

EL MODELO QUARK

Física Nuclear y de Partículas

Rubén Sánchez Ramírez
Facultad de Física
(Universidad de La Laguna)

Curso 2008/09

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción Histórica | 5 |
| 1.1. El periodo semiclásico | 5 |
| 1.1.1. Los constituyentes del átomo | 5 |
| 1.1.2. El fotón | 5 |
| 1.2. Física de partículas en el paradigma de la física actual | 5 |
| 1.2.1. La antimateria | 5 |
| 1.2.2. Los mesones | 6 |
| 1.2.3. El neutrino | 6 |
| 1.2.4. La extrañeza | 7 |
| 1.2.5. Los quarks | 8 |
| 1.3. El modelo estándar | 8 |
| 2. Propiedades de las Partículas Elementales | 13 |
| 2.1. Generalidades | 13 |
| 2.2. Números cuánticos | 13 |
| 2.2.1. Leptones | 13 |
| 2.2.2. Hadrones | 14 |
| 3. Teoría de Grupos | 17 |
| 3.1. Propiedades generales | 17 |
| 3.2. Representación de grupos | 18 |
| 3.2.1. El grupo de las permutaciones $S(n)$ | 19 |
| 3.2.2. Diagramas de Young | 20 |
| 3.3. Grupos de Lie | 22 |
| 3.3.1. Subálgebra de Cartan. Pesos | 22 |
| 3.3.2. Representación adjunta. Raíces | 23 |
| 3.3.3. Raíces simples | 25 |
| 3.3.4. La matriz de Cartan | 25 |
| 3.3.5. Pesos fundamentales | 26 |
| 3.4. El grupo $SU(n)$ | 27 |

| | |
|---|-----------|
| 3.4.1. Generadores | 27 |
| 3.4.2. Pesos y raíces | 28 |
| 4. Modelo SU(3) de sabor | 29 |
| 4.1. Representaciones irreducibles de SU(3) | 29 |
| 4.1.1. Generadores | 29 |
| 4.1.2. Generadores de Cartan | 29 |
| 4.1.3. Operadores Escalera | 30 |
| 4.1.4. Raíces simples | 30 |
| 4.1.5. Matriz de Cartan | 30 |
| 4.1.6. Pesos fundamentales | 31 |
| 4.1.7. Dimensión de la representación (q_1, q_2) | 31 |
| 4.2. SU(3) y los quarks u, d y s | 31 |
| 4.2.1. Representación $(1, 0) = 3$ | 31 |
| 4.2.2. Representación $(0, 1) = \bar{3}$ | 32 |
| 4.3. Mesones | 33 |
| 4.3.1. Representaciones irreducibles en SU(3) para un quark y un antiquark | 34 |
| 4.3.2. Representación $(1, 1) = 8$ | 34 |
| 4.3.3. Representación $(0, 0) = 1$ | 35 |
| 4.4. Bariones | 35 |
| 4.4.1. Representaciones irreducibles en SU(3) para tres partículas | 35 |
| 4.4.2. Representación $(3, 0) = 10$ | 37 |
| 4.4.3. Representación $(1, 1) = 8$ | 39 |
| 4.4.4. Representación $(0, 0) = 1$ | 39 |
| 5. Conclusiones | 41 |

Capítulo 1

Introducción Histórica

1.1. El periodo semiclásico

1.1.1. Los constituyentes del átomo

La física de partículas elementales, tal como la conocemos hoy día, comienza en 1887 con el descubrimiento del *electrón* por J.J. Thomson, quien estableció para el átomo el modelo del “*pastel de pasas*”, donde el bizcocho constituiría la mayor parte de la masa y estaría cargado positivamente, mientras los electrones-pasas se distribuirían uniformemente en el volumen del pastel para garantizar la neutralidad del átomo.

En 1911 Rutherford y Geiger (entonces su estudiante de doctorado) construyeron un dispositivo con el que demostraron que la carga positiva se concentraba en un núcleo mucho más pequeño que el átomo, invalidando el modelo de Thomson. Al núcleo del hidrógeno lo llamaron *protón*.

En 1914 Niels Bhor propuso su famoso modelo planetario para el átomo de H, obteniendo buenos resultados para éste pero fallando para el He y más pesados.

En 1932 Chadwick descubre una nueva partícula con carga eléctrica neutra y masa parecida a la del protón y a partir de entonces el universo parecía poder explicarse de manera satisfactoria en términos de tres partículas: el electrón, el protón y el *neutrón*. Fue el apogeo de una “*belle époque*”, que por supuesto no duró demasiado.

1.1.2. El fotón

Contrariamente a lo que sucedió con otras partículas, el *fotón* no fue descubierto por un experimento dedicado, ni su existencia postulada por una teoría formal. Fue un concepto introducido por Planck en 1900 para explicar el espectro de la radiación del cuerpo negro, aunque entonces ni él mismo creyó en su existencia física.

En 1905 Einstein consigue explicar el efecto fotoeléctrico usando la idea de Planck, otorgándosele más tarde el premio Nobel por ello. Pero no fue hasta 1932 cuando A.H. Compton demostró su existencia mediante un experimento de dispersión de rayos X por electrones en un blanco de carbón.

1.2. Física de partículas en el paradigma de la física actual

1.2.1. La antimateria

En 1927 P.A.M. Dirac presentó la famosa ecuación que lleva su nombre, la cual compatibiliza la ecuación de ondas con la relatividad especial y establece la existencia de soluciones con energía negativa. Su brillante interpretación fue asociar dichas soluciones a la existencia de antipartículas, hecho confirmado en 1931 por Anderson tras el descubrimiento del *positrón*. De hecho, la ecuación de Dirac pone de manifiesto una propiedad universal de la naturaleza: la existencia,

para cada partícula, de su antipartícula con todas sus *cargas* opuestas. En 1955 fueron descubiertos el *antiprotón* y el *antineutrón* en el Bevatron de Berkeley (figura 1.3).

1.2.2. Los mesones

Un problema que el modelo de Bhor ignora es el de la estabilidad del núcleo atómico ante la repulsión electrostática de los protones en el núcleo. Debe existir una fuerza más intensa que la electromagnética que consiga mantener unidos los nucleones, que sea de corto alcance ya que no se detecta a distancias superiores al del radio nuclear y ser independiente de la carga eléctrica.

En 1934 H. Yukawa propuso la primera teoría cuantitativa de la *fuerza nuclear fuerte* postulando que los nucleones se atraen mutuamente por mediación de un campo de fuerza. Del mismo modo que es posible explicar el alcance infinito de la fuerza electromagnética en términos de una partícula intermediaria sin masa (el fotón), es posible inducir la masa de una partícula que media una fuerza de corto alcance. Yukawa estimó que la masa de dicha partícula, a la que llamó *mesón*, debía ser unas 300 veces superior a la del e^- .

En 1937, Street y Stevenson estudiaban rayos cósmicos en una cámara de niebla cuando descubrieron una partícula penetrante cuya masa coincidía bien con la predicha por la teoría de Yukawa, asociándose originalmente a ésta. Sin embargo poco después se descubriría una segunda partícula, provocando una considerable confusión respecto a la naturaleza de los entonces denominados mesón- μ (*muón*) y mesón- π (*pión*). Finalmente, una serie de experimentos establecieron que el pión era la partícula predicha por Yukawa y que el muón era una versión pesada (un factor de aproximadamente 200) del e^- , lo que no tranquilizó en absoluto los ánimos ya que nadie se explicaba la razón de su existencia.

1.2.3. El neutrino

En 1930 los físicos se enfrentaban con una paradoja surgida estudiando la llamada desintegración β de cierto núcleo radiactivo A que se transforma

$$A \rightarrow B + e^- \tag{1.1}$$

En una desintegración a dos cuerpos, por conservación de energía-momento, la energía del electrón emitido es

$$E = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_{e^-}^2}{2m_A} \tag{1.2}$$

por lo que la energía del electrón siempre debe ser la misma. No obstante el espectro medido en las desintegraciones no es monocromático sino continuo, cuya energía máxima viene dada precisamente por 1.2. Para poder explicar esto es necesario introducir una nueva partícula ν que transporte la energía que no ha tomado el e^- . El problema era que dicha partícula era un fantasma, luego era necesario que fuera neutra (la carga se conservaba), con masa muy ligera o nula y que no interaccionase de manera apreciable con la materia. Fue W. Pauli quien predijo la existencia del *neutrino* a su pesar, tal como muestra su célebre carta a los participantes en la conferencia de Tübingen:

“Queridas damas y caballeros radioactivos (...) He dado con un remedio desesperado (...) a fin de salvar las leyes de conservación de energía (...) esto es la posibilidad de la existencia en el núcleo atómico de partículas neutras (...) que llamaré neutrones¹”

En 1934 E. Fermi propuso la primera teoría cuantitativa de la desintegración beta, estableciendo que el proceso es

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \tag{1.3}$$

y no fue hasta 1956 cuando F. Reines y C. Cowan realizaron su histórico experimento en el que observaron por primera vez la interacción de un antineutrino.

Ya en 1953, antes de detectarse el neutrino, los físicos se preguntaban si había solo un tipo, el que se emite en la desintegración beta, o si existía un segundo tipo, asociado a la desintegración del pión en un muón, que posteriormente

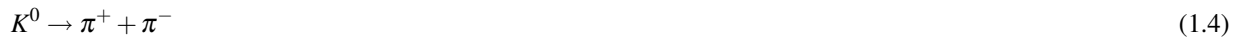
¹Posteriormente, Chadwick se apropió del nombre originalmente propuesto por Pauli para denominar al nucleón neutro. Los fantasmas de Pauli fueron bautizados finalmente por E. Fermi con el nombre de *neutrinos*

decae en un e^- . La respuesta la dieron Swartz, Lederman, Steinberger y colaboradores en 1963 produciendo el primer haz de neutrinos muónicos de la historia.

Existe además un tercer neutrino asociado a la partícula τ , descubierta en SLAC (1975) por M. Perl y colaboradores, quien recibió por ello el premio Nobel de física.

1.2.4. La extrañeza

Hacia 1947, y no por primera vez, los físicos opinaban que su disciplina estaba casi cerrada. El mundo estaba compuesto por protones, neutrones, electrones y sus antipartículas. Además, más o menos a regañadientes se aceptaba al muón y su neutrino. En diciembre de ese año, sin embargo, la fotografía mostrada en la figura 1.4 acaba de nuevo con la tregua. El análisis muestra la existencia de una partícula neutra que se desintegra en un par de piones cargados y de signo opuesto



En 1949, Powell descubrió el kaón cargado a partir de la desintegración



y a partir de entonces empezaron a proliferar este tipo de partículas (mesones) hasta tal punto que W. Lamb, Nobel de física en 1953, llegó a afirmar (supuestamente en broma) que “Hace poco tiempo, al descubridor de una nueva partícula se le daba un premio Nobel... ¡¡Hoy en día se le tendría que poner una multa!!”

En 1950, Anderson y colaboradores encontraron otra partícula pesada y neutra, la lambda, a partir de la desintegración



partícula que esta vez pertenece a la familia de los *bariones*, de la cual el protón es la más ligera. Al igual que ocurrió con los mesones, la proliferación incontrolada de este tipo de partículas no se hizo esperar.

Hacia 1952, cuando entró en funcionamiento el primer acelerador de partículas (figura 1.3) se observó que las partículas antes mencionadas, a las que entonces se les llamó *partículas extrañas* debido a la confusión reinante sobre su naturaleza, se producían copiosamente entre los productos resultantes de las colisiones. Otro aspecto extraño era su “larga” vida media (10^{-10} s, a comparar con los 10^{-23} s necesarios para producirlas). A. Pais y otros sugirieron que esa discrepancia sólo podía explicarse si el mecanismo de producción y desintegración eran completamente diferentes, como más tarde se comprobó. Se observó además que estas partículas extrañas se producían en pares. En 1953, Gell-Mann y Nishima introdujeron un nuevo número cuántico, la *extrañeza*, con la peculiaridad de que se conserva en las interacciones fuertes pero se viola en las débiles.

En la década de los 60 los físicos sabían producir innumerables partículas “elementales”, pero nadie sabía cómo extraer orden del aparente caos que se observaba en los datos.

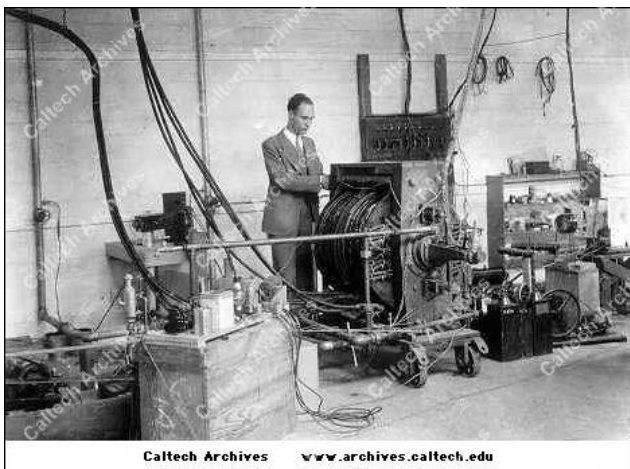


Figura 1.1: Anderson junto al instrumental empleado en sus experimentos.

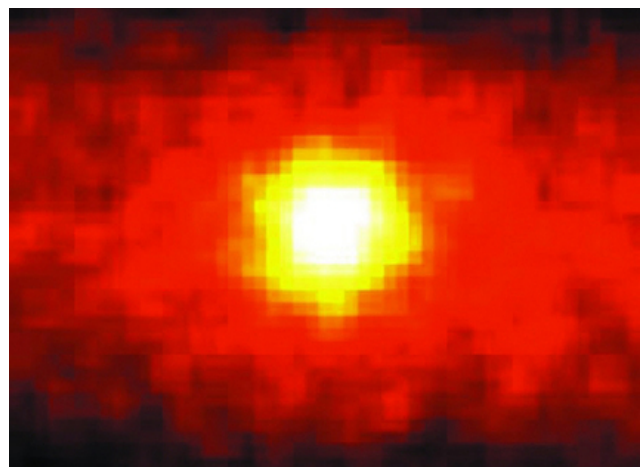


Figura 1.2: El Sol, visto en “el rango del neutrino”.

