

TEORÍA DE LA COMPUTABILIDAD

José Pedro Úbeda Rives

Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Valencia

Reducciones. Tipos

Definición intuitiva de **reducción**

Un problema A es **reducible** a otro B
si un método para resolver B proporciona un método para
resolver A

Cada problema puede representarse a través de una
codificación como un conjunto de números

Así, se formulará y estudiará la **reducibilidad** como una relación
entre conjuntos de números

Un conjunto A es **reducible** al conjunto B si un método para
decidir si algo pertenece a B , proporciona un método para
decidir que algo pertenece a A .

Reducciones. Tipos

Primer ejemplo

Ejemplo

Los conjuntos $\{x | W_x \text{ es infinito}\}$ y $\{x | \varphi_x \text{ es total}\}$ son reducibles entre sí

PRUEBA \Rightarrow

Supuesto: para cualquier x , se puede probar si φ_x es total

Para probar, para un dado x_0 , si W_{x_0} es infinito, se puede proceder así

- ▶ se usa x_0 para obtener un x_1 tal que φ_{x_1} liste los elementos de W_{x_0} sin repetición
- ▶ entonces se mira si φ_{x_1} es total
- ▶ Si es total, W_{x_0} es infinito
- ▶ en otro caso, no lo es

Reducciones. Tipos

Primer ejemplo. Parte 2

PRUEBA \Leftarrow

Supuesto: podemos probar para cualquier x , si W_x es infinito

Para probar para un y_0 dado, si φ_{y_0} es total, se procede así

- ▶ se usa y_0 para obtener un y_1 tal que

$$\varphi_{y_1}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_{y_0}(w) \downarrow \text{ para todo } w \leq z; \\ \uparrow, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ▶ Se mira si W_{y_1} es infinito
- ▶ Si es infinito, φ_{y_0} es total
- ▶ En otro caso, no lo es

Reducciones. Tipos

Segundo ejemplo

Ejemplo

$K = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\}$ es reducible a $\{x \mid W_x \text{ es finito}\}$

Para probar que $x_0 \in K$

- ▶ se usa x_0 para obtener x_1 tal que

$$\varphi_{x_1}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } P_{x_0} \text{ con input } x_0 \text{ no se para} \\ & \text{en menos de } z \text{ pasos;} \\ \uparrow, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ▶ Se mira si W_{x_1} es finito
- ▶ Si es finito, entonces $C = \{z \mid \varphi_{x_1}(z) = 1\}$ es finito
- ▶ Sea $C = \{z_0, \dots, z_m\}$ con $z_0 < \dots < z_m$, entonces, para $z > z_m$, P_{x_0} con input x_0 converge en menos de z pasos y, por tanto, $x_0 \in K$

El segundo no es reducible al primero

Reducciones. Tipos

Características de la teoría de la reducción

El concepto de **reducibilidad** se ha formulado de diferentes formas

Procedimiento general

1. Se define $A \leq_r B$ de forma que \leq_r sea reflexiva, transitiva y recursivamente invariante
$$A_1 \equiv A_2 \ \& \ B_1 \equiv B_2 \ \& \ A_1 \leq_r B_1 \implies A_2 \leq_r B_2$$
2. Se define: $A \equiv_r B$ si y sólo si $A \leq_r B$ y $B \leq_r A$
3. Se demuestra que la relación \equiv_r es de equivalencia
4. Las clases de equivalencia de \equiv_r son los **grados de insolubilidad relativos a \leq_r**
5. El *grado de insolubilidad de A respecto a \leq_r* , $dg_r(A)$:
$$dg_r(A) = \{B \mid B \equiv_r A\}$$
6. Se cumple $A \equiv_r B \iff dg_r(A) = dg_r(B)$
7. Partición de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en subconjuntos de \mathbb{N}

Reducciones. Tipos

Características de la teoría de la reducción II

8. Se define un orden entre los grados: si \mathbf{a} y \mathbf{b} son grados, $\mathbf{a} \preceq_r \mathbf{b}$ si y sólo si, para algún A y B , $\mathbf{a} = dg_r(A)$, $\mathbf{b} = dg_r(B)$ y $A \leq_r B$
9. Se establece una estructura de orden entre las clases de equivalencia \equiv_r en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
10. Se define: A es **completo respecto a** \leq_r si y sólo si
 - ▶ A es r.e. y
 - ▶ para todo B r.e., se tiene $B \leq_r A$
11. Se define: A es **\mathcal{C} -completo respecto a** \leq_r , donde \mathcal{C} es una clase de conjuntos, si y sólo si
 - ▶ $A \in \mathcal{C}$ y
 - ▶ para todo $B \in \mathcal{C}$, $B \leq_r A$

