorema del burro. Un burro irá a buscar su comida por el camino más corto.*
En un *triángulo rectángulo* el lado mayor se llama **hipotenusa** y los otros dos **catetos**.

Las **mediatrices** de un triángulo, rectas perpendiculares por el punto medio de cada lado, se cortan en el *circuncentro*, centro de la circunferencia circunscrita.
Las **medianas** de un triángulo, rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto, se cortan en el *baricentro* o centro de gravedad. El baricentro divide la mediana en dos fragmentos: el que lo une con el vértice es doble de largo que el otro.
Las **bisectrices** de un triángulo, rectas que dividen cada ángulo en dos mitades iguales, se cortan en el *incentro*, centro de la circunferencia inscrita.
Las **alturas** de un triángulo, rectas perpendiculares a los lados que pasan por el vértice opuesto, se cortan en el *ortocentro*.

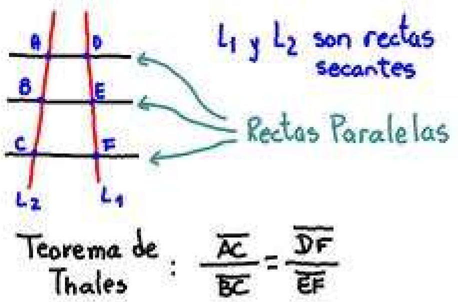
El circuncentro, baricentro, incentro y ortocentro de cualquier triángulo están alineados. La recta que los contiene se llama **recta de Euler**.



3. TEOREMA DE TALES. TRIANGULOS SEMEJANTES.

Dos polígonos son **semejantes** si tienen los lados correspondientes proporcionales y los ángulos correspondientes iguales.

Teorema de Tales. Dos rectas secantes cortadas por un haz de paralelas delimitan segmentos proporcionales.

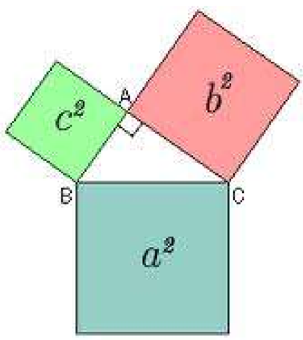


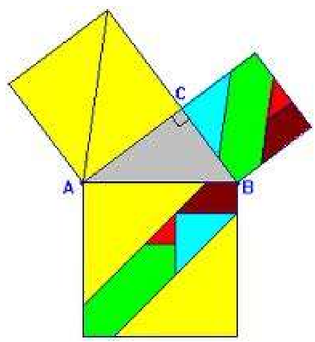
Si prolongamos dos lados adyacentes de un triángulo y trazamos una recta paralela al lado opuesto y exterior al triángulo se formará otro triángulo mayor y semejante al original. **Ambos triángulos** se dice que están en **posición de Tales**.

4. TEOREMA DE PITAGORAS.

Teorema de Pitágoras. Un triángulo es rectángulo si y solo si el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los lados menores.

$$a^2 = b^2 + c^2$$





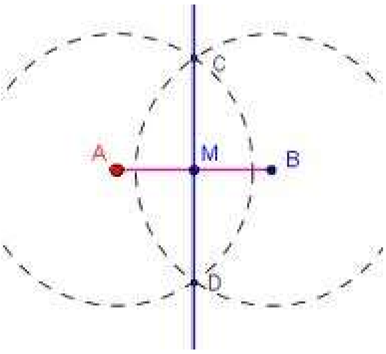
5. LUGARES GEOMETRICOS.

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos del plano que verifican una condición.

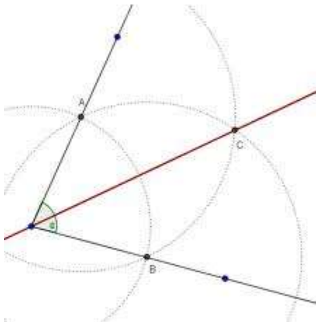
La **mediatriz** de un segmento es el conjunto de puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Este conjunto es una recta perpendicular al punto medio del segmento.

La **bisectriz** de un segmento es el conjunto de puntos del plano que equidistan de los lados que forman el ángulo. Este conjunto es una recta que parte el ángulo por su mitad.

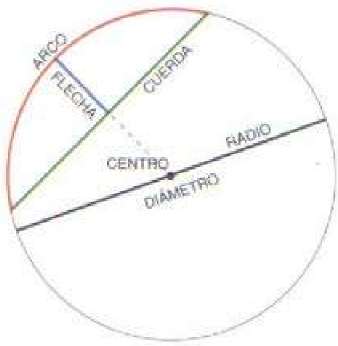
La **circunferencia es** el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto interior llamado *centro* una distancia dada llamada *radio*. La circunferencia es una curva cerrada. La razón entre su longitud y su diámetro es el número π.



Mediatriz



Bisectriz



Circunferencia

6. PERIMETROS Y AREAS DE POLÍGONOS.

Perímetro de una figura plana es la medida de la longitud de su contorno.
Área de un polígono es la medida de la superficie que encierra.

Las fórmulas para el cálculo del perímetro y el área son:

Figura	*Perímetro*	*Área*	*Variables*
Cuadrado	$4 \cdot l$	$l \cdot l = l^2$	l lado
Rectángulo	$2 \cdot b + 2 \cdot h$	$b \cdot h$	b base, h altura
Romboide	$2 \cdot a + 2 \cdot b$	$b \cdot h$	b base, h altura, a el otro lado
Rombo	$2 \cdot a + 2 \cdot b$	$\frac{D \cdot d}{2}$	D diagonal mayor, d diagonal menor a , b lados
Triángulo	$a + b + c$	$\frac{b \cdot h}{2}$	b base, h altura; a , c otros lados
Trapecio		$\frac{B+b}{2} \cdot h$	B base mayor, b base menor, h altura a , c los otros lados
Polígono regular	$n \cdot l$	$\frac{P \cdot a}{2}$	l lado, P perímetro, a apotema

7. PERIMETROS Y AREAS DE FIGURAS CIRCULARES.

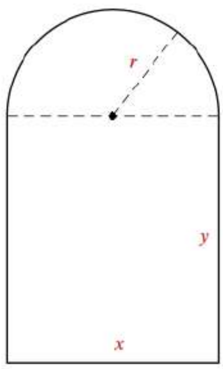
Un **círculo** es el área encerrada por una circunferencia.
Un **sector circular** es el área encerrada por un arco de circunferencia y dos radios.
Una **corona circular** es el área encerrada entre dos circunferencias concéntricas.
Un **trapecio circular** es el fragmento de corona circular comprendida entre dos radios.
Las fórmulas para el cálculo del perímetro y el área son:

Figura	***Perímetro***	***Área***	***Variables***
Círculo	$2 \cdot \pi \cdot r$	$\pi \cdot r^2$	r radio de la circunferencia
Sector circular	$2\pi r \cdot \frac{n}{360} + 2r$	$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{n}{360}$	r radio, n número de grados
Corona circular	$2 \cdot \pi \cdot (r + R)$	$\pi \cdot (R^2 - r^2)$	r radio menor, R radio mayor
Trapecio circular	$2\pi(R + r) \cdot \frac{n}{360} + 2(R - r)$	$\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \frac{n}{360}$	r radio menor, R radio mayor n número de grados

8. AREAS DE FIGURAS COMPUESTAS.

Para su cálculo basta descomponer la figura en otras de fórmulas conocidas.
Por ejemplo cualquier poligonal cerrada se puede descomponer en triángulos.

Ejemplo 1: Calcular el perímetro y el área de la figura del dibujo.

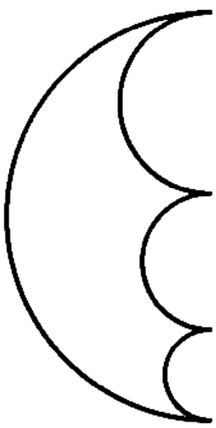


La figura se descompone en medio círculo de radio r
y un rectángulo de base x y altura y.

El perímetro del semicírculo es πr
El perímetro del rectángulo sin el lado superior $x + y + y$
El perímetro total valdrá $\pi r + x + 2y$.

El área del semicírculo es $\frac{\pi}{2} r^2$
El área del rectángulo xy
El área total valdrá $\frac{\pi}{2} r^2 + xy$

Ejemplo 2: Calcular el perímetro y el área de la figura del dibujo sabiendo que el semicírculo mayor tiene diámetro 18 y los demás están en progresión aritmética.



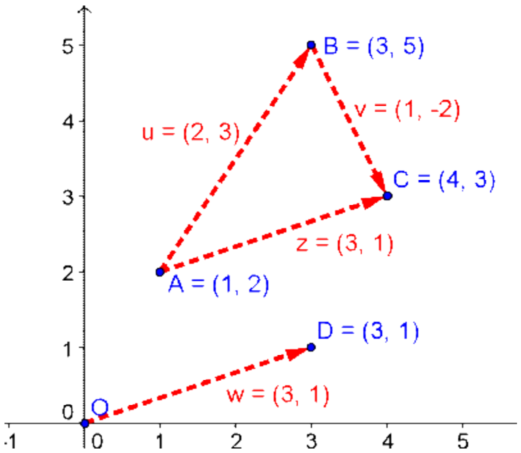
Los diámetros de los semicírculos pequeños serán 4, 6 y 8 pues
$4 + 6 + 8 = 18$.
Los perímetros de los semicírculos serán el producto de su radio por el número *pi* : 2π , 3π , 4π y 9π. En total 18π.
El área del semicírculo grande es $\frac{\pi}{2} r^2 = \frac{\pi}{2} 9^2 = \frac{81\pi}{2}$
El área de los semicírculos pequeños es:

- $\frac{\pi}{2} r_1^2 = \frac{\pi}{2} 2^2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$
- $\frac{\pi}{2} r_2^2 = \frac{\pi}{2} 3^2 = \frac{9\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2} r_3^2 = \frac{\pi}{2} 4^2 = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$

El área total de la figura:
$\frac{81\pi}{2} - (2\pi + \frac{9\pi}{2} + 4\pi) = \frac{72\pi}{2} - 6\pi = 30\pi$

1. VECTORES EN EL PLANO.

Un **vector** es un segmento de recta orientado que une dos puntos llamados **origen y destino**. Los vectores tienen *módulo* (la distancia entre origen y destino), *dirección* (la de la recta que los une) y *sentido* (de origen a destino). Los vectores se representan con variables en negrita y minúsculas con una flecha encima: $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$.



Los vectores $\vec{z}$ y $\vec{w}$ son equipotentes y tienen origen en los puntos A y O. Las coordenadas del vector $\vec{u}$ se obtienen restando las de B y A y las del vector $\vec{v}$ las de los puntos C y B. El vector $\vec{z}$ es la suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dado que une los puntos A y C.

Los vectores con igual módulo, dirección y sentido se llaman **equipotentes**. Tan solo se diferencian en su punto de origen.

Las **coordenadas de un vector** se obtienen restando a las coordenadas del punto destino las coordenadas del punto origen.

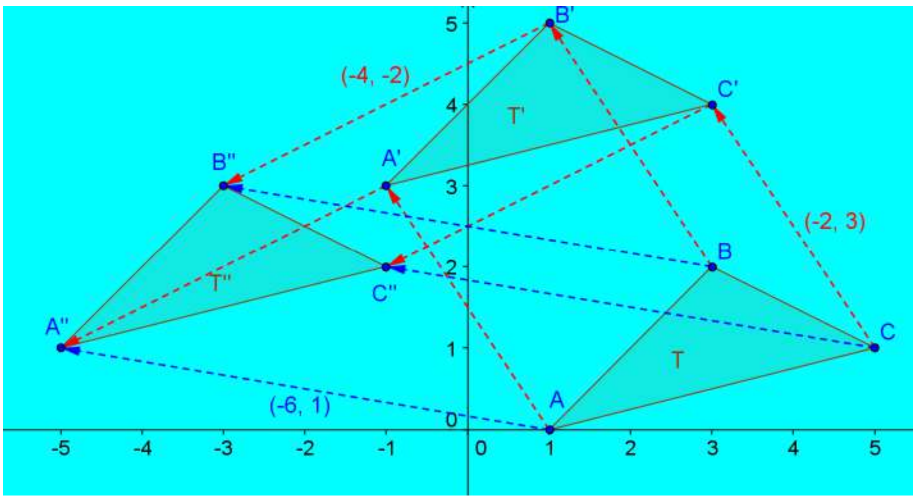
La **suma de dos vectores** es otro vector que se obtiene trasladando el origen del segundo al destino del primero y uniendo el origen del primero con el destino del segundo trasladado.

Las **coordenadas del vector suma** son la suma de las coordenadas de los vectores sumandos.

2. TRASLACIÓN EN EL PLANO. TRASLACIONES SUCESIVAS.

Una **traslación de vector** $\vec{\mathbf{u}}$ transforma un punto P en otro punto P' de forma que el vector $\overrightarrow{\mathbf{PP'}}$ es equipolente a $\vec{\mathbf{u}}$, es decir, se trata de identificar el origen del vector guía con P y considerar que P' es el destino del vector guía.

La aplicación sucesiva de dos traslaciones de vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ es otra traslación de vector el vector suma $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$.

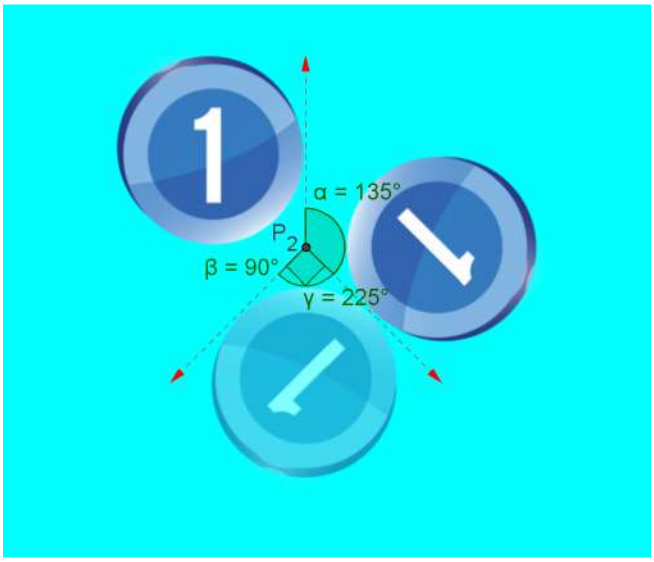


El triángulo T se desplaza mediante el vector (-2,3) a T' y éste a T'' mediante la traslación (-4,-2).
El triángulo T se traslada a T'' mediante el vector suma (-6,1)=(-2,3)+(-4,2).

3. GIROS EN EL PLANO. GIROS SUCESIVOS.

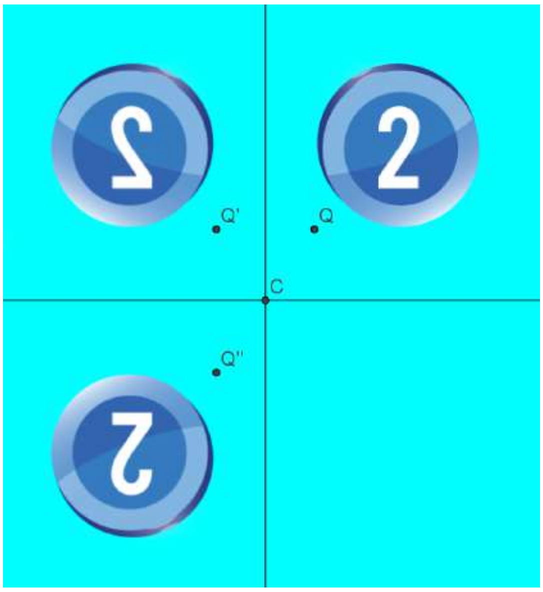
Un **giro de centro O y ángulo** α transforma un punto P en otro punto P' de forma que son iguales los segmentos $OP = OP'$ y el ángulo $\alpha = POP'$.

La aplicación sucesiva de dos giros de centro O y ángulos α y β es otro giro de centro O y ángulo $\alpha + \beta$.



La imagen del número se gira 135º en torno al punto P_2 y a continuación otros 90º en torno al mismo punto, equivalente a un total de 225º.

4. SIMETRIA AXIAL. SIMETRIA CENTRAL.



Dos puntos son simétricos respecto a un eje cuando el eje es la mediatriz del segmento que los une. La simetría respecto de un eje se llama **simetría axial**.

Dos puntos son simétricos respecto a un centro cuando el centro es el punto medio del segmento que los une. La simetría respecto de un eje se llama **simetría central**.

La imagen del número ha sido reflejada respecto de la recta vertical ofreciendo simetría axial. Si a continuación reflejamos la imagen reflejada respecto a la recta horizontal obtenemos simetría central respecto del punto C.
Los puntos Q y Q' tienen las abscisas de igual valor absoluto pero de signo contrario, las ordenadas son iguales. Los puntos Q y Q" tienen las abscisas y las ordenadas de igual valor absoluto pero signo contrario.

5. SIMETRÍAS Y COORDENADAS.

Dos puntos son **simétricos respecto al eje de ordenadas OY** si sus abscisas son opuestas y sus ordenadas son iguales.

Dos puntos son **simétricos respecto al eje de abscisas OX** si sus abscisas son iguales y sus abscisas son opuestas.

Dos puntos son **simétricos respecto del origen** si sus abscisas y sus ordenadas son opuestas.

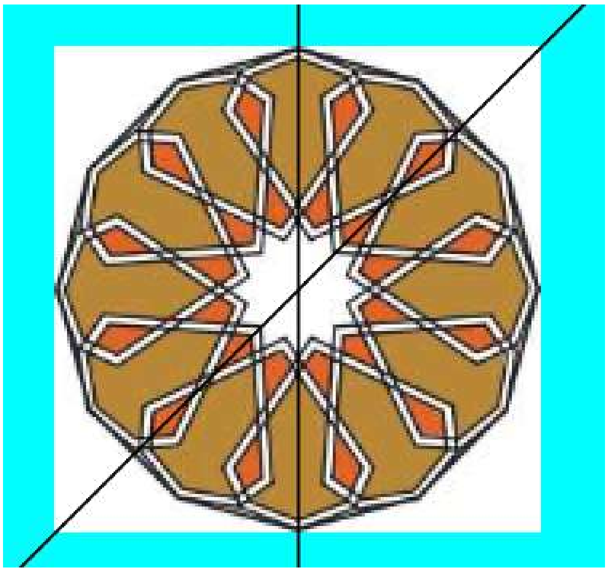
6. EJES Y CENTRO DE SIMETRÍA.

Una figura tiene un **eje de simetría** si todo punto de la misma tiene su simétrico respecto al eje en la misma figura.

Una figura tiene un **centro de simetría** si todo punto de la misma tiene su simétrico respecto al centro en la misma figura.

Ejemplos:
En la figura de la imagen se presentan dos ejes de simetría, uno vertical y otro oblicuo. ¿Hay más? ¿Dónde se cruzarían?

La intersección de dichos ejes es un centro de simetría ¿Por qué?



1. MEDIDA DE ANGULOS.

Un grado es la nonagésima parte de un ángulo recto. Se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos de arco.

Un radián es la medida de un ángulo central de una circunferencia cuyo arco tiene la misma medida que el radio.

La equivalencia entre radianes y grados es $2\pi = 360^o$.

Ejemplo: La tabla de equivalencias de los ángulos más usuales en grados y radianes es:

Grados	0	30	45	60	90	120	135	180	360
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	2π

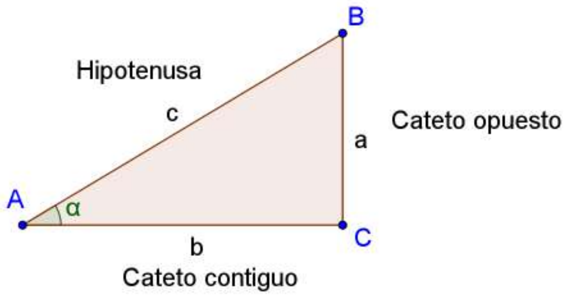
2. RAZONES TRIGONOMETRICAS EN TRIANGULOS RECTANGULOS.

En un triángulo rectángulo se definen las siguientes razones trigonométricas de un ángulo agudo α:

El seno de α es la razón de las medidas del cateto opuesto y la hipotenusa.

El coseno de α es la razón de las medidas del cateto contiguo y la hipotenusa.

La tangente de α es la razón de las medidas del cateto opuesto y el cateto contiguo.

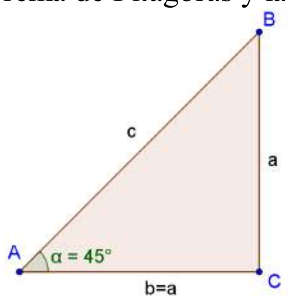


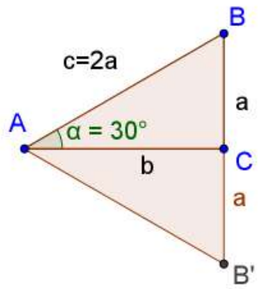
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$$

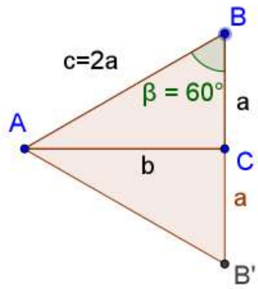
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Para averiguar las razones trigonométricas de los ángulos de 45º, 60º y 30º utilizaremos el teorema de Pitágoras y las definiciones aplicadas a triángulos rectángulo isósceles y equilátero:







$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \to c = \sqrt{2}a$

$\operatorname{sen} 45^o = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^o = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 45^o = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$

$c^2 = (2a)^2 = 4a^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = 3a^2 \to b = \sqrt{3}a$

$\operatorname{sen} 30^o = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\cos 30^o = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 30^o = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{sen} 60^o = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^o = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 60^o = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$

3. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

El cuadrado del seno más el cuadrado del coseno de cualquier ángulo vale uno.
Esta es la ecuación fundamental de la trigonometría y se obtiene por aplicación del teorema de Pitágoras, dividendo por el cuadrado de la hipotenusa:

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \text{sen}\ ^2\alpha + \cos\ ^2\alpha = 1.$$

La razón del seno al coseno es la tangente del ángulo. En efecto: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{\cancel{c}}}{\frac{b}{\cancel{c}}} = \frac{a}{b} = \text{tg}\ \alpha.$

Si dividimos la ecuación fundamental entre el cuadrado del seno o el cuadrado del coseno se obtienen fórmulas muy útiles para la simplificación de las expresiones trigonométricas.

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \text{cotg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Los valores inversos del seno, el coseno y la tangente de un ángulo se llaman *cosecante, secante y cotangente* del ángulo, respectivamente.

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

Todas estas fórmulas permiten calcular todas las razones de un ángulo con el conocimiento de una de ellas.
Si sabemos que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, la ecuación fundamental permite calcular

$$\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{3^2}{4^2}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

y la fórmula de la tangente nos da:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}} : \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

El cálculo de cosecante, secante y cotangente es inmediato:

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = 1 : \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} = 1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}.$$

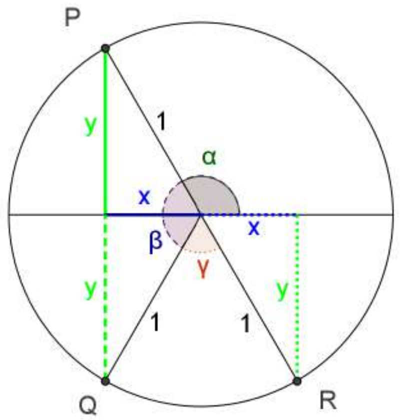
$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = 1 : \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

4. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA.

Para generalizar las razones a un ángulo cualquiera nos apoyaremos en un punto de la circunferencia de radio unidad, llamada *goniométrica*.

El radio que une el punto al centro y el radio del semieje positivo de abscisas forma un ángulo obtuso, barrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

En los cuadrantes II, III y IV se define de manera análoga el seno, coseno y tangente:



$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\gamma = \frac{y}{1}$$

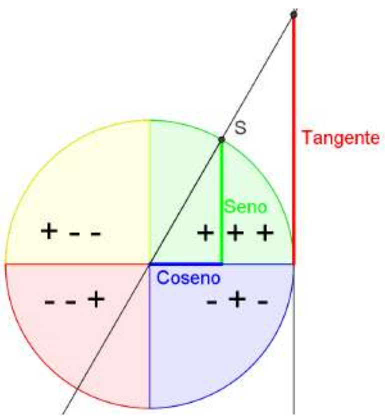
$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{x}{1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma = \frac{y}{x}$$

La única diferencia es el signo de los segmentos:

	Cuadrante I	Cuadrante II (P)	Cuadrante III (Q)	Cuadrante IV (R)
X	Más	Menos	Menos	Más
Y	Más	Más	Menos	Menos

En la circunferencia goniométrica resumimos el signo de las razones (seno, coseno, tangente) según el cuadrante y realizamos la interpretación geométrica.