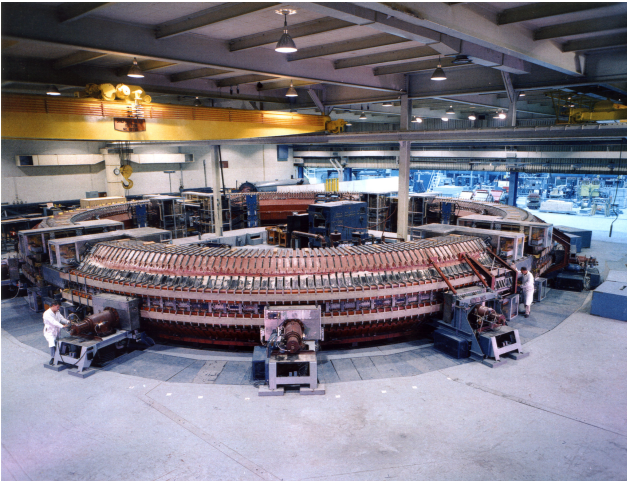


Figura 1.3: El primer acelerador de partículas de la historia, el Cosmotron de Brookhaven, capaz de acelerar protones hasta energías de unos pocos GeV (Para el LHC hablamos de unos pocos TeV).

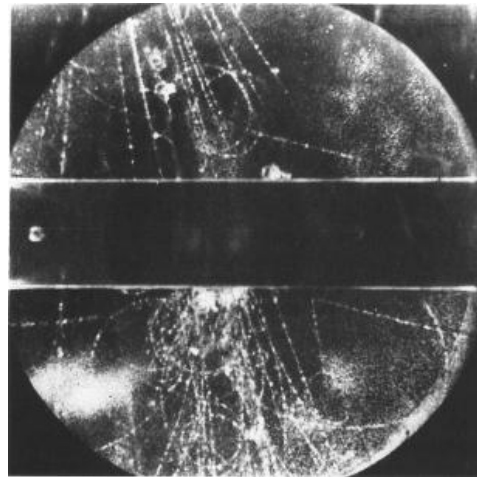


Figura 1.4: Descubrimiento del kaón neutral, en el vértice de la “V” invertida, correspondiente a las trazas de los piones cargados.

1.2.5. Los quarks

El primer paso que llevaría a Gell-Mann² al *modelo quark* y la explicación de la estructura interna de los hadrones consistió en organizar a los bariones y mesones en términos de su carga y su extrañeza, dándose cuenta de las curiosas figuras geométricas que aparecían al hacerlo. El descubrimiento de la partícula Ω^- a partir de la predicción obtenida de la figura 1.6 supuso la evidencia incontrovertible de que existía una estructura en los hadrones similar a la estructura de los elementos en la tabla periódica.

¿Cuál es esta estructura? La respuesta que dio Gell-Mann³ postulando que los hadrones están compuestos por quarks, dos ligeros, u (*up*) y d (*down*) a los que asignó extrañeza $S = 0$ y un quark más pesado, extraño s (*strange*), con $S = -1$. La carga eléctrica de d y s sería de $-1/3$ mientras que la de u sería $2/3$. Los antiquarks tienen valores opuestos. La combinación de estos quarks forman cada una de las partículas conocidas.

Inicialmente el *modelo quark* fue aceptado con enorme entusiasmo, pero pronto se plantearía un serio problema desde el punto de vista experimental, ya que tras casi 50 años de experimentos nadie a conseguido ver nunca un quark libre. Esta circunstancia, junto a que el modelo parecía violar el principio de exclusión de Pauli relegó a un segundo plano la idea hasta tal punto que cuando diversos experimentos realizados en SLAC y el CERN mostraron la evidencia de que el protón poseía una subestructura, los físicos denominaron a estos constituyentes *partones*, resistiéndose en un principio a asociarlos a los quarks de Gell-Mann.

Sin embargo hoy en día el modelo vuelve a gozar de buena salud. El comienzo de su resurrección fue en 1974, con el descubrimiento de la partícula J/ψ de manera mas o menos simultánea en Brookhaven por S. Ting (J) y en SLAC por B. Richter (ψ), mesón pesado eléctricamente neutro cuya largo tiempo de vida medio puede explicarse recurriendo de nuevo al modelo quark con un nuevo tipo de partícula elemental: el c (*charm*). Al descubrimiento del “charmonio” le siguió el de otras partículas con encanto.

En 1977 se descubrió la partícula Y , que resultó ser el estado ligado de un quinto quark b (*beauty*). Finalmente, en 1995 y tras una larga búsqueda, se encontró el último quark t (*top*) en Fermilab.

1.3. El modelo estándar

En su teoría de la desintegración beta, Fermi no consideró la mediación de ninguna partícula intermediaria de la fuerza débil, lo que provocaba que a altas energías el resultado divergiese. La predicción de las masas de los bosones W^+ , W^-

²Ne’eman propuso un esquema similar de manera independiente

³También en este caso, Zweig propuso un esquema similar de manera independiente

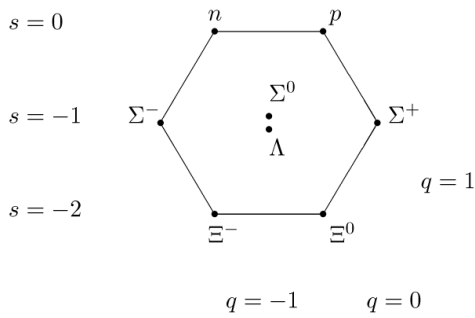


Figura 1.5: El octeto de bariones. Los ocho bariones más ligeros pueden organizarse en un hexágono con dos partículas en su centro.

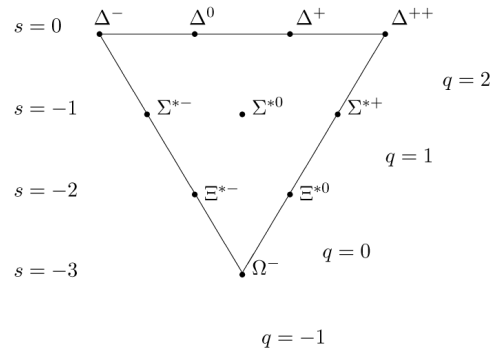


Figura 1.6: El decuplete de bariones. Diez bariones pesados se organizan en un triángulo.

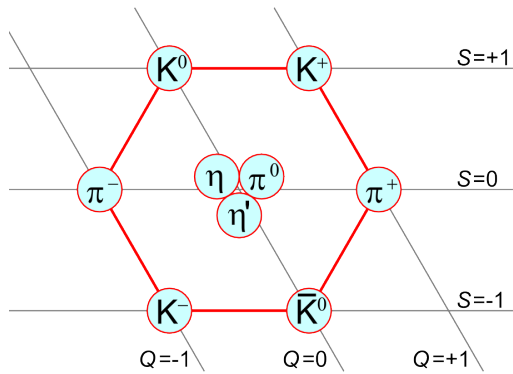


Figura 1.7: El “nonete” de mesones. Los nueve mesones más ligeros pueden disponerse en un hexágono con tres partículas en el centro.

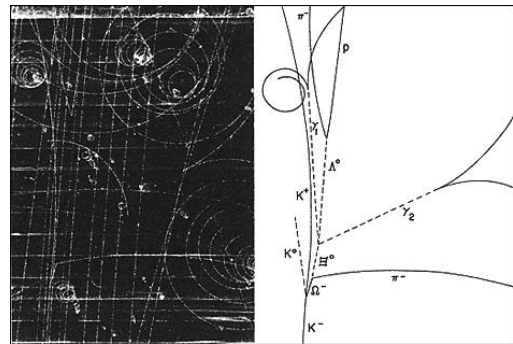


Figura 1.8: El descubrimiento de la partícula Ω^- en 1964.



Figura 1.9: Vista aérea del Fermilab. El anillo en primer plano es el Inyector Principal y el anillo posterior es el Tevatrón, acelerador donde se descubrió el quark *top*.



Figura 1.10: El SLAC, ubicado al sur de San Francisco, acelera electrones y positrones a lo largo de algo más de tres kilómetros hacia varios blancos, anillos y detectores ubicados en su finalización. Este acelerador hace colisionar electrones y positrones, estudiando las partículas resultantes de estas colisiones.

y Z^0 la proporcionó la teoría electrodébil de Glashow, Weimberg y Salam, constituyendo a partir de entonces uno de los pilares del denominado *modelo estándar*, el cual define nuestra visión más actual de las partículas elementales y de las interacciones que las rigen.

El modelo estándar presenta una descripción bastante elegante y simple de las interacciones: estas aparecen de manera natural como consecuencia de la simetría de los sistemas frente a un conjunto de transformaciones. Las propiedades de la interacción quedan completamente determinadas por el grupo de simetría y su intensidad viene dada por una o dos constantes.

También hay que tener presente que presenta una serie de limitaciones:

- No incluye la interacción gravitatoria.
- Continúa siendo de actualidad el problema de la masa de los neutrinos.
- El modelo contiene 17 parámetros arbitrarios, lo que hace que no alcance el estatus de teoría.

Modelo Estándar

| | | | | |
|----------------------|---|--------------------------|--|---|
| Elementos | { | Quarks | $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ (up)} - d \text{ (down)} \\ s \text{ (strange)} - c \text{ (charm)} \\ b \text{ (beauty)} - t \text{ (top)} \end{array} \right.$ | 1ª generación, con tres colores para cada partícula 2ª generación, con tres colores para cada partícula 3ª generación, con tres colores para cada partícula |
| | | Leptones | $\left\{ \begin{array}{l} e^- \text{ (electrón)} - \nu_e \text{ (neutrino electrónico)} \\ \mu \text{ (muón)} - \nu_\mu \text{ (neutrino muónico)} \\ \tau \text{ (tauón)} - \nu_\tau \text{ (neutrino tauónico)} \end{array} \right.$ | 1ª generación 2ª generación 3ª generación |
| | | Bosón de Higgs | (todavía no descubierto) | |
| Interacciones | { | Interacción electrodébil | $\{\gamma, W^+, W^-, Z^0\}$ | |
| | | Interacción de color | {octete de gluones} | |
| | | Interacción gravitatoria | | |

Marco teórico Teorías gauge locales

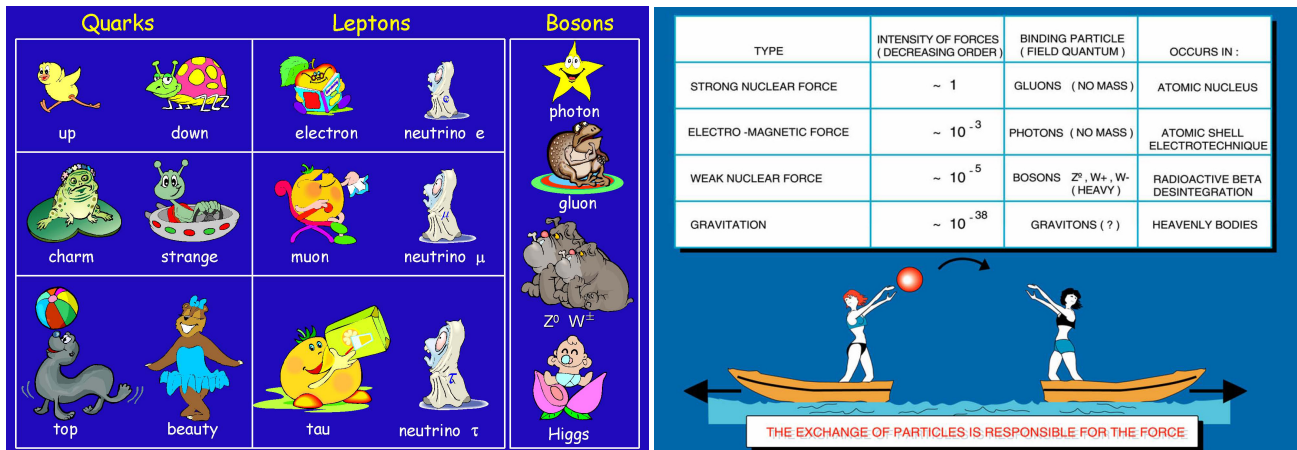


Figura 1.11: Representación algo informal de las partículas e interacciones del modelo estándar

Standard Model of FUNDAMENTAL PARTICLES AND INTERACTIONS

The Standard Model summarizes the current knowledge in Particle Physics. It is the quantum theory that includes the theory of strong interactions (quantum chromodynamics or QCD) and the unified theory of weak and electromagnetic interactions (electroweak). Gravity is included on this chart because it is one of the fundamental interactions even though not part of the "Standard Model."

FERMIONS

matter constituents
spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...

| Leptons | | Quarks | |
|---------------------------|-------------------------|-----------|---------------------------------|
| Flavor | Mass GeV/c ² | Flavor | Approx. Mass GeV/c ² |
| ν_e electron neutrino | <1x10 ⁻⁸ | u up | 0.003 |
| ν_μ muon neutrino | 0.000511 | d down | 0.006 |
| ν_τ tau neutrino | <0.0002 | c charm | 1.3 |
| τ tau | 1.7771 | s strange | 0.1 |
| | | t top | 175 |
| | | b bottom | 4.3 |

Spin is the intrinsic angular momentum of particles. Spin is given in units of \hbar , which is the quantum unit of angular momentum, where $\hbar = h/2\pi = 6.58 \times 10^{-35} \text{ GeV} \cdot \text{s} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Electric charges are given in units of the proton's charge. In SI units the electric charge of the proton is $1.60 \times 10^{-19} \text{ coulombs}$.