Reducciones. Tipos

La **1-reducción** y la **m-reducción**

Definición

- a) A es **1-reducible** a B , en símbolos $A \leq_1 B$,
si existe una función f recursiva e inyectiva tal que

$$\forall x(x \in A \iff f(x) \in B)$$

En ese caso, se dice que $A \leq_1 B$ vía f

- b) A es **m-reducible** a B , en símbolos $A \leq_m B$,
si existe una función f recursiva tal que

$$\forall x(x \in A \iff f(x) \in B)$$

En ese caso, se dice que $A \leq_m B$ vía f

La condición sobre f es equivalente a

- ▶ $A = f^{-1}(B)$
- ▶ $f(A) \subseteq B$ & $f(\bar{A}) \subseteq \bar{B}$
- ▶ $\chi_A = \chi_B \circ f$

Reducciones. Tipos

Teorema elemental de 1-reducción y m -reducción

Teorema

- a) \leq_1 y \leq_m son reflexivas y transitivas
- b) \leq_1 y \leq_m son recursivamente invariantes
- c) $A \leq_1 B \implies A \leq_m B$
- d) $A \leq_1 B \implies \bar{A} \leq_1 \bar{B}$
- e) $A \leq_m B \implies \bar{A} \leq_m \bar{B}$
- f) Si $A \leq_m B$ y B es recursivo, entonces A es recursivo
- g) Si $A \leq_m B$ y B es *r.e.*, entonces A es *r.e.*

► Incomparable

► Complemento

Reducciones. Tipos

Suma directa

Definición

La operación *suma directa* de dos conjuntos C y D , $C \oplus D$

$$\begin{aligned} C \oplus D &= \{y | \exists x (y = 2x \ \& \ x \in C)\} \cup \{y | \exists x (y = 2x + 1 \ \& \ x \in D)\} \\ &= \{2x | x \in C\} \cup \{2x + 1 | x \in D\}. \end{aligned}$$

Reducciones. Tipos

1-reducción y m -reducción no son conexas

Teorema

- a) *Existen dos conjuntos no recursivos que son incomparables respecto a \leq_m y, así, respecto a \leq_1*
- b) $\forall A \exists C (A \leq_m C \ \& \ B \leq_m C \ \& \ \forall D (A \leq_m D \ \& \ B \leq_m D \implies C \leq_m D))$
Además, si A y B son *r.e.*, entonces C es *r.e.*

Demostración.

- a) K y \bar{K} por g) y e) del Teorema
- b) $C = A \oplus B$ es el conjunto deseado, ya que
- ▶ $A \leq_m A \oplus B$ vía la función $\lambda x[2x]$
 - ▶ $B \leq_m A \oplus B$ vía $\lambda x[2x + 1]$ y
 - ▶ para cualquier C , si $A \leq_m C$ vía f y $B \leq_m C$ vía g , entonces $A \oplus B \leq_m C$ vía la función h
$$h(2x) = f(x) \text{ y } h(2x + 1) = g(x)$$



Reducciones. Tipos

$A \equiv_1 B$, $A \equiv_m B$ y grados de insolubilidad

Definición

a) $A \equiv_1 B$ si y sólo si $A \leq_1 B$ y $B \leq_1 A$

b) $A \equiv_m B$ si y sólo si $A \leq_m B$ y $B \leq_m A$

- ▶ Las relaciones \equiv_1 y \equiv_m son de equivalencia
- ▶ Sus clases de equivalencia se denominan **1-grados** y **m -grados de insolubilidad**
- ▶ Escribiremos $dg_1(A)$ y $dg_m(A)$ para el 1-grado y m -grado al que pertenece A
- ▶ Para referirnos a los grados usaremos las letras negritas **a**, **b**, **c**, etc.