Como el radio mide uno:
el *seno* es el segmento de la *ordenada* (verde),
el *coseno* es el segmento de la *abscisa* (azul) y
la *tangente* es el segmento de la *ordenada* del punto de corte de la perpendicular al eje OX *tangente* a la circunferencia y el radio que une el punto al centro (rojo)
(Por el teorema de Tales, la tangente es al radio unidad como el seno es al coseno. Véase la figura adjunta).

La interpretación geométrica nos permite con facilidad calcular razones que completan la siguiente tabla:

	0	**30**	**45**	**60**	**90**	**180**	**270**	**360**
Seno	0	½	√2/2	√3/2	1	0	-1	0
Coseno	1	√3/2	√2/2	½	0	-1	0	1
Tangente	0	√3/3	1	√3	∞	0	-∞	0

5. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES DE CIERTOS ÁNGULOS.

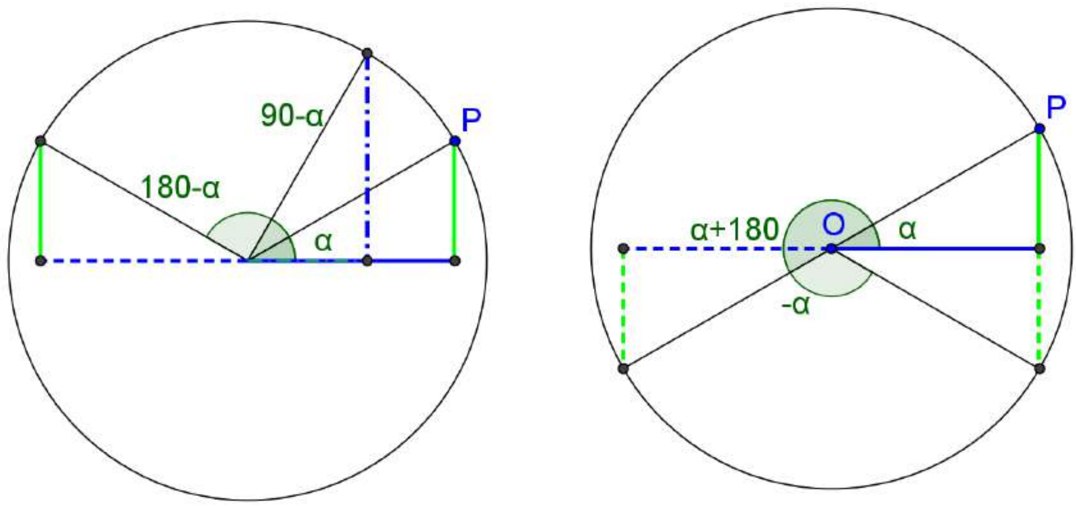
Cualquier ángulo se reduce a un ángulo inferior a 360 grados tomando el resto de la división entera entre 360.

Dos ángulos se dicen:

- *complementarios* si su suma es un ángulo recto,
- *suplementarios* si su suma es un ángulo llano,
- *opuestos* si su suma es un ángulo de cero grados.

Además, para pasar un ángulo del III cuadrante al primero basta restarle un llano y viceversa, para pasar un ángulo del I cuadrante al tercero basta sumarle un llano.

Dadas las razones trigonométricas de un ángulo α en el cuadrante I ¿podemos derivar las de sus ángulos complementario $(90-\alpha)$, suplementario $(180-\alpha)$, que difiere en un llano $(180+\alpha)$ y opuesto $(-\alpha=360-\alpha)$? . La respuesta es afirmativa como ilustran las figuras adjuntas y el uso de la interpretación geométrica del seno y el coseno.



Complementario:
el coseno es el seno y viceversa
Suplementario:
Mismo seno, coseno de signo contrario

Difiere en un llano:
seno y coseno de signo contrario
Opuesto:
mismo coseno, seno de signo contrario

Estas relaciones nos permiten completar nuestra tabla

	0	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**
Seno	0	½	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	½	0
Coseno	1	√3/2	√2/2	½	0	-½	-√2/2	-√3/2	-1
Tangente	0	√3/3	1	√3	∞	-√3	-1	-√3/3	0

	180	**210**	**225**	**240**	**270**	**300**	**315**	**330**	**360**
Seno	0	-½	-√2/2	-√3/2	-1	-√3/2	-√2/2	-½	0
Coseno	-1	-√3/2	-√2/2	-½	0	½	√2/2	√3/2	1
Tangente	0	√3/3	1	√3	-∞	-√3	-1	-√3/3	0

6. TRIGONOMETRÍA CON CALCULADORA.

Conviene seleccionar primero la unidad angular con la que trabajará la calculadora. La selección suele hacerse con la tecla MODE y se visualiza en el display como R para radianes y D (del inglés, *degree*) para grados.

Suelen existir tres teclas diferenciadas para el seno, coseno y tangente.

Ilustramos dos ejemplos de cálculo con una CASIO fx-100W:

Ejemplo 1: sen63°52′41″

[MODE] [MODE] [MODE] [1] → "D"

[sin] 63 [° ′ ″] 52 [° ′ ″] 41 [° ′ ″] [=] → 0.897859012 D

Ejemplo 2 : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$

[MODE] [MODE] [MODE] [2] → "R"

[cos] [(] [SHIFT] [π] [÷] 3 [)] [=] → 0.5 R

Para averiguar el ángulo que se corresponde con un valor de una razón, las mismas teclas, precedidas de la tecla SHIFT, proporcionan el resultado.

Ejemplo 3: $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$

[MODE] [MODE] [MODE] [2] → "R"

[SHIFT] [cos⁻¹] [(] [√] 2 [÷] 2 [)] [=] → 0.785398163 R

[Ans] [÷] [SHIFT] [π] [=] → 0.25

Ejemplo 4: $\tan^{-1}0{,}741$

[MODE] [MODE] [MODE] [1] → "D"

[SHIFT] [tan⁻¹] 0.741 [=] → 36.53844577 D

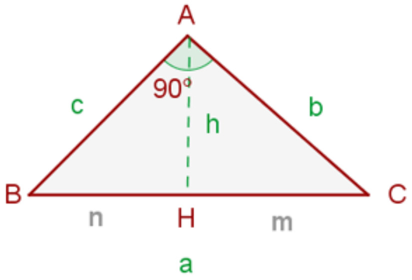
1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Resolver un triángulo es hallar los ángulos y lados desconocidos a partir de los datos conocidos.

Para resolver un triángulo rectángulo basta conocer dos lados o un lado y un ángulo agudo.

Además del teorema de la altura podemos usar el siguiente resultado:

Teorema del cateto. En un triángulo rectángulo el cateto es media proporcional de la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.



Demostración:
Aplicando el teorema de la altura se tiene que $h^2 = m \cdot n$.
De otro lado, por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo AHB: $c^2 = h^2 + n^2$, luego
$c^2 = m \cdot n + n^2 = n(m+n) = n \cdot a$.
De forma análoga en el triángulo rectángulo AHC:
$b^2 = h^2 + m^2 = mn + m^2 = m(n+m) = m \cdot a$.

Ejemplo: La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden 4 y 2 cm respectivamente. Resolver el triángulo. Solución:

Por el teorema de Pitágoras averiguamos el otro cateto: $4^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$ cm.

Las tangentes de los ángulos que faltan serán $2 : 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $2\sqrt{3} : 2 = \sqrt{3}$, luego los ángulos correspondientes son 30º y 60º, respectivamente.

Ejemplo: En un triángulo rectángulo los catetos miden 6 y 8 cm. Resolver el triángulo. Solución:

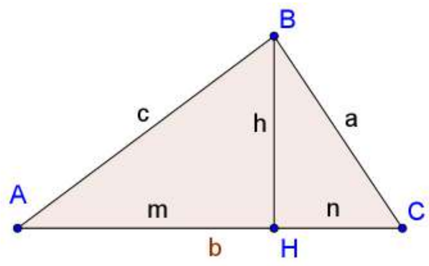
Por el teorema de Pitágoras averiguamos la hipotenusa: $x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} = 10$ cm.

Las tangentes de los ángulos que faltan serán $6 : 8 = 0.75$ y $8 : 6 = 1.\widehat{3}$, luego los ángulos correspondientes, utilizando la calculadora serán $\mathrm{tg}^{-1} 0.75 = 36^{o}52'12''$ y $\mathrm{tg}^{-1} 1.\widehat{3} = 53^{o}7'48''$.

2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA. TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO.

Para resolver triángulos cualesquiera hacen falta demostrar dos resultados previos:

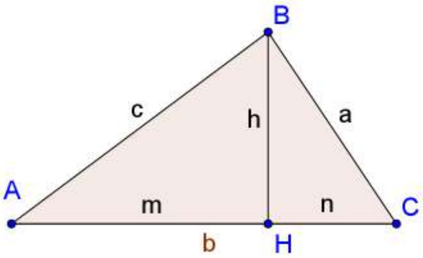
Teorema del coseno (o de Pitágoras generalizado). En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado excede a la suma de los cuadrados de los otros dos en el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.



Demostración:
Para el lado c el teorema dice
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$.
Aplicando el t. Pitágoras a AHB:
$c^2 = h^2 + m^2 = h^2 + (b-n)^2 = h^2 + b^2 + n^2 - 2bn$
Aplicando el t. Pitágoras a CHB: $a^2 = h^2 + n^2$
Por definición $\cos \hat{C} = \frac{n}{a} \rightarrow n = a \cdot \cos \hat{C}$.
La expresión de c^2 queda, según s.q.d:
$c^2 = (h^2 + n^2) + b^2 - 2bn = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot a \cos \hat{C}$

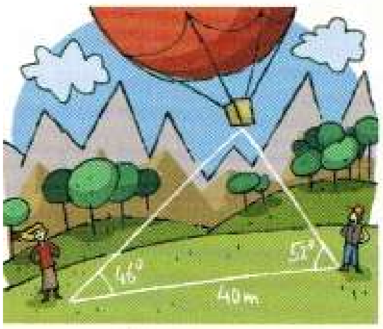
Ejemplo: Supongamos conocidos $\hat{A} = 50^{o}$, $b = 22$ y $c = 15$, calcular el lado que falta.
Aplicando el teorema del coseno al lado a: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos \hat{A} = 22^2 + 15^2 - 2 \cdot 22 \cdot 15 \cdot \cos 15 = 284.76 \rightarrow a = 16.87$.

Teorema del seno. En un triángulo cualquiera los lados son proporcionales a los senos de los ángulos que se les oponen.



Demostración:
Por definición de seno: $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{c} \to h = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$
Por definición de seno: $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{a} \to h = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$
Igualando las expresiones de h: $c \cdot \operatorname{sen}\hat{A} = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$
Luego $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$.
La expresión para b y c se obtiene rotando las letras.

Ejemplo: Halla la distancia de cada chico al globo.



Demostración:
El ángulo que falta mide $180 - (46 + 52) = 82^o$.
Sean x e y las distancias del chico de la derecha e izquierda, respectivamente. Por el teorema del seno:

$$\frac{40}{\operatorname{sen} 80} = \frac{x}{\operatorname{sen} 46} = \frac{y}{\operatorname{sen} 52}$$

De donde

$$x = \frac{40 \cdot \operatorname{sen} 46}{\operatorname{sen} 80} = \frac{40 \cdot 0.7193}{0.9848} = 29.22 \text{ m}$$
$$y = \frac{40 \cdot \operatorname{sen} 52}{\operatorname{sen} 80} = \frac{40 \cdot 0.7880}{0.9848} = 32.01 \text{ m}$$

Existen cuatro tipos de problemas de triángulos cualesquiera.

a) Conocidos los tres lados. Cabe verificar que ninguno de ellos excede a la suma de los otros dos. Se aplica el teorema del coseno tres veces para averiguar los ángulos.

Ejemplo: Resolver un triángulo con $a = 15.\ b = 17$ y $c = 22$.
El triángulo es posible pues $15 + 17 > 22\ .15 + 22 > 17\ 17 + 22 > 15$.
Aplicamos el teorema del coseno despejando éste:

$$\cos\hat{A} = \tfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \tfrac{17^2+22^2-15^2}{2\cdot 17\cdot 22} = 0.7326 \to \hat{A} = \cos^{-1} 0.7326 = 42^o53'36''$$
$$\cos\hat{B} = \tfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \tfrac{15^2+22^2-17^2}{2\cdot 15\cdot 22} = 0.6364 \to \hat{B} = \cos^{-1} 0.6364 = 50^o28'44''$$
$$\cos\hat{C} = \tfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \tfrac{15^2+17^2-22^2}{2\cdot 15\cdot 17} = 0.0588 \to \hat{C} = \cos^{-1} 0.0588 = 86^o37'40''$$

b) Conocidos dos lados y el ángulo que comprenden. Se aplica el teorema del coseno para averiguar el lado que falta. Para averiguar los otros dos ángulos usamos el teorema del seno.

Ejemplo: Resolver un triángulo con $a = 15.\ b = 17$ y $\hat{C} = 75^o$.
Aplicamos el teorema del coseno para conocer el lado que falta:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 15^2 - 17^2 - 2 \cdot 15 \cdot 17 \cdot \cos 75 = 382 \to c = 19.54.$$

Aplicamos el teorema del seno para conocer los ángulos que faltan:

$$\frac{15}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{19.54}{\operatorname{sen} 75} \to \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} 75}{19.54} = 0.7413 \to \hat{A} = 47^o50'32''$$
$$\frac{17}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{19.54}{\operatorname{sen} 75} \to \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{17 \cdot \operatorname{sen} 75}{19.54} = 0.8402 \to \hat{B} = 57^o9'40''.$$

La suma de los ángulos excede ligeramente 180 grados debido a la pérdida de precisión al redondear el cálculo del lado y los senos de los angulos.

c) Conocidos dos lados y un ángulo no comprendido. Se aplica el teorema del seno para averiguar un ángulo. El tercer ángulo se obtiene como el suplemento de la suma de los dos ángulos conocidos. Para averiguar el otro lado usamos el teorema del seno.

Ejemplo: Resolver un triángulo con $a = 12$, $b = 16$ y $\hat{B} = 30^o$.
Aplicamos el teorema del seno para conocer el ángulo $\hat{A}$:
$\frac{12}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{16}{\text{sen } 30} \to \text{sen } \hat{A} = \frac{12 \cdot \text{sen } 30}{16} = 0.375 \to \hat{A} = 22^o 1' 28''$.
El ángulo que falta valdrá: $\hat{C} = 180 - (30 + 22^o 1' 28'') = 127^o 58' 32''$.
Aplicamos el teorema del seno para conocer el lado c:
$\frac{c}{\text{sen } 127^o 58' 32''} = \frac{16}{\text{sen } 30} \to c = \frac{16 \cdot \text{sen } 127^o 58' 32''}{\text{sen } 30} = 25.22$.

d) Conocidos un lado y dos ángulos. Se averigua el ángulo que falta como el suplementario de los dos conocidos. Para averiguar los otros lados se aplica el teorema del seno.

Ejemplo: Resolver un triángulo con $a = 12$, $\hat{A} = 50^o$ y $\hat{B} = 30^o$. El ángulo que falta es $\hat{C} = 100^o$.
Aplicamos el teorema del seno para conocer los lados b y c:
$\frac{12}{\text{sen } 50^o} = \frac{b}{\text{sen } 30^o} \to b = \frac{12 \cdot \text{sen } 30^o}{\text{sen } 50^o} = 7.83$.
$\frac{12}{\text{sen } 50^o} = \frac{c}{\text{sen } 100^o} \to c = \frac{12 \cdot \text{sen } 100^o}{\text{sen } 50^o} = 15.43$

3. LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS PLANAS.

Disponer del valor de las razones trigonométricas de los ángulos facilita la resolución de problemas geométricos de mayor dificultad.

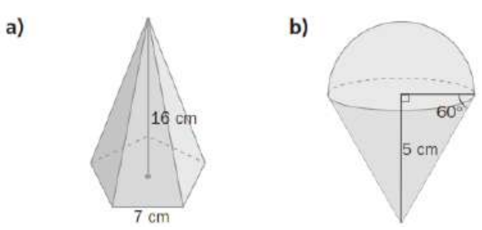
De hecho la medida de la tierra es una ciencia llamada geodesia que se fundamenta en el trazado y cálculo de triangulaciones del terreno, utilizando referencias conocidas como vértices geodésicos (la cima de una montaña, un cabo en la costa, …).

Ejemplo: El lado de un pentágono regular mide 8 cm. Halla la medida de la apotema y su área.

Solución: El ángulo central conformado por los segmentos que unen dos vértices consecutivos al centro es de $\frac{360}{5} = 72^o$. Uniendo el centro con el punto medio de dichos vértices se traza la apotema, que junto con uno de los segmentos y la mitad del lado conforman un triángulo rectángulo de catetos a y 4. El ángulo del centro será de 36^o con lo que
$\text{tg } 36^o = \frac{4}{a} \to a = \frac{4}{\text{tg } 36^o} = 5.51$ cm. El área del pentágono será $A = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5.51}{2} = 110.11$ cm^2

4. AREAS Y VOLUMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS.

Ejemplos: Halla el volumen de los cuerpos de las figuras.



Para calcular el área de la base de la pirámide necesitamos la apotema del pentágono: $a = \frac{3.5}{\text{tg } 36^o} = 4.82$ cm y el área de la base será: $A = \frac{5 \cdot 7 \cdot 4.82}{2} = 84.30$ cm^2.
El volumen de la pirámide es $V = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{84.30 \cdot 16}{3} = 449.62$ cm^3.
Para el volumen de la semiesfera en b) hace falta calcular el radio:
$\text{tg } 30^o - \frac{r}{5} \to r - 5 \cdot \text{tg } 30^o - 2.89$ cm.
El volumen del cono será $V_c = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2.89^2 \cdot 5}{3} = 43.63$ cm^3.
EL volumen de la semiesfera $V_s = \frac{4\pi \cdot r^3}{6} = \frac{4\pi \cdot 2.89^3}{6} = 50.38$ cm^3.
En total el volumen de la figura b) es $V = V_c + V_s = 42.63 + 50.38 = 93.01$ cm^3.

1. VECTORES FIJOS EN EL PLANO.

Un **vector** fijo es un segmento orientado que une dos puntos del plano o del espacio. Un vector posee **módulo** (distancia entre los puntos que une), **dirección** (la de la recta que contiene a los puntos) y **sentido** (desde el punto origen al punto destino).

Dados los puntos del plano $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ el vector que los une, con origen en P y destino en Q, tiene **coordenadas cartesianas** $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y su módulo vale, por el teorema de Pitágoras, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Ejemplo: Describir el vector que une los puntos $A(2,1)$ y $B(6,-2)$.

Sus coordenadas cartesianas son $B - A = (6,-2) - (2,1) = (4,-3)$. Por tanto, tiene la dirección de la recta con pendiente $\frac{-3}{4}$, decreciente que pasa por A y el sentido desde el origen A hacia el destino B.
Su módulo es de $|(4,-3)| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ unidades.

2. VECTORES LIBRES. OPERACIONES CON VECTORES.

Todos los vectores con idéntico módulo, dirección y sentido se dicen **equipolentes**, con independencia del punto origen donde se aplican. El representante de todos ellos se dice que es un vector libre que puede aplicarse en cualquier punto de origen.

Dados dos vectores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ se define el **vector suma** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ como aquel que se obtiene aplicando $\overrightarrow{v}$ en el destino de $\overrightarrow{u}$ y uniendo el origen de $\overrightarrow{u}$ con el destino de $\overrightarrow{v}$. En coordenadas cartesianas $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

Dado el vector $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ y el real $k \in \mathbb{R}$ se define el **vector producto por un escalar** $k \cdot \overrightarrow{u}$ como aquel que se obtiene alargando o contrayendo, según k sea mayor o menor que 1, el módulo del vector $\overrightarrow{u}$, k veces. Si k es negativo el resultado tendrá sentido contrario. En coordenadas cartesianas $k \cdot \overrightarrow{u} = (ku_1, ku_2)$.

Ejemplo: Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (2,3)$, $\overrightarrow{v} = (3,-1)$ y $\overrightarrow{w} = (8,1)$ hallar $2\overrightarrow{u}$, $3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ y $5(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.
$2\overrightarrow{u} = 2(2,3) = (2\cdot 2, 2\cdot 3) = (4,6)$. $3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = 3(2,3) - (3,-1) = (6-3, 9+1) = (3,10)$.
$5(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = 5[(2,3) - (3,-1)] + (8,1) = 5(-1,4) - (8,1) = (-5,20) - (8,1) = (3,21)$.

3. COMBINACION LINEAL DE VECTORES.

Un vector $\overrightarrow{w}$ es una **combinación lineal** de dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ si existen dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que $\overrightarrow{w} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{v}$.

Un conjunto de vectores se dice **linealmente independiente** si ninguno de ellos se puede expresar como una combinación lineal de los otros. En caso contrario se dicen linealmente dependientes.

Una **base** del plano (espacio) es un conjunto de dos (tres) vectores linealmente independientes. Cualquier vector se puede expresar de forma única como combinación lineal de una base. La base canónica del plano es $\{\overrightarrow{i} = (1,0), \overrightarrow{j} = (0,1)\}$. La expresión en esta base de un vector es $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) = u_1(1,0) + u_2(0,1) = u_1 \cdot \overrightarrow{i} + u_2 \cdot \overrightarrow{j}$.

Ejemplo: Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (2,3)$, $\overrightarrow{v} = (3,-1)$ y $\overrightarrow{w} = (8,1)$ hallar a y b para que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Planteamos el sistema $a(2,3) + b(3,-1) = (8,1) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a + 3b = 8 \\ 3a \quad b = 1 \end{array} \right.$, que resolvemos por reducción multiplicando la 2ª por 3:

$\rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 8 \\ 9a \quad 3b = 3 \end{cases} \rightarrow 11a = 11 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 3a - 1 = 3 - 1 = 2.$

4. PRODUCTO ESCALAR. MODULO DE UN VECTOR. ANGULO QUE FORMAN DOS VECTORES.

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se define su **producto escalar** como el número real $\vec{u} \circ \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Esta expresión permite calcular el coseno del ángulo que forman dos vectores:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Ejemplo: Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (1, 5)$.
Procedemos a calcular el numerador, que es su producto escalar: $(2, 3) \cdot (1, 5) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$.
Procedemos a calcular el denominador, que es el producto de los módulos de los vectores:
$|\vec{u}| = |(2, 3)| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}; |\vec{v}| = |(1, 5)| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}; |\vec{u}||\vec{v}| = \sqrt{13}\sqrt{2 \cdot 13} = 13\sqrt{2}.$
Calculamos el coseno del ángulo que forman: $\frac{17}{13\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{26} = 0{,}9247$.
El ángulo es de 22º22'37".

5. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

La **distancia entre dos puntos** del plano es el módulo del vector que los une. Dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ el vector que los une tiene módulo $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Las coordenadas del **punto medio** M de un segmento PQ se obtienen como semisuma de las coordenadas de los extremos: $M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ ya que $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

Ejemplo: Las coordenadas del punto medio del segmento *AB* son $(3, 5)$. Halla el punto *B* siendo $A(2, 9)$. Calcula $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
Sabemos que $(3, 5) = \frac{(2, 9) + (x, y)}{2} \rightarrow 3 = \frac{2 + x}{2}, 5 = \frac{9 + y}{2} \rightarrow x = 6 - 2 = 4, y = 10 - 9 = 1 \rightarrow B(4, 1)$.
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$

6. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO.

Una **recta** en el plano viene determinada si conocemos uno de sus *puntos* y el *vector*, llamado *director*, que marca su dirección.

La **ecuación vectorial** de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es $A + k \cdot \vec{v} = (a_1, a_2) + (kv_1, kv_2)$ y permite obtener todos sus puntos, haciendo variar el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$. Cuando $k = 0$ se obtiene el punto A; cuando $k = 1$ el destino de $\vec{v}$ aplicado en A.