The **energy** unit of particle physics is the electronvolt (eV), the energy gained by one electron in crossing a potential difference of one volt. **Masses** are given in GeV/c² (remember $E = mc^2$), where $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-10} \text{ joule}$. The mass of the proton is $0.938 \text{ GeV}/c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

BOSONS

force carriers
spin = 0, 1, 2, ...

| Unified Electroweak | | Strong (color) | |
|---------------------|-------------------------|----------------|-------------------------|
| Name | Mass GeV/c ² | Name | Mass GeV/c ² |
| γ photon | 0 | g gluon | 0 |
| W^- | 80.4 | | |
| W^+ | 80.4 | | |
| Z ⁰ | 91.187 | | |

Color Charge
Each quark carries one of three types of "strong charge," also called "color charge." These charges have nothing to do with the colors of visible light. There are eight possible colors of color charge. The strong interactions between quarks are mediated by the exchange of gluons. These interactions are called color interactions and hence no color charge.

Quarks Confined in Mesons and Baryons
One cannot isolate quarks and gluons; they are confined in color-neutral particles called **hadrons**. This strong confinement (binding) results from multiple exchange of gluons among the color-charged constituents. As color-charged particles (quarks and gluons) move apart, the energy in the color-force field between them increases. This energy eventually is converted into additional quark-antiquark pairs. The quarks and gluons of these new quarks and gluons then combine with those of the particles set to emerge. Two types of hadrons have been observed in nature: **mesons qq̄** and **baryons qqq**.

Residual Strong Interaction
The residual binding of color-neutral protons and neutrons to form nuclei is due to residual strong interactions between their color-charged constituents. It is similar to the residual electrical interaction that binds electrically neutral atoms to form molecules. It can also be viewed as the exchange of mesons between the hadrons.

Structure within the Atom

Atom Size ~ 10⁻¹⁰ m
Nucleus Size ~ 10⁻¹⁴ m
Electron Size ~ 10⁻¹⁸ m
Quark Size ~ 10⁻¹⁹ m
Neutron and Proton Size ~ 10⁻¹⁵ m

If the protons and neutrons in this nucleus were 10 cm across, then the quarks and electrons would be less than 0.1 mm in size and the entire atom would be about 10 km across.

PROPERTIES OF THE INTERACTIONS

| Property | Interaction | | Weak (Electroweak) | | Strong | |
|---|-----------------------------|----------------------|--------------------|----------------------|----------------|--|
| | Gravitational | Electromagnetic | Flavor | Electric Charge | Fundamental | Residual |
| Acts on: | Mass - Energy | Electrically charged | Quarks, Leptons | Electrically charged | Color Charge | See Particular Strong Interaction Note |
| Particles experiencing: | All | γ | W^+, W^-, Z^0 | γ | Quarks, Gluons | Hadrons |
| Particles mediating: | Graviton (not yet observed) | | | | Gluons | Mesons |
| Strength relative to electromag for two u quarks at: | 10 ⁻⁴¹ | 10 ⁻⁴ | 0.8 | 1 | 25 | Not applicable to quarks |
| for two protons in nucleus | 10 ⁻³⁶ | 10 ⁻⁷ | 10 ⁻⁴ | 1 | 60 | 20 |

$p \rightarrow e^+ + Z^0 \rightarrow q + \bar{q}$

An electron and positron (antilepton) colliding at high energy can produce various hadrons plus very high mass particles such as Z bosons. Events such as this are often called "jet" events. Jet refers to the structure of matter.

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

A neutron decays to a proton, an electron, and an anti-neutrino. This is mediated by a W boson. This is a neutron β decay.

Baryons qq̄q and Antibaryons q̄q̄q

Baryons are fermionic hadrons. There are about 120 types of baryons.

| Symbol | Name | Quark content | Mass GeV/c ² | Spin |
|------------|-------------|-------------------------|-------------------------|------|
| p | proton | uud | 0.938 | 1/2 |
| \bar{p} | anti-proton | $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$ | 0.938 | 1/2 |
| n | neutron | udd | 0.940 | 1/2 |
| Λ | lambda | uds | 1.116 | 1/2 |
| Ω^- | omega | sss | 1.672 | 3/2 |

Matter and Antimatter
For every particle type, there is a corresponding antiparticle type, denoted by a bar over the particle symbol (unless + or - charge is shown). Particle and antiparticle have identical mass and spin but opposite charges. Some electrically neutral bosons (e.g., Z^0 , γ , and η_c , η_s , $c\bar{c}$, $b\bar{b}$) are their own antiparticles.

Figures
These diagrams are an artist's conception of physical processes. They are not exact and have no meaningful scale. Green shaded areas represent the cloud of gluons or the gluon field, and red lines the quark paths.

Mesons qq̄

Mesons are bosonic hadrons. There are about 140 types of mesons.

| Symbol | Name | Quark content | Electric charge | Mass GeV/c ² | Spin |
|----------|--------|---------------|-----------------|-------------------------|------|
| π^+ | pion | $u\bar{d}$ | +1 | 0.140 | 0 |
| K^- | kaon | $s\bar{u}$ | -1 | 0.494 | 0 |
| ρ^+ | rho | $u\bar{d}$ | +1 | 0.770 | 1 |
| B^0 | B-zero | $d\bar{b}$ | 0 | 5.279 | 0 |
| η_c | eta-c | $c\bar{c}$ | 0 | 2.980 | 0 |

The Particle Adventure
Visit the award-winning web feature *The Particle Adventure* at <http://ParticleAdventures.org>

This chart has been made possible by the generous support of:
U.S. Department of Energy
Lawrence Berkeley National Laboratory
Stanford Linear Accelerator Center
BURLE INDUSTRIES, INC.

©2000 Contemporary Physics Education Project, CPEP is a non-profit organization of teachers, physicists, and educators. Send mail to: CPEP, MS 50-308, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA, 94720. For information on charts, text materials, hands-on classroom activities, and workshops, see: <http://CPPEPweb.org>

Figura 1.12: Póster donde se expone de manera esquemática las principales características del modelo estándar

Capítulo 2

Propiedades de las Partículas Elementales

2.1. Generalidades

Actualmente se piensa que el universo está compuesto por dos familias de partículas elementales:

- *Bosones*, partículas con espín entero portadoras de las interacciones fundamentales, es decir, son los cuantos de la interacción.
- *Fermiones*, partículas con espín semientero sujetas al principio de exclusión de Pauli que componen la materia.

La fuerza entre dos partículas (fermiones) es el resultado del intercambio de partículas mediadoras (bosones).

Los fermiones se dividen a su vez en otras dos familias

- *Leptones*, caracterizados fundamentalmente por *no sentir* la interacción nuclear fuerte.
- *Quarks*, caracterizados fundamentalmente por *sentir* la interacción nuclear fuerte y porque hasta el momento jamás se han observado en un estado *libre*, sino formando *hadrones*.

Los hadrones, formados por quarks y gluones, se dividen, a su vez, en dos familias atendiendo a su espín total

- *Mesones*, con espín total entero (bosones).
- *Bariones*, con espín total semientero (fermiones).

2.2. Números cuánticos

2.2.1. Leptones

El estudio de las desintegraciones de los leptones μ y τ (el e^- es estable por conservación de la carga ya que es el leptón más ligero sin contar los neutrinos) ha llevado a introducir unos números cuánticos, llamados *números leptónicos*, que se conservan en las interacciones débiles, a saber:

$$\text{Número leptónico electrónico } (L_e) \begin{cases} 1 & \text{para el } e^- \text{ y } \nu_e \\ -1 & \text{para el } e^+ \text{ y } \bar{\nu}_e \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

$$\text{Número leptónico muónico } (L_\mu) \begin{cases} 1 & \text{para el } \mu^- \text{ y } \nu_\mu \\ -1 & \text{para el } \mu^+ \text{ y } \bar{\nu}_\mu \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

$$\text{Número leptónico tauónico } (L_\tau) \begin{cases} 1 & \text{para el } \tau^- \text{ y } \nu_\tau \\ -1 & \text{para el } \tau^+ \text{ y } \bar{\nu}_\tau \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

2.2.2. Hadrones

Para su descripción se usan los siguientes números cuánticos:

- **Número bariónico:** Se introduce para justificar el hecho experimental de que el protón es estable y que otras partículas (Λ , Σ , ...) decaen a él.

$$\text{Número bariónico } (B) \begin{cases} 1 & \text{para el protón y todas aquellas partículas que decaigan en él} \\ -1 & \text{para sus antipartículas} \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

Hasta ahora no hay ninguna evidencia de que se viole la conservación del número bariónico y la vida media del protón es superior a 10^{31} años (no se ha observado ninguna desintegración espontánea desde su estudio). No obstante las teorías GUT predicen una vida finita para el protón.

- **Extrañeza:** Se introduce para justificar el hecho experimental de que algunos hadrones (K , Λ , Σ , ...) tengan vidas relativamente largas, lo cual implica que no decaen a otros hadrones más ligeros (p , π) por la interacción fuerte o la electromagnética, sino por la débil. Por otro lado, los experimentos también indican que estas partículas se producen con secciones eficaces consistentes con la fuerza nuclear fuerte, lo cual fue una aparente paradoja ya que estas

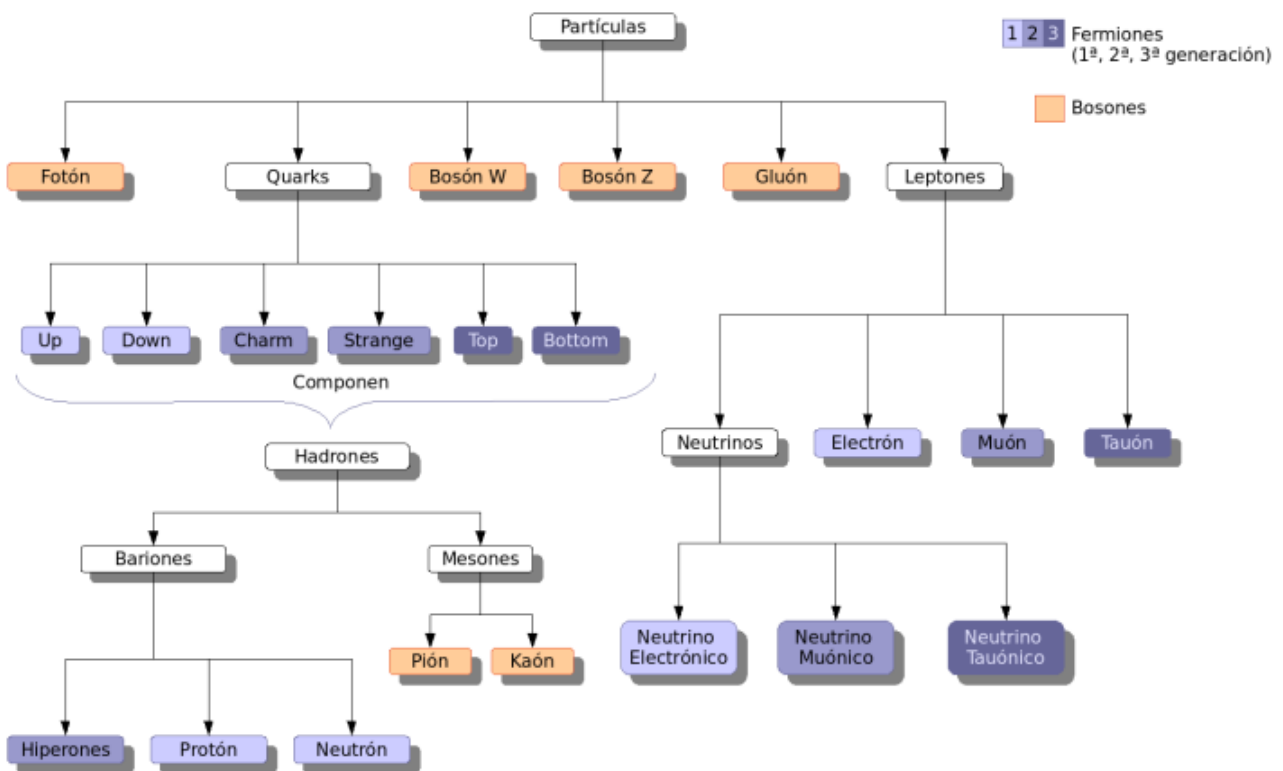
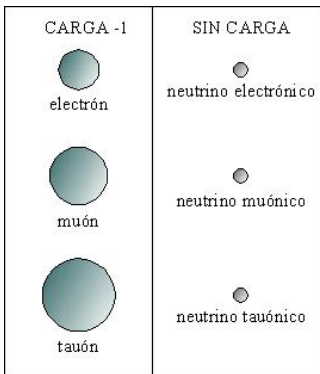
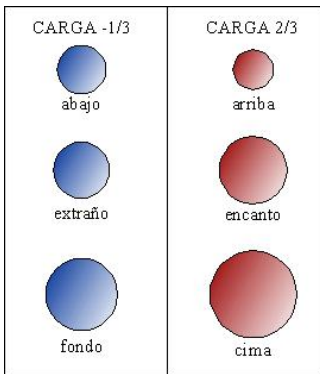


Figura 2.1: Clasificación de las partículas elementales.



| | e^- | ν_e | μ | ν_μ | τ | ν_τ |
|----------------------------------|-------|---------|-------|-----------|--------|------------|
| Q (carga eléctrica) | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| L_e (Nº leptónico electrónico) | +1 | +1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| L_μ (Nº leptónico muónico) | 0 | 0 | +1 | +1 | 0 | 0 |
| L_τ (Nº leptónico tauónico) | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | +1 |



| | u | d | s | c | b | t |
|-----------------------|-----|------|------|-----|------|-----|
| Q (carga eléctrica) | 2/3 | -1/3 | -1/3 | 2/3 | -1/3 | 2/3 |
| I (Isospín) | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I_z | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| S (extrañeza) | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| C (encanto) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| B ("bottomness") | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| T ("topness") | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Figura 2.2: Representación de los leptones y quarks respectivamente (el tamaño de las partículas está relacionado con su masa). A continuación se muestra una tabla con los números cuánticos de cada elemento.

partículas "extrañas" pueden sentir la fuerza fuerte cuando se producen, pero no después. La solución surgió de la observación de que las partículas extrañas aparecen por parejas.

$$\text{Extrañeza } (S) \begin{cases} 1 & \text{para los kaones } K^0 \text{ y } K^+ \\ -1 & \text{para los hadrones que produzcan las partículas anteriores } (\Lambda, \Sigma^+, \dots) \\ -2 & \text{para las cascadas } \Xi^0, \Xi^- \\ 0 & \text{para el resto} \end{cases}$$

S es conservado por la interacción fuerte y electromagnética y violado por la interacción débil

Las antipartículas tienen extrañeza opuesta a la de las partículas. Cuando un hadrón con extrañeza S decae, si existen otros hadrones más ligeros a los que pueda decaer conservando S (además de los otros números), el fenómeno será rápido al producirse por la interacción fuerte o electromagnética. En caso contrario, el decaimiento ocurrirá por la interacción débil, que puede cambiar la extrañeza en una unidad.