Reducciones. Tipos

1-grado, m -grado, \preceq_1 y \preceq_m

Definición

- a) El 1-grado del conjunto A , $dg_1(A)$, es el conjunto
 $dg_1(A) = \{B \mid A \equiv_1 B\}$
- b) El m -grado del conjunto A , $dg_m(A)$, es el conjunto
 $dg_m(A) = \{B \mid A \equiv_m B\}$
- c) Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son 1-grados, $\mathbf{a} \preceq_1 \mathbf{b}$ si y sólo si existen conjuntos A y B tales que $dg_1(A) = \mathbf{a}$, $dg_1(B) = \mathbf{b}$ y $A \leq_1 B$
- d) Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son m -grados, $\mathbf{a} \preceq_m \mathbf{b}$ si y sólo si existen conjuntos A y B tales que $dg_m(A) = \mathbf{a}$, $dg_m(B) = \mathbf{b}$ y $A \leq_m B$

Reducciones. Tipos

Propiedades de \preceq_1 y \preceq_m

Teorema

- a) \preceq_1 y \preceq_m son reflexivas, transitivas y antisimétricas son ordenes parciales entre los grados respectivos
- b) Si **a** es un 1-grado y **b** un m-grado, entonces $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b}$ o $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \emptyset$
- c) Si un grado contiene un conjunto recursivo, entonces consta únicamente de conjuntos recursivos
- d) Si un grado contiene un conjunto r.e., entonces consta únicamente de conjuntos r.e.

Reducciones. Tipos

Complemento y suma directa de grados

Definición

- a) Si \mathbf{a} es un 1-grado y $\mathbf{a} = dg_1(A)$, entonces $\bar{\mathbf{a}} = dg_1(\bar{A})$
- b) Si \mathbf{a} es un m -grado y $\mathbf{a} = dg_m(A)$, entonces $\bar{\mathbf{a}} = dg_m(\bar{A})$
- c) La **suma directa** de dos 1-grados \mathbf{a} y \mathbf{b} , $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$, es $dg_1(A \oplus B)$, donde A y B son tales que $dg_1(A) = \mathbf{a}$ y $dg_1(B) = \mathbf{b}$
- d) La **suma directa** de dos m -grados \mathbf{a} y \mathbf{b} , en símbolos $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$, es $dg_m(A \oplus B)$, donde A y B son tales que $dg_m(A) = \mathbf{a}$ y $dg_m(B) = \mathbf{b}$

Se puede establecer la definición de **complemento** por d) y e) de **Teorema**, $A = \bar{\bar{A}}$, $A \equiv_1 B \iff \bar{A} \equiv_1 \bar{B}$, y $A \equiv_m B \iff \bar{A} \equiv_m \bar{B}$

La definición de la **suma directa** de dos grados por

$$A \equiv_1 B \ \& \ C \equiv_1 D \implies A \oplus C \equiv_1 B \oplus D$$

$$A \equiv_m B \ \& \ C \equiv_m D \implies A \oplus C \equiv_m B \oplus D$$

Reducciones. Tipos

Automorfismo de la complementación

Teorema

- a) Para cualesquiera 1-grados \mathbf{a} y \mathbf{b} ,
 $\mathbf{a} \preceq_1 \mathbf{b}$ si y sólo si $\bar{\mathbf{a}} \preceq_1 \bar{\mathbf{b}}$
- b) Para cualesquiera m -grados \mathbf{a} y \mathbf{b} ,
 $\mathbf{a} \preceq_m \mathbf{b}$ si y sólo si $\bar{\mathbf{a}} \preceq_m \bar{\mathbf{b}}$

Reducciones. Tipos

Orden no **total**

Teorema

- a) *Existen 1-grados incompatibles respecto a \preceq_1*
- b) *Existen m -grados incompatibles respecto a \preceq_m*
- c) *Cualesquiera dos m -grados tienen una única menor cota superior*
*La menor cota superior de dos m -grados **r.e.** es **r.e.***

Demostración.

c) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ es la menor cota superior de los m -grados \mathbf{a} y \mathbf{b} □

Reducciones. Tipos

Teorema de Myhill

Teorema

$A \equiv B$ si y sólo si $A \equiv_1 B$

Demostración.