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta se obtienen igualando la expresión anterior con las coordenadas cartesianas de un punto cualquiera de la recta $P(x, y)$:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + (kv_1, kv_2) \rightarrow \begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases}.$$

La **ecuación continua** de la recta se obtiene despejando k e igualando su valor:

$$\begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \to \begin{cases} k = \frac{x-a_1}{v_1} \\ k = \frac{y-a_2}{v_2} \end{cases} \to \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}.$$

La **ecuación punto-pendiente** se obtiene expresando de forma separada la tangente del ángulo de inclinación de la recta: $y - a_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot (x - a_1)$.

La **ecuación general o implícita** tiene la forma $Ax + By + C = 0$ y se obtiene a partir de la ecuación continua quitando denominadores, trasponiendo términos y sumando monomios semejantes:

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} \to v_2(x-a_1) = v_1(y-a_2) \to v_2x - v_1y + v_1a_2 - v_2a_1 = 0.$$

Luego $A = v_2$, $B = -v_1$ y $C = v_1a_2 - v_2a_1$ y, a la inversa, $\vec{v} = (v_1, v_2) = (-B, A)$.

La **ecuación explícita** tiene la forma $y = mx + n$ y se obtiene despejando la ordenada:

$$y - a_2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot (x - a_1) \to y = \frac{v_2}{v_1} \cdot x + a_2 - \frac{v_2}{v_1} \cdot a_1.$$

Luego la pendiente y la ordenada en el origen valen $m = \frac{v_2}{v_1}$ y $n = a_2 - \frac{v_2}{v_1} \cdot a_1$.

La **ecuación segmentaria** tiene la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, siendo $(a, 0)$ y $(0, b)$ los puntos de corte de la recta con los ejes, y se obtiene de la ecuación general haciendo:

$$Ax + By + C = 0 \to Ax + By = -C \to \frac{A}{-C} \cdot x + \frac{B}{-C} \cdot y = \frac{-C}{-C} = 1 \to \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por $A(2, 4)$ y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2) = (5, -3)$.

La ecuación vectorial es $(2, 4) + k \cdot (5, -3)$, $k \in \mathbb{R}$. Las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + k \cdot 5 \\ y = 4 + k \cdot (-3) \end{cases}$.

La ecuación continua es $\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{-3}$. La ecuación punto-pendiente es $y - 4 = \frac{-3}{5} \cdot (x - 2)$.

La ecuación general es $-3(x-2) = 5(y-4) \to -3x - 5y + 6 + 20 = 0 \to 3x + 5y - 26 = 0$.

La ecuación explícita es $y = \frac{-3x}{5} + \frac{6}{5} + 4 \to y = \frac{-3x}{5} + \frac{26}{5}$. La ecuación segmentaria es $3x + 5y = 26 \to \frac{x}{\frac{26}{3}} + \frac{y}{\frac{26}{5}} = 1$.

7. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO.

Dos rectas en el plano pueden adoptar tres posibles posiciones relativas: o son idénticas, o son paralelas o se cortan en un punto.

Analizando la expresión de sus ecuaciones generales $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ se deduce que sus vectores directores son $(-B, A)$ y $(-B', A')$ respectivamente con lo que:

1) Serán **paralelas** si sus vectores son linealmente dependientes:
$(-B, A) = k(-B', A') \to \frac{B}{B'} = \frac{A}{A'}$.

a) Serán **coincidentes** si $\frac{B}{B'} = \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$.

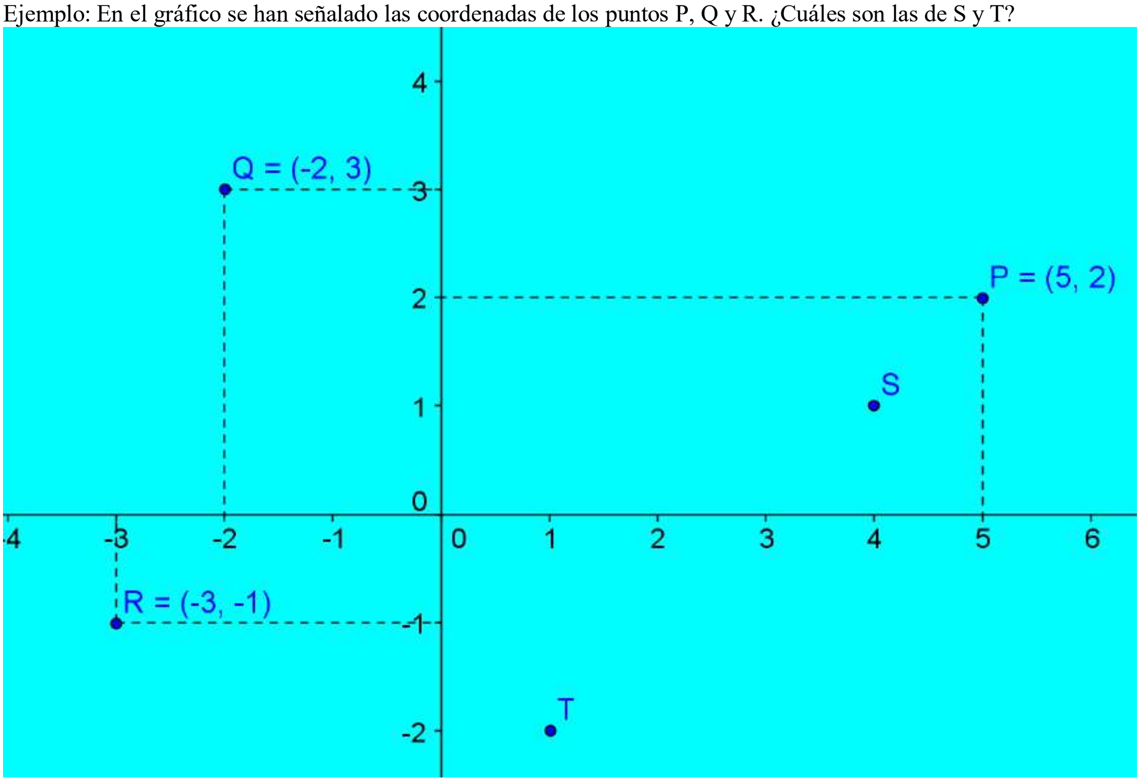
b) Serán no coincidentes si $\frac{B}{B'} = \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$

2) Se **cortarán** si son linealmente independientes: $\frac{B}{B'} \neq \frac{A}{A'}$.

Ejemplo: Estudiar la posición relativa de las rectas $r : 5x + 3y + 7 = 0$ y s : recta que pasa por $P(2, 3)$ y $Q(4, 7)$.
Calculemos la ecuación general de s. Tiene vector director $Q - P = (4, 7) - (2, 3) = (2, 4)$ con lo que $B' = -2$, $A' = 4$ y se tiene que $\frac{A}{A'} = \frac{5}{4} \neq \frac{B}{B'} = \frac{3}{-2}$ y las rectas son secantes. El ángulo que forman, que va desde r a s, tiene el siguiente coseno:
$\frac{5 \cdot 4 + (-3) \cdot (2)}{\sqrt{5^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{34}\sqrt{20}} = 0.9971$.

1. COORDENADAS EN EL PLANO.

Para localizar puntos en el plano utilizamos los **ejes cartesianos** o de coordenadas que son dos rectas perpendiculares graduadas que se cortan en un punto **O** llamado **origen**.
La recta horizontal se llama **eje de abscisas o eje OX** y permite medir la primera coordenada, llamada **abscisa**, que es la distancia del punto al eje vertical.
La recta vertical se llama **eje de ordenadas o eje OY** y permite medir la segunda coordenada, llamada **ordenada**, que es la distancia del punto al eje horizontal.
Un punto cualquiera del plano P queda determinado por el par de coordenadas (x, y).
Ejemplo: En el gráfico se han señalado las coordenadas de los puntos P, Q y R. ¿Cuáles son las de S y T?



2. RELACIONES DADAS POR TABLAS.

Una de las tres formas de establecer una relación entre dos magnitudes o variables es una **tabla** de dos filas con varias columnas.
En la *primera fila* se escribe la **variable independiente** y alguno de los valores que toma. En la *segunda fila* se escribe la variable **dependiente** y los valores que se corresponden con los de la variable independiente.

Ejemplo: La tabla representa el número de toneladas de pilas recogidas en puntos limpios en España.
La variable independiente es el año y la dependiente la cantidad de pilas.

Año	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**
Pilas (t)	17	150	159	138	190	189

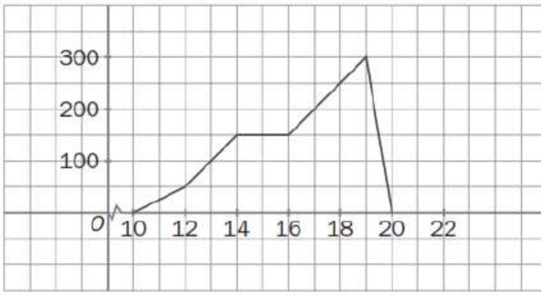
Ejemplo: La tabla representa el número de millones de habitantes de España a lo largo del siglo XX.
La variable independiente es el año y la dependiente la población.

Año	**1900**	**1910**	**1920**	**1930**	**1940**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**
Población	19	20	21	24	26	28	31	34	38	39	40

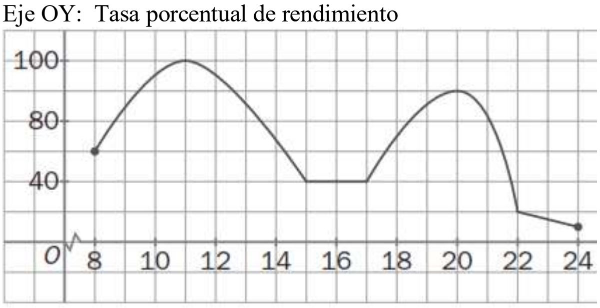
3. RELACIONES DADAS POR GRÁFICAS.

Una gráfica es un subconjunto de puntos del plano en los que para cada valor del eje de abscisas corresponde, a lo sumo, un valor en el eje de ordenadas.
Los valores de la variable independiente se representan en el eje OX.
Los valores correspondientes de la variable dependiente se representan en el eje OY.

Afluencia diaria de bañistas a una piscina pública
Eje OX: Horas del día
Eje OY: Número de bañistas



Rendimiento escolar según las horas del día
Eje OX: Horas del día
Eje OY: Tasa porcentual de rendimiento



4. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS.

Una **fórmula** es una expresión algebraica que permite calcular el valor de una variable (la dependiente) a partir del valor de otra(s) (independiente).

Ejemplos: $E = m \cdot c^2$, $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$ son las fórmulas que permiten calcular la energía a partir de la masa y la velocidad de la luz, el espacio a partir de la aceleración de la gravedad y el tiempo, el volumen de un cono a partir del radio de su base y la altura.

5. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de manera que a cada valor de la primera, llamada *variable independiente*, le corresponde un único valor de la segunda, llamada *variable dependiente*.

Ejemplos: Son funciones la relación de cada número natural con su anterior, su posterior o su cuadrado.

6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

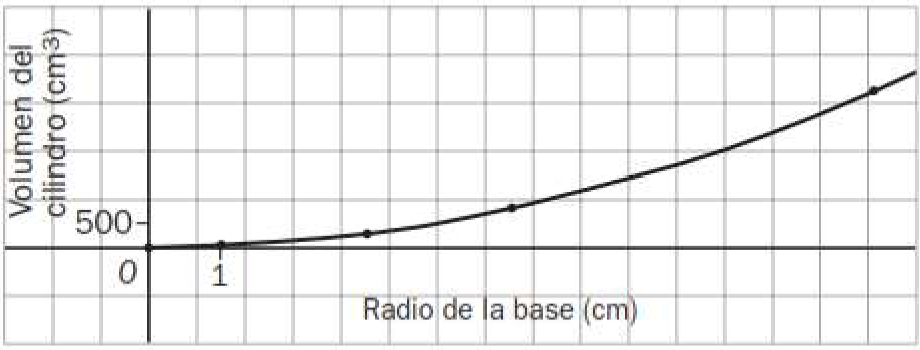
Para representar gráficamente una función es necesario construir una tabla de valores que dará origen a una colección de puntos que dibujaremos en unos ejes cartesianos. A continuación, uniremos los puntos (si los puntos intermedios también obedecen a la relación funcional) o los dejaremos aislados. En el primer caso se trata de una *gráfica de líneas*; en el segundo, *de puntos*.

Ejemplo: Un peregrino explica cómo había transcurrido la etapa del camino de Santiago que acababa de terminar:
«Comencé a caminar con todo el grupo charlando tranquilamente hasta llegar a una encrucijada de caminos donde no se distinguían las señales auténticas. Estuvimos allí media hora hasta que Ricardo encontró un cruceiro con la flecha amarilla. Como andábamos retrasados, a María y a mí un lugareño nos acercó en coche hasta el siguiente pueblo. Ya descansados, y cuesta abajo, hicimos un tramo a bastante ritmo hasta un bosque de hayas con un río donde nos dimos un chapuzón con unos franceses. Como los franceses marchaban en bicicleta nos llevaron "de paquete" unos kilómetros, pero Ricardo se olvidó su carné de peregrino en el río y tuvimos que volver con los franceses a buscarlo. Les dijimos que nos llevaran las mochilas para ir más ligeros hasta el final de la etapa. Fuimos bastante rápido hasta llegar al último tramo del puerto del Cebreiro, donde llegamos exhaustos.»
Dibuja la gráfica que indica la trayectoria del peregrino.

Ejemplo: Relaciona el volumen de cilindros de 10 cm de altura con el radio de la base.
Construimos la tabla de puntos para valores del radio entre 1 y 10

Radio (cm)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Volumen (cm^3)	10π	40π	90π	160π	250π	360π	490π	640π	810π	1000π

Representamos los puntos $(1, 10\pi)$, $(2, 40\pi)$, $(3, 90\pi)$, . . . en unos ejes cartesianos y los unimos (dado que existen los cilindros de radios los valores intermedios con decimales).



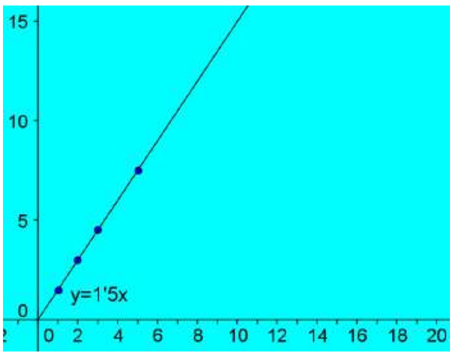
7. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Dos magnitudes directamente proporcionales definen una relación y por tanto una función que se caracteriza por poseer **una razón de proporcionalidad constante**.
Ello significa que la relación entre las variables es del tipo $\frac{y}{x} = k$, es decir, $y = k \cdot x$.
Esta fórmula se corresponde con la gráfica de una *recta que pasa por el origen* de coordenadas.

Ejemplo:
La relación entre el peso y el coste de uvas a 1’50 € el kilo.

Tabla de valores:

Peso	**0**	**1**	**2**	**3**	**5**
Precio	0	1’5	3	4’5	7’5



1. COORDENADAS CARTESIANAS.

Véase F.1.9.1

2. FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICAS.

Véase F.1.9.2, F.1.9.3 y F.1.9.4.

3. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Véase F.1.9.5

4. REPRESENTACION GRÁFICA DE FUNCIONES.

Véase F.1.9.6

5. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD.

Véase F.3.11.2

6. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Véase F.3.11.4 y F.3.11.5

7. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES.

Son los puntos del plano donde la gráfica de la función corta al eje de ordenadas (un único punto) y al eje de abscisas (ninguno, uno o varios puntos).

El punto de corte de la función $f(x)$ con el eje OY es $(0, f(0))$.
Los posibles puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje OX son de la forma $(x_i, 0)$, donde se verifica que la función vale cero: $f(x_i) = 0$.

☞ *Para calcular el punto de corte con el eje OY basta evaluar f(0).*
☞ *Para calcular los puntos de corte con el eje OX hay que resolver la ecuación f(x)=0.*

Ejemplo: Hallar los puntos de corte de $f(x) = x^2 + 4x + 1$.
Con el eje OY será $(0, f(0)) = (0, 0^2 + 4 \cdot 0 + 1) = (0, 1)$.
Con el eje OX las soluciones de $x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$
y los puntos de corte son dos: $(-2\sqrt{2}, 0)$ y $(2\sqrt{2}, 0)$.

1. FORMAS DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN.

Una **función** es una correspondencia entre dos magnitudes, una de ellas llamada independiente, representada normalmente por la variable x (v.i.), y la otra dependiente, representada con la letra y (v.d), que asigna a cada valor de aquella un único valor de ésta. La v.i. antecede a la v.d y en ocasiones es causa eficiente de ella.

Ejemplo: En Psicología la v.i. suele ser el tratamiento o condición psicológica y la v.d. una aproximación del constructo o categoría psicológica que se desea estudiar. En Ciencias la v.i. antecede a la v.d pudiendo llegar a ser su causa.

Existen tres formas de representar esta correspondencia:

- *mediante una tabla*, en la primera fila se sitúa la v.i, en la segunda, la v.d.
- *mediante un gráfico*, en el eje OX se representa la v.i.; en el eje OY la v.d.
- *mediante una expresión algebraica* que da el valor de la v.d. a partir de la v.i.

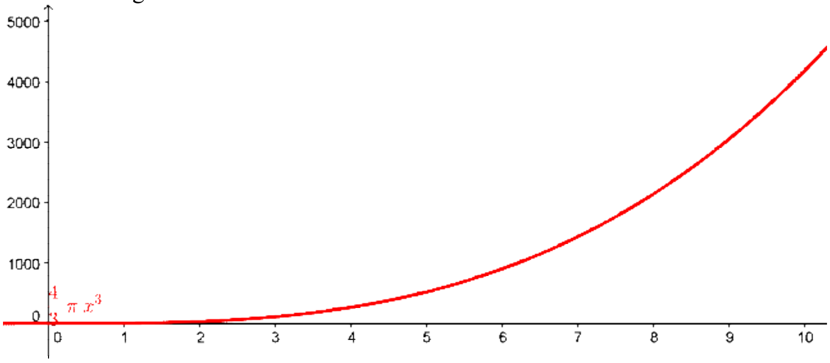
Ejemplo: El volumen de una esfera (v.d) en función de la medida de su radio (v.i.).
Mediante una tabla:

radio (cm)	**3**	**6**	**9**	**12**	**30**
volumen (cm^3)	36π	288π	972π	2304π	36000

Mediante una expresión algebraica es

$$y = \frac{4}{3}\pi x^3$$

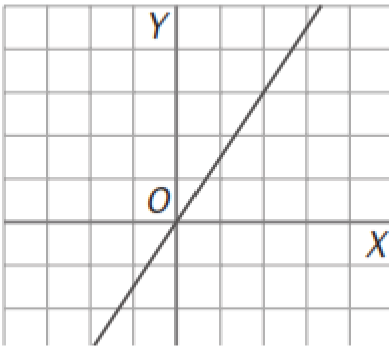
y mediante una gráfica



Ejemplo: El coste total de cierta fruta (v.d) es función del peso (v.i.) y del precio por kilogramo.
Mediante una tabla (nos dan 2 kilos por 3 €):

peso (kg)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
coste (€)	$\frac{3\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{3\cdot 2}{2} = 3$	$\frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$	$\frac{3\cdot 4}{2} = 6$	$\frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$

Mediante una expresión algebraica es $y = \frac{3\cdot x}{2}$
Mediante una gráfica



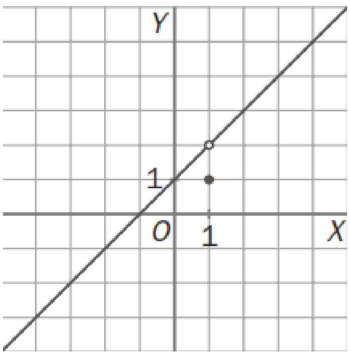
Vamos a estudiar algunas de las características más importantes de las funciones desde un punto de vista gráfico.

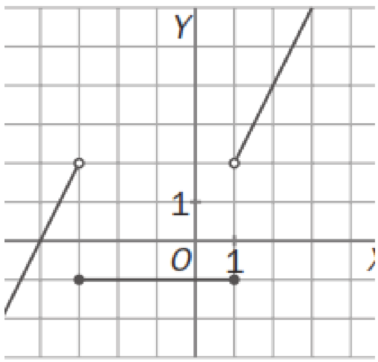
2. CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

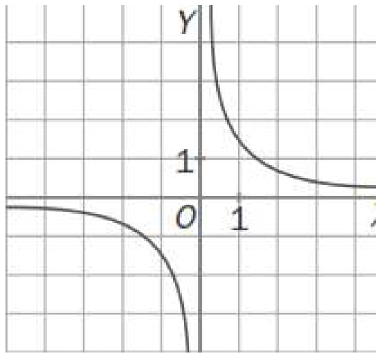
Una función es **continua** cuando su representación gráfica no contiene huecos ni saltos, es decir, se puede dibujar con un solo trazo sin interrupción.
Los puntos donde una función no es continua se llaman **puntos de discontinuidad**.

Los *puntos huecos* en las gráficas indican que el valor de la función **no** existe en ellos.
Los *puntos rellenos* en las gráficas indican que el valor de la función **sí** existe en ellos.

Ejemplo: En la gráfica de la izquierda hay un hueco o punto de discontinuidad en $x_0 = 1$. Obsérvese que la función vale $f(1) = 1$. En la gráfica del centro los puntos de discontinuidad, donde se producen saltos en la gráfica, son $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$. Obsérvese que la función vale $g(-3) = -1$, $g(1) = -1$. En la gráfica de la derecha la discontinuidad se presenta en $x_0 = 0$ y la gráfica se dibuja en dos trazos. No existe $h(0)$.



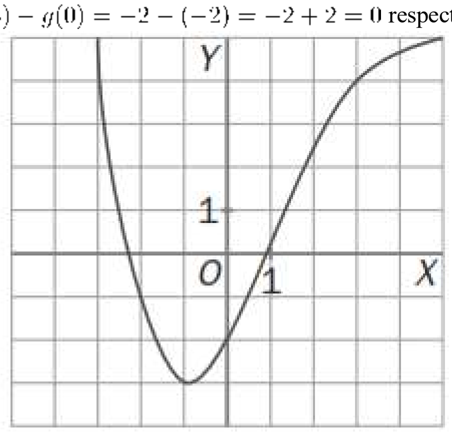


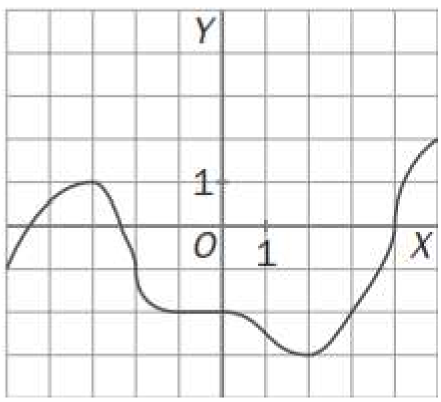


3. VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO.

La **tasa de variación** de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es el aumento o disminución que experimenta la función al pasar del valor a al valor b: $f(b) - f(a)$.
Se llama **tasa de variación media** a la razón entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ejemplo: En la gráfica de la izquierda la tasa de variación en el intervalo $[-2, 3]$ es $f(3) - f(-2) = 4 - (-1) = 5$.
La tasa de variación de la función de la derecha en $[-2, 3]$ es $g(3) - g(-2) = -2 - (-1) = -2 + 1 = -1$.
Si calculamos las tasas de variación en $[0, 3]$ obtenemos $f(3) - f(0) = 4 - (-2) = 6$ y
$g(3) - g(0) = -2 - (-2) = -2 + 2 = 0$ respectivamente.

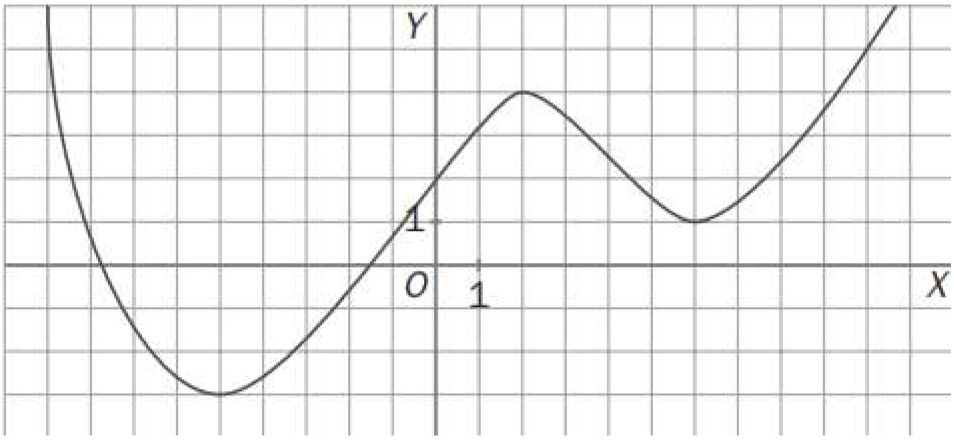




4. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES.