- **Isoespín:** Se introduce para dar cuenta del hecho empírico de la existencia de grupos de partículas con propiedades muy parecidas, excepto que tienen carga eléctrica que varían de uno en uno (p^+, n^0), (π^-, π^0, π^+), ...).

Para describir este hecho se definen tres operadores I_3, I_+ y I_- que cumplen las reglas de conmutación del momento angular. I_3 está relacionado con la carga eléctrica

$$I_3 = \frac{-Y}{2} + \frac{Q}{e} \tag{2.1}$$

donde Y es una constante para cada grupo llamada *hipercarga*. Gell-Mann y Nishijima encontraron que

$$Y = B + S \tag{2.2}$$

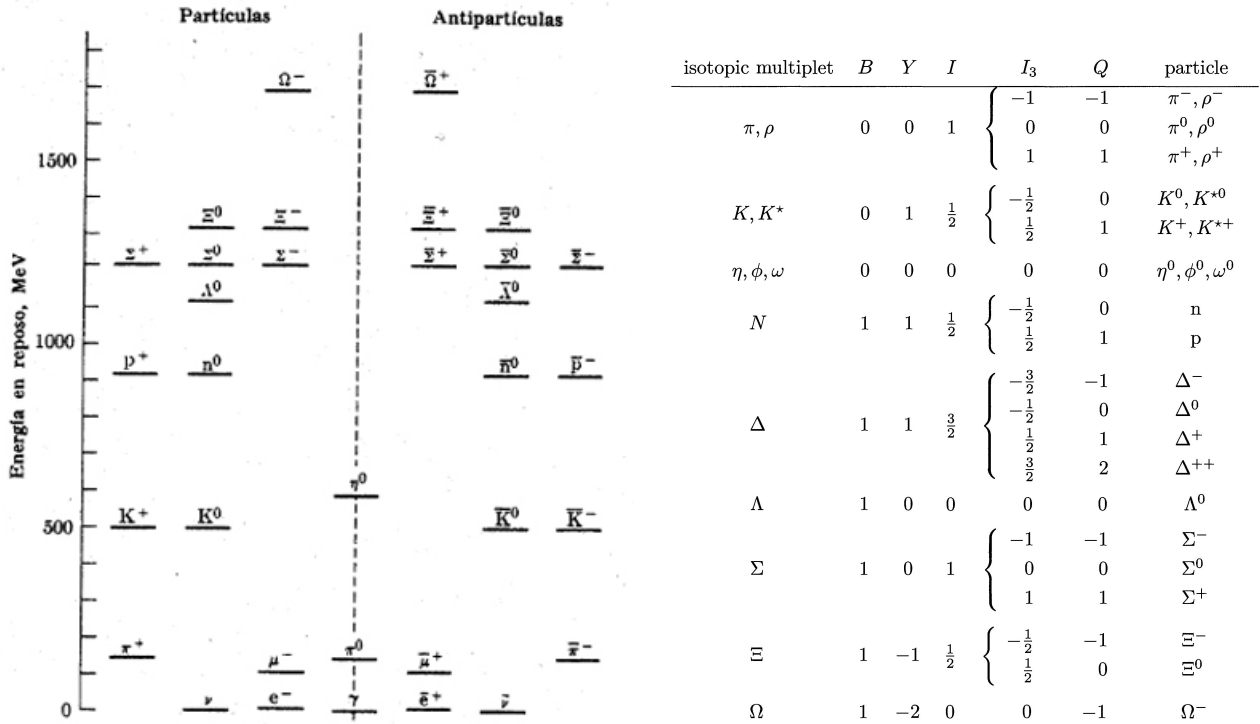


Figura 2.3: Espectro de energía y multipletes de algunas partículas. Los próximos capítulos servirán como introducción a la explicación de sus números cuánticos.

| Hadrones | L | S | J | P |
|-------------------------|---|-----|-----|----|
| Mesones pseudoescalares | 0 | 0 | 0 | -1 |
| Mesones vectoriales | 0 | 1 | 1 | -1 |
| Bariones octete | 0 | 1/2 | 1/2 | +1 |
| Bariones decuplete | 0 | 3/2 | 3/2 | +1 |

Cuadro 2.1: Resumen de las principales familias de hadrones.

Capítulo 3

Teoría de Grupos

Según el teorema de Noether, cada simetría de la naturaleza está asociada a una cantidad conservada y viceversa. Una operación de simetría es aquella que deja el sistema inalterado tras su aplicación, es decir, el estado tras la operación es indistinguible del anterior. Ejemplos pueden ser las rotaciones, traslaciones espacio-temporales...

El conjunto de operaciones de simetría forma un *grupo*.

3.1. Propiedades generales

Definición 3.1. Un *grupo* (G, \cdot) es un conjunto de elementos a, b, c, \dots con una ley de composición que cumple:

1. Interna: $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$
2. Asociativa: $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Elemento neutro: $\exists e \in G, \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$
4. Inverso: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Esta definición nos muestra que un grupo es una “tabla de multiplicación” donde si los elementos del grupo $g_i \in G$ son discretos (definición 3.6) puede representarse en la siguiente forma:

| | | | | |
|----------|----------|-----------|-----------|----------|
| | e | g_1 | g_2 | \dots |
| e | e | g_1 | g_2 | \dots |
| g_1 | g_1 | $g_1 g_1$ | $g_1 g_2$ | \dots |
| g_2 | g_2 | $g_2 g_1$ | $g_2 g_2$ | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

Definición 3.2. Se dice que un grupo es **grupo abeliano** cuando además cumple la propiedad conmutativa, es decir, que $\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$.

Definición 3.3. Se dice que S es **subgrupo** de G si el subconjunto $S \in G$ cumple que $\forall a, b \in S, a \cdot b \in S$

Definición 3.4. Si A y B son subgrupos de G y todos los elementos de G pueden escribirse de forma única como $g = a \cdot b, a \in A, b \in B$ y $a \cdot b = b \cdot a$, entonces G es **producto directo** de A y $B, G = A \otimes B$. Si un grupo es producto de otros dos, todas sus propiedades pueden obtenerse a partir de la de sus factores.

Definición 3.5. Dos grupos $G = a, b, \dots, \cdot$ y $G' = a', b', \dots, \times$ son **isomorfos** si existe una correspondencia biunívoca tal que si $a \rightarrow a', b \rightarrow b'$, entonces $a \cdot b \rightarrow a' \times b'$. Los grupos isomorfos tienen la misma estructura.

Definición 3.6. Un grupo es **discreto** si tiene un número discreto (finito o no) de elementos.

Definición 3.7. Un grupo es **continuo** si tiene un número continuo de elementos.

Definición 3.8. Los grupos continuos se definen en función de un número N de parámetros reales: es el **orden** del grupo.

Definición 3.9. Un grupo continuo es **compacto** si sus parámetros varían en un intervalo cerrado y acotado de valores.

3.2. Representación de grupos

Definición 3.10. Una **representación** de dimensión n de un grupo es un homomorfismo en el que a cada elemento g del grupo se le hace corresponder una matriz $n \times n$ $D(g)$, de forma que si $a \cdot b = c$, entonces $D(a) \cdot D(b) = D(c)$.

Propiedades:

$$D(e) = \mathbb{1} \tag{3.1}$$

$$D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2) \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.1. Consideremos el grupo definido por la siguiente tabla de composición

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| | e | a | b |
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

Resulta inmediato comprobar que

$$D(e) = 1 \quad D(a) = e^{2\pi i/3} \quad D(b) = e^{4\pi i/3} \tag{3.3}$$

es una representación, ya que por ejemplo

$$D(b) \cdot D(b) = e^{8\pi i/3} = e^{6\pi i/3} \cdot e^{2\pi i/3} = D(e) \cdot D(a) = D(a)$$

Definición 3.11. Se llama **representación regular** a aquella formada construyendo una base ortonormal con los elementos del grupo $|g_1\rangle, |g_2\rangle, \dots$ y definiendo

$$D(g_1) |g_2\rangle = |g_1 \cdot g_2\rangle \tag{3.4}$$

Los elementos de matriz vendrán dados entonces por

$$[D(g)]_{ij} = \langle g_i | D(g) |g_j\rangle \tag{3.5}$$

Ejemplo 3.2. La representación regular para nuestro ejemplo vendrá dada por las matrices

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

ya que los vectores de la base serán $|g_1\rangle = |e\rangle$, $|g_2\rangle = |a\rangle$ y $|g_3\rangle = |b\rangle$ y a partir de (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} [D(e)]_{1,1} &= \langle e | D(e) |e\rangle = \langle e | e \cdot e \rangle = \langle e | e \rangle = 1 \\ [D(e)]_{1,2} &= \langle e | D(e) |a\rangle = \langle e | e \cdot a \rangle = \langle e | a \rangle = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Definición 3.12. Dos representaciones $D(g)$ y $D'(g)$ son **equivalentes** si existe una matriz S tal que $\forall g, D'(g) = S \cdot D(g) \cdot S^{-1}$

Definición 3.13. Una representación **unitaria** es aquella a cuyos elementos de grupo les corresponde una matriz unitaria (preserva el producto escalar).

Teorema 3.1. Toda representación de un grupo finito o de un grupo compacto son equivalentes a representaciones unitarias.

Definición 3.14. Una representación **invariante** es aquella cuyas operaciones del grupo no saca a los elementos del subespacio donde está definida.

Definición 3.15. Una representación invariante es **irreducible** cuando no puede descomponerse en la suma directa de otros subespacios invariantes, los cuales pueden asociarse a tensores con simetría bien definida, es decir, o son simétricos, antisimétricos o tienen simetría mixta.

Teorema 3.2. Toda representación de un grupo finito o de un grupo compacto es **completamente reducible**, es decir, puede descomponerse como suma directa de subespacios irreducibles.

Ejemplo 3.3. Siguiendo con el ejemplo anterior, si consideramos

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$, entonces aplicando la definición 3.12 sobre (3.6) comprobamos que la representación es completamente reducible

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad D'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Definición 3.16. Sean A y B dos matrices $m \times m$ y $n \times n$ respectivamente. Se define el producto directo de dos representaciones como la matriz de dimensión $mn \times mn$

$$(A \otimes B)_{js,kt} \equiv A_{jk} B_{st} \quad (1 \leq j, k \leq m; 1 \leq s, t \leq n) \quad (3.9)$$

Teorema 3.3. Si $D^p \in G_1$ y $D^q \in G_2$ son dos representaciones unitarias irreducibles de dimensiones d_p y d_q respectivamente, entonces las matrices definidas por

$$\Gamma(T) = \Gamma^p(T) \otimes \Gamma^q \quad \forall T \in G \quad (3.10)$$

forma una representación unitaria completamente reducible de $G_1 \otimes G_2$ de dimensión $d_p d_q$.

3.2.1. El grupo de las permutaciones $S(n)$

Consideremos el conjunto $S(n)$ de permutaciones de cierto número n de objetos. Dichas permutaciones pueden representarse como producto de transposiciones.

Definición 3.17. Se denota como P_{ij} al operador que intercambia el objeto i por el objeto j

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (3.11)$$

$$P_{ij}^2 = 1 \quad (3.12)$$

Definición 3.18. Denotamos una permutación como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Definición 3.19. Una **permutación par** es el resultado de un número par de transposiciones y una **permutación impar** es el resultado de un número impar de transposiciones.

Ejemplo 3.4. $S(4)$

$$S_4 = \boxed{a} \boxed{b} \boxed{c} \boxed{d} \quad (3.14)$$

Consideremos las transposiciones

$$P_{12} \cdot S_4 = \boxed{b \ a \ c \ d} \tag{3.15}$$

$$P_{13} \cdot S_4 = \boxed{c \ b \ a \ d} \tag{3.16}$$

$$P_{14} \cdot S_4 = \boxed{d \ b \ c \ a} \tag{3.17}$$

$$\tag{3.18}$$

La composición es

$$P_{11} \cdot P_{12} \cdot P_{13} \cdot P_{14} \cdot S_4 = \boxed{d \ a \ c \ b} \tag{3.19}$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

3.2.2. Diagramas de Young

Hemos visto que el espacio generado por el producto directo de otros subespacios es completamente reducible, luego nuestro interés se centra inevitablemente en hallar dichos estados. Estos se construyen simetrizando y antisimetrizando la composición.

