

## COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2005

Memorial Peter O'Halloran

Requena, Valencia, 30 de abril de 2005

### Problema 1

El profesor le dice a Pedro el producto de dos números naturales, y a Santiago la suma de esos números. Ninguno de los alumnos conoce, inicialmente, el número del otro.

Uno de los muchachos dice al otro: *No hay forma de que puedas averiguar mi número.*

El otro contesta: *Te equivocas, es 136.*

¿Cuáles fueron los números que el profesor dijo a cada chico? Justificar la respuesta.

### Problema 2

$k$  y  $k'$  son dos circunferencias concéntricas, de centro  $O$  y radios respectivos  $R$  y  $R'$ . Se supone que  $R < R'$ .

Una semirrecta  $Ox$  corta a  $k$  en el punto  $A$ ; la semirrecta opuesta  $Ox'$  corta a  $k'$  en el punto  $B$ . Una tercera semirrecta  $Ot$ , distinta de las dos anteriores, corta a  $k$  en  $E$  y a  $k'$  en  $F$ .

Demostrar que las cuatro circunferencias siguientes se cortan en un mismo punto:

La circunscrita al triángulo  $OAE$ .

La circunscrita al triángulo  $OBF$ .

La de diámetro  $EF$ .

Y la de diámetro  $AB$ .

### Problema 3

Con la notación  $|E|$  se representa el número de elementos del conjunto finito  $E$ .

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 3$ ) conjuntos finitos de enteros positivos. Demostrar que

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n |A_i| \right) + \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq \frac{2}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|.$$

### Problema 4

Sea  $A$  el conjunto de los polinomios  $f(x)$ , de grado 3, con coeficientes enteros y coeficiente de  $x^3$  igual a 1, tales que, para cada  $f(x)$ , existen: un primo (positivo)  $p$  que no divide a 2004, y un entero positivo  $q$ , primo con  $p$ , tal que  $f(p) = 2004$  y  $f(q) = 0$ .

Demostrar que hay un subconjunto  $B \subset A$ , con un número infinito de elementos, tal que las gráficas de todos los polinomios de  $B$  se deducen unas de otras por traslaciones.

*Tiempo: 4 horas*  
*Cada problema vale 7 puntos*  
*No se permite el uso de calculadoras*