V COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA
MEMORIAL PETER O'HALLORAN

1. Hallar todos los números naturales x, y tales que se verifica la siguiente condición :

$$y \text{ divide a } x^2+1, \quad \text{y además } x^2 \text{ divide a } y^3+1.$$

2. Sean x, y, a números reales tales que

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = a.$$

Determinar todos los valores posibles de a.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean M y N puntos de los lados AC y BC, respectivamente, distintos de los vértices. Sea K el punto medio del segmento MN. Las circunferencias circunscritas a los triángulos CAN y BCM se cortan por segunda vez en el punto D.

Probar que la recta CD pasa por el circuncentro O del triángulo ABC si y solamente si la mediatriz de AB pasa por K.

4. Demostrar que, si (a, b, c) es cualquier terna de números reales no negativos, tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces se verifica

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{4}\left(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}\right)^2.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

Tiempo : 4 horas
Cada problema vale 7 puntos
No se permiten calculadoras