Consideremos primero el estado de dos partículas idénticas, $\psi(1, 2)$. Este estado no tiene simetría bien definida, pero es posible construir un estado simétrico y otro antisimétrico a partir de él de la siguiente manera

$$\psi_s = \psi(1, 2) + \psi(2, 1) \tag{3.21}$$

$$\psi_a = \psi(1, 2) - \psi(2, 1) \tag{3.22}$$

con

$$\psi(2, 1) = P_{12} \cdot \psi(1, 2) \tag{3.23}$$

$$P_{12} \cdot \psi_s = \psi_s \tag{3.24}$$

$$P_{12} \cdot \psi_a = -\psi_a \tag{3.25}$$

Ambos estados pueden representarse gráficamente como

$$\psi_s = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \psi_a = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \tag{3.26}$$

Definición 3.20. La representación (3.26) recibe el nombre de **diagrama de Young**.

Para tres partículas

$$\psi_s = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \psi_a = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \psi_m = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \tag{3.27}$$

Explícitamente

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (\mathbb{1} + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{12} \cdot P_{13} + P_{13} \cdot P_{12}) \tag{3.28}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = (\mathbb{1} - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{12} \cdot P_{13} + P_{13} \cdot P_{12}) \tag{3.29}$$

El diagrama mixto ψ_m representa todos los estados simétricos respecto al intercambio de dos partículas pero antisimétrico con respecto a la tercera. Para representarlos hemos de introducir el operador simetrizador S_{ij} y el antisimetrizador A_{ij} tales que $\forall P_{ij}$

$$S_{ij} = \mathbb{1} + P_{ij} \qquad A_{ij} = \mathbb{1} - P_{ij} \qquad (3.30)$$

$$S_{ij}^2 = 2 \cdot S_{ij} \qquad A_{ij}^2 = 2 \cdot A_{ij} \qquad (3.31)$$

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2}(S_{ij} + A_{ij}) \qquad P_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} - A_{ij}) \qquad (3.32)$$

Definiendo ahora

$$S_{ijk} = S_{ij} \cdot S_{ik} \cdot S_{jk} \cdot \psi(1, 2, 3) \qquad (3.33)$$

$$A_{ijk} = A_{ij} \cdot A_{ik} \cdot A_{jk} \cdot \psi(1, 2, 3) \qquad (3.34)$$

tenemos que

$$\psi_m = S_{ijk} A_{ijk} \psi(1, 2, 3) \qquad (3.35)$$

La forma estándar de un diagrama de Young se define por la manera de enumerar sus cajas, obedeciendo las siguientes reglas:

1. Los números de izquierda a derecha en una fila no decrecen
2. Los números de arriba a bajo en una columna siempre se incrementan

Ejemplo 3.5. *Dos partículas en $SU(2)$*

$$\boxed{1} = |\uparrow\rangle \qquad (3.36)$$

$$\boxed{2} = |\downarrow\rangle \qquad (3.37)$$

Las configuraciones posibles son:

$$\boxed{\quad\quad} = \boxed{1\ 1} + \boxed{1\ 2} + \boxed{2\ 2} \qquad (3.38)$$

donde no se considera la combinación $\boxed{2\ 1}$ para respetar la condición (1) y

$$\boxed{1\ 1} = |\uparrow\uparrow\rangle \qquad (3.39)$$

$$\boxed{2\ 2} = |\downarrow\downarrow\rangle \qquad (3.40)$$

$$\boxed{1\ 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \qquad (3.41)$$

y

$$\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array} \qquad (3.42)$$

donde no se consideran de la misma manera los estados $\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \boxed{1} \\ \hline \end{array}$ y $\begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array}$ para no violar (2) y

$$\begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \qquad (3.43)$$

luego tenemos que

$$\boxed{\quad} \otimes \boxed{\quad} = \boxed{\quad\quad} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \boxed{\quad} \\ \hline \end{array} \qquad (3.44)$$

o

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \qquad (3.45)$$

es decir, la composición de dos partículas en $SU(2)$ (dos estados) es la suma directa de un subespacio de tres estados (triplete) y otro de uno (singlete).

3.3. Grupos de Lie

Definición 3.21. Los **grupos de Lie** son grupos continuos caracterizados por un conjunto de r de parámetros reales $\vec{a} = (a_1 \dots a_r)$, varían de forma continua en un intervalo dado y cumplen que $g(\vec{a}) \cdot g(\vec{b}) = g(\vec{c})$ donde \vec{c} puede expresarse como función analítica de \vec{a} y \vec{b} .

Definición 3.22. Consideremos los elementos del grupo correspondientes a parámetros próximos a cero $d\vec{a} = (da_1 \dots da_r)$. Los elementos $g(d\vec{a})$ estarán próximos a la unidad y por tanto pueden escribirse como

$$g(d\vec{a}) = e + i \sum_{\mu=1}^r da_{\mu} X_{\mu} \tag{3.46}$$

Los elementos X_{μ} corresponden en un sentido amplio a las “derivadas” de los elementos del grupo con respecto a los parámetros: son los **generadores del grupo**.

Teorema 3.4. El conmutador de dos generadores es una combinación lineal de los generadores.

$$[X_{\mu}, X_{\nu}] = X_{\mu} X_{\nu} - X_{\nu} X_{\mu} = \sum_{\rho} C_{\rho}^{\mu\nu} X_{\rho} \tag{3.47}$$

donde las $C_{\rho}^{\mu\nu}$ son las **constantes de estructura**, números complejos en general.

Definición 3.23. El **rango** del grupo viene dado por el conjunto de generadores hermíticos que conmutan entre sí.

Definición 3.24. El espacio vectorial de dimensión r obtenido de todas las combinaciones lineales de los generadores del grupo, junto a la operación interna definida por el conmutador, forma una estructura denominada **álgebra de Lie**. A cada grupo de Lie le corresponde un álgebra de Lie.

Teorema 3.5. Si un álgebra de Lie de dimensión r de un grupo de orden r contiene una subálgebra de dimensión s , con $s < r$, entonces con s generadores independientes contenidos en el subálgebra puede generarse un subgrupo de orden s a partir del grupo original.

Definición 3.25. Las constantes de estructura forman en sí mismas una representación del álgebra llamada **representación adjunta**, cuyas matrices vienen dadas por

$$[T_{\rho}]_{\mu\nu} = -C_{\rho}^{\mu\nu} \tag{3.48}$$

con producto escalar

$$Tr(T_a \cdot T_b) = \lambda \delta_{ij} \tag{3.49}$$

Definición 3.26. Se llaman **álgebras de Lie compactas** a aquellas con $\lambda > 0$. En esta base, las constantes de estructura son completamente antisimétricas.

$$C_{\rho}^{\mu\nu} = i f_{\mu\nu\rho} \tag{3.50}$$

Definición 3.27. Aquellas álgebras que no tienen subálgebras invariantes no triviales se llaman **álgebras (semi)simples**, las cuales generan **grupos simples (abelianos)**.

Teorema 3.6. La representación adjunta de un álgebra de Lie (semi)simple que satisfaga (3.49) es irreducible.

3.3.1. Subálgebra de Cartan. Pesos

Definición 3.28. La subálgebra de Cartan está definida a partir de un álgebra semisimple y compleja y tiene las siguientes características

- Es la máxima subálgebra abeliana, es decir, el mayor conjunto posible de generadores hermíticos que conmutan
- Su representación adjunta es completamente reducible

En esencia las subálgebras de Cartan son únicas ya que escojamos la que escojamos dará los mismos resultados.

Definición 3.29. En cierta representación irreducible particular, D , existirán una serie de generadores hermíticos H_i , $i = 1, \dots, m$ llamados **generadores de Cartan** que cumplen

$$H_i = H_i^\dagger \quad H_i = \sum_a C_{ia} X_a \quad [H_i, H_j] = 0 \quad (3.51)$$

Estos operadores pueden diagonalizarse simultáneamente en cierta base tal que satisface

$$Tr(H_i H_j) = k_D \delta_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, m \quad (3.52)$$

Definición 3.30. El número m de generadores de Cartan independientes se corresponde con el **rango** del grupo.

Definición 3.31. Una vez diagonalizados los generadores los estados de D podrán escribirse como $|\mu, D\rangle$ donde

$$H_i |\mu, D\rangle = \mu_i |\mu, D\rangle \quad (3.53)$$

Los valores propios μ_i son llamados **pesos**, y el vector $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ **vector de pesos**.

3.3.2. Representación adjunta. Raíces

Definición 3.32. Denotaremos cierto estado en la representación adjunta correspondiente a cierto generador X_a como $|X_a\rangle$ y definimos convenientemente el producto escalar como

$$\langle X_a | X_b \rangle = \lambda^{-1} Tr(X_a^\dagger X_b) \quad (3.54)$$

La acción de un generador sobre un estado es por tanto

$$X_a |X_b\rangle = |[X_a, X_b]\rangle \quad (3.55)$$

Teorema 3.7. En la representación adjunta los generadores de Cartan tienen peso 0 ya que

$$H_i |H_j\rangle = |[H_i, H_j]\rangle = 0 \quad (3.56)$$

y el resto de los estados

$$H_i |E_\alpha\rangle = \alpha_i |E_\alpha\rangle \quad (3.57)$$

que significa que

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (3.58)$$

Definición 3.33. A los pesos α_i de la representación adjunta se llaman **raíces**, y al vector $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ **vector raíz**.

Los operadores E_α no son hermíticos, puesto que

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger \quad (3.59)$$

luego podemos tomar

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \quad (3.60)$$

y normalizando nos damos cuenta de que

$$\left. \begin{aligned} \langle E_\alpha | E_\beta \rangle &= \lambda^{-1} \cdot Tr(E_\alpha^\dagger E_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \\ \langle H_i | E_j \rangle &= k_D^{-1} \cdot Tr(H_i^\dagger E_j) = \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad \lambda = k_D \quad (3.61)$$

Definición 3.34. Los operadores $E_{\pm\alpha}$ son llamados **operadores escalera** para los pesos ya que

$$H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = [H_i, E_{\pm\alpha}] |\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} H_i |\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha) E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle \quad (3.62)$$

Teorema 3.8. De la definición anterior y dado que los generadores de Cartan tienen peso nulo

$$E_{\alpha} |E_{-\alpha}\rangle = |[E_{\alpha}, E_{-\alpha}]\rangle = |\beta_i \cdot H_i\rangle = |\vec{\beta} \cdot \vec{H}\rangle \quad (3.63)$$

se llega a

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \vec{\alpha} \cdot \vec{H} \quad (3.64)$$

Teorema 3.9. Si $\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2$ y $\vec{\alpha}^1 + \vec{\alpha}^2$ son raíces, entonces

$$[E_{\alpha^1}, E_{\alpha^2}] = N_{\alpha^1, \alpha^2} E_{\alpha^1 + \alpha^2} \quad (3.65)$$

Teorema 3.10. Para cada par de vectores raíz $E_{\pm\alpha}$, existe una subálgebra $SU(2)$ con $j = 1$ y generadores

$$E^{\pm} \equiv |\vec{\alpha}|^{-1} E_{\pm\alpha} \quad (3.66)$$

$$E_3 \equiv |\vec{\alpha}|^{-2} \vec{\alpha} \cdot \vec{H} \quad (3.67)$$

Teorema 3.11. De manera más general, para cada peso $\vec{\mu}$ de la representación D , el valor E_3 viene dado por

$$E_3 |\mu, D\rangle = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}}{\alpha^2} |\mu, D\rangle \quad (3.68)$$

El estado general $|\mu, D\rangle$ puede escribirse siempre como combinación lineal de estados que se transforman de acuerdo a (3.67).

Teorema 3.12. Supongamos que el estado máximo que aparece en dicha combinación lineal es j . Entonces existe un entero no negativo p tal que

$$(E^+)^p |\mu, D\rangle \neq 0 \quad (3.69)$$

con peso $\mu + p\alpha$ el cual es el mayor estado de la representación $SU(2)$ definida por j , por lo que

$$(E^+)^{p+1} |\mu, D\rangle = 0 \quad (3.70)$$

El valor E_3 del estado (3.69) vendrá dado por

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} + p\vec{\alpha})}{\alpha^2} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}}{\alpha^2} + p = j \quad (3.71)$$

Teorema 3.13. De la misma manera, existe un entero no negativo q tal que

$$(E^-)^q |\mu, D\rangle \neq 0 \quad (3.72)$$

con peso $\mu - q\alpha$ el cual es el menor estado de la representación $SU(2)$ definida por j , por lo que

$$(E^-)^{q+1} |\mu, D\rangle = 0 \quad (3.73)$$

El valor E_3 del estado (3.72) vendrá dado por

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} - q\vec{\alpha})}{\alpha^2} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}}{\alpha^2} - q = -j \quad (3.74)$$

Corolario 3.14. Combinando (3.74) y (3.71) llegamos a la “fórmula maestra”

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \quad (3.75)$$

Corolario 3.15. Aplicando (3.75) sobre dos pares de raíces diferentes α y β tenemos que

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) = \frac{m}{2} \quad (3.76)$$

$$\frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p'-q') = \frac{m'}{2} \quad (3.77)$$

luego el ángulo entre dos pares cualesquiera de raíces es

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p-q)(p'-q')}{4} \quad (3.78)$$

pudiendo darse entonces sólo las siguientes posibilidades

| $(p-q)(p'-q')$ | $\theta_{\alpha\beta}$ |
|----------------|--------------------------|
| 0 | 90° |
| 1 | 60° ó 120° |
| 2 | 45° ó 135° |
| 3 | 30° ó 150° |

3.3.3. Raíces simples

Definición 3.35. Se dice que una raíz es **positiva** si su primera componente no nula es positiva.

