Cuarta Competición Matemática Mediterránea 2001
MEMORIAL PETER O'HALLORAN

Nombre y apellidos

Problema 1

Sea k una circunferencia de centro O, y sean P y Q dos puntos sobre k. Sea M el punto medio de PQ , y A y C dos puntos variables sobre k, de tal manera que AC pasa por M. El trapecio ABCD está inscrito en k, de modo que AB es paralela a CD y ambas son paralelas a PQ.

Demostrar que AD y BC se cortan en un punto X que es independiente de la posición de A sobre la circunferencia.

Problema 2

Hallar todos los enteros n tales que el polinomio $p(x) = x^5 - nx - n - 2$ puede descomponerse en producto de dos polinomios no constantes, con coeficientes enteros.

Problema 3

Probar que existe un entero positivo N tal que la representación decimal de 2000^N empieza por la sucesión de cifras 200120012001.

Problema 4

Se da un triángulo equilátero ABC, de lado 1. Designamos con Δ el conjunto de los puntos interiores o sobre los lados de ABC. Para cada punto $M \in \Delta$, a_M, b_M, c_M son las distancias de M a los lados BC, CA, AB respectivamente. Definimos

$$f(M) = a_M^3 (b_M - c_M) + b_M^3 (c_M - a_M) + c_M^3 (a_M - b_M) .$$

a) Describir geométricamente el conjunto $\{M \in \Delta : f(M) \geq 0\}$.

b) Hallar los valores máximo y mínimo de $f(M)$ cuando $M \in \Delta$, y los puntos donde son alcanzados.

Tiempo: 4 horas y media

Cada problema vale un máximo de 7 puntos.