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la tasa de variación es positiva. Los fragmentos crecientes tienen forma de U (valle).
Una función es **decreciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la tasa de variación es negativa. Los fragmentos decrecientes tienen forma de U invertida (pico).

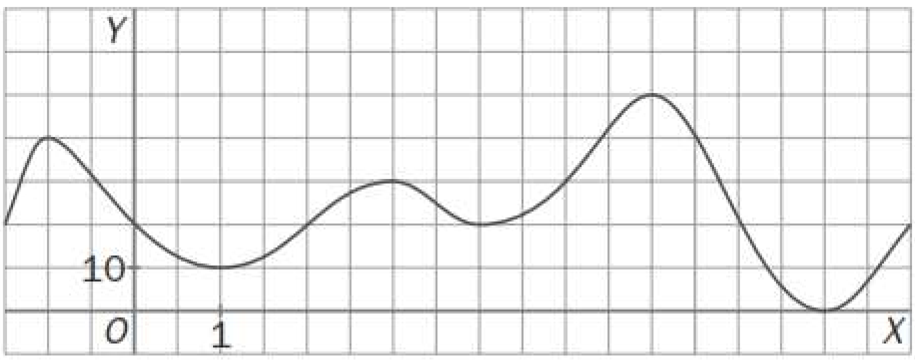
Ejemplo: La función de la gráfica es creciente entre $(-5, 2)$ y entre $(6, +\infty)$.
Es decreciente entre $(-\infty, -5)$ y entre $(2, 6)$.



5. MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

Una función continua tiene un **máximo relativo** en un punto si a su izquierda la función crece y a su derecha la función decrece.
Una función continua tiene un **mínimo relativo** en un punto si a su izquierda la función decrece y a su derecha la función crece.
El mayor de los valores que son máximo relativo se llama **máximo absoluto** de la función.
El menor de los valores que son mínimo relativo se llama **mínimo absoluto** de la función.

Ejemplo: En la función de la gráfica los puntos $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ son mínimos relativos pues en ellos la función pasa de decreciente a creciente, mientras que los puntos $x_4 = -1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 6$ son máximos relativos pues en ellos la función pasa de creciente a decreciente. El menor de los mínimos ocurre en x_3 (la función vale 0) mientras que el mayor de los máximos ocurre en x_6 (la función vale 50).



6. SIMETRIA Y PERIODICIDAD.

Una función se dice **par o simétrica respecto del eje de ordenadas** cuando para cualquier punto x_0 de su dominio de definición se verifica que $f(x_0) = f(-x_0)$. Suponiendo dibujada la gráfica sobre papel, al doblarlo por el eje OY, los trazos coinciden.

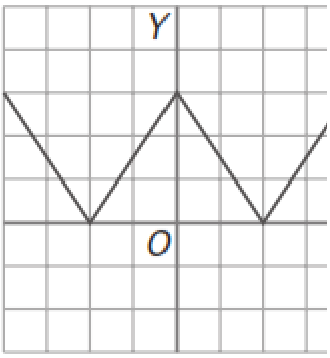
Ejemplo: Los polinomios con términos de grado par y sin término independiente son pares, como x^2 el caso más sencillo dado que $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$.

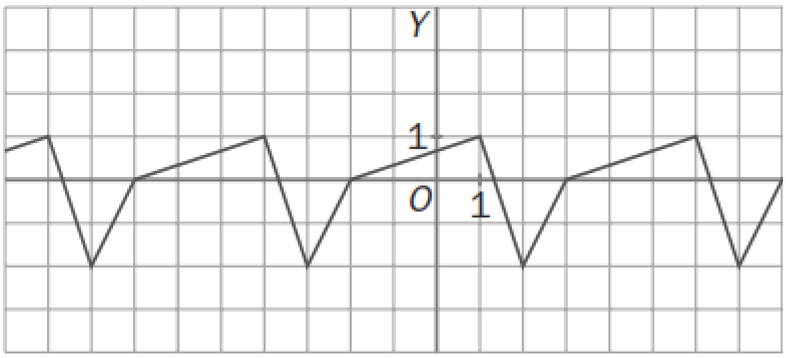
Una función se dice **impar o simétrica respecto del centro de coordenadas** cuando para cualquier punto x_0 de su dominio se verifica que $f(x_0) + f(-x_0) = 0$. Suponiendo dibujada la gráfica sobre papel, al doblarlo por el eje OY y a continuación por el eje OX, los trazos coinciden.

Ejemplo: Los polinomios con términos de grado impar y sin término independiente son impares, como x el caso más sencillo dado que $x + (-x) = x - x = 0$.

Una función es **periódica** cuando los valores que toma se van repitiendo cada cierto intervalo que se llama *periodo*. Un trozo de la gráfica se repite de manera indefinida a izquierda y derecha.

Ejemplo: La gráfica de la izquierda presenta una función simétrica respecto al eje OY que además es periódica cada 4 unidades. La gráfica de la derecha corresponde a una función periódica cada 5 unidades.





1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. DOMINIO Y RECORRIDO.

(Véase F.3.11.1).

El **dominio** de una función, $Dom(f)$, es el conjunto de los valores posibles que puede adoptar la variable independiente ya que en ellos se puede calcular la función. Gráficamente se determina haciendo deslizar una hoja de papel a lo largo del eje OX y observando si existe la intersección de su borde vertical con la gráfica.

El **recorrido** de una función, $Im(f)$, es el conjunto de los valores diferentes que toma la función al hacer variar la variable independiente en el dominio. Gráficamente se determina haciendo deslizar una hoja de papel a lo largo del eje OY y observando si existe la intersección de su borde horizontal con la gráfica.

Ejemplo: La función $y = \frac{1}{x+2}$ se puede calcular para cualquier punto de x excepto para $x = -2$ pues anula el denominador. Su dominio es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

La función $y = \sqrt{x-5}$ se puede calcular excepto cuando el radicando es negativo: $x - 5 < 0 \rightarrow x < 5$. Por tanto su dominio es la semirrecta $[5, -\infty)$.

La función $y = \ln(x+2)$ se puede calcular cuando el argumento es positivo: $x + 2 > 0 \rightarrow x > -2$. Su dominio será la semirrecta $(-2, +\infty)$.

2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

Véase F.3.11.3 y F.3.11.4.

3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS Y RELATIVOS.

Véase F.3.11.5.

4. FUNCIONES PERIÓDICAS Y ACOTADAS.

Véase F.3.11.6 (funciones periódicas).

Una función está **acotada superiormente** si existe un real *M,* llamado *cota superior,* de forma que $f(x) \leq M$ para cualquier x de su dominio.

Una función está **acotada inferiormente** si existe un real *m,* llamado *cota inferior,* de forma que $f(x) \geq m$ para cualquier x de su dominio.

Una función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Las funciones acotadas tienen su recorrido incluido en un intervalo cerrado: $Im(f) \subset [m, M]$.

Ejemplo: La función $y = -x^2 + 3x - 5$ alcanza su valor máximo en $x = \frac{3}{2}$ donde vale $y(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 5 = \frac{-9}{4} + \frac{9}{2} - 5 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{-11}{4} < -2$. Así pues -2 es una cota superior.

Ejemplo: La función $y = x^2 + 4x + 4$ alcanza su valor mínimo en $x = -2$ donde vale $y(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0 > -2$. Así pues -2 es una cota inferior.

Ejemplo: La función $y = \frac{4}{1+e^{-x}}$ está acotada pues su valor se mantiene entre 0 y 4.

5. FUNCIONES SIMÉTRICAS.

Véase F.3.11.6 (funciones simétricas).

6. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ y un número real k se pueden definir en los puntos comunes de sus dominios las siguientes funciones:

Función **producto de un real** por una función: $(kf)(x) = k \cdot f(x)$

Función **suma** de dos funciones: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Función **diferencia** de dos funciones: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Función **producto** de dos funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Función **cociente** de dos funciones (si $g(x) \neq 0$): $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Función **composición** de dos funciones (si $g(x) \in Dom(f)$): $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Ejemplo: Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x - 3$ podemos construir a partir de ellas su suma $(f+g)(x) = x^2 + 1 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 2$, su diferencia $(f-g)(x) = x^2 + 1 - (2x-3) = x^2 - 2x + 4$, su producto $(f \cdot g)(x) = (x^2+1) \cdot (2x-3) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$, su cociente $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2+1}{2x-3}$ y su composición en ambos sentidos $f[g(x)] = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 9 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$ y $g[f(x)] = g(x^2+1) = 2(x^2+1) - 3 = 2x^2 + 2 - 3 = 2x^2 - 1$.

Todas las funciones tienen dominio en la recta real excepto $\frac{f}{g}$ que no está definida cuando $2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$, luego su dominio es $\mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$.

7. FUNCIONES RECÍPROCAS.

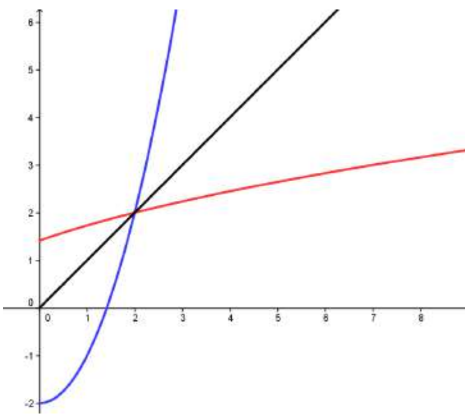
Función **identidad** es aquella cuya expresión es $i(x) = x$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se dicen la una **recíproca o inversa** de la otra si las composiciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son la función identidad.

Para calcular la expresión de la función inversa de una dada se intercambia el papel de las variables, la x por la y, y se despeja la nueva variable independiente.

La función recíproca de $f(x)$ se representa como $f^{-1}(x)$.

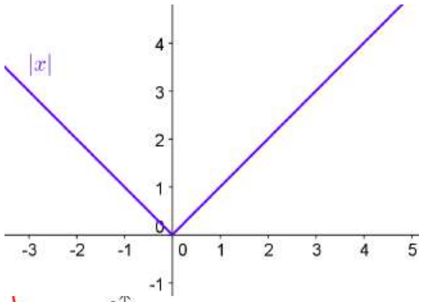
Las gráficas de las funciones f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.



Ejemplo: Calcular la función inversa de $y = \sqrt{x+2}$.
Intercambiamos el rol $x = \sqrt{y+2}$. Para despejar la nueva y elevamos al cuadrado y trasponemos $x^2 = y + 2 \rightarrow y = x^2 - 2$.
La inversa de $f(x) = \sqrt{x+2}$ es $g(x) = x^2 - 2$.
En efecto,
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2 + 2} = \sqrt{x^2} = x$
y también
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 2 = x + 2 - 2$
.

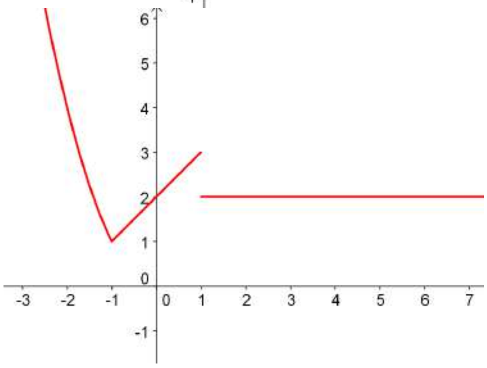
8. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Función **definida a trozos** es aquella que presenta fragmentado su dominio de manera que su expresión algebraica es múltiple.



Ejemplo: La función valor absoluto es la identidad cuando $x >$ y la identidad cambiada de signo cuando $x < 0$, luego

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Ejemplo: La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < \quad 1 \\ x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es la de la figura adjunta.

1. FUNCIONES ASOCIADAS A SITUACIONES.

Ejemplos de situaciones en la vida cotidiana que pueden expresarse mediante funciones son:

1) El coste sin IVA del consumo de electricidad de un hogar se calcula sumando una parte constante, que depende de la potencia contratada, y una parte variable que depende del número x de kwh consumidos. Así por ejemplo para una potencia de 5500 kw el coste en € se calcula con la función $y = 20 + 0'15 \cdot x$.

2) La distancia en metros que se recorre dando un paseo a velocidad constante de 90 metros por minuto se calcula con la función $y = 90 \cdot x$ siendo x la duración del paseo en minutos.

3) La puntuación alcanzada en un examen tipo test de la UNED de 20 preguntas con 3 alternativas posibles (solo una de ellas cierta) se calcula asignando $\frac{1}{2}$ a cada acierto y penalizando con $\frac{1}{2}$ cada dos fallos. La función que permite calcular la nota depende de dos variables a y b, aciertos y fallos, siendo la fórmula $y = \frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{4}$.

4) La temperatura corporal de una persona sana es constante y vale 36'5º C. Podemos expresar este hecho mediante una función constante $y = 36'5$.

2. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Véase F.1.9.7

3. FUNCIONES AFINES. PENDIENTE Y ORDENADA EN EL ORIGEN.

Véase F.3.12.1 y F.3.12.2

4. RECTAS PARALELAS.

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente pero distinta ordenada en el origen.

Las rectas de pendiente nula son paralelas al eje OX y su ecuación es del tipo $y = a$ pues todos sus puntos tienen la misma ordenada.

Las rectas paralelas al eje OY tienen ecuaciones del tipo $x = b$ pues todos sus puntos tienen la misma abscisa.

Ejemplos: La recta $y = -4$ es paralela al eje OX, la recta $x = 2$ es paralela al eje OY y las rectas $y = 2x + 1$ $y = \frac{4x+7}{2}$ son paralelas y su pendiente es 2 que es positivo, por tanto son funciones crecientes.

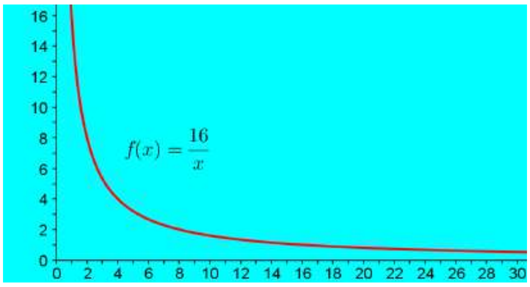
5. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

Dos magnitudes inversamente proporcionales definen una relación y por tanto una función que se caracteriza por poseer **una constante de proporcionalidad inversa**. Ello significa que la relación entre las variables es del tipo $x \cdot y = k$, es decir, $y = \frac{k}{x}$. Esta fórmula se corresponde con la gráfica de una *curva que recibe el nombre de hipérbola equilátera*.

Ejemplo:
La relación entre la base y la altura de un rectángulo de 16 u^2 de área

Tabla de valores:

Base	1	2	4	5	8
Altura	16	8	4	3'2	2



1. FUNCIONES AFINES. DEFINICIÓN.

Una **función afín** es aquella cuya expresión algebraica adopta la forma general $y = m \cdot x + n$, siendo m , n números reales.

Su gráfica es una *línea recta* dado que la razón del incremento del valor de la función respecto del incremento del valor de la v.i. es una *constante*.

Ejemplo: A medida que asciende un globo aerostático la temperatura desciende 1º cada 200 metros. Si al iniciar la ascensión la temperatura es de 16º la función que representa la temperatura (v.d.) en relación con la altura (v.i.) es $y = 16 - \frac{x}{200}$.

Ejemplo: Una tarifa de telefonía móvil tiene una cuota de establecimiento de llamada de 18 cts y un coste de 7 cts por minuto. El coste en céntimos de una llamada (v.d.) es función de la duración en minutos (v.i.) y será $y = 18 + 7 \cdot x$.

2. CARACTERIZACION Y CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES AFINES.

Si calculamos la tasa de variación media de la función $y = m \cdot x + n$ al pasar del punto $x_1 = a$ al punto $x_2 = b$ obtenemos $\frac{mx_2+n-(mx_1+n)}{x_2-x_1} = \frac{mb+\cancel{n}-mb-\cancel{n}}{b-a} = \frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} = m$.
Dicho valor es conocido como *pendiente* de la recta. En el denominador aparece el desplazamiento horizontal; en el numerador, el vertical. Por eso se llama *pendiente*.
Si la pendiente es positiva la función crece; si es negativa, decrece.

Si calculamos el punto de corte de la función afín con el eje OY obtenemos $y = m \cdot 0 + n = n$. Dicho valor es conocido como la *ordenada en el origen.*

Ejemplos: La pendiente en la función de la temperatura del globo es $m = \frac{-1}{200}$ y la ordenada en el origen $n = 16$.
La ordenada en el origen representa la temperatura en el suelo.
La pendiente en la función del coste de llamada es $m = 7$ y la ordenada en el origen $n = 18$.
La ordenada en el origen representa el coste de una llamada que se cuelga inmediatamente.
La pendiente es el coste de un minuto de charla telefónica.

Cuando $m = 0$ la recta no tiene pendiente y la función es **constante**, siempre vale n.
Cuando $n = 0$ la recta pasa por el centro de coordenadas y la función se llama **lineal.**

Ejemplo: La función $y = 3$ es constante, la función $y = 3x$ es lineal y la función $y = 3x + \frac{5}{2}$ es afín.

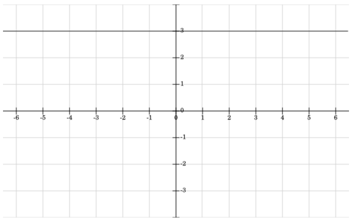
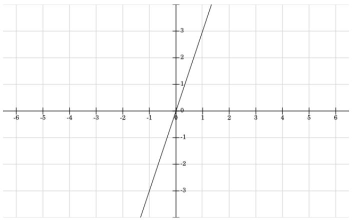
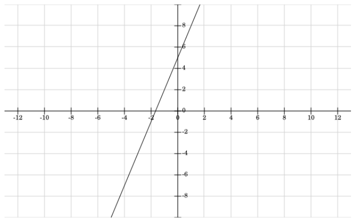
3. REPRESENTACION DE FUNCIONES AFINES.

Para representar una *función afín* basta evaluarla en dos puntos cualesquiera x_1 , x_2.
A continuación se representan en unos ejes cartesianos los puntos $(x_1, mx_1 + n)$ y $(x_2, mx_2 + n)$ y se unen con una recta.

Para la *función constante*, como $m = 0$, los puntos son (x_1, n) y (x_2, n) y la recta es una paralela al eje OX.

Para la *función lineal*, como $n = 0$, los puntos son (x_1, mx_1) y (x_2, mx_2) y la recta pasa por el centro de coordenadas $(0, m \cdot 0)$.

Ejemplo: Las gráficas de las funciones $y = 3$, $y = 3x$ e $y = 3x + \frac{5}{2}$ son:

Un punto del plano (x, y) *pertenece a la recta* $y = mx + n$ si verifica su ecuación.
Dos rectas del plano *son paralelas* si tienen la misma pendiente.

Ejemplo: El punto $P(2, 3)$ no pertenece a la recta $y = 3x + \frac{5}{2}$ porque $3 \cdot 2 + \frac{5}{2} = \frac{17}{2} \neq 3$ sin embargo $Q(\frac{1}{2}, 4)$ sí pertenece a la recta $y = 3x + \frac{5}{2}$ porque $3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 = y$. La recta paralela a $y = 3x + \frac{5}{2}$ que pasa por el origen es $y = 3x$ y ambas tienen pendiente 3.

4. APLICACIONES DE LA FUNCIÓN AFÍN.

Todas aquellas funciones que a una parte fija añaden otra parte proporcional son afines.

Las formas de facturar y cobrar un servicio suelen ser de este tipo.
El recibo de la luz incorpora una parte fija, la potencia contratada, y una parte proporcional, el consumo en Kwh.
El coste de una llamada telefónica tiene una parte fija, el establecimiento de llamada, y una parte proporcional, la duración de la llamada.
Una carrera en un taxi tiene una parte fija, la llamada bajada de bandera, y una parte proporcional a la duración y recorrido del desplazamiento.
Los costes de funcionamiento de una empresa también suelen ser de este tipo: una parte fija, los costes fijos, y una parte proporcional a la producción realizada, los costes variables.

5. FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Una **función cuadrática** es aquella cuya expresión algebraica adopta la forma general $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, siendo a , b , c números reales.

Su gráfica es una curva llamada *parábola* en forma de U, si $a > 0$, o de U invertida, si $a < 0$.

6. CONSTRUCCIÓN DE PARÁBOLAS A PARTIR DE $y = x^2$.

Dada la parábola $y = x^2$ si trasladamos los puntos de la gráfica según el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (0, 3)$ se desplaza verticalmente hacia arriba tres unidades. La función será $y = x^2 + 3$.
Si la trasladamos según el vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (4, 0)$ se desplaza horizontalmente cuatro unidades hacia la derecha. La función será $y = (x - 4)^2$
Si la desplazamos según el vector $\overrightarrow{\mathbf{u} + \mathbf{w}} = (4, 0) + (0, 3) = (4, 3)$ se desplaza horizontalmente hacia la derecha cuatro unidades y verticalmente hacia arriba tres unidades. La función será $y = (x - 4)^2 + 3$.

7. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Las parábolas son curvas que presentan un mínimo relativo y absoluto (si $a > 0$) o un máximo relativo y absoluto (si $a < 0$).
Por este punto, llamado *vértice*, pasa un eje de simetría.
La abscisa del vértice es $\frac{-b}{2a}$ y por tanto el eje de simetría es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

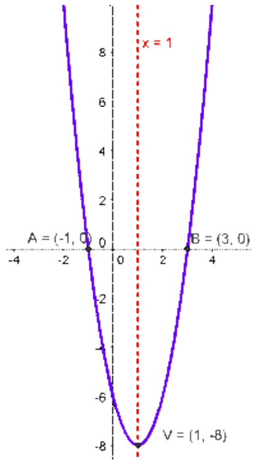
El número de *puntos de corte con el eje OX* de una parábola puede ser cero, uno o dos puesto que son las soluciones de la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$.
Los puntos de corte son simétricos respecto del eje de simetría $x = \frac{-b}{2a}$:

$$\left(\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$$

El *punto de corte con el eje OY* es único: $(0, a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c) = (0, c)$.

Para dibujar la parábola:

1) Hallamos su eje de simetría y su vértice.
2) Calculamos sus puntos de corte con el eje OX.
3) Si fuera preciso, un par de puntos más, simétricos respecto del eje.



Ejemplo: Representar $y = 2x^2 - 4x - 6$.

El eje de simetría será $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1$ y el vértice $(1, y(1)) = (1, 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6) = (1, -8)$.

En la gráfica aparece como V.

Los puntos de corte tendrán abscisas
$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} \rightarrow x_1 = -1 \, , x_2 = 3$.

En la gráfica aparecen como A y B.

Las parábolas son una de las tres posibles trayectorias que puede seguir un objeto sometido a la fuerza de un campo gravitatorio de otro objeto más masivo.

Es el caso de la trayectoria de algunos cometas del sistema solar o de los misiles disparados bajo el efecto de la gravedad terrestre.

Los receptores parabólicos se utilizan para concentrar las señales electromagnéticas en un solo punto, llamado foco, magnificando la potencia de la señal recibida. Se aplican en lentes de telescopios, antenas de telecomunicaciones y espacios escénicos para mejorar la acústica.

1. TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

Se dice que una función $f(x)$ tiene por **límite** en el punto $x = x_0$ el valor L si el valor de $f(x)$ se aproxima al valor L tanto como queramos al aproximarnos con la variable independiente al punto x_0. Se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

El punto x_0 puede ser finito $x_0 = a \in \mathbb{R}$ o infinito $x_0 = \pm\infty$.

Cuando la aproximación a un punto finito es por la derecha se escribe $x \to a^+$ y si es por la izquierda $x \to a^-$ y entonces los límites se dicen **laterales**.

Para evaluar un límite en un punto finito se calcula el valor de la función para la sucesión $a_n = a \pm \frac{1}{10^n}$ que nos presentará la tendencia de la función al aproximarnos al punto a. Para evaluarlo en el infinito se calcula la función para $b_n = \pm 10^n$.