Definición 3.36. Se dice que una raíz es **negativa** si su primera componente no nula es negativa.

Definición 3.37. Se llaman **raíces simples** a aquellas raíces positivas que no pueden ser escritas como suma de otras raíces positivas

Teorema 3.16. Si $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son dos raíces simples, entonces $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ no es una raíz y $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

Teorema 3.17. Si α y β son dos raíces simples, entonces

$$E_{-\alpha} |E_\beta\rangle = E_{-\beta} |E_\alpha\rangle = 0 \quad (3.79)$$

Teorema 3.18. El ángulo entre cualquier par de raíces satisface

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \quad (3.80)$$

Teorema 3.19. Cualquier raíz positiva puede escribirse como combinación lineal de raíces simples con coeficientes no negativos

$$\vec{\phi}_k = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \vec{\alpha}, \quad k = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \quad (3.81)$$

Teorema 3.20. Existen m raíces simples, donde m es el rango del grupo. A partir de ellas puede construirse el álgebra completa.

3.3.4. La matriz de Cartan

Definición 3.38. Dado que

$$2E_3 |\vec{\mu}\rangle = \frac{2\vec{H} \cdot \alpha^i}{(\alpha^i)^2} |\vec{\mu}\rangle = \frac{2\vec{\mu} \cdot \alpha^i}{(\alpha^i)^2} |\vec{\mu}\rangle = (p^i - q^i) |\vec{\mu}\rangle \quad (3.82)$$

y que cualquier raíz positiva ϕ puede escribirse como (3.81), la master fórmula (3.75) puede escribirse como

$$q^i - p^i = \frac{2\vec{\phi} \cdot \vec{\alpha}^i}{\alpha^i{}^2} = \sum_j k_j \frac{2\vec{\alpha}^j \cdot \vec{\alpha}^i}{(\alpha^i)^2} = \sum_j k_j A_{ji} \quad (3.83)$$

donde A es la **matriz de Cartan**.

$$A_{ji} \equiv \frac{2\vec{\alpha}^j \cdot \vec{\alpha}^i}{(\alpha^i)^2} \quad (3.84)$$

El elemento de matriz A_{ji} es el valor $p - q$ para la raíz simple $\vec{\alpha}^i$ actuando sobre el estado $|\vec{\alpha}^j\rangle$. Es inmediato ver que todos los elementos de la diagonal son 2, y los de fuera pueden ser 0, -1, -2, -3, relacionado con el ángulo entre raíces y sus longitudes relativas. Puede usarse para encontrar todas las raíces de la representación a partir de las raíces simples y, consecuentemente, todos los pesos de la representación.

3.3.5. Pesos fundamentales

Teorema 3.21. Todo peso v puede ser escrito en términos de sus raíces simples

$$v = \sum_{j=1}^m x_j \vec{\alpha}^j \quad (3.85)$$

Definición 3.39. Sean α^i , $i = 1, \dots, m$ raíces simples de cierta representación irreducible D . Se dice que $\vec{\mu}$ es el **peso máximo** de D si y sólo si $\vec{\mu} + \vec{\phi}$ no es peso $\forall \vec{\phi}$. Que $\vec{\mu} + \vec{\alpha}^i$ no sea raíz es condición suficiente.

Definición 3.40. La definición anterior implica que para $E_{\alpha^i} |\mu, D\rangle$, la “fórmula maestra” se reduce a

$$\frac{2\vec{\alpha}^i \cdot \vec{\mu}^j}{(\alpha^i)^2} = q^{ij} \quad (3.86)$$

Teorema 3.22. Si $\vec{\mu}$ es peso máximo

1. $\vec{\mu}$ es peso simple
2. Todo peso \vec{v} tiene la forma

$$\vec{v} = \vec{\mu} - \sum_{j=1}^m k_j \vec{\alpha}^j \quad (3.87)$$

Definición 3.41. Los vectores $\vec{\mu}^i$ se llaman **pesos fundamentales**, que pueden definirse utilizando la matriz de Cartan como

$$\vec{\mu}^j = \sum_k (A^{-1})_{kj} \vec{\alpha}_k \quad (3.88)$$

Las m representaciones D^i son las **representaciones fundamentales**.

Teorema 3.23. Cualquier peso máximo puede escribirse de manera unívoca como

$$\vec{\mu} = \sum_j q_j \vec{\mu}^j \quad (3.89)$$

donde los q_j son enteros no negativos llamados **coeficientes de Dynkin**, los cuales definen toda representación del grupo.

Teorema 3.24. La relación de los coeficientes de Dynkin con los diagramas de Young es la siguiente:

- q_1 es el número de casillas de la primera fila que sobrepasan a la segunda fila
- q_2 es el número de casillas de la segunda fila que sobrepasan a la tercera fila

- ...
- q_m es el número de casillas de la fila m que sobrepasan a la fila $m + 1$

Ejemplo 3.6. Consideremos

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = (1, 0) &
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (0, 1) &
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (1, 1) \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (0, 2) &
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (1, 1, 1) &
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (3, 0, 1)
 \end{array}$$

Teorema 3.25. Si \vec{v} es un peso y $\vec{\alpha}$ una raíz cualquiera, entonces la **reflexión de Weyl**

$$\vec{v} - \frac{2(\vec{\alpha}^i \cdot \vec{v})}{(\vec{\alpha}^i)^2} \cdot \vec{\alpha}^i \tag{3.90}$$

también es un peso. Ello es debido al teorema 3.10 y al hecho de que las representaciones $SU(2)$ son simétricas respecto al origen. A partir del peso fundamental podemos obtener los pesos restantes mediante reflexiones de Weyl. En función de la matriz de Cartan y (3.85), (3.90) puede reescribirse como

$$\vec{v} - 2 \sum_{j=1}^m x_j \frac{2(\vec{\alpha}^i \cdot \vec{\alpha}^j)}{(\vec{\alpha}^i)^2} \cdot \vec{\alpha}^i = \vec{v} - x_j A_{ji} \tag{3.91}$$

Teorema 3.26. La dimensión d de una representación irreducible con peso máximo μ viene dada por

$$d = \prod_{\alpha} \frac{(\mu + \delta) \cdot \vec{\alpha}}{\delta \cdot \vec{\alpha}}, \quad \delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \vec{\alpha} \tag{3.92}$$

donde el productorio y la suma se extiende a todas las raíces de la representación.

Definición 3.42. Uno de los convenios más utilizados para definir las representaciones consiste en usar los coeficientes de Dynkin y la dimensión de la representación

$$(q_1, \dots, q_m) = d \tag{3.93}$$

para las representaciones irreducibles que se transforman de manera simétrica y

$$(q_1, \dots, q_m) = \vec{d} \tag{3.94}$$

para las que lo hacen de manera antisimétrica.

3.4. El grupo $SU(n)$

Definición 3.43. $SU(n)$: Transformaciones unitarias especiales en n dimensiones. Isomorfo a las matrices unitarias $n \times n$ con $\det = 1$. $N = n^2 - 1$. Compacto. El rango del grupo es $m = n - 1$.

3.4.1. Generadores

Vamos a escoger una base que satisfaga

$$Tr(T_a \cdot T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \tag{3.95}$$

Los generadores no diagonales (operadores escalera) van a tener un único elemento no nulo, que será $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Los operadores diagonales (generadores de Cartan) se definen como H_a , $a = 1, \dots, m$, con m valores iguales a 1 en la diagonal y finalmente $-m$ para hacer nula la traza (en caso de haber más elementos serían 0's). Finalmente normalizamos

$$(H_a)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2a(a+1)}} \left(\sum_{k=1}^m \delta_{ik} \delta_{jk} - a \delta_{i,a+1} \delta_{j,a+1} \right) \tag{3.96}$$

3.4.2. Pesos y raíces

Los pesos de esta representación son los $\vec{v}^i = [(v^i)_1, \dots, (v^i)_m]$, con $i = 1, \dots, n$ y

$$(v^i)_j = \frac{1}{\sqrt{2j(j+1)}} \left(\sum_{k=1}^j \delta_{ik} - j\delta_{i,j+1} \right) \quad (3.97)$$

Los ángulos entre los distintos pesos son los mismos

$$|v^i|^2 = \frac{n-1}{2n} \quad \vec{v}^i \cdot \vec{v}^j = -\frac{1}{2n} \quad i \neq j \quad (3.98)$$

Las raíces positivas asociadas a los pesos son $\vec{\alpha}^{ij} = \vec{v}^i - \vec{v}^j$ para $i < j$. Las raíces simples son

$$\vec{\alpha}^i = \vec{v}^i - \vec{v}^{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.99)$$

donde i corre de manera ordenada a partir del peso máximo. Todas estas raíces tienen longitud 1

$$\vec{\alpha}^i \cdot \vec{\alpha}^{i+1} = -\frac{1}{2} \quad (\alpha^i)^2 = 1 \quad (3.100)$$

$$\vec{\alpha}^i \cdot \vec{\alpha}^j = 0 \quad j \neq i, j \neq i \pm 1 \quad (3.101)$$

Los pesos fundamentales $\vec{\mu}^j$ son

$$\vec{\mu}^j = \sum_{k=1}^j \vec{v}^k \quad (3.102)$$

Capítulo 4

Modelo SU(3) de sabor

4.1. Representaciones irreducibles de SU(3)

4.1.1. Generadores

Los generadores de $SU(3)$, T_a , se definen a partir de las matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1)$$

con

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (4.2)$$

Observemos que T_1 , T_2 y T_3 generan $SU(2)$ dentro de $SU(3)$.

El álgebra se genera a partir de las relaciones de conmutación

$$[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k \quad (4.3)$$

donde las f_{ijk} son las constantes de estructura, cuyos valores no nulos son

| ijk | 123 | 147 | 156 | 246 | 257 | 345 | 367 | 458 | 678 |
|-----------|-----|-----|------|-----|-----|-----|------|--------------|--------------|
| f_{ijk} | 1 | 1/2 | -1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | -1/2 | $\sqrt{3/2}$ | $\sqrt{3/2}$ |

4.1.2. Generadores de Cartan

Resulta inmediato comprobar que T_3 y T_8 son diagonales, y por tanto son los generadores buscados. No obstante también podemos obtener a partir de (3.96) que

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

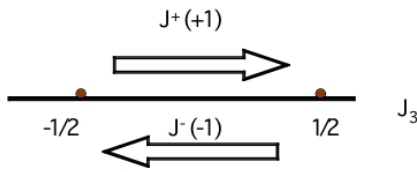


Figura 4.1: Esquema de la acción de los operadores J^+ y J^- en $SU(2)$.

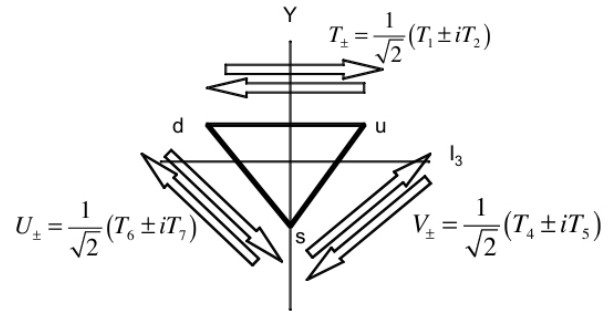


Figura 4.2: Esquema de la acción de los operadores escalamera en $SU(3)$. Cada pareja de operadores genera un subespacio $SU(2)$ análogo al representado en la figura 4.1.

4.1.3. Operadores Escalamera

Podemos definirlos a partir de las matrices de Gell-Mann de la siguiente manera

$$T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) \tag{4.5}$$

$$V^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) \tag{4.6}$$

$$U^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7) \tag{4.7}$$

mostrando con un poco de álgebra que esta definición es consistente con la definición 3.34. Sus relaciones de conmutación con H_1 y H_2 son

$$[H_1, T^\pm] = \pm T^\pm \qquad [H_2, T^\pm] = 0 \tag{4.8}$$

$$[H_1, U^\pm] = \mp \frac{1}{2} U^\pm \qquad [H_2, U^\pm] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} U^\pm \tag{4.9}$$

$$[H_1, V^\pm] = \pm \frac{1}{2} V^\pm \qquad [H_2, V^\pm] = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} V^\pm \tag{4.10}$$

a partir de las cuales es inmediato encontrar su acción, representada en la figura 4.2.

