Formulario de integrales

Séptima revisión: Febrero 2005
Sexta revisión: Julio 2003
Quinta revisión: Mayo 2002
Cuarta revisión: Mayo 2001
Tercera revisión: Marzo 2001

1. Integrales indefinidas

1.1. Funciones racionales e irracionales

1.1.1. Contienen $ax + b$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C, \quad n \neq 1 \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{(1+\epsilon x)^2} = -\frac{1}{\epsilon}\cdot\frac{1}{1+\epsilon x} + C \tag{4}$$

$$\int \frac{xdx}{(1+bx)^3} = -\frac{1}{2b}\cdot\frac{2}{(1+bx)^2} - \frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{1+bx} + C \tag{5}$$

1.1.2. Contienen $\sqrt{ax+b}$

$$\int x\sqrt{a+bx}dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2} + C \tag{6}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}dx = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C \tag{7}$$

(8) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \right| + C, & a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

(9) $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} + C$$

1.1.3. Contienen $x^2 \pm a^2$

(10) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

(11) $$\int \frac{xdx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

1.1.4. Contienen $a^2 - x^2, \quad x < a$

(12) $$\int (a^2-x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

(13) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctanh} \frac{x}{a}$$

(14) $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$$

1.1.5. Contienen $\sqrt{x^2 \pm a^2}$

(15) $$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 \pm x^2} + a^2 \ln \left| x + \sqrt{a^2 \pm x^2} \right| \right) + C = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsenh} x + C & (+) \\ \frac{1}{2} x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arccosh} x + C & (-) \end{cases} \end{aligned}$$

(16) $$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} + C$$

(17) $$\int x^3\sqrt{x^2+a^2} dx = (\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}a^2)(a^2+x^2)^{3/2} + C$$

(18) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{|x|} + C$$

(19) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = a \cdot \operatorname{arcsenh} \frac{x}{a} + C$$

(20) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-a^2} \right| + C = \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$$

(21) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} + C, \quad (a > 0)$$

(22) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2x} + C$$

(23) $$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

(24) $$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4}dx = \mp\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^2x^3} + C$$

(25) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\text{arccosh}\frac{x}{a} + C$$

1.1.6. Contienen $\sqrt{a^2 \pm x^2}$

(26) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$$

(27) $$\int x\sqrt{a^2 \pm x^2}dx = \pm\frac{1}{3}(a^2 \pm x^2)^{3/2} + C$$

(28) $$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{8}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

(29) $$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right| + C$$

(30) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2x} + C$$

(31) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

(32) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

(33) $$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}dx = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

(34) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}dx = \pm\frac{x}{2}\sqrt{a^2 \pm x^2} \mp \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

(35) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C = \text{arcsenh}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

1.1.7. Contienen $ax^2 + bx + c$

(36) $$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| = & \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\text{arctanh}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, & b^2 > 4ac \\ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\ -\frac{2}{2ax+b} + C, & b^2 = 4ac \end{cases}$$

(37) $$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} + C$$

(38) $$\int \frac{x\cdot dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{bx+2c}{(b^2-4ac)(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\ + \frac{b(2n-3)}{(b^2-4ac)(n-1)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \quad n \neq 0,1, \quad b^2 < 4ac$$

(39) $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{-(b^2-4ac)(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\ + \frac{2a(2n-3)}{-(b^2-4ac)(n-1)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \quad n \neq 0,1, \quad b^2 < 4ac$$

1.1.8. Contienen $\sqrt{ax^2+bx+c}$

(40)
$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(41) $$\int \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad \text{Ver §3.5, pág. 11: método alemán}$$

(42) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C =$$
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arcsenh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & \Delta < 0, a > 0; \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax+b| + C, & \Delta = 0, a > 0; \\ \frac{1}{-\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,sen}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, & \Delta > 0, a < 0; \end{cases}, \quad \Delta = b^2-4ac$$

(43) $$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(44) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}}\ln\left|\frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right| + C, & c > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arc\,sen}\frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}} + C, & c < 0 \end{cases}$$