Ejemplo: Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ cuando $x \to 3$ y cuando $x \to +\infty$.

x	3 ± 1	3 ± 0.1	3 ± 0.01	3 ± 0.001
$f(x)$	$f(4) = \frac{2\cdot 4}{4-3} = 8$ $f(2) = \frac{2\cdot 2}{2-3} = -4$	$f(3.1) = \frac{2\cdot 3.1}{3.1-3} = \frac{6.2}{0.1} = 62$ $f(2.9) = \frac{2\cdot 2.9.1}{2.9-3} = \frac{5.8}{-0.1} = -58$	$f(3.01) = \frac{2\cdot 3.01}{3.01-3} = \frac{6.02}{0.01} = 602$ $f(2.99) = \frac{2\cdot 2.99}{2.99-3} = \frac{5.98}{-0.01} = -598$	$f(3.001) = \frac{2\cdot 3.001}{3.001-3} = \frac{6.002}{0.001} = 6002$ $f(2.999) = \frac{2\cdot 2.999}{2.999-3} = \frac{5.998}{-0.001} = -5998$

La tendencia por la derecha es a crecer indefinidamente en valor positivo.
La tendencia por la izquierda es a crecer indefinidamente en valor negativo.

x	10^1	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$f(10) = \frac{2\cdot 10}{10-3} = \frac{20}{7}$ ≈ 2.857	$f(100) = \frac{2\cdot 100}{100-3} = \frac{200}{97}$ ≈ 2.062	$f(1000) = \frac{2\cdot 1000}{1000-3} = \frac{2000}{997}$ ≈ 2.006	$f(10000) = \frac{2\cdot 10000}{10000-3} = \frac{20000}{9997}$ ≈ 2.0006

El valor límite tiende a 2.

2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES. INDETERMINACIONES.

Los límites de funciones, caso de existir, tienen las mismas propiedades que los límites de las sucesiones con respecto a las operaciones elementales, a saber:

Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ con límites $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$ y dado el número real $c \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
4) $\lim\limits_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot L_1$
5) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) : g(x)] = L_1 : L_2$, siempre que $L_2 \neq 0$.
6) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)^{g(x)}] = L_1^{L_2}$

Además para la composición se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} [f[g(x)] = f(L_2)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} [g[f(x)] = g(L_1)$.

Las siete expresiones indeterminadas son las mismas que para los límites de sucesiones: $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, 1^∞, 0^∞, 0^0.

3. CALCULO DE LÍMITES.

Para calcular límites de **funciones racionales** evaluados como indeterminaciones existen tres métodos sencillos que las eliminan:

Caso $\frac{0}{0}$. Factorizar el numerador y el denominador para eliminar un factor común.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Caso $\frac{\infty}{\infty}$. Dividir el numerador y el denominador por la máxima potencia de x.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{2\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$ pues $\frac{1}{x^2}\to 0$.

Caso $\infty-\infty$. Operar y/o multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

Ejemplo: Dadas $f(x)=5x+3$ y $g(x)=\frac{5x^2-x+7}{x+1}$ calcular $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$. Es del tipo $\infty-\infty$. Calculemos $f(x)-g(x)=5x+3-\frac{5x^2-x-7}{x+1}=\frac{(5x+3)(x+1)-5x^2+x-7}{x+1}=\frac{\cancel{5x^2}+5x-3x+3-\cancel{5x^2}+x-7}{x-1}=\frac{9x-4}{x+1}$ y el límite pedido es del tipo anterior. Dividimos entre x: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{9x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}=9$ pues $\frac{1}{x}\to 0$.

Para resolver límites del tipo 1^∞ se aplica la misma técnica que para resolver sucesiones donde está implicado el número e.

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-5}{x-3})^{x-2}=1^\infty=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3+2}{x+3})^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x-3})^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x+3}{2}})^{x+2}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x+3}{2}})^{\frac{x-3}{2}\cdot\frac{2}{x+3}\cdot(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+4}{x+3}}=e^2$.

4. CONTINUIDAD DE FUNCIONES. DISCONTINUIDADES.

El concepto intuitivo de función continua como aquella que en su gráfica no presenta huecos ni saltos puede definirse de forma rigurosa gracias a los límites.

Una función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = x_0$ si se cumple tres condiciones:

1) Existen los límites laterales en el punto $x = x_0$ y son finitos.
2) Coinciden los límites laterales.
3) Coincide el valor de la función en el punto $x = x_0$ con los límites laterales.

En caso de fallar alguna condición la función se dice **discontinua en** $x = x_0$ y según la condición fallida se dice que la discontinuidad es:

1) Inevitable de salto infinito.
2) Inevitable de salto finito (la diferencia entre los límites laterales).
3) Evitable.

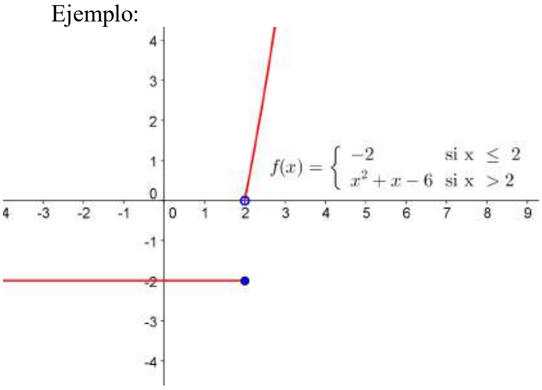
Ejemplo: Estudia la continuidad de la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La función es una parábola en las abscisas negativas y una recta en las positivas. Es continua en todos los puntos salvo quizá el punto frontera de la definición $x_0 = 0$. Veamos qué pasa en $x_0 = 0$.

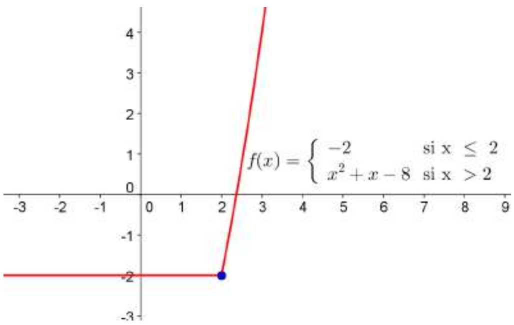
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x - 1 = 2\cdot 0 - 1 = -1$. Ambos límites laterales existen y son idénticos. Se cumplen las condiciones primera y segunda.

También se cumple la tercera porque $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, que es el valor del límite.

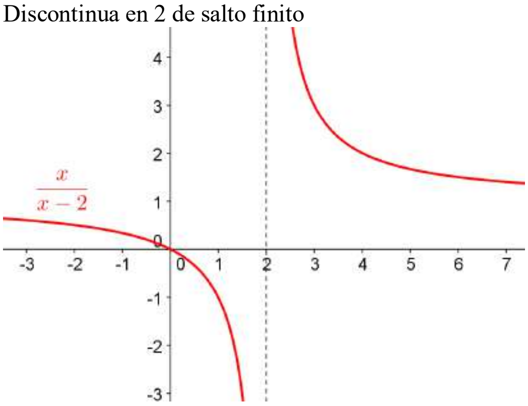
Ejemplo:



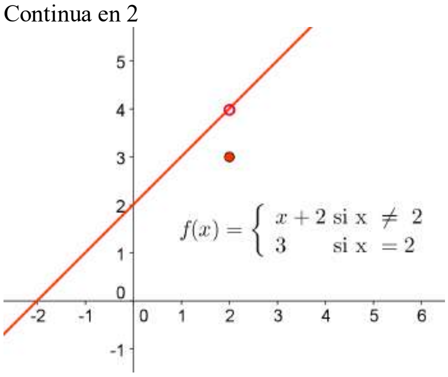
Discontinua en 2 de salto finito



Continua en 2



Discontinua en 2 de salto infinito



Discontinua evitable en 2

1. ASÍNTOTAS.

Una **asíntota** es una recta a la cual tiende la gráfica de una función en los puntos problemáticos de su dominio (vertical) o en el infinito (horizontal y oblicua).

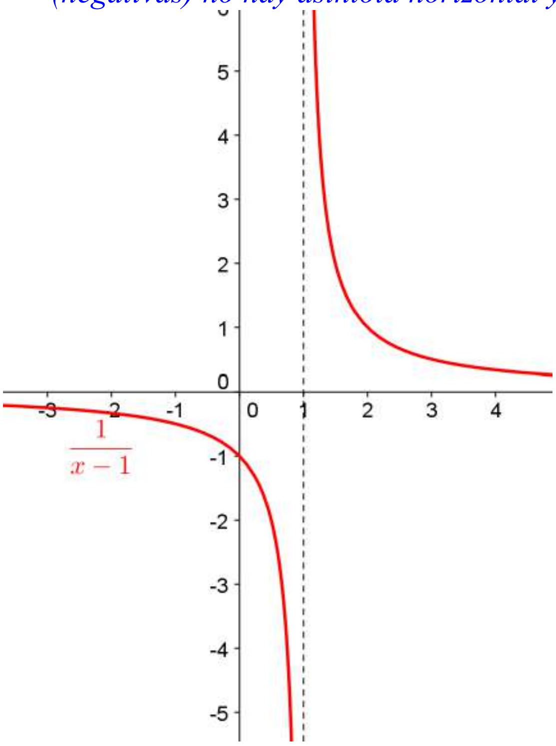
Pueden ser de tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

Existe una *asíntota vertical* $x = x_0$ de la función $f(x)$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

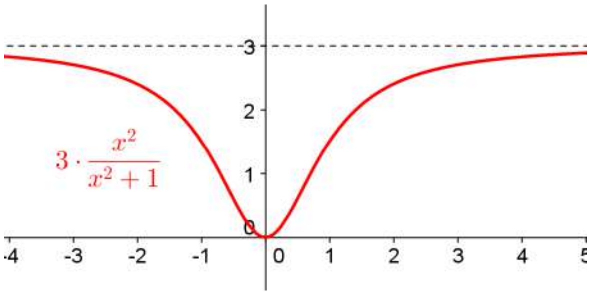
Existe una *asíntota horizontal* $y = L$ de la función $f(x)$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.

Existe una *asíntota oblicua* $y = mx + n$ de la función $f(x)$ si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, calculándose la ordenada en el origen $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$.

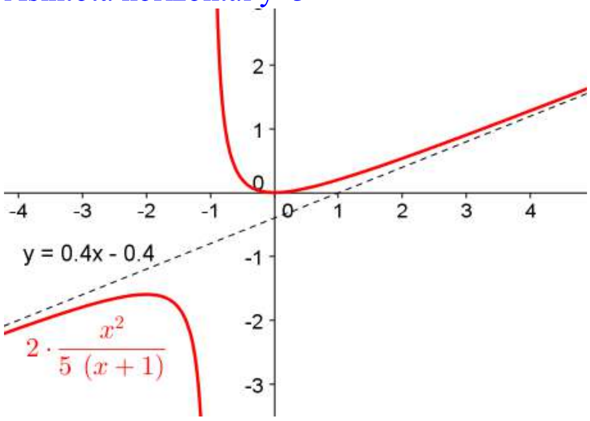
☞ *Puede haber cualquier número de asíntotas verticales pero a lo sumo dos asíntotas horizontales y oblicuas. Si hay asíntota oblicua en las abscisas positivas (negativas) no hay asíntota horizontal y viceversa.*



Asíntota vertical x=1



Asíntota horizontal y=3



Asíntota oblicua y=0.4x-0.4

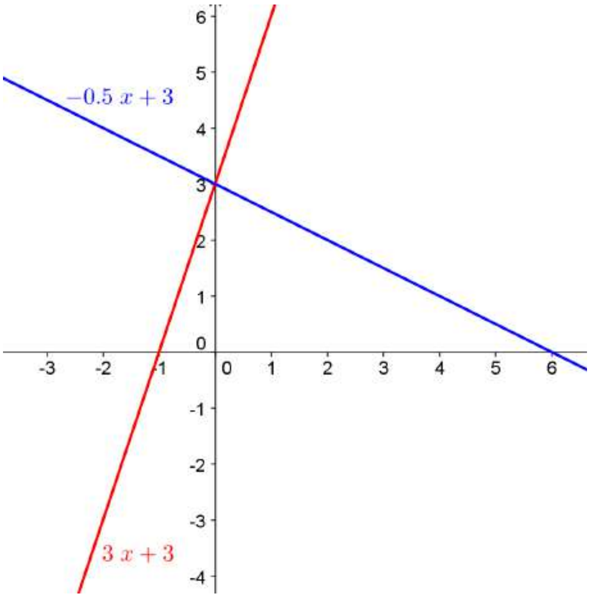
2. FUNCIONES POLINÓMICAS.

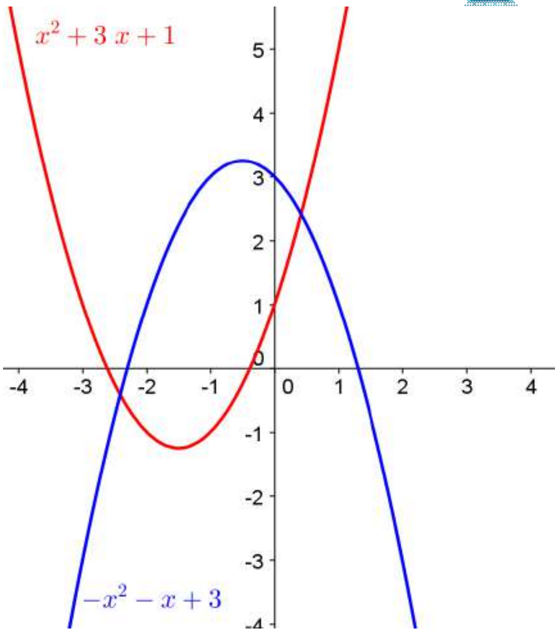
Las funciones de la forma $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales** y sus gráficas son rectas. La *pendiente* de la recta es *m* y *la ordenada en el origen* es *n*.

Si *m* es positivo la recta es creciente y si es negativo, decreciente.

Las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se llaman **funciones cuadráticas** y sus gráficas son parábolas. El *eje* de la parábola es la recta $x = \dfrac{-b}{2a}$ y su *vértice* el punto de abscisa $x = \dfrac{-b}{2a}$.

La parábola es cóncava si *a* es positivo y convexa, si *a* es negativo.





Función lineal creciente
Función lineal decreciente

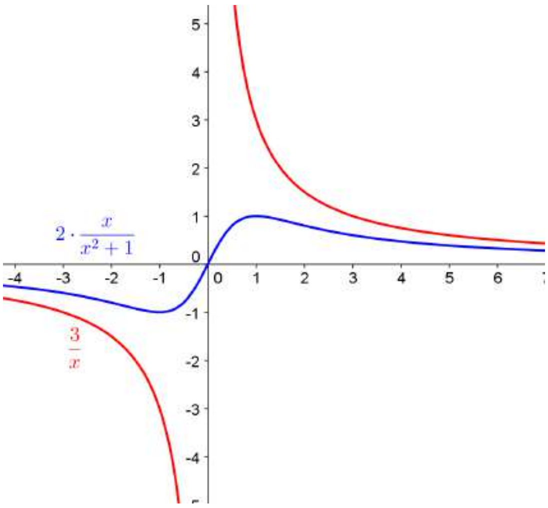
Función cuadrática cóncava
Función cuadrática convexa

3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA. FUNCIONES RACIONALES.

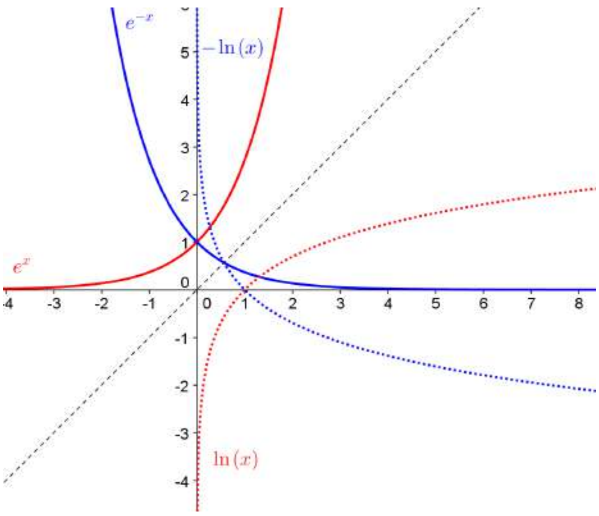
Las funciones de la forma $y=\dfrac{k}{x}$ se denominan **funciones de proporcionalidad inversa** y sus gráficas son hipérbolas. La recta $x=0$ es una asíntota vertical de la gráfica.

Las funciones de la forma $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios se denominan **funciones racionales**. El dominio de dichas funciones exige que $Q(x)\neq 0$.

En los puntos que se anula el denominador la función presenta asíntotas verticales.



Función de proporcionalidad inversa
Función racional con asuntota horizontal



Función exponencial y logarítmica crecientes
Función exponencial y logarítmica decrecientes

4. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Las funciones de la forma $y = a^x$, con *a* un número real positivo, se denominan **funciones exponenciales** y sus gráficas son curvas positivas, continuas y monótonas de rápido crecimiento (si $a > 1$) o decrecimiento (si $a < 1$). El eje de abscisas es su asíntota horizontal. Los valores más frecuentes de la base son 2 , e y 10. Describen multitud de procesos científicos donde hay involucrada la evolución de una población.

Las funciones de la forma $y = \log_a x$, con *a* un número real positivo, se denominan **funciones logarítmicas** y sus gráficas son curvas continuas y monótonas que, al inicio de su dominio, presentan un rápido crecimiento (si $a > 1$) o decrecimiento (si $a < 1$) que luego se modera notablemente. El eje de ordenadas es su asíntota vertical. Los valores más frecuentes de la base son 2 , e y 10 que se corresponden con el logaritmo binario, natural y decimal, respectivamente. Por las propiedades de los logaritmos se usan con mucha frecuencia en escalas de medida (pH, escala Richter). Son las funciones inversas de las exponenciales por lo que sus gráficas guardan simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

5. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Las funciones trigonométricas más usuales son el seno, el coseno y la tangente de un ángulo $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$. Todas ellas son continuas y periódicas. Los dominios, recorridos, simetrías y períodos son:

Función	Dominio	Recorrido	Simetría	Período
Seno	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	Origen	2π
Coseno	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	Eje OY	2π
Tangente	$\mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	Origen	π

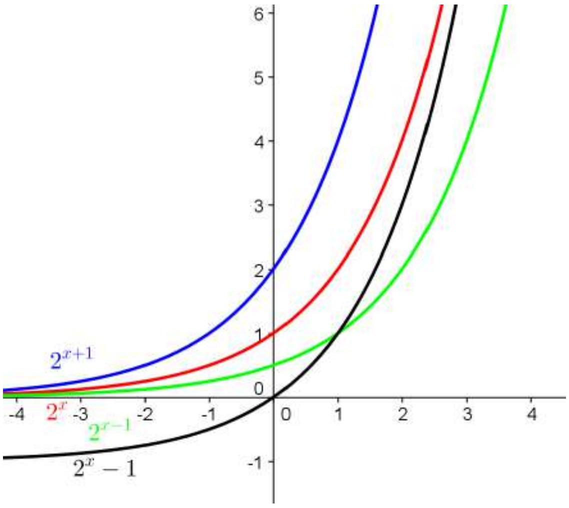
La tangente tiene asíntotas verticales en los puntos problemáticos de su dominio y es creciente en cada intervalo periódico. El seno y el coseno presentan el siguiente signo y crecimiento en cada intervalo periódico:

Función	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
Seno	Positivo/Crece	Positivo/Decrece	Negativo/Crece	Negativo/Decrece
Coseno	Positivo/Decrece	Negativo/Decrece	Negativo/Crece	Positivo/Crece

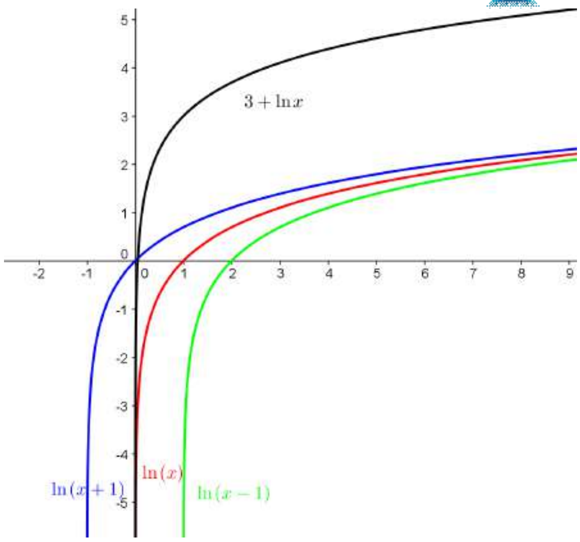
6. TRASLACIONES, DILATACIONES, CONTRACCIONES Y SIMETRIAS.

A partir de las funciones estudiadas se pueden construir otras muchas afectando la variable independiente o la dependiente para conseguir traslaciones (sumando), dilataciones o contracciones (multiplicando), horizontales o verticales y simetrías.

Se muestran algunos ejemplos de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.



Transformaciones de la exponencial



Transformaciones del logaritmo

Objetos Libres

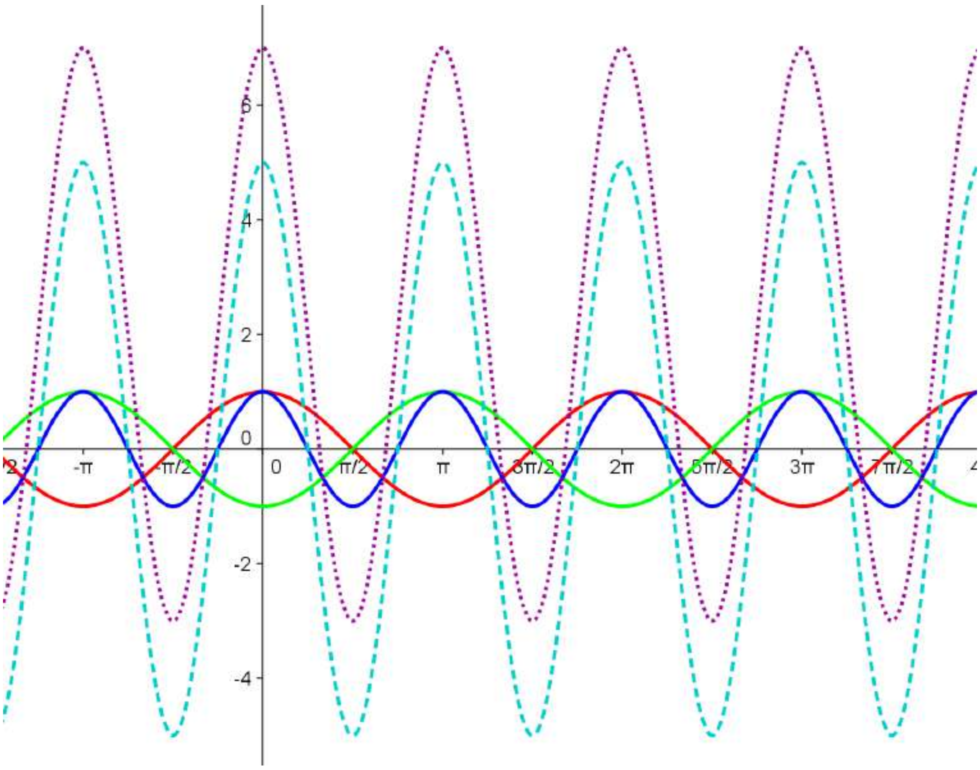
- $f_1(x) = \cos(x)$
- $f_3(x) = \cos(2\ (x - \pi))$

Objetos Dependientes

- $f_2(x) = \cos(x - \pi)$
- $f_4(x) = 5\ \cos(2\ (x - \pi))$
- $f_5(x) = 5\ \cos(2\ (x - \pi)) + 2$

Comenzamos con $f_1(x) = \cos x$.
Trasladamos la gráfica hacia la derecha π unidades para obtener $f_2(x) = \cos(x - \pi)$.
Contraemos horizontalmente a la mitad y obtenemos $f_3(x) = \cos 2(x - \pi)$.