4.1.4. Raíces simples

A partir de (3.99) y recordando que el índice corre ordenadamente a partir del peso máximo, es inmediato llegar a

$$\vec{\alpha}^1 = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \qquad \vec{\alpha}^2 = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \tag{4.11}$$

4.1.5. Matriz de Cartan

Desarrollando (3.84) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

4.1.6. Pesos fundamentales

Aplicando (3.86), se plantean las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{2\vec{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = 1 & \quad \frac{2\vec{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = 0 \\ \frac{2\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = 0 & \quad \frac{2\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^2}{(\alpha^2)^2} = 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

cuya resolución nos dan los pesos fundamentales

$$\vec{\mu}^1 = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \quad (4.14)$$

$$\vec{\mu}^2 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \quad (4.15)$$

A partir de ellos es posible generar todas las representaciones de $SU(3)$ mediante las reflexiones de Weyl. El desarrollo de (3.90) para las dos raíces simples y teniendo presente (3.100) y que

$$\vec{v} = q_1 \vec{\mu}^1 + q_2 \vec{\mu}^2 = q_1 \left(\frac{2}{3} \vec{\alpha}^1 + \frac{1}{3} \vec{\alpha}^2 \right) + q_2 \left(\frac{1}{3} \vec{\alpha}^1 + \frac{2}{3} \vec{\alpha}^2 \right) = \vec{\mu} - i \vec{\alpha}^1 - j \vec{\alpha}^2 \quad (4.16)$$

nos da

$$\begin{aligned} \vec{\mu} - i \vec{\alpha}^1 - j \vec{\alpha}^2 - \frac{2\{\vec{\alpha}^1 \cdot [q_1(\frac{2}{3} \vec{\alpha}^1 + \frac{1}{3} \vec{\alpha}^2) + q_2(\frac{1}{3} \vec{\alpha}^1 + \frac{2}{3} \vec{\alpha}^2) - i \vec{\alpha}^1 - j \vec{\alpha}^2]\} \cdot \vec{\alpha}^1}{(\vec{\alpha}^1)^2} & \Rightarrow \\ \vec{\mu} + (i - j - q^1) \vec{\alpha}^1 - j \vec{\alpha}^2 & \end{aligned} \quad (4.17)$$

y

$$\begin{aligned} \vec{\mu} - i \vec{\alpha}^1 - j \vec{\alpha}^2 - \frac{2\{\vec{\alpha}^2 \cdot [q_1(\frac{2}{3} \vec{\alpha}^1 + \frac{1}{3} \vec{\alpha}^2) + q_2(\frac{1}{3} \vec{\alpha}^1 + \frac{2}{3} \vec{\alpha}^2) - i \vec{\alpha}^1 - j \vec{\alpha}^2]\} \cdot \vec{\alpha}^2}{(\vec{\alpha}^2)^2} & \Rightarrow \\ \vec{\mu} - i \vec{\alpha}^1 + (j - i - q^2) \vec{\alpha}^2 & \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde, para calcular las primeras reflexiones se hace correr $i = 1, \dots, q_1$ y $j = 1, \dots, q_2$, y luego se reflejan los pesos obtenidos hasta completar el set de d componentes.

Teorema 4.1. En $SU(3)$ se verifica en general que la representación conjugada (q_2, q_1) es equivalente a (q_1, q_2)

4.1.7. Dimensión de la representación (q_1, q_2)

$$d = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \left(\frac{q_1 + q_2 + 1}{2} \right) \quad (4.19)$$

4.2. SU(3) y los quarks u, d y s

4.2.1. Representación $(1, 0) = 3$

Se obtiene planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\vec{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 1 \quad \frac{2\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 0 \quad (4.20)$$

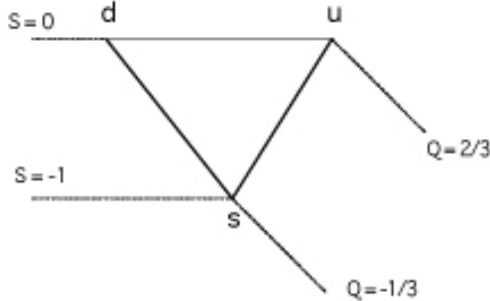


Figura 4.3: Los tres quarks de Gell-Mann forman un triángulo invertido cuando ordenamos en términos de su carga y extrañeza.

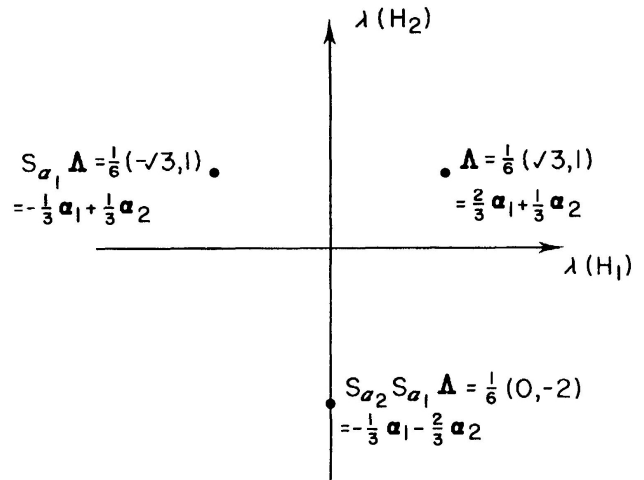


Figura 4.4: Pesos de la representación $(1,0)$ correspondiente a los tres quarks u, d y s .

cuyo peso máximo viene dado por $\vec{\mu} = \vec{\mu}^1$.

Recordando que

$$E_{\alpha} |\vec{\mu} + p\vec{\alpha}\rangle = 0 \quad E_{-\alpha} |\vec{\mu} - q\vec{\alpha}\rangle = 0 \tag{4.21}$$

completamos el conjunto básico de pesos, ya que es inmediato ver que $(\vec{\mu}^1 - \vec{\alpha}^1)$ es también peso. Los restantes se obtienen a partir de las reflexiones de Weyl (3.90), obteniendo, en resumen, los pesos

$$\vec{\mu}^1 \tag{4.22}$$

$$\vec{\mu}^1 - \vec{\alpha}^1 \tag{4.23}$$

$$\vec{\mu}^1 - \vec{\alpha}^1 - \vec{\alpha}^2 \tag{4.24}$$

Por tanto, podemos asociar a cada peso un quark. Con

$$H_1 = I_z \tag{4.25}$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y \tag{4.26}$$

$$Y = B + S \tag{4.27}$$

$$Q = H_1 + \frac{Y}{2} \tag{4.28}$$

reproducimos la figura 4.3 e identificamos los estados con las partículas de la manera mostrada en el cuadro 4.1.

4.2.2. Representación $(0, 1) = \bar{3}$

Se obtiene esta vez planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\vec{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 0 \quad \frac{2\vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^2}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 1 \tag{4.29}$$

correspondiente al peso fundamental $\vec{\mu}^2$.

$$\begin{aligned}
 |u\rangle &= \vec{\mu}^1 = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \\
 |s\rangle &= \vec{\mu}^1 - \vec{\alpha}^1 = \left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\
 |d\rangle &= \vec{\mu}^1 - \vec{\alpha}^1 - \vec{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Cuadro 4.1: Identificación de los quarks de Gell-Mann con la representación (1, 0) = 3.

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}\rangle &= \vec{\mu}^2 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle \\
 |\bar{s}\rangle &= \vec{\mu}^2 - \vec{\alpha}^2 = \left| 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\
 |\bar{d}\rangle &= \vec{\mu}^2 - \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}^1 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Cuadro 4.2: Identificación de los antiquarks de Gell-Mann con la representación (0, 1) = $\bar{3}$.

De manera análoga completamos el conjunto básico de pesos y realizamos las reflexiones de Weyl obteniendo

$$\vec{\mu}^2 \tag{4.30}$$

$$\vec{\mu}^2 - \vec{\alpha}^2 \tag{4.31}$$

$$\vec{\mu}^2 - \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}^1 \tag{4.32}$$

Por tanto, podemos asociar a cada peso un antiquark, reproduciendo análogamente la figura 4.5 e identificando los estados tal y como se muestra en el cuadro 4.2.

4.3. Mesones

Definición 4.1. Los mesones son aquellos hadrones constituidos por un quark y un antiquark. Dado que ambas partículas son distinguibles la definición es sensible al orden de las partículas y no están sujetas al principio de exclusión de Pauli.

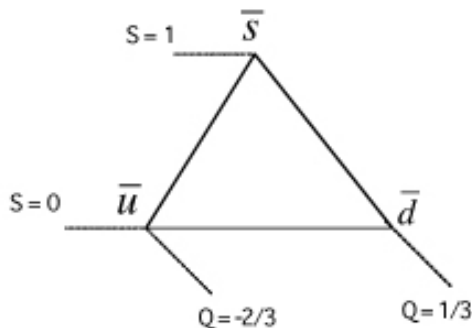


Figura 4.5: Los tres antiquarks de Gell-Mann forman un triángulo cuando ordenamos en términos de su carga y extrañeza.

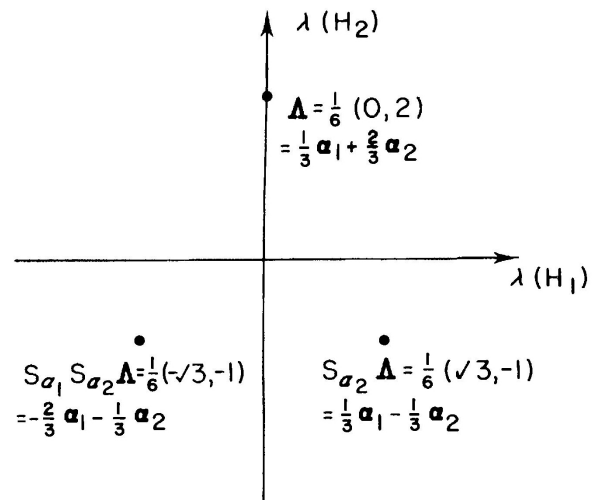


Figura 4.6: Pesos de la representación (0, 1) correspondiente a los tres quarks \bar{u} , \bar{d} y \bar{s} .

4.3.1. Representaciones irreducibles en SU(3) para un quark y un antiquark

Hemos llegado a que la representación de los quarks es $(1, 0) = 3$ y para los antiquarks $(0, 1) = \bar{3}$. La composición de ambas partículas da como resultado.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (4.33)$$

con

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad (4.34)$$

y

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \end{array} \quad (4.35)$$

Por tanto la composición se reduce a la suma directa de un octete y un singlete

$$3 \otimes 3 = 8 \oplus 1 \quad (4.36)$$

4.3.2. Representación $(1, 1) = 8$

Se obtiene planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 1 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^1}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 1 \quad (4.37)$$

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \vec{\mu}^2}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 1 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \vec{\mu}^2}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 1 \quad (4.38)$$

correspondiente al peso máximo $\vec{\mu} = \vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2$.

El conjunto básico de pesos viene dado por

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 \quad (4.39)$$

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.40)$$

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.41)$$

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.42)$$

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.43)$$

donde notamos que el último y penúltimo peso forman un estado degenerado, provocado por el hecho de que existen dos vías para llegar a él. Las reflexiones de Weyl se obtienen reflejando en primera instancia usando directamente (4.17) y (4.18)

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.44)$$

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 \quad (4.45)$$

y en segunda reflejando nuevamente cualquiera de los dos nuevos pesos

$$\vec{\mu}^1 + \vec{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 \quad (4.46)$$

Por tanto, reproducimos la figura 1.7 (considerando también el singlete) e identificamos a cada peso del octeto con el mesón indicado en el cuadro 4.3.2. Puede comprobarse como se reproducen los números cuánticos de cada partícula usando las relaciones 4.28 y sumando los números cuánticos correspondiente a cada quark.

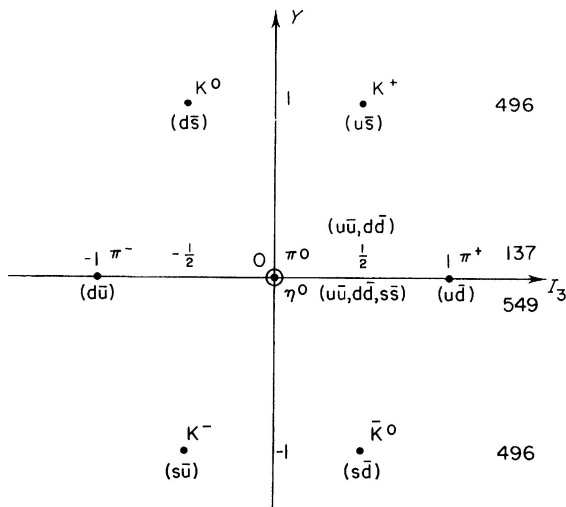


Figura 4.7: Correspondencia entre los mesones pseudoescalares ($J = 0$) y el octete $(1, 1) = 8$.

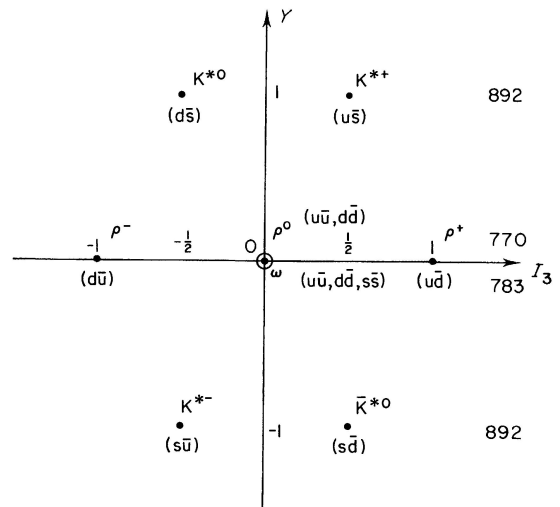


Figura 4.8: Correspondencia entre los mesones vectoriales ($J = 1$) y el octete $(1, 1) = 8$.

4.3.3. Representación $(0,0) = 1$

El singlete es

$$\eta' = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \tag{4.47}$$

4.4. Bariones

Definición 4.2. Los bariones son aquellos hadrones constituidos por tres quarks. Dado que las partículas son indistinguibles la definición no es sensible al orden de las partículas y están sujetas al principio de exclusión de Pauli.