1.2. Funciones trigonométricas

1.2.1. Contienen $\operatorname{sen} ax$

(45) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\frac{ax}{2}\right| + C$$

(46) $$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{ax-\cos ax\cdot\operatorname{sen} ax}{a} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

(47) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax \cdot \cos ax}{a \cdot n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax dx, \quad n \neq 0, -1;$

(48) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(a+b)x}{a+b} - \frac{1}{2}\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(49) $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a}x^n \cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1} \cos ax dx$

(50) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)\cdot(2\nu-1)!}$

(51) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{ax}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right) + C$

1.2.2. Contienen $\cos ax$

(52) $\displaystyle\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{ax + \cos ax \cdot \operatorname{sen} ax}{a} + C$

(53) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

(54) $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln|ax| + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(ax)^{2\nu}}{(2\nu)\cdot(2\nu)!} + C$

(55) $\displaystyle\int \cos^n ax dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \operatorname{sen} ax}{a \cdot n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax dx + C, \quad n \neq 0, -1;$

(56) $\displaystyle\int \cos ax \cos bx dx = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{a-b} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{a+b} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(57) $\displaystyle\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a}x^n \operatorname{sen} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \operatorname{sen} ax dx + C, \quad n \neq -1$

(58) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 \pm \cos ax} = \pm\frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

1.2.3. Contienen $\tan ax$ o $\cot ax$

(59) $\displaystyle\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax + C$

(60) $\displaystyle\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$

(61) $\displaystyle\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax dx, \quad n \neq 1, 0;$

(62) $\displaystyle\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{sen} ax + C$

(63) $\displaystyle\int \cot^n ax dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax dx + C, \quad n \neq 1, 0;$

1.2.4. Contienen $\sec ax$ o $\csc ax$

(64) $$\int \sec ax dx = \frac{1}{a}\left[\ln\left(\cos\frac{ax}{2} + \operatorname{sen}\frac{ax}{2}\right) - \ln\left(\cos\frac{ax}{2} - \operatorname{sen}\frac{ax}{2}\right)\right] + C$$

(65) $$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$$

(66) $$\int \sec^n x dx = \frac{1}{a}\frac{\tan ax \cdot \sec^{n-2} ax}{n-1} + \frac{1}{a}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{\sec}^{n-2} ax \cdot dx + C, \quad n \neq 1;$$

(67) $$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$$

(68) $$\int \csc^n ax dx = -\frac{1}{a}\frac{\cot ax \cdot \csc^{n-2}}{n-1} + \frac{1}{a}\cdot\frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax \cdot dx + C, \quad n \neq 1;$$

1.2.5. Varias funciones

(69) $$\int \sec x \cdot \tan ax \cdot dx = \sec x + C$$

(70) $$\int \csc x \cdot \cot x \cdot dx = -\csc x + C$$

(71) $$\int \cos^m x \cdot \operatorname{sen}^n x \cdot dx = \begin{cases} \frac{cos^{m-1} x \cdot \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \cdot \operatorname{sen}^n x \cdot dx \\ \frac{cos^{m+1} x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \cdot \operatorname{sen}^{n-2} x \cdot dx \end{cases}$$

1.2.6. funciones trigonométricas inversas

(72) $$\int \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad a > 0;$$

(73) $$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x \cdot \arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad a > 0;$$

(74) $$\int \arctan\frac{x}{a}dx = x \cdot \arctan\frac{x}{a} - \frac{1}{a}a\ln\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) + C, \quad a > 0;$$

(75) $$\int \operatorname{arccot}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{a}x \cdot \operatorname{arccot}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C$$

(76) $$\int x \cdot \arccos x dx = x \cdot \arccos x + \operatorname{arc\,sen} x + C$$

1.3. Funciones exponenciales y/o logarítmicas

(77) $\displaystyle\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$

(78) $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx \cdot dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

(79) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx \cdot dx = \frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

(80) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+be^{nx}} = \frac{x}{a} - \frac{\ln(a+be^{nx})}{an} + C$