Dilatamos verticalmente multiplicando por 5 y obtenemos $f_4(x) = 5\cos 2(x - \pi)$
Desplazamos verticalmente dos unidades y nos queda $f_4(x) = 5\cos 2(x - \pi) + 2$



Transformaciones del coseno

1. TASA DE VARIACION MEDIA. TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA.

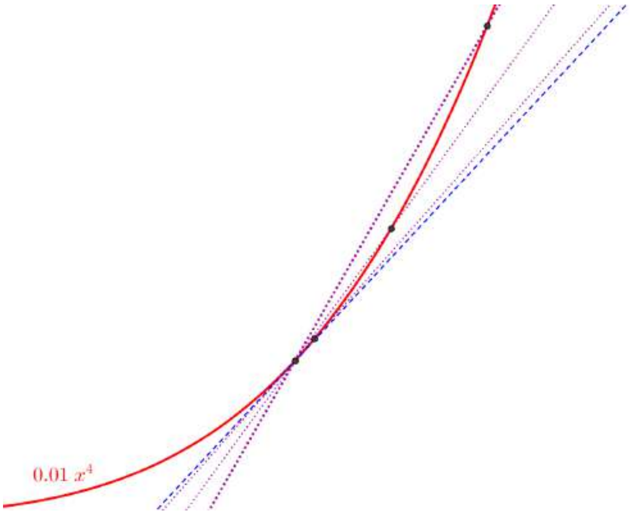
La **tasa de variación media** de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es el cociente incremental $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La **tasa de variación instantánea** de una función continua $f(x)$ en un punto $x=x_0$ es, si existe, el límite de las tasas de variación media en intervalos del tipo $[x_0-h,x_0]$ y $[x_0,x_0+h]$ cuando $h\to 0$.

2. CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

La **derivada** de una función continua $f(x)$ en un punto $x=x_0$ es, si existe, el número real límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Se representa $f'(x_0)$ y se dice que $f(x)$ es derivable en x_0.

3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.



La pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x=x_0$ es igual a la derivada de la función en dicho punto.

En el dibujo se observa que la secante (en morado) tiende a la tangente (en azul) conforme nos acercamos al punto de tangencia.

4. CALCULO DE LA FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

Si para cada punto de un intervalo del dominio de una función $f(x)$ existe su derivada podemos definir en dicho intervalo su función derivada $f'(x)$.

Cálculo de la derivada de funciones elementales a partir de la definición.

Sea $f(x)=k$, entonces $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$. Luego $f'(x)=0$. Sea $g(x)=x^2$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h}{h}=2x_0.$$

Luego $g'(x)=2x$. Se puede demostrar que si $g(x)=x^n\to g'(x)=nx^{n-1}$.

Sea $h(x) = \ln x$, entonces:

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(x_0+h)-h(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}})^{\frac{x_0}{h}\cdot\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$$

. Luego $h'(x) = \frac{1}{x}$. Se puede demostrar que si $f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$, $f(x) = a^x \to f'(x) = \ln a \cdot a^x$, $f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$ y $f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$.

5. DERIVADAS DE OPERACIONES.

Con las siguientes reglas de derivación y las derivadas de las funciones elementales se pueden calcular muchas derivadas de funciones:

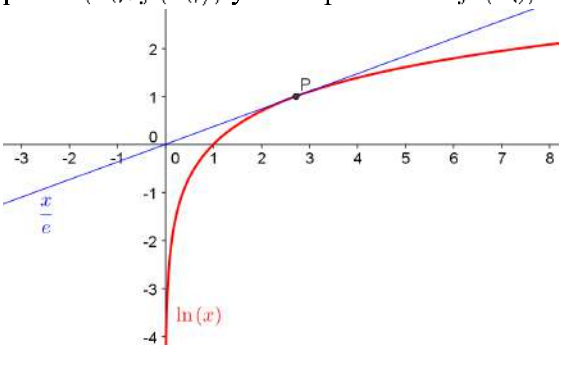
1) La derivada de una suma es la suma de las derivadas.
2) La derivada de una diferencia es la diferencia de las derivadas.
3) La derivada de un producto es la derivada del primer factor por el segundo factor sin derivar más el primer factor sin derivar por la derivada del segundo factor. Como la derivada de una constante es cero la derivada del producto de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.
4) La derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar partido por el denominador al cuadrado.

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
3) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \to (kf)'(x) = k\cdot f'(x)$
4) $(f:g)'(x) = [f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)] : g^2(x)$

Ejemplo: Derivar $P(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 2$. Aplicando las reglas 1, 2 y 3: $P'(x) = 3x^2 + 12x - 3$.
Ejemplo: Derivar $f(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$. Aplicando la regla 3 y la fórmula del seno del ángulo doble: $f'(x) = \cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.
Ejemplo: Derivar $f(x) = \tan x = \sin x : \cos x$. Aplicando la regla 4 y la fórmula fundamental de la trigonometría: $f'(x) = [\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x] : \cos^2 x = [\sin^2 x + \cos^2 x] : \cos^2 x = 1 : \cos^2 x$.

6. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE.

La ecuación de la recta tangente a una curva $f(x)$ en el punto $x = x_0$ pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $f'(x_0)$ luego es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Ejemplo: Calcular la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto $x = e$. Necesitamos evaluar la función y la derivada en el punto $x = e$. La función vale $y(e) = \ln e = 1$, luego el punto es $(e, 1)$. Como $y' = \frac{1}{x}$ la derivada vale $y'(e) = \frac{1}{e}$ y la recta tangente es $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \to y = \frac{x}{e} - 1 + 1 = \frac{x}{e}$.

1. FRECUENCIAS.

La **frecuencia absoluta** de un dato estadístico es el número de veces que se repite.
La **frecuencia relativa** de un dato estadístico es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos.
Los datos y sus frecuencias se organizan en **tablas estadísticas**.

Ejemplo: El resultado de lanzar un dado repetidamente ha sido 5 4 3 6 2 1 1 2 4 3 1 2 2 3 4 6 5 5 4 6.
La tabla estadística se construye contando cuántas veces ha salido cada número.

Dato	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	3	$\frac{3}{20}$
2	4	$\frac{4}{20}$
3	3	$\frac{3}{20}$
4	4	$\frac{4}{20}$
5	3	$\frac{3}{20}$
6	3	$\frac{3}{20}$
N=	20	

2. DIAGRAMA DE BARRAS Y DE SECTORES.

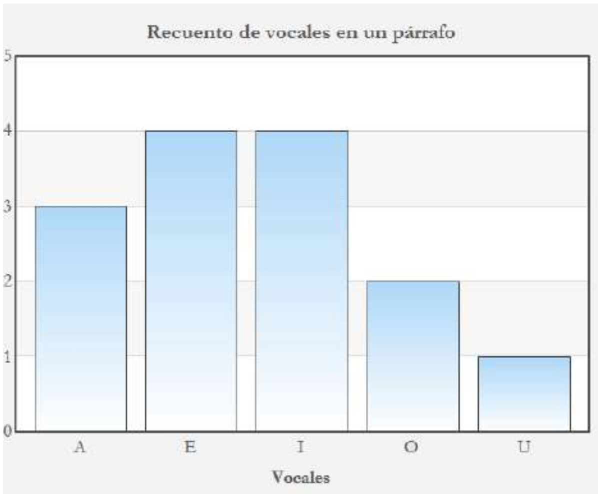
Los gráficos son formas atractivas y de fácil lectura de presentar datos estadísticos.
En un **diagrama de barras** la altura de cada barra *es proporcional a la frecuencia* de cada dato.

Si unimos los extremos de las barras se obtiene el **polígono de frecuencias**.

Ejemplo:

Recuento de vocales en un párrafo

Vocal	Frecuencia
A	3
E	4
I	4
O	2
U	1
N=	14



En un **diagrama de sectores** la superficie de un círculo se distribuye mediante sectores cuya *amplitud es proporcional a la frecuencia* absoluta.

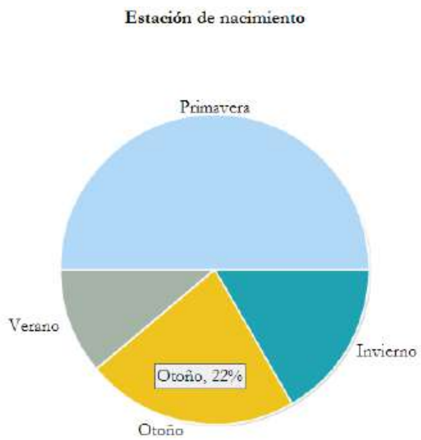
Para calcular la amplitud en grados se establece la siguiente proporción:

$$\frac{360^o}{\text{número total de datos}} = \frac{\text{amplitud}^o}{\text{frecuencia absoluta}}.$$

Ejemplo:

Estación en la que han nacido 18 bebés

Estación	Bebés	Amplitud º
Primavera	9	$\frac{360}{18} = \frac{x}{9} \to x = 360 \cdot \frac{9}{18} = 180$
Verano	2	$\frac{360}{18} = \frac{x}{2} \to x = 360 \cdot \frac{2}{18} = 40$
Otoño	4	$\frac{360}{18} = \frac{x}{4} \to x = 360 \cdot \frac{4}{18} = 80$
Invierno	3	$\frac{360}{18} = \frac{x}{3} \to x = 360 \cdot \frac{3}{18} = 60$



3. MEDIA ARITMÉTICA Y MODA.

La **media aritmética** es el cociente entre la suma de todos los datos y el número de datos. Para calcularla se multiplican las frecuencias absolutas por los datos y sumamos los resultados; a continuación, dividimos por el número total de datos.

Ejemplo: Las notas de Matemáticas de un grupo de alumnos han sido 5 6 3 7 10 4 6 7 8 8 5 5 6 6 6 9 2 3 4 4.
La media aritmética será $\frac{5+6+3+7+10+4+6+7+8+8+5+5+6+6+6+9+2+3+4+4}{20} = \frac{114}{20} = 5'7$.

Cuando los datos no valen todos lo mismo se utiliza la **media ponderada**, asignado un peso a cada dato. La suma que se obtiene es la de los productos del dato por su peso.

Ejemplo: En un examen de Lengua la Gramática cuenta 3, la Ortografía, 2 y el Vocabulario, 1. Roger obtuvo 6 en Gramática, 5 en Ortografía y 10 en Vocabulario. ¿Qué nota le corresponde en Lengua?

La media ponderada es $\frac{6 \cdot 3+5 \cdot 2+10 \cdot 1}{3+2+1} = \frac{18+10+10}{6} = \frac{38}{6} = 6'\hat{3}$.

Ejemplo: En Matemáticas los exámenes cuentan 7 y la actitud cuenta 3. Virginia obtuvo 5 y 7 en los exámenes y 4 en actitud. Ángela obtuvo 3, 3 y 10 respectivamente ¿Qué notas les corresponden en la evaluación?

V: La media aritmética de los exámenes es $\frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
La media ponderada es $\frac{6 \cdot 7+4 \cdot 3}{7+3} = \frac{42+12}{10} = \frac{54}{10} = 5'4 \approx 5$.
A: La media aritmética de los exámenes es $\frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
La media ponderada es $\frac{3 \cdot 7+10 \cdot 3}{7+3} = \frac{21+30}{10} = \frac{51}{10} = 5'1 \approx 5$.

La **moda** es el dato que más repite (de mayor frecuencia absoluta).

Ejemplo: Las notas de Matemáticas de un grupo de alumnos han sido 5 6 3 7 10 4 6 7 8 8 5 5 6 6 6 9 2 3 4 4.

La moda es el valor que más se repite, el 6.

4. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS.

Un experimento es **aleatorio** cuando no se puede predecir su resultado.
El **espacio muestral** es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.
Cualquier subconjunto del espacio muestral se llama **suceso**.

Ejemplo: La primera bola que se extrae en un bingo estará numerada del 1 al 90.
El experimento es aleatorio porque no sabemos qué bola saldrá.
El espacio muestral es $\{1, 2, 3, \ldots, 89, 90\}$.
Posibles sucesos son: sale el 17, sale bola par, sale bola mayor que 70, etc.

5. PROBABILIDAD DE UN SUCESO ALEATORIO.

La **probabilidad** de un suceso es la facilidad con que puede ocurrir.

Ejemplo: Es menos probable que salga la bola 17 que la salida de bola par.

Cuando los posibles resultados pueden ocurrir con igual facilidad la probabilidad se calcula con la llamada **regla de Laplace**:

$$P(A) = \text{probabilidad del suceso A} = \frac{\text{numero casos favorables a A}}{\text{numero casos posibles}}$$

Ejemplo: Para calcular la probabilidad de que la primera bola que salga en un bingo sea la 17 o sea par hacemos:
A=Sale la bola 17; B=Sale bola par.
Para el suceso A solo hay un caso favorable (la bola 17) mientras que para el suceso B hay 45 casos favorables (número de bolas pares).
El número de casos posibles es el número de bolas del bingo (90).
Luego $P(A) = \frac{1}{90}$; $P(B) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$.

1. CARACTERES Y VARIABLES ESTADÍSTICAS.

Véase E.3.13.1

2. RECUENTO DE DATOS. FRECUENCIAS.

Véase E.3.13.2, E.3.13.3 y E.3.13.4

3. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

Véase E.3.13.5

4. LA MEDIA ARITMÉTICA.

Véase E.3.14.1

5. LA MODA. LA MEDIANA.

Véase E.3.14.2

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN.

Véase E.3.14.4 y E.3.14.5

7. SUCESOS.

Véase E.3.15.1 y E.3.15.2

8. PROBABILIDAD.

Véase E.3.15.5 y E.3.15.6

1. LA INFORMACIÓN ESTADÍSTICA. POBLACIÓN Y MUESTRA. CARACTERES Y VARIABLES ESTADÍSTICAS.

Población es el conjunto de individuos en el que se desea estudiar determinada característica.
Muestra es cualquier subconjunto de la población en el que se efectúa el estudio.
Las muestras hacen viables, económica y temporalmente, los estudios estadísticos al reducir los recursos necesarios para la recogida de datos.

Ejemplo: La incidencia y prevalencia de una enfermedad epidémica se puede estudiar con los diagnósticos de medicina general de un número relativamente pequeño de ambulatorios de un determinado territorio.

Carácter estadístico es una propiedad que permite clasificar los individuos de una población.
Puede ser **cualitativo,** si sus distintas modalidades o valores los expresamos con palabras, o **cuantitativo,** si lo expresamos con números.

Ejemplo: El grupo musical preferido por los jóvenes es un carácter cualitativo. El número de veces que salen al mes para ir al cine es un carácter cuantitativo discreto.

Los caracteres cuantitativos pueden adoptar una serie de valores numéricos cuyo conjunto recibe el nombre de **variable estadística**. Las variables pueden ser **discretas**, si toman pocos valores aislados, o **continuas** si toman valores en un intervalo.

Ejemplo: La opinión de la población española sobre el desempeño de sus políticos se mide a través de una muestra de 3.000 personas encuestada telefónicamente. La opinión se expresa con una nota entre 0 y 10. Esta opinión es la variable estadística y es cuantitativa discreta, la muestra es de 3.000 personas que representan a la población española.

2. FRECUENCIAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS.

Recuento o conteo es la técnica que permite contar las veces que aparece un determinado valor de una variable estadística. Este número de veces es la **frecuencia absoluta** de un valor.
La **frecuencia relativa** es el cociente de dividir la frecuencia absoluta de un valor entre el número total de datos.
Siendo N el número total de datos, f_i la frecuencia absoluta del valor i-ésimo y h_i la frecuencia relativa de este valor se tienen las siguientes fórmulas para n valores:

$$N = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n, \qquad h_i = \frac{f_i}{N}, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo: El número de consultas médicas de un grupo de cincuenta alumnos en el último año ha sido:
1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 3, 1, 2, 0, 1, 4, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 5, 2, 3 6, 0, 1, 2, 1, 3, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 1, 3, 0, 1. Haz un recuento y calcula las frecuencias absolutas y relativas.

Nº de visitas	Recuento de estudiantes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
$x_0 = 0$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15	$\frac{15}{50} = 0'30$
$x_1 = 1$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18	$\frac{18}{50} = 0'36$
$x_2 = 2$	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	$\frac{10}{50} = 0'2$
$x_3 = 3$	IIII	4	$\frac{4}{50} = 0'08$
$x_4 = 4$	I	1	$\frac{1}{50} = 0'02$
$x_5 = 5$	I	1	$\frac{1}{50} = 0'02$
$x_6 = 6$	I	1	$\frac{1}{50} = 0'02$
	TOTAL	$N = 50$	$\frac{50}{50} = 1$

3. FRECUENCIAS ACUMULADAS.

La **frecuencia absoluta acumulada** de un valor x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores de la variable menores o iguales que x_i. Se representa por F_i.

Si f_i es la frecuencia absoluta de x_i entonces $F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i$.

La **frecuencia relativa acumulada** de un valor x_i es la suma de las frecuencias relativas de los valores de la variable menores o iguales que x_i. Se representa por $H_i = \frac{F_i}{N}$.

La **tabla** completa **de frecuencias** está formada por el recuento y las frecuencias absoluta y relativa, normal y acumulada de cada valor.

Ejemplo: El número de hijos de los cincuenta trabajadores de una empresa es: 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 1, 0, 2, 1, 1, 1, 0, 3, 1, 2, 0, 1, 1, 2 0, 0, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 0, 2.

Haz un recuento y elabora la tabla completa de frecuencias.

Nº de hijos	Recuento de trabajadores	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia abs. acumulada F_i	Frecuencia rela. acumulada H_i
$x_0 = 0$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15	$\frac{15}{50} = 0'30$	15	$\frac{15}{50} = 0'30$
$x_1 = 1$	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	19	$\frac{19}{50} = 0'38$	34	$\frac{34}{50} = 0'68$
$x_2 = 2$	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	$\frac{12}{50} = 0'24$	46	$\frac{46}{50} = 0'92$
$x_3 = 3$	IIII	4	$\frac{4}{50} = 0'08$	50	$\frac{50}{50} = 1$
	TOTAL	$N = 50$	$\frac{50}{50} = 1$		

4. TRATAMIENTO DE LOS DATOS: TABLAS ESTADÍSTICAS.

Un estudio estadístico fija unas características a estudiar de una población, extrae una muestra representativa de ella y recaba y ordena los datos mediante procedimientos de encuesta.

Una vez ordenados, estima si conviene agrupar los datos por tratarse de variables continuas, procurando que los intervalos sean de igual amplitud. El punto medio es la **marca de clase**.

A continuación, se efectúa el recuento y el registro y cómputo en la tabla de frecuencias.

Ejemplo: Las llamadas telefónicas de una empresa un determinado día han tenido la siguiente duración en segundos: 120 131 142 157 15 27 94 57 62 12 49 58 149 210 120 131 97 84 61 32 15 7 21 32 238 210 48 56 138 24 64 31 23 58 69 234 13 66 54 214 156 179 231 204 147 3 15 7 64 124 56 73 114 169 201 134 62 93 42 58.

Agrupa los datos en 8 clases y elabora la tabla completa de frecuencias.

La llamada de mayor duración es de 234 segundos. El múltiplo de 8 mayor más cercano es 240. Las ocho clases tendrán una amplitud de $240 : 8 = 30$ segundos. Incluimos el extremo inferior de cada clase en el intervalo.

Duración(sg)	Marca de clase x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i	Frecuencia relativa acumulada H_i
$[0, 30)$	$\frac{0+30}{2} = 15$	11	$\frac{11}{60} = 0'183$	11	$\frac{11}{60} = 0'183$
$[30, 60)$	$\frac{30+60}{2} = 45$	14	$\frac{14}{60} = 0'233$	25	$\frac{25}{60} = 0'417$
$[60, 90)$	$\frac{60+90}{2} = 75$	8	$\frac{8}{60} = 0'133$	33	$\frac{33}{60} = 0'55$
$[90, 120)$	$\frac{90+120}{2} = 115$	5	$\frac{5}{60} = 0'083$	38	$\frac{38}{60} = 0'633$
$[120, 150)$	$\frac{120-150}{2} = 145$	10	$\frac{10}{60} = 0'167$	48	$\frac{48}{60} = 0'8$
$[150, 180)$	$\frac{150-180}{2} = 165$	4	$\frac{4}{60} = 0'067$	52	$\frac{52}{60} = 0'867$
$[180, 210)$	$\frac{180-210}{2} = 195$	2	$\frac{2}{60} = 0'017$	54	$\frac{54}{60} = 0'9$
$[210, 240)$	$\frac{210-240}{2} = 225$	6	$\frac{6}{60} = 0'1$	60	$\frac{60}{60} = 1$
	TOTAL	$N = 60$	$\frac{60}{60} = 1$		

5. REPRESENTACIONES GRÁFICAS.

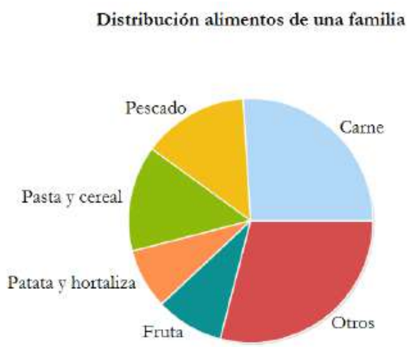
La información de las frecuencias presentada gráficamente de forma correcta es más efectiva.

Los cuatro gráficos más utilizados son:

- el **diagrama de sectores**: *la frecuencia relativa de cada modalidad se representa como un sector circular*,
- el **diagrama de barras**: *la frecuencia absoluta se representa como la altura de un rectángulo vertical*,
- el **histograma**: *es un diagrama de barras con rectángulos pegados, ya que la variable es continua, de área proporcional a la frecuencia*,
- el **diagrama lineal:** *es una poligonal que une la evolución de las frecuencias en el tiempo*.

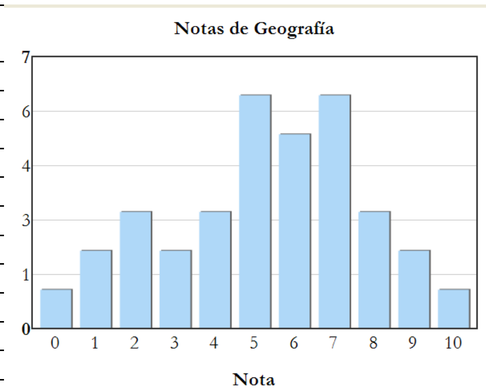
Ejemplo 1: El gasto en alimentación de una familia se distribuye así: 26% carne, 14% pescado, 14% pastas y cereales, 8% patatas y hortalizas, 9% frutas y 29% otros. Construye un diagrama de sectores. Obsérvese que la frecuencia que nos dan es la relativa expresada en porcentajes. Construimos la tabla y calculamos la amplitud de cada sector circular.

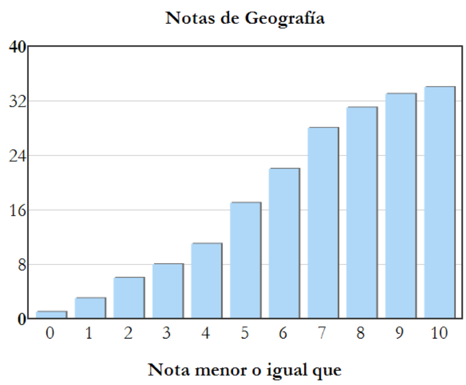
Alimento	*Frecuencia relativa F_r*	*Amplitud sector $F_i \cdot 360°$*
Carne	0.26	93.6
Pescado	0.14	50.4
Pasta y cereal	0.14	50.4
Patata y hortaliza	0.08	28.8
Fruta	0.09	32.4
Otros	0.29	104.4
TOTAL	1	360



Ejemplo 2: Las calificaciones de un grupo de alumnos en la asignatura de Geografía han sido:
9, 6, 5, 0, 1, 5, 7, 9, 10, 7, 5, 1, 2, 5, 7, 5, 3, 5, 7, 7, 6, 3, 4, 6, 8, 8, 6, 4, 4, 6, 8, 7, 2, 2.
Construye un diagrama de barras.

Nota x_i	f_i	F_i
0	1	1
1	2	3
2	3	6
3	2	8
4	3	11
5	6	17
6	5	22
7	6	28
8	3	31
9	2	33
10	1	34

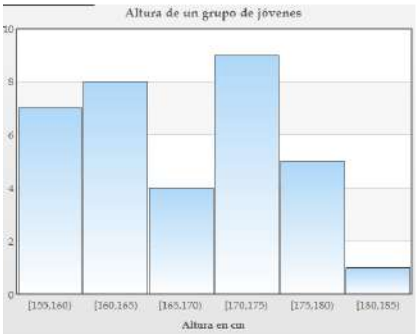


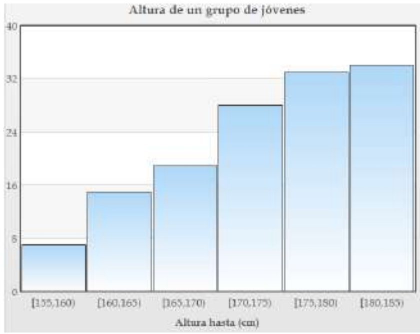


Ejemplo 3: La altura en cm de un grupo de jóvenes es: 182, 172, 173, 166, 164, 158, 155 168, 173, 155, 161, 163, 177, 179, 166, 170, 169, 161, 170, 155, 156, 161, 162, 170, 171, 172, 170, 157, 157, 163 160.
Agrupa los datos y construye un histograma.