4.4.1. Representaciones irreducibles en SU(3) para tres partículas

Operando sobre el producto directo de los estados de tres partículas se obtiene

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square \otimes (\square \otimes \square) \tag{4.48}$$

$$= \square \otimes \left(\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \square \end{array} \right) \tag{4.49}$$

$$= \square \otimes \square \oplus \square \otimes \begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \square \end{array} \tag{4.50}$$

Consideremos primero el término

$$\square \otimes \begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \square \end{array} \tag{4.51}$$

con

$$\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{4.52}$$

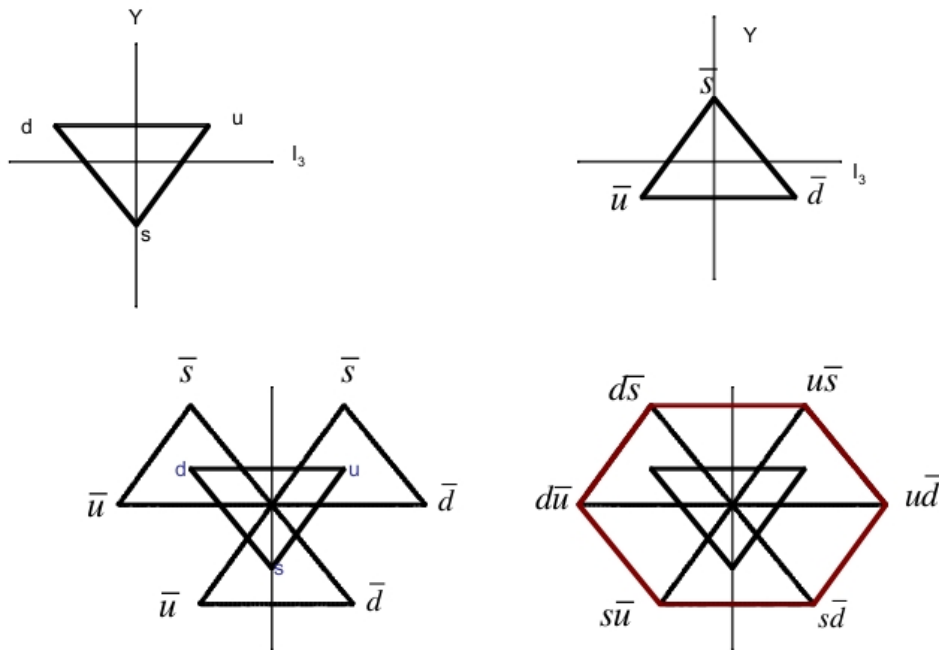


Figura 4.9: Construcción gráfica de los mesones a partir de las representaciones de los quarks y antiquarks.

$$\pi^+ = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 = |1, 0\rangle = |u\bar{d}\rangle$$

$$\bar{K}^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |s\bar{d}\rangle$$

$$K^+ = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |u\bar{s}\rangle$$

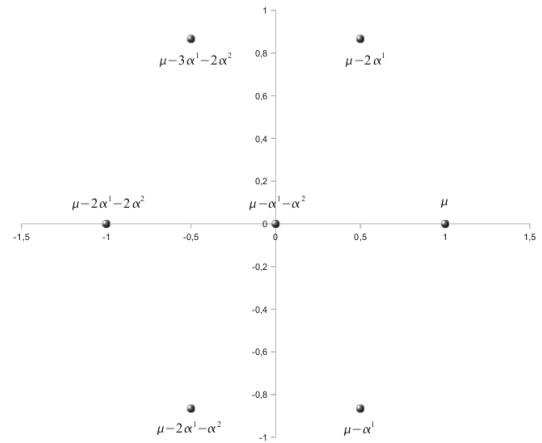
$$K^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |d\bar{s}\rangle$$

$$K^- = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |s\bar{u}\rangle$$

$$\pi^- = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = |-1, 0\rangle = |d\bar{u}\rangle$$

$$\pi^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \right\rangle$$

$$\eta = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \right\rangle$$



Cuadro 4.3: Identificación de los mesones pseudoescalares con la representación $(1, 1) = 8$. Los mesones vectoriales tienen los mismos números cuánticos y composición, luego pueden entenderse como estados excitados de los pseudoescalares.

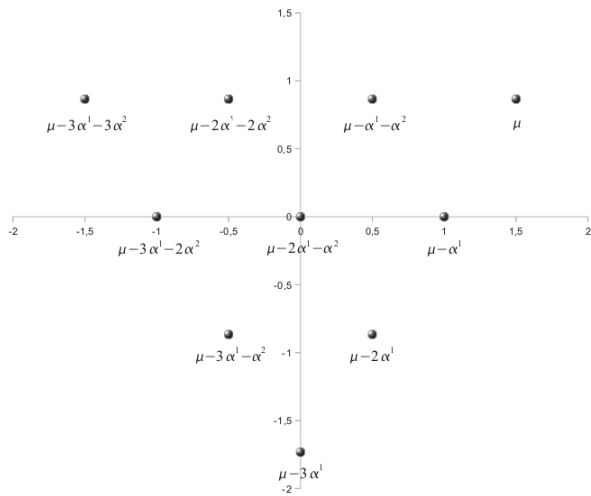


Figura 4.10: Representación gráfica de los pesos para (3,0) = 10.

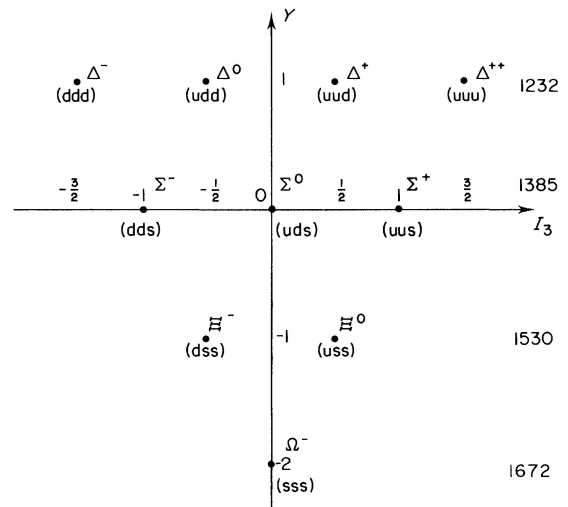


Figura 4.11: Correspondencia entre el decuplete de bariones y (3,0) = 10.

y

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad (4.53)$$

Ahora el restante

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad (4.54)$$

con

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (4.55)$$

Por tanto la descomposición viene dada por

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (3 \otimes 3) = 3 \otimes (\bar{3} \oplus 6) = (3 \otimes \bar{3}) \oplus (3 \otimes 6) = 8 \oplus 1 \oplus 10 \oplus 8 \quad (4.56)$$

4.4.2. Representación (3,0) = 10

Se obtiene planteando, a partir de (3.86)

$$\frac{2\bar{\alpha}^1 \cdot \bar{\mu}^1}{(\alpha^1)^2} = q^1 = 3 \quad \frac{2\bar{\alpha}^2 \cdot \bar{\mu}^1}{(\alpha^2)^2} = q^2 = 0 \quad (4.57)$$

correspondiente al peso máximo $\bar{\mu} = 3\bar{\mu}^1$.

En esta ocasión vamos a calcular cada uno de los pesos de la representación haciendo uso de la matriz de Cartan y las relaciones (3.75) y (3.85)

$$\bar{\mu} = 3\bar{\mu}^1 = 2\bar{\alpha}^1 + \bar{\alpha}^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = 1 \quad (4.58)$$

por tanto

$$q = p + \sum_{j=1}^m x_j A_{ji} \quad (4.59)$$

y

$$q(\vec{\alpha}_1) = 0 + [2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 3 \quad (4.60)$$

$$q(\vec{\alpha}_2) = 0 + [2 \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 0 \quad (4.61)$$

De (4.60) y recordando (4.21) obtenemos los pesos

$$3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 \quad (4.62)$$

$$3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 \quad (4.63)$$

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 \quad (4.64)$$

Realizando el mismo procedimiento sobre (4.62), esta vez con $x_1 = 1, x_2 = 1$

$$q(\vec{\alpha}_1) = 1 + [1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 2 \quad (4.65)$$

$$q(\vec{\alpha}_2) = 0 + [1 \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 1 \quad (4.66)$$

De (4.66) surge el peso

$$3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.67)$$

Otra vez sobre (4.63), con $x_1 = 0, x_2 = 1$

$$q(\vec{\alpha}_1) = 2 + [0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 1 \quad (4.68)$$

$$q(\vec{\alpha}_2) = 0 + [0 \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 2 \quad (4.69)$$

De (4.66) aparecen

$$3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \quad (4.70)$$

$$\Delta^{++} = 3\bar{\mu}^1 = \left| \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |uuu\rangle$$

$$\Delta^+ = 3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle)$$

$$\Delta^0 = 3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ddu\rangle + |dud\rangle + |udd\rangle)$$

$$\Delta^- = 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 3\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = |ddd\rangle$$

$$\Sigma^{*+} = 3\bar{\mu}^1 - \bar{\alpha}^1 = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle)$$

$$\Sigma^{*0} = 3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uds\rangle + |dus\rangle + |usd\rangle)$$

$$\Sigma^{*-} = 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = |-1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dds\rangle + |dsd\rangle + |sdd\rangle)$$

$$\Xi^{*0} = 3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ssu\rangle + |sus\rangle + |uss\rangle)$$

$$\Xi^{*-} = 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|ssd\rangle + |sds\rangle + |dss\rangle)$$

$$\Omega^- = 3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 = |0, -\sqrt{3}\rangle = |sss\rangle$$

Cuadro 4.4: Identificación de los estados del decuplete de bariones.

$$3\bar{\mu}^1 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^1 \tag{4.71}$$

Por último, usando (4.64), ahora con $x_1 = 1, x_2 = 1$

$$q(\bar{\alpha}_1) = 3 + [(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1)] = 0 \tag{4.72}$$

$$q(\bar{\alpha}_2) = 0 + [(-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (2)] = 3 \tag{4.73}$$

De (4.66) brotan los últimos pesos

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 \tag{4.74}$$

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^1 \tag{4.75}$$

$$3\bar{\mu}^1 - 3\bar{\alpha}^1 - 3\bar{\alpha}^1 \tag{4.76}$$

Por tanto, reproducimos la figura 1.6 e identificamos a cada peso del decuplete el barión correspondiente tabulado en el cuadro 4.4.

4.4.3. Representación (1, 1) = 8

De manera análoga a la realizada con los mesones llegamos a las identificaciones representadas en la figura y tabuladas en el cuadro 4.5. Se considera que $8 \oplus 8$ representa el mismo octete de partículas.

4.4.4. Representación (0, 0) = 1

El singlete es

$$\Lambda^* = |0, 0\rangle = uds \tag{4.77}$$

$$\Sigma^+ = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 = |1, 0\rangle = uus$$

$$\Xi^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = uss$$

$$p^+ = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = uud$$

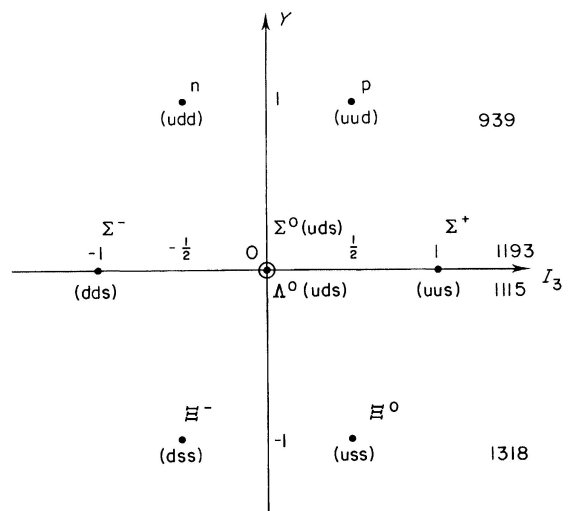
$$n^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = udd$$

$$\Xi^- = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = dss$$

$$\Sigma^- = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - 2\bar{\alpha}^1 - 2\bar{\alpha}^2 = |-1, 0\rangle = dds$$

$$\Sigma^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = uds$$

$$\Lambda^0 = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2 - \bar{\alpha}^1 - \bar{\alpha}^2 = |0, 0\rangle = uds$$



Cuadro 4.5: Identificación del octete de bariones. En este caso no se incluyen los estados, sino los quarks constituyentes ya que el octete es el tensor de simetría mixta de la descomposición del producto tensorial de las tres partículas. En el caso del decuplete fue más fácil debido a que el tensor de la representación es completamente simétrico.

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha mostrado, pues, la plausibilidad de la asociación de los hadrones a la composición de quarks que forman aproximadamente (sería una simetría perfecta si todos los quarks tuviesen la misma masa) una simetría de sabor $SU(n)$, donde n representa el número de estados en los que puede encontrarse la partícula quark. Se ha desarrollado $SU(3)$ por motivos históricos, bibliográficos y por mantener cierto equilibrio entre sencillez y cantidad de partículas explicadas. En cualquier caso con las herramientas mostradas en este documento es posible construir cualquier representación con un poco de cuidado y paciencia. Ello ha sido la prioridad para este trabajo, es decir, se ha preferido ser más exhaustivo a la hora de profundizar en los conceptos y herramientas necesarios para “construir” hadrones que a la hora de enumerar de manera cualitativa las sorprendentes consecuencias que tiene la simple aceptación de teorema de Noether y el uso del marco teórico proporcionado por las teorías de gauge locales (modelo estándar).

Algunas de esas consecuencias importantes dejadas en el tintero pueden ser la introducción de la simetría perfecta $SU(3)$ de color de los bariones bajo la fuerza fuerte que asegura una función de onda antisimétrica, se podía haber mencionado cómo se construyen la cromodinámica cuántica o la teoría electrodébil, cuál es la importancia del hipotético descubrimiento del bosón de Higgs, etc. Sin duda la física puede estar viviendo uno de sus periodos más apasionantes de su historia no tanto por los descubrimientos que se están produciendo como por los que tienen que venir.

Bibliografía

- [Cor97] J. F. Cornwell. *Group Theory in Physics: An Introduction*. Techniques of Physics. Academic Press, 1997.
- [FS06] Antonio Ferrer-Soria. *Física Nuclear y de Partículas*. Number 62 in Educació. Materials. Publicacions de la Universitat de València, 2^a edition, 2006.
- [GC01] Joaquín Gómez-Camacho. Partículas elementales. Apuntes de la asignatura Partículas Elementales de la Universidad de Sevilla, Junio 2001.
- [Geo99] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories*. Frontiers in Physics. Westview Press, 2^a edition, 1999.