(81) $\displaystyle\int \log_a x dx = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C, \quad \forall a > 0;$

(82) $\displaystyle\int x\ln x dx = \frac{2x^2\ln x - x^2}{4} + C$

(83) $\displaystyle\int x^n \ln ax \cdot dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

(84)
$$\int x^n(\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln ax)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}dx, \quad n, m \neq -1, x > 0;$$

(85) $\displaystyle\int \ln ax dx = x\ln ax - x + C, \quad x > 0;$

(86) $\displaystyle\int \frac{e^{ax}}{x}dx = \ln|x| + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(ax)^i}{i\cdot i!} + C$

(87) $\displaystyle\int e^{ax}\ln x \cdot dx = \frac{1}{a}e^{ax}\ln|x| - \frac{1}{a}\int\frac{e^{ax}}{x}dx + C$

(88) $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln^i x}{i\cdot i!} + C, \quad x > 0;$

(89) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C, \quad x > 0;$

(90) $\displaystyle\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{1}{x+1}\ln^{n+1} x, \quad n \neq -1, x > 0;$

1.4. Funciones hiperbólicas

(91) $\int \operatorname{senh} ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

(92) $\int \operatorname{senh}^2 x dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x + C$

(93) $\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$

(94) $\int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2}x + C$

(95) $\int \tanh ax dx = \frac{1}{a}\ln|\cosh ax| + C$

(96) $\int \coth ax dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{senh} ax| + C$

(97) $\int \operatorname{sech} x dx = \arctan(\operatorname{senh} x) + C$

(98) $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$

(99) $\int \operatorname{csch} x dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1} + C$

(100) $\int \operatorname{senh} x \cdot \tanh x \cdot dx = -\operatorname{sech} x + C$

(101) $\int \operatorname{csch} x \cdot \coth x \cdot dx = -\operatorname{csch} x + C$

1.4.1. funciones hiperbólicas inversas

(102) $\int \operatorname{arcsenh}\frac{x}{a} dx = x \ \operatorname{arcsenh}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 + x^2} + C, \quad a > 0$

(103) $\int \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \ \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} + C, & \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} > 0, a > 0; \\ x \ \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} + C, & \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} < 0, a > 0; \end{cases}$

(104) $\int \operatorname{arctanh}\frac{x}{a} dx = x \ \operatorname{arctanh}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}a\ln(a^2 - x^2) + C$

(105) $\int \operatorname{arccoth}\frac{x}{a} dx = x \ \operatorname{arccoth}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}a\ln(x^2 - a^2) + C$

(106) $\int \operatorname{arcsenh}\frac{x}{a} dx = x \ \operatorname{arcsech}\frac{x}{a} - a \ \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$

(107) $\int \operatorname{arcsech}\frac{x}{a} dx = x \ \operatorname{arccsch}\frac{x}{a} + a \ \operatorname{arccosh}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + C$

2. Integrales definidas

(108) $\int_0^\infty x^n e^{-qx} dx = \frac{n!}{q^{n+1}}, \quad n > -1, q > 0;$

(109)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^m e^{-ax^2} dx &= \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{2a^{(m+1)/2}}, \qquad a > 0 \\ &= \frac{n!}{2a^{n+1}}, \quad \text{Si } m \text{ impar} : m = 2n+1 \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}, \quad \text{Si } m \text{ par} : m = 2n\end{aligned}$$

(110) $\int_0^\epsilon x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{\epsilon}{2a} e^{-a\epsilon^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \mathrm{erf}(\epsilon\sqrt{a})$

(111)
$$\int_t^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n! e^{-at}}{a^{n+1}} \left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n t^n}{n!}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, a > 0;$$

(112) $\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx = \frac{n-1}{2a} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-ax^2} dx$

(113) $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(114) $\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$

(115) $\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \ln \frac{1}{1-x}$

(116) $\int_0^x \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x}$

(117) $\int_0^x \frac{dx}{1+\epsilon x} = \frac{1}{\epsilon} \ln(1+\epsilon x)$

(118) $\int_0^x \frac{1+\epsilon x}{1-x} dx = (1+\epsilon) \ln \frac{1}{1-x} - \epsilon x$