Altura	f_i	F_i
[155,160)	7	7
[160,165)	8	15
[165,170)	4	19
[170,175)	9	28
[175,180)	5	34
[180,185)	1	35

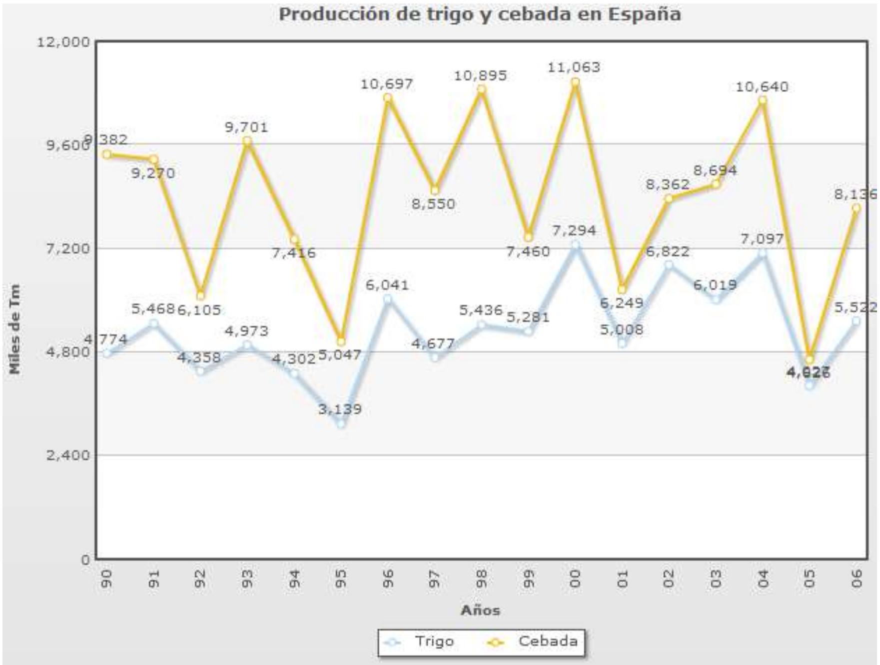
Gráficos realizados con la biblioteca gratuita Fusion Charts





Ejemplo 4: La producción de trigo y cebada en miles de Tm en España desde 1990 hasta 2006 se recoge en la siguiente tabla. Realiza un diagrama lineal con las dos series temporales de datos (trigo y cebada).

Año	*Trigo*	*Cebada*
1990	4774	9382
1991	5468	9270
1992	4358	6105
1993	4973	9701
1994	4302	7416
1995	3139	5047
1996	6041	10697
1997	4677	8550
1998	5436	10895
1999	5281	7460
2000	7294	11063
2001	5008	6249
2002	6822	8362
2003	6019	8694
2004	7097	10640
2005	4027	4626
2006	5522	8136



1. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN. MEDIA ARITMÉTICA.

La información estadística de un estudio se puede resumir con unos pocos parámetros que recogen los valores centrales y la dispersión de los datos.
Entre las medidas de centralización se encuentran la media aritmética, la mediana y la moda.
La **media aritmética** es el promedio de los valores que toma la variable y se define como el cociente de la suma de todos ellos entre el número de datos. Se representa como $\overline{x}$.
Su fórmula de cálculo, a partir de las frecuencias absolutas, es:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{x_1 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_n \cdot f_n}{N}.$$

Ejemplo 1: En un club de lectura el número de libros leídos por sus socios en un mes es el dado por la tabla siguiente:

Nº libros leídos x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Nº de socios f_i	7	12	18	11	7	4	1

Calcular la media aritmética. Es $\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_7 \cdot f_7}{f_1 + f_2 + \cdots + f_7} = \frac{1 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{7 + 12 + 18 + 11 + 7 + 4 + 1} = \frac{195}{60} = 3'25$ libros.

Ejemplo 2: La edad de los niños que acudieron a las urgencias de un hospital pediátrico fue:

Edad (años)	**[0,2)**	**[2,4)**	**[4,6)**	**[6,8)**	**[8,10)**
Nº de niños f_i	12	8	5	7	3

Calcular la media aritmética. Primero hay que calcular las marcas de clase: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 9$.
La media es $\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 - x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_5 \cdot f_5}{f_1 + f_2 - \cdots + f_5} = \frac{1 \cdot 12 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 3}{12 + 8 + 5 + 7 + 3} = \frac{137}{35} = 3'914$ años.

2. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN. MODA Y MEDIANA.

En el cálculo de la media todos los datos juegan un papel idéntico y las modalidades han de ser numéricas para poder sumarse.
En ocasiones la variable no es cuantitativa pero se puede ordenar, como cuando opinamos que el desempeño de un cargo político es *muy bueno, bueno, regular, malo o muy malo.*
En otras ocasiones la variable cuantitativa toma valores extremos atípicos que distorsionan la media.

Para ello se definen otras medidas de centralización que solventan ambos problemas.
La **mediana** es el valor central de los datos ordenados. Si el número de datos es par se promedian los dos valores centrales. Se representa por M_e.
La **moda** es el valor que más se repite. Se representa por M_o.
Si los datos están agrupados en clases tanto para la moda como para la mediana se considerará la marca de la clase modal o de la clase donde se encuentra el valor central, respectivamente.

Ejemplo 3: Calcula la moda y la mediana de los coeficientes de inteligencia de un grupo de alumnos siendo los siguientes:
100, 102, 96, 98, 99, 99, 104, 110, 78, 88, 89, 100, 101, 90, 91, 94, 92, 87, 85, 85, 85, 86.

Para el cálculo de la mediana hay que ordenar los 22 valores:
78, 85, 85, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 99, 100, 100, 101, 102, 104, 110.
El undécimo es 92 y el duodécimo es 94 por lo que la mediana será $M_e = \frac{92+94}{2} = 93$.
La moda es el valor que más se repite, en nuestro caso tres veces: $M_o = 85$.
.

Ejemplo 4: En el caso de los niños que acuden al hospital hay 35 datos por lo que la mediana será el decimoctavo, que se encuentra en la clase [2,4) cuya marca de clase es $x_2 = 3 = M_e$. En cuanto a la clase modal es [0,2) cuya marca es $x_1 = 1 = M_o$.

3. CUARTILES Y PERCENTILES.

Los datos de una estadística conforman una distribución cuyas frecuencias relativas suman la unidad. Para ubicar un dato dentro de la distribución ya hemos visto que contamos con la mediana, que es el dato que ocupa la posición central. Percentiles y cuartiles amplían esta idea de lugar relativo.

El **percentil** i de una distribución de valores estadísticos ordenados es aquel valor que acumula el i% de las frecuencias relativas, dejando por encima el $(100 - i)$% de las frecuencias relativas. Se representa como P_i. Ya sabemos que la mediana es un percentil: $M_e = P_{50}$.
Se llaman **cuartiles** a los valores que dejan por debajo un cuarto, la mitad y tres cuartos de la distribución: $Q_1 = P_{25}$. $Q_2 = P_{50} = M_e$. $Q_3 = P_{75}$.
Para su cálculo conviene computar las frecuencias acumuladas.

Ejemplo 5: Hallar los cuartiles de la distribución de libros leídos por los socios del club de lectura.

Nº libros leídos x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Nº de socios f_i	7	12	18	11	7	4	1
$x_i \cdot f_i$	7	24	54	44	35	24	7
$F_i = \sum x_i \cdot f_i$	7	31	85	129	164	188	195

Calculamos ahora el 25%, el 50% y el 75% de 195 que son 48’75, 97’5 y 146’25 y localizamos qué x_i acumula los valores enteros incluyentes 49, 98 y 147 de F_i: $Q_1 = 3$. $Q_2 = 4$. $Q_3 = 5$.

Ejemplo 6: Hallar los cuartiles de la distribución de edades de los niños que acuden al hospital pediátrico.

Edad (años)	**[0,2)**	**[2,4)**	**[4,6)**	**[6,8)**	**[8,10)**
Marca de clase x_i	1	3	5	7	9
Nº de niños f_i	12	8	5	7	3
$x_i \cdot f_i$	12	24	25	49	27
$F_i = \sum x_i \cdot f_i$	12	36	61	110	137

Calculamos ahora el 25%, el 50% y el 75% de 137 que son 34’25, 68’5 y 102’75 y localizamos qué x_i acumula los valores enteros incluyentes 35, 69 y 103 de F_i: $Q_1 = 3$. $Q_2 = 7$. $Q_3 = 7$.

4. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN. RANGO.

Las medidas centrales reducen a un solo dato la riqueza de información contenida en la distribución. Por ejemplo una nota media de 6 con notas de 5, 6 y 7 es más equilibrada que una nota media de 6 con notas de 2, 6 y 10. Conviene por tanto analizar la dispersión de los datos.

El **rango o recorrido** es la diferencia entre los valores mayor y menor de una distribución.
El **rango intercuartílico** es la diferencia entre los cuartiles Q_3 y Q_1.

Ejemplo 7: Hallar el rango de la distribución de coeficientes de inteligencia de los alumnos.
El rango es $x_{max} - x_{min} = 110 - 78 = 32$ puntos porcentuales.

Ejemplo 8: Hallar el rango y el rango intercuartilico de la distribución de libros leídos por los socios del club de lectura.
El rango es $x_{max} - x_{min} = 7 - 1 = 6$ libros y el rango intercuartílico es $Q_3 - Q_1 = 5 - 3 = 2$ libros.

Ejemplo 9: Hallar el rango y el rango intercuartilico de la distribución de edades de los niños que acuden al hospital pediátrico. El rango es $x_{max} - x_{min} = 9 - 1 = 8$ años y el rango intercuartílico es $Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$ años.

5. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN. VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA.

El rango adolece de los mismos problemas de valores atípicos que la media.
El parámetro de dispersión más utilizado es la varianza que trata de promediar las desviaciones de los datos respecto de la media. Para evitar problemas de compensación de signos calcula estas diferencias al cuadrado.

La **varianza** es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los datos respecto a su media aritmética. Se representa como s^2 y se calcula con las siguientes fórmulas:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{N} = \frac{f_1x_1^2+f_2x_2^2+\cdots+f_nx_n^2}{N} - \bar{x}^2$$

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza.
Se representa y calcula como $s = \sqrt{s^2}$.

Ejemplo 10: Hallar la varianza y la desviación típica de la distribución de libros leídos por los socios del club de lectura.

Nº libros leídos x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49
Nº de socios f_i	7	12	18	11	7	4	1
$f_i \cdot x_i^2$	7	48	162	176	175	144	49

Como $\bar{x} = 3'25$, $s^2 = \frac{f_1x_1^2+f_2x_2^2+\cdots+f_7x_7^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{7+48+162+176+175+144+49}{60} - (3'25)^2 = \frac{761}{60} - 10'5625 = 2'12$.
La desviación típica es $s = \sqrt{2'12} = 1'456$ libros.

Ejemplo 11: Hallar la varianza y la desviación típica de la distribución de edades de los niños que acuden al hospital.

Edad (años)	**[0,2)**	**[2,4)**	**[4,6)**	**[6,8)**	**[8,10)**
Marca de clase x_i	1	3	5	7	9
x_i^2	1	9	25	49	81
Nº de niños f_i	12	8	5	7	3
$f_i \cdot x_i^2$	12	72	125	343	243

Como $\bar{x} = 3'914$, $s^2 = \frac{f_1x_1^2+f_2x_2^2+\cdots+f_5x_5^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{12+72+125+343+243}{35} - (3'914)^2 = \frac{795}{35} - 15'3216 = 7'393$.
La desviación típica es $s = \sqrt{7'393} = 2'719$ años.

6. COEFICIENTE DE VARIACIÓN.

El coeficiente de variación sirve para comparar las dispersiones de dos distribuciones con medias y desviaciones distintas.
El **coeficiente de variación** es la razón entre la desviación típica y la media aritmética.
Se representa con $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ y no tiene unidades.

Ejemplo 12: Comparar las dispersiones de los libros leídos por los socios del club y las edades de los niños que acuden al hospital mediante sus coeficientes de variación.
$CV_{libros} = \frac{s_{libros}}{\bar{x}_{libros}} = \frac{1'456}{3'25} = 0'448 = 48\%$ mientras que $CV_{edad} = \frac{s_{edad}}{\bar{x}_{edad}} = \frac{2'719}{3'914} = 0'695 = 69'5\%$.
La dispersión de las edades es mayor que la de libros leídos.

7. CALCULO DE LA MEDIA Y LA VARIANZA CON GEOGEBRA.

La herramienta que el alumno tiene más a mano es una calculadora. Estas máquinas no son de uso sencillo y requieren consultar las instrucciones. Todas las calculadoras científicas tienen funciones estadísticas específicas. Cabe prestar atención a los siguientes pasos:

1) Activar el modo estadístico y/o las opciones correspondientes.
2) Borrar el contenido de memoria de una estadística previa.
3) Introducir los datos con sus frecuencias.
4) Recuperar los parámetros estadísticos calculados (media, varianza).

Cada paso en cada calculadora se hace con una combinación de teclas concretas.

Las hojas de cálculo son herramientas de fácil programación a través de las funciones estadísticas que ya poseen y el uso y referencia de las celdas donde se ubican los datos.

Geogebra es un software gratuito de cálculo simbólico desarrollado sobre Java que contiene una implementación de hoja de cálculo. Es el software que recomendamos para estudiantes de secundaria no obligatoria y de universidad pues contiene las prestaciones de *Mathematica* y *Excel* siendo gratuito.

Ejemplo 13: Computar con Geogebra la media, la varianza y la desviación típica de la distribución de libros leídos por los socios del club de lectura. A modo de ejemplo detallamos las fórmulas introducidas en las celdas de las columnas C, D y E y en la fila 9, así como los parámetros que se calculan en B10, B11 y B12: C2=A2*B2, D2=A2*A2, E2=D2*B2 y se arrastran hacia abajo para copiar las fórmulas en las filas 3 a 8, B9=suma(B2:B8), C9=suma(C2:C9), E9=suma(E2:E8), B10=C9/B9, B11=E9/B9-B10*B10, B12=sqrt(B11).

	A	B	C	D	E
1	Variable x_i	Frecuencia absoluta f_i	x_i*f_i	x_i^2	x_i^2*f_i
2	1	7	7	1	7
3	2	12	24	4	48
4	3	18	54	9	162
5	4	11	44	16	176
6	5	7	35	25	175
7	6	4	24	36	144
8	7	1	7	49	49
9	Total	60	195		712
10	Media aritmética	3.25			
11	Varianza	1.3			
12	Desviación típica	1.14			

Ejercicio 14: Halla la media, la varianza y la desviación típica de la distribución de edades de los niños que asisten al hospital.

8. VALORES ATÍPICOS.

Un valor es **atípico** si está excesivamente alejado de la media.
Existe un criterio, que utiliza el rango intercuartílico, para considerar que un valor es atípico: Por la derecha, si es mayor que $Q_3 + 1'5 \cdot (Q_3 - Q_1)$, por la izquierda, si es menor que $Q_1 - 1'5 \cdot (Q_3 - Q_1)$. El tratamiento más frecuente de los datos atípicos consiste en ignorarlos o dar una explicación plausible de su atipicidad.

Ejemplo 15: Detectar datos atípicos en el ejemplo de los coeficientes de inteligencia. Los veintidós datos ordenados eran: 78, 85, 85, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 96, 98, 99, 99, 100, 100, 101, 102, 104, 110 de los que deducimos que $\bar{x} = 93'59$. $Q_1 = 87$. $Q_3 = 100 \rightarrow Q_3 + 1'5(Q_3 - Q_1) = 100 + 1'5 \cdot 13 = 119'5 \wedge Q_1 - 1'5(Q_3 - Q_1) = 87 + 1'5 \cdot 13 = 67'5$ y no tendríamos datos atípicos. Un alumno tendría un CI atípicamente elevado por encima de 120 y atípicamente disminuido por debajo de 67. Se considera retraso mental un CI inferior a 75.

1. TERMINOLOGÍA ESTADÍSTICA.

Véase E.3.13.1 (, E.3.13.2, E.3.13.3 y E.3.13.4) .

2. MEDIA ARITMÉTICA Y MODA.

Véase E.3.14.1 y E.3.14.2

3. MEDIANA Y CUARTILES.

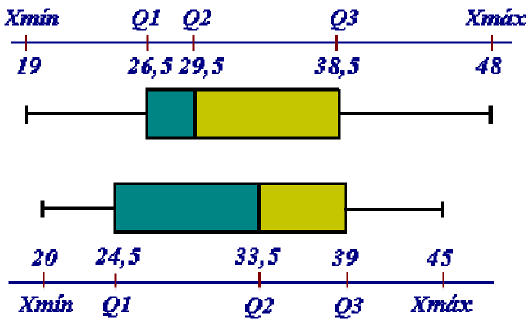
Véase E.3.14.2 y E.3.14.3

4. REPRESENTACIONES GRÁFICAS. SIMETRÍA.

Véase E.3.13.5

El **diagrama de caja y bigotes** representa cinco valores que, ordenados de menor a mayor, son el mínimo, el cuartil primero, la mediana, el cuartil tercero y el máximo. El mínimo y el máximo conforman los bigotes. Los cuarteles la caja rectangular que está dividida por la mediana.

La mayor utilidad de este diagrama es la comparación de dos o más conjuntos de datos.



Ejemplo: Compara los dos grupos de edades

35 38 32 28 30 29 27 19 48 40 39 24 24 34 26 41 29 48 28 22

36 25 37 24 39 20 36 45 31 31 39 24 29 23 41 40 33 24 34 40

Obtenidas las cinco medidas de cada conjunto los diagramas de caja y bigotes se presentan en la figura de la izquierda.

5. RANGO, VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA.

Véase E.3.14.4 y E.3.14.5

6. UTILIZACIÓN CONJUNTA DE LA MEDIA Y LA DESVIACIÓN TÍPICA.

Coeficiente de Variación (Véase E.3.14.6).

Se consideran **valores atípicos** aquellos que se encuentran fuera de un entorno de la media aritmética de radio vez y media la desviación típica $(\bar{x} - 1.5 \cdot \sigma_x, \bar{x} + 1.5 \cdot \sigma_x)$.

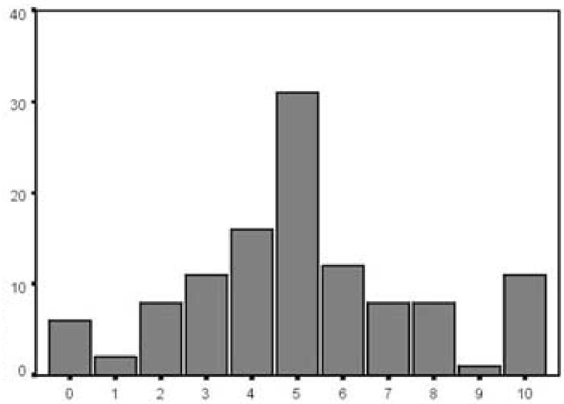
Ejemplo: En la distribución de edades 35 38 32 28 30 29 27 19 48 40 39 24 24 34 26 41 29 48 28 22 la media es $\bar{x} = 32.05$ y la desviación típica es $\sigma_x = 7.96$ con lo que el intervalo de valores típicos sería $(\bar{x} - 1.5\sigma_x, \bar{x} + 1.5\sigma_x) = (20.11, 43.99)$ y, por tanto, 19 y 48 son valores atípicos.

Ejemplo: En la distribución de edades 36 25 37 24 39 20 36 45 31 31 39 24 29 23 41 40 33 24 34 40 la media es $\bar{x} = 32.55$ y la desviación típica es $\sigma_x = 7.10$ con lo que el intervalo de valores típicos sería $(\bar{x} - 1.5\sigma_x, \bar{x} + 1.5\sigma_x) = (21.90, 43.20)$ y, por tanto, 45 es el único valor atípico.

En distribuciones *unimodales y simétricas* el 68% de los datos están comprendidos en un entorno de la media de radio la desviación típica $(\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x)$, el 95% de los datos están comprendidos en un entorno de la media de radio dos veces la desviación típica $(\bar{x} - 2\sigma_x, \bar{x} + 2\sigma_x)$ y el 99% de los datos están comprendidos en un entorno de la media de radio tres veces la desviación típica $(\bar{x} - 3\sigma_x, \bar{x} + 3\sigma_x)$.

Ejemplo: Se tiene la siguiente distribución de datos unimodal y simétrica. Comprobar los porcentajes comprendidos en los diferentes intervalos centrados en la media y de radio una, dos y tres veces la desviación típica.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	6	2	8	11	16	31	12	8	8	1	11



La media es $\bar{x} = 5.10$
La desviación típica es $\sigma_x = 2.51$
El intervalo centrado en la media con radio una desviación:
$(2.58, 7.61)$, que incluye todos los valores de 3 a 7 que son 78 de 114, es decir, un 68.42%.
El intervalo centrado en la media con radio dos desviaciones:
$(0.07, 10.12)$, que incluye todos los valores de 1 a 10 que son 108 de 114, es decir, un 94.74%.
El intervalo centrado en la media con radio tres desviaciones:
$(-2.44, 12.64)$, que incluye todos los valores que son 114 de 114, es decir, un 100%.

1. VARIABLES ESTADÍSTICAS BIDIMENSIONALES.

Cuando de una población estudiamos simultáneamente dos características o variables cuantitativas, x e y, con la finalidad de encontrar alguna relación entre ellas enfrentamos un problema de estadística bidimensional. Ejemplo: el peso y la altura de las personas.

Una variable estadística bidimensional se representa mediante el par (X, Y) y toma los valores (x_1, y_1), (x_2, y_2) ..., (x_n, y_n) en una muestra de tamaño n. Resulta útil representar las frecuencias en tablas de doble entrada.

Ejemplo: Se ha preguntado a 50 ciudadanos cuántas veces toman al día el metro y el autobús obteniéndose:

□Autobús/Metro→	0	1	2	Total
0	2	2	10	14
1	4	8	8	20
2	8	6	2	16
Total	14	16	20	50

2. DEPENDENCIA ALEATORIA Y FUNCIONAL.

La relación entre dos variable unidimensionales puede ser:

a) De **dependencia funcional**, si sus valores se ajustan a la gráfica de una función matemática, siendo una de ellas la variable independiente y la otra la variable dependiente.

b) De **dependencia aleatoria o correlación**, si sus valores no se ajustan a una función pero guardan cierta relación.

El **diagrama de dispersión** o nube de puntos, que es la representación de los valores (x_1, y_1), (x_2, y_2) ..., (x_n, y_n) en unos ejes cartesianos, nos indica según su forma (véase gráfico anexo) el tipo de relación existente: correlación negativa, nula o positiva.

Negativa fuerte — Negativa — Nula — Positiva — Positiva fuerte

Ejemplo: Dada la variable bidimensional

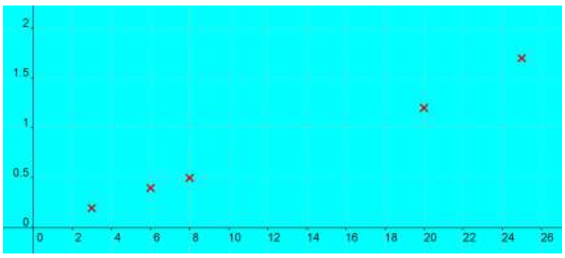
X: Cigarrillos diarios	**3**	**6**	**8**	**20**	**25**
Y: Índice mortalidad (tanto por mil)	0.2	0.4	0.5	1.2	1.7

Representa su diagrama de dispersión y señala la relación posible entre X e Y.

