COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2004
MEMORIAL PETER O'HALLORAN
Requena (Valencia), 1 de mayo de 2004

1. Hallar todos los números naturales m tales que

$$1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \cdots \cdot (2m-1)! = \left(\frac{m\,(m+1)}{2}\right)!$$

2. En el triángulo ABC, la altura desde A corta a la circunferencia circunscrita en T. El diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por A y la recta OT (O, circuncentro) cortan al lado BC en Q y M, respectivamente.
Demostrar que

$$\frac{[AQC]}{[MTC]} = \left(\frac{\sin B}{\cos C}\right)^2,$$

donde [] representa el área.

3.Si a, b, c son números positivos tales que

$$1 = ab + bc + ca + 2abc,$$

demostrar que

$$2\,(a+b+c) + 1 \geq 32abc.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

4.Sean z_1, z_2, z_3 números complejos mutuamente distintos, tales que

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$

y supongamos que el triángulo cuyos vértices son los puntos cuyos afijos son z_1, z_2, z_3, es acutángulo.
Demostrar que si se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2+|z_1+z_2|} + \frac{1}{2+|z_2+z_3|} + \frac{1}{2+|z_3+z_1|} = 1$$

entonces dicho triángulo es equilátero.