(119) $\int_0^x \frac{1+\epsilon x}{(1-x)^2} dx = \frac{(1-\epsilon)x}{1-x} - \epsilon \ln \frac{1}{1-x}$

(120) $\int_0^x \frac{(1+\epsilon x)^2}{(1-x)^2} dx = 2\epsilon(1+\epsilon)\ln(1-x) + \epsilon^2 x + \frac{(1+\epsilon)^2 x}{1-x}$

(121) $\int_0^x \frac{dx}{(1-x)(\Theta_B - x)} = \frac{1}{\Theta_B - 1} \ln \frac{\Theta_B - x}{\Theta_B(1-x)}, \quad \Theta_B \neq 1$

(122) $\int_0^x \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{-2}{2ax+b} + \frac{2}{b}, \quad b^2 = 4ac$

(123)

$$\int_0^x \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(p-q)} \ln\left(\frac{q}{p}\cdot\frac{x-p}{x-q}\right), \quad b^2 > 4ac;\ p,q \text{ son las raíces;}$$

(124) $$\int_0^x \frac{a+bx}{c+gx}dx = \frac{bx}{g} + \frac{ag-bc}{g^2}\ln(c+gx)$$

3. Métodos de integración

3.1. Integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

3.2. Integración por sustitución:

si $x = g(t)$ es un función que admite derivada contínua no nula y función inversa $t = h(x)$ y $F(t)$ es una primitiva de $f(g(t))g'(t)$ se tiene que:

$$\int f(x)dx = F(h(x)) + C$$

3.3. Integración de funciones racionales:

Queremos hallar $\int \frac{F(x)}{Q(x)}dx$ siendo $F(x)$ y $Q(x)$ polinomios de coeficientes reales. Si el grado de F es mayor que el de Q se hace la división para obtener $\int \frac{F(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$. La primera integral es inmediata. Para la segunda se admite que $Q(x)$ se puede descomponer de la siguiente manera: $Q(x) = a_0(x-a)^p \ldots (x-a)^q[(x-c)^2+d^2]^r \ldots [(x-e)^2+f^2]^s$ y es única. En tal caso, el integrando del segundo término se puede descomponer como sigue: $\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^p} + \frac{A_2}{(x-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_p}{x-a} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)^q} + \frac{B_2}{(x-b)^{q-1}} + \ldots + \frac{B_q}{x-b} + \frac{M_1x+N_1}{((x-c)^2+d^2)^{r-1}} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{(x-c)^2+d^2} + \ldots + \frac{H_1x+K_1}{((x-e)^2+f^2)^s} + \ldots + \frac{H_sx+K_s}{(x-e)^2+f^2}$. Todas las constantes se obtienen identificando coeficientes. Al resolver los sumando se obtienen integrales del siguiente tipo:

1. $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
2. $\int \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{(1-p)(x-a)^{p-1}} + C$
3. $\int \frac{Mx+N}{(x-c)^2+d^2}dx = \frac{M}{2}\ln|(x-c)^2+d^2| + \frac{Mc+N}{d}\arctan\frac{x-c}{d} + C$
4. $\frac{Mx+N}{[(x-c)^2+d^2]^r}dx \quad \Rightarrow$ Llamemos $I_r = \int \frac{Mx+N}{[(x-c)^2+d^2]^r}dx$ y $J_r = \int \frac{dx}{[(x-c)^2+d^2]^r}dx$ operando se obtiene
   - $I_r = \frac{M}{2(1-r)} \cdot \frac{1}{((x-c)^2+d^2)^{r-1}} + (Mc+N)\cdot J_r$
   - $J_r = \frac{1}{d^2}J_{r-1} + \frac{x-c}{d^2 2(1-r)((x-c)^2+d^2)^{r-1}} - \frac{1}{d^2 2(1-r)}J_r - 1$

3.4. Método de Hermite

Si $Q(x) = (x-a)^m \dots (x-b)^n \cdot \left[(x-c)^2 + d^2\right] \dots \left[(x-e)^2 + f^2\right]$ entonces