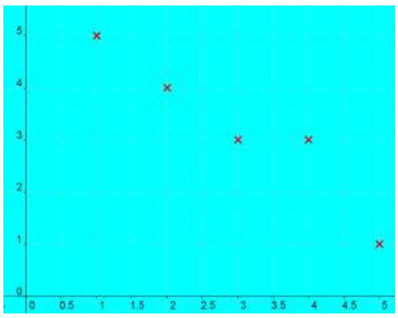
Ejemplo: Dada la variable bidimensional

X: Número de horas de estudio	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Y: Número de horas de TV	5	4	3	3	1

Representa su diagrama de dispersión y señala la relación posible entre X e Y.



Relación directa



Relación inversa

3. COVARIANZA.

Se llama **centro de gravedad** de una variable bidimensional (X, Y) al punto $(\overline{x}, \overline{y})$.

La forma de medir la posible relación entre dos variables es su **covarianza,** que se representa como σ_{xy} y se calcula como $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Ejemplo: Calcula la covarianza de una variable bidimensional dada por la siguiente tabla:

						Suma	Media
X	3	6	8	20	25	62	12.4
Y	0.2	0.4	0.5	1.2	1.7	4	0.8
XY	0.6	2.4	4	24	42.5	73.5	14.7
XX	9	36	64	400	625	1134	226.8
YY	0.04	0.16	0.25	1.44	2.89	4.78	0.956

$\overline{x} = 12.4$

$\overline{y} = 0.8$

$\sigma_x^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \overline{x}^2 = 226.8 - 12.4^2 = 73.04 \rightarrow \sigma_x = 8.546$

$\sigma_y^2 = \frac{\sum y^2}{n} - \overline{y}^2 = 0.956 - 0.8^2 = 0.316 \rightarrow \sigma_y = 0.562$

$\frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{73.5}{5} = 14.7$

$\sigma_{xy} = 14.7 - 12.4 \cdot 0.8 = 14.7 - 9.92 = 4.78$

4. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL.

El **coeficiente de correlación lineal** o de *Pearson* es un número cuyo valor absoluto es inferior o igual a 1 y es la medida matemática de la correlación. Se representa por la letra r y se define como la razón de la covarianza al producto de las desviaciones típicas $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$.

Si es negativo la correlación es inversa; si es positivo, directa.

Si es mayor que 0’6 en valor absoluto la correlación es fuerte; si es mayor que 0’8 en valor absoluto, muy fuerte. Si vale 1 en valor absoluto la correlación lineal es funcional.

Para valores inferiores a 0’6 en valor absoluto se considera correlación nula.

Ejemplo: Calcula el coeficiente de correlación lineal del ejemplo anterior e interprétalo.

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{4.78}{8.546 \cdot 0.562} = 0.995$.

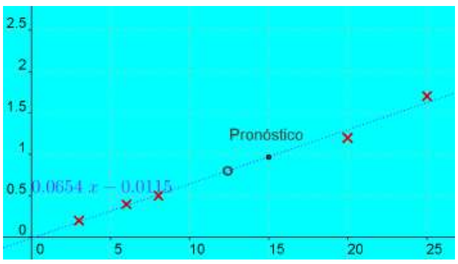
La correlación entre cigarrillos diarios y tanto por mil de mortalidad es muy fuerte y positiva, casi funcional.

5. RECTA DE REGRESIÓN.

Cuando existe una correlación estadísticamente significativa entre dos variables tiene sentido calcular **la recta de regresión de la variable Y sobre la variable X**. Esta recta minimiza las distancias al cuadrado de las ordenadas de los puntos, tiene pendiente igual al coeficiente de correlación por el cociente de las desviaciones típicas y pasa por el centro de gravedad.

Su ecuación es $y - \overline{y} = r \cdot \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}) = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \overline{x})$.

La recta de regresión permite pronosticar valores de Y a partir de valores de X.



Ejemplo: Calcula la recta de regresión del ejemplo anterior y pronostica el tanto por mil de mortalidad para 15 cigarrillos diarios.

El centro de gravedad es $(\overline{x}, \overline{y}) = (12.4, 0.8)$.

La pendiente de la recta $m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{4.78}{73.04} = 0.0654$ y la ecuación pedida será $y - 0.8 = 0.0654(x - 12.4) \rightarrow y = 0.0654x - 0.0115$.

El valor pronosticado se obtiene sustituyendo $x = 15$:

$y = 0.0654 \cdot 15 - 0.0115 = 0.97$ por mil.

1. EXPERIENCIAS Y SUCESOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL.

Un **experimento aleatorio** es aquel en el que no se puede predecir su resultado.
El **espacio muestral** es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.
Un **suceso aleatorio** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: La baraja española de 48 cartas tiene 4 palos (oros, copas, espadas y bastos) y doce cartas por palo (del 1 al 12). El 1 se llama as, el 10, 11 y 12 sota, caballo y rey, respectivamente. Se realiza el experimento extraer una carta de la baraja. El espacio muestral es $E = \{1O, 2O, \ldots, 12O, 1C, 2C, \ldots, 12C, 1E, 2E, \ldots, 12E, 1B, 2B, \ldots, 12B\}$.
Diferentes sucesos aleatorios son: sale un basto, sale un rey, sale el as de oros, sale un número impar, etc.

Ejemplo: La ruleta es un juego de azar en el que una bola gira hasta depositarse en una de las 38 casillas, 2 blancas donde gana la banca, 18 negras y 18 rojas, en que se divide la ruleta. Los jugadores realizan diferentes apuestas que tienen determinados premios.
El espacio muestral del experimento aleatorio hacer girar la ruleta es $E = \{00, 0, 1, 2, \ldots, 35, 36\}$.
Diferentes sucesos aleatorios son: sale el número 13 negro, sale un número rojo, sale un número negro, sale un número mayor que 18, etc.

2. TIPOS DE SUCESOS ALEATORIOS.

Suceso **elemental** es el formado por un solo resultado.
Suceso **compuesto** es el formado por más de un resultado.
Suceso **seguro** es el que siempre se realiza. Se representa por E.
Suceso **imposible** es el que nunca se realiza. Se representa por $\varnothing$.
Suceso **contrario** de un suceso A es el que se realiza cuando el suceso no se realiza. Se representa $\overline{A}$. El suceso seguro y el imposible son contrarios.

Ejemplo: Sale el 6 de bastos es un suceso elemental al extraer una carta de la baraja española. Sale un rey es un suceso compuesto. Sale par o impar es un suceso seguro. Sale el 13 de copas es un suceso imposible. El suceso contrario de "sale oros o copas" es sale "espadas o bastos".

Ejemplo: Sale el 6 es un suceso elemental de girar la ruleta. Sale rojo es un suceso compuesto. Sale rojo, negro o blanco es un suceso seguro. Sale el 37 es un suceso imposible. El suceso contrario de sale blanco es "sale rojo o negro".

3. OPERACIONES CON SUCESOS.

La **unión** de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando se realiza A ó B. Se representa por $A \bigcup B$.
La **intersección** de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando se realiza A y B a la vez. Se representa por $A \bigcap B$.
Dos sucesos son **incompatibles** cuando su intersección es el suceso imposible, es decir, nunca se realizan a la vez.

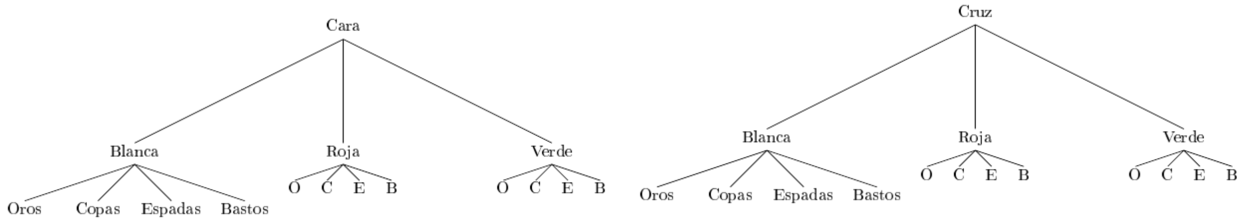
Ejemplo: Sea A el suceso compuesto "sale un rey". Sea B el suceso compuesto "sale bastos". El suceso $A \bigcup B$ es "sale un rey o sale bastos". El suceso $A \bigcap B$ es "sale el rey de bastos". A y B no son sucesos incompatibles.

Ejemplo: Sea A el suceso compuesto "sale un número rojo". Sea B el suceso compuesto "sale un número negro mayor que 18". El suceso $A \bigcup B$ es "sale rojo o negro mayor que 18". El suceso $A \bigcap B$ es el suceso imposible. A y B son incompatibles.

4. TECNICAS DE RECUENTO. DIAGRAMA EN ÁRBOL.

La regla multiplicativa establece que cada posible resultado de un experimento se puede combinar con cada posible resultado de otro experimento. Si un primer experimento tiene m resultados posibles y un segundo experimento tiene n resultados posibles el experimento compuesto por la sucesión de ambos tiene $m \cdot n$ resultados posibles que se combinan y recuentan utilizando un **diagrama de árbol**.

Ejemplo: Lanzamos un moneda, a continuación extraemos una bola de una bolsa con bolas blancas, verdes y rojas y finalmente anotamos el palo de una carta extraída de una baraja. El primer experimento tiene 2 resultados posibles, el segundo 3 y el tercero 4. En total hay $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ combinaciones. El diagrama de árbol sería:



5. PROBABILIDAD DE SUCESOS. REGLA DE LAPLACE.

La **probabilidad de un suceso** es la frecuencia relativa a la que tiende conforme crece el número de pruebas realizadas. Esta probabilidad se suele llamar *experimental*.
Regla de Laplace. En caso de que todos los posibles resultados de un experimento tengan la misma posibilidad de realizarse se define la **probabilidad de un suceso** como la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Ejemplo: A medida que se lanza indefinidamente una moneda la frecuencia relativa de aparición de caras se acerca a 0'5.

Ejemplo: Al lanzar un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la posibilidad de que salga cualquiera de los números es la misma si el dado no tiene tara. La probabilidad de cada suceso elemental será $\frac{1}{6}$ y la del suceso obtener cifra par será $\frac{3}{6}$ dado que de los seis resultados posibles tres son favorables (que salga 2, 4 ó 6).

6. PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD.

La **probabilidad de un suceso** A es un número comprendido entre 0 y 1 pues los casos favorables nunca superan a los posibles. Se representa $p(A)$ y cumple $0 \leq p(A) \leq 1$.
La **probabilidad del suceso seguro** es 1 pues todos los casos posibles son favorables.
La **probabilidad del suceso imposible** es 0 ya que no hay casos favorables.
La **probabilidad del suceso contrario** de A es 1 menos la probabilidad de A ya que los casos favorables del contrario son los casos *no favorables* del suceso: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Ejemplos: Se extrae una carta de la baraja española de 48 cartas.
La probabilidad de que sea una sota es $p(S) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.
La probabilidad de que sea de copas es $p(C) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$.
La probabilidad de que no sea una sota es $p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.
La probabilidad de que no sea de copas es $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
La probabilidad de que sea la sota de copas es $p(10C) = \frac{1}{48}$.
La probabilidad de que no sea la sota de copas es $p(\overline{10C}) = 1 - p(10C) = 1 - \frac{1}{48} = \frac{47}{48}$.

7. PROBABILIDAD DE LA UNION DE SUCESOS.

Si A y B son dos sucesos *incompatibles* **la probabilidad del suceso unión** $A\bigcup B$ es la suma de las probabilidades de A y B ya que los casos favorables a la unión son los casos favorables a A ó a B y no tienen ningún caso favorable común. Si A y B *incompatibles,* $p(A\bigcup B)=p(A)+p(B)$.
Si A y B son dos sucesos *compatibles* **la probabilidad del suceso unión** $A\bigcup B$ es la suma de las probabilidades de A y B menos la probabilidad del suceso intersección $A\bigcap B$ ya que los casos favorables a la unión son los casos favorables a A ó a B descontando los casos favorables comunes. Si A y B *compatibles,* $p(A\bigcup B)=p(A)+p(B)-p(A\bigcap B)$.

Ejemplo: Se gira una perindola como la de la figura y se anota el número sobre el que se apoya. Dados los sucesos $A=$"Salir numero mayor que 3", $B=$"Salir numero impar" y $C=$"Salir multiplo de 3" calcular las probabilidades $P(A\bigcup B)$ y $P(B\bigcup C)$. El suceso A tiene seis casos posibles; el B, cinco y el C, tres. Ay B no son independientes pues tienen casos favorables comunes (5,7,9). B y C no son independientes pues tienen casos favorables comunes (3,9).
Luego $P(A\bigcup B)=p(A)+p(B)-p(A\bigcap B)=\frac{6}{10}+\frac{5}{10}-\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.
$P(B\bigcup C)=p(B)+p(C)-p(B\bigcap C)=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}-\frac{2}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

8. PROBABILIDAD DE SUCESOS EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES.

La **probabilidad de un camino** del diagrama en árbol de un experimento compuesto es igual al producto de probabilidades de cada una de las ramas que conforman el camino.
Dos **sucesos** son **independientes** si la realización de primero no condiciona la realización del segundo. En caso contrario se llaman **dependientes**.

Ejemplo: En una bolsa se meten 5 bolas blancas y 3 negras. A continuación se extraen sucesivamente dos bolas. La probabilidad de que ambas sean negras se obtiene multiplicando la probabilidad de que lo sea la primera por la probabilidad de que lo sea la segunda. La primera probabilidad es de $\frac{3}{8}$ mientras que lo sea la segunda tiene probabilidad $\frac{2}{7}$. La probabilidad pedida es $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$ Obsérvese que la segunda extracción está afectada por el resultado de la primera: hay una bola menos de alguno de los dos colores. Si modificamos el experimento y devolvemos la bola extraída en primer lugar a la bolsa la probabilidad pedida es ahora de $\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$ y los sucesos serían independientes.

☞ *Los experimentos de extracción sin reposición son dependientes. Los experimentos con reposición son independientes.*

9. SIMULACIÓN DE EXPERIMENTOS ALEATORIOS.

La **simulación de experimentos aleatorios** es el procedimiento que permite simplificar un experimento de difícil o muy costosa realización por otro más sencillo que reproduce los mismos resultados que el primero. Es muy frecuente la utilización de calculadoras o programas de ordenador que permiten la obtención de un número aleatorio que representa el resultado de la ejecución del experimento.

Ejemplo: El lanzamiento de un dado se simula obteniendo un número aleatorio entre 0 y 1 (esta función suele llamarse RAND o RANDOM) que se multiplica por 6 para obtener un número aleatorio entre 0 y 6, se le añade una unidad obteniendo un número entre 1 y 7 y se trunca la parte decimal obteniendo finalmente un número **entero** entre 1 y 6 que simula el lanzamiento de un dado.

Ejemplos de sorteos: Para simular una apuesta de lotería primitiva (6 números entre 1 y 49) repetiríamos el proceso anterior seis veces pero multiplicando por 49 en lugar de por 6. Para simular la extracción del gordo de la lotería de Navidad repetiríamos el proceso cinco veces (para cada una de las cifras de las decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades) multiplicando por 10 en lugar de por 6.

1. DIAGRAMA EN ARBOL. PRINCIPIO GENERAL DE RECUENTO.

Véase E.3.15.4.

2. PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

Dado un número natural n se define el **número factorial de** n como el producto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ y se representa como $n!$.

Una **permutación sin repetición** de n elementos es cada uno de los distintos grupos que se pueden forman de manera que en cada grupo están todos los elementos y un grupo difiere del otro únicamente en el orden de colocación de sus elementos. El número de tales permutaciones se representa por P_n y vale $n!$.

Ejemplo: En una carrera atlética participan 8 atletas. ¿De cuántas formas posibles pueden llegar a meta todos sin posibilidad de empate?. Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ el conjunto que representa los ocho atletas. Una forma de llegar a meta consiste en escribir los ocho números según orden de llegada: 87612345.

Habrá $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ formas distintas de llegar a la meta.

3. VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Una **variación sin repetición** de m tomados de n en n es cada uno de los distintos grupos que se pueden forman de manera que en cada grupo haya n elementos diferentes y un grupo difiere de otro si difieren en algún elemento o bien en el orden de colocación de sus elementos. El número de variaciones se representa por $V_{m,n}$ y vale

$$\frac{m!}{(m-n)!} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-n+1).$$

Ejemplo: Un instituto organiza un concurso literario dotado con cuatro premios y participan 150 alumnos. ¿De cuántas formas distintas pueden otorgarse los premios?. Un posible panel de galardonados supone elegir 4 alumnos y presentarlos en determinado orden. Si difiere algún alguno o cambiamos el orden tenemos una forma distinta.

Se trata de $V_{150,4} = 150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 = 486246600$ formas distintas de entregar los premios.

4. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Una **variación con repetición** de m tomados de n en n es cada uno de los distintos grupos que se pueden forman de manera que en cada grupo haya n elementos, repetidos o no, y un grupo difiere de otro si difieren en algún elemento o bien en el orden de colocación de sus elementos. El número de tales variaciones se representa por $VR_{m,n}$ y vale m^n.

Ejemplo: Un test consta de 15 preguntas con tres opciones posibles. ¿De cuántas formas distintas se puede contestar a todas las preguntas?. Una posible respuesta sería $AAABBCCAAABBBBB$. Utilizando las mismas letras en diferente orden (por ejemplo, al revés) o cambiando alguna letra tenemos otra posible respuesta.

Se trata de $VR_{3,15} = 3^{15} = 14348907$ formas distintas de contestar al test de 15 preguntas.

Esta solución también es el número de apuestas sencillas posibles de una quiniela de fútbol (1X2) a 15 partidos.

5. COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Una **combinación sin repetición** de m tomados de n en n es cada uno de los distintos grupos que se pueden forman de manera que en cada grupo haya n elementos diferentes y un grupo difiere de otro si difieren en algún elemento pero son la misma combinación si difieren solo en el orden de colocación de sus elementos.

El número de tales combinaciones se representa por $C_{m,n}$ y vale

$$\frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

Ejemplo: Un a apuesta de lotería primitiva consiste en seleccionar seis números del 1 al 49. ¿Cuántas apuestas diferentes hay?. Una selección de seis números, necesariamente distintos, difiere de otra si difiere en algún número.

Se trata de $C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10068347520}{720} = 13983816$ de apuestas diferentes.

6. NÚMEROS COMBINATORIOS

Se llama **número combinatorio** al número $C_{m,n} = \binom{m}{n}$ y se lee "m sobre n".

El número combinatorio tiene las siguientes propiedades:

1) $\binom{m}{0} = 1.$ 2) $\binom{m}{m} = 1.$

3) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$

4) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}.$

Se llama **triángulo de Pascal** al triángulo formado por los números combinatorios $\binom{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dispuestos en este orden de filas y columnas:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
m=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
m=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
m=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
m=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
m=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
m=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}.$$

El triángulo de Pascal nos recuerda las propiedades: todas las filas comienzan y terminan en uno, todas las filas son simétricas, cada número -excepto los extremos- se obtiene sumando los dos que tiene arriba.

Ejemplo: Calcular $\binom{35}{4}$ y $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$.

Aplicamos la definición y $\binom{35}{4} = \frac{35!}{4! \cdot 31!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot \cancel{31!}}{\cancel{31!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 52360.$

Aplicamos la 4ª propiedad y la definición $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$

7. POTENCIA DE UN BINOMIO

Se llama **binomio de Newton** a la siguiente expresión, que se demuestra por inducción:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Substituyendo b por $-b$:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 - \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}a^0 b^n$$

El binomio de Newton es una generalización de las identidades notables “cuadrado de una suma”, “cuadrado de una diferencia”, “cubo de una suma” y “cubo de una diferencia” y permite calcular cualquier potencia de un binomio.

Ejemplo: Calcular $(3x-2y)^4$. Aplicamos el binomio de Newton con $a=3x$, $b=-2y$, $n=4$:

$$(3x-2y)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4(-2y)^0 + \binom{4}{1}(3x)^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}(3x)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(3x)^1(-2y)^3 + \binom{4}{4}(3x)^0(-2y)^4 =$$

$$= 81x^4 - 4\cdot 27x^3\cdot 2y - 6\cdot 9x^2\cdot 4y^2 - 6\cdot 3x\cdot 8y^3 - 16y^4 = 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 144xy^3 + 16y^4.$$

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL. TIPOS DE SUCESOS.

Véase E.3.15.1 y E.3.15.2.

2. OPERACIONES CON SUCESOS.

Véase E.3.15.3.

3. PROBABILIDAD DE UN SUCESO.

Véase E.3.15.5 y E.3.15.6.

(DEFINICION FRECUENTISTA) La probabilidad de un suceso es la **frecuencia relativa** a la que tiende cuando el experimento se repite un número ilimitado de veces.

(REGLA DE LAPLACE) Si los elementos del espacio muestral tienen la misma posibilidad de ocurrencia la probabilidad de un suceso es el **cociente entre casos favorables y casos posibles**.

(DEFINICION AXIOMATICA) La probabilidad de un suceso es **un número entre 0 y 1 que cumple** las siguientes propiedades:

1) La probabilidad del suceso seguro es 1.
2) La probabilidad del suceso imposible es 0.
3) Si la probabilidad del suceso A es p, la probabilidad del contrario $\overline{A}$ es $1-p$.

☞ *Para calcular la probabilidad de un suceso definido con "al menos uno" es más sencillo calcular la probabilidad de su contrario "ninguno" y restarla de 1.*

4) La probabilidad del suceso unión es $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$.

4. TABLA DE CONTINGENCIA Y DIAGRAMA DE ARBOL.

En muchas ocasiones el experimento aleatorio es compuesto, es decir, está formado por varios experimentos simples, como cuando se tienen en cuenta **dos características a la vez** de una misma población y se selecciona un individuo de ella o cuando se **realiza reiteradamente una extracción** con o sin reemplazamiento.

En estos casos son de gran utilidad la **tabla de contingencia** y el **diagrama de árbol** (véase E.3.15.4).

Ejemplo: Se elige al azar un alumno de IES y se desea conocer la probabilidad de que curse 2º y reciba clases de inglés.

	1º	2º	3º	4º	Total
Inglés	44	38	33	41	156
Francés	6	5	5	6	22
Total	50	43	38	47	178

Tabla de contingencia curso-idioma

Sucesos S=Ser alumno de 2º, I=Dar inglés. $P(S\bigcap I)=\frac{38}{178}$.

5. PROBABILIDAD DE LA UNION DE SUCESOS. Véase E.3.15.7.

6. PROBABILIDAD EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS. Véase E.3.15.8.

7. PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES.

La probabilidad de un suceso A **condicionada** al suceso B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha sucedido B. Se define mediante la expresión $P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$.

De esta fórmula se deriva otra definición de la probabilidad de la intersección: $P(A \bigcap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.

Ejemplo: De acuerdo con la tabla de contingencia curso-idioma, sabiendo que un alumno es de 2º ¿cuál es la probabilidad de que curse inglés? Deseamos calcular $P(I|S) = \frac{P(I \bigcap S)}{P(S)} = \frac{\frac{38}{178}}{\frac{43}{178}} = \frac{38}{13}$.

Cuando $P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B)$, se dice que A es **independiente** de B y se cumple que $P(A|B) = P(A)$. En caso contrario, se dicen dependientes.

Ejemplo: Ser de 2º y cursar inglés ¿son independientes? Deseamos verificar si $P(S \bigcap I) = P(S) \cdot P(I)$. Como no se cumple $\frac{38}{178} \neq \frac{43}{178} \cdot \frac{156}{178}$ S e I no son sucesos independientes.

8. PROBABILIDAD TOTAL.

En un experimento compuesto la probabilidad de un determinado suceso se obtiene sumando todos los posibles caminos del diagrama de árbol que lo producen. Supongamos el suceso A y la partición del espacio muestral que supone cualquier suceso B y su contrario $\overline{B}$, entonces la probabilidad total establece que $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$.

Ejemplo: En una ciudad el 55% de la población en edad laboral son hombres; de ellos, el 26% está en paro. Entre las mujeres el % de paro es del 42%. Si se elige una persona en edad laboral al azar ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el paro?. Sea P el suceso "persona en edad laboral en paro". Sea H el suceso "hombre en edad laboral". Se nos informa que $P(H) = 0.55$ luego $P(\overline{H}) = P(M) = 0.45$), $P(P|H) = 0.26$, $P(P|M) = 0.42$. Nos piden $P(P)$ que, por la fórmula de la probabilidad total,
es $P(P) = P(P\ H)P(H) + P(P|\overline{H})P(\overline{H}) = P(H \bigcap P) + P(M \bigcap P) = 0.55 \cdot 0.26 - 0.45 \cdot 0.42 = 0.332$.