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx = \frac{U(x)}{(x-a)^{m-1} \dots (x-b)^{n-1} \dots [(x-c)^2 + d^2]^{p-1} \dots [(x-e)^2 + f^2]^{q-1}} +$$
$$K \int \frac{dx}{x-a} + \dots + L \int \frac{dx}{x-b} + \int \frac{Cx+D}{(x-c)^2+d^2} dx + \dots + \int \frac{Ex+F}{(x-e)^2+f^2} dx$$

donde $U(x)$ es un polinomio de un grado menos que su denominador. Todas las constantes se determinan derivando la expresión e identificando coeficientes.

3.5. Integración de funciones irracionales algebraicas

- Integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) dx \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}; n_i, m_i \in \mathbb{Z}; n_i \neq 0$$

  y c y d no se anulan simultáneamente. Se transforma en integral racional mediante el cambio $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ siendo m el mínimo común múltiplo de las n_i.

- Integrales del tipo $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ se consideran los siguientes casos:

  1. $a > 0 \rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \cdot x + t$
  2. $c < 0 \rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} + x \cdot t$
  3. $a, c < 0 \rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = t \cdot (x-\alpha)$ siendo α una de las raices del polinomio.

- Método Alemán: $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Donde $gradQ(x) = grad(P(x)) - 1$ y K es una constante. Los coeficientes se obtienen derivando la expresión e identificando términos.

- Series binómicas: $\int x^m (a+bx^n)^p dx \mid a,b \in \mathbb{R}; m,n,p \in \mathbb{Q}$. Estas integrales se convierten en racionales en los siguientes casos con los cambios indicados.

  1. $p \in \mathbb{Z} \rightarrow x = t^q$ donde q es el m.c.m. de los denominadores n y m.
  2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \rightarrow a + bx^n = t^q$ siendo q el denominador de p.
  3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{a+bx^n}{x^n} = t^q$ siendo q el denominador de p.

  En cualquier otro caso se puede expresar como función elemental.

3.6. Integración de funciones trascendentes

Si $R(u)$ es una función racional y $u = f(x)$ es una función que admite función inversa con derivada racional, entonces la integral de $R(f(x))$ se reduce a una integral racional mediante el cambio $f(x) = t''$.

3.7. Integración de funciones trigonométricas

- Integración de $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$: en general se hace el cambio $\tan \frac{x}{2} = t$ con lo que $\operatorname{sen} x = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2t}{1+t^2}$. En elgunos casos se pueden intentar otros cambios:

  1. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x)$ se hace el cambio $\operatorname{sen} x = t$
  2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(-\operatorname{sen} x, \cos x)$ se hace el cambio $\cos x = t$
  3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = R(-\operatorname{sen} x, -\cos x)$ se hace el cambio $\tan x = t$

- Integrales del tipo $I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x^n \cdot x \cdot dx$ se puede reducir de las siguientes formas:

  1. $I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m+2,n-2}, \quad m \neq -1$
  2. $I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}, \quad m+n \neq 0$
  3. $I_{m,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m+2,n+2}, \quad m \neq -1$
  4. $I_{m,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}, \quad m+n \neq 0$
  5. $I_{m,n} = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n-2}{n+1} I_{m,n+2}, \quad n \neq -1$
  6. $I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cdot \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n-2}{m+1} I_{m+2,n+2}, \quad m \neq -1$

4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

4.1. Ecuaciones diferenciales lineales

$$y' + p(x)y = q(x) \Longrightarrow y = e^{-\int (x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} + C \right)$$

$$\tau y' + y = p(t) \Longrightarrow y = e^{-t/\tau} \left(\frac{1}{\tau} \right) \int_0^t p(t) e^{t/\tau} dt + y_0$$

5. Solución numérica de ecuaciones diferenciales

5.1. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

$$y' = f(x,y) \rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad k_2 = f(x_i + h/2, y_i + k_1 h/2)$$
$$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + k_2 h/2) \qquad k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$