(\implies) Si $A \equiv B$, entonces existe una $g \in \mathcal{G}^*$ tal que $g(A) = B$
Entonces $A \leq_1 B$ vía g y $B \leq_1 A$ vía g^{-1}

g es biyectiva y recursiva



Reducciones. Tipos

Demostración de \Leftarrow del teorema de Myhill: $A \equiv B$ si y sólo si $A \equiv_1 B$

Sea $A \leq_1 B$ vía f y $B \leq_1 A$ vía g

Vamos a definir una sucesión de funciones parciales h_s , tal que

$$\text{I) } \forall x (x \in \text{Dom}(h_s) \implies h_{s+1}(x) = h_s(x))$$
$$h_0 \subseteq h_1 \subseteq \dots \subseteq h_s \subseteq h_{s+1} \subseteq \dots$$

II) $h = \bigcup_s h_s$ es una permutación recursiva y

III) $h(A) = B$

h_s es la porción de h definida al terminar el paso s

► Procedimiento

► Programa

Reducciones. Tipos

Conjunto **completo**

Definición

- a) A es **completo con respecto a** \leq_1 (A es **1-completo**) si
- ▶ A es **r.e.**, y
 - ▶ $\forall B (B \text{ es r.e.} \implies B \leq_1 A)$
- b) A es **completo con respecto a** \leq_m (A es **m -completo**) si
- ▶ A es **r.e.**, y
 - ▶ $\forall B (B \text{ es r.e.} \implies B \leq_m A)$

Reducciones. Tipos

K_0 es 1-Completo

Teorema

$K_0 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in W_y\}$ es 1-completo

Demostración.

i) K_0 es r.e.

ii) Sea B un conjunto r.e., entonces $B = W_e$, para algún e

Así, $B \leq_1 K_0$ vía la función $\lambda x[\langle x, e \rangle]$



Reducciones. Tipos

K es 1-Completo

Teorema

$K = \{x \mid x \in W_x\}$ es 1-completo

Demostración.

Es suficiente mostrar que $K_0 \leq_1 K$

Primero mostramos que $K_0 \leq_m K$

Por el teorema s-m-n, podemos encontrar una función f recursiva tal que

$$\varphi_{f(x)}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varphi_{\pi_2(x)}(\pi_1(x)) \downarrow ; \\ \uparrow, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $x = \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \in K_0 \iff f(x) \in K$



Reducciones. Tipos

Demostración que K es 1-completo

Si f no es inyectiva, se construye una inyectiva f^* tal que

$$K_0 \leq_1 K \text{ vía } f^*$$

Por el lema del relleno, sea t' una función recursiva tal que

$$\varphi_{t'(x,y)} = \varphi_x \text{ y } y_1 \neq y_2 \implies t'(x, y_1) \neq t'(x, y_2)$$

Se define por recursión la función t

- ▶ $t(0, 0) = t'(0, 0)$
- ▶ si $t(x', y')$ está definida para toda $\langle x', y' \rangle$ tal que $\langle x', y' \rangle < \langle x, y \rangle$,
 $t(x, y) = t'(x, z)$, donde

$$z = \mu w [(\forall \langle x', y' \rangle < \langle x, y \rangle) t'(x, w) \neq t(x', y')]$$

De esta forma, se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_{t(x,y)} &= \varphi_x; \\ x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2 &\implies t(x_1, y_1) \neq t(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Ahora se define $f^* = \lambda x [t(f(x), x)]$ que es inyectiva

Reducciones. Tipos

$$K \equiv_1 K_0$$

Corolario

$$K \equiv_1 K_0$$

Reducciones. Tipos

Lema

Lema

Si $K \leq_m A$ y A es **r.e.**, entonces existe una función recursiva g tal que para todo x ,

$$D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset A \implies g(x) \in A - D_x$$

$$D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset \bar{A} \implies g(x) \in \bar{A} - D_x$$

donde D_x es el conjunto finito cuyo índice canónico es x
el índice canónico del conjunto vacío es 0

el índice canónico del conjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ es

$$2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_n}$$

Reducciones. Tipos

Prueba del lema

Sea f tal que $K \leq_m A$ vía f

$$x \in K \iff f(x) \in A,$$

$$x \notin K \iff f(x) \notin A.$$

Se elige un procedimiento efectivo para listar K

Éste produce un procedimiento para listar $f(K)$, que es infinito

Al ser A r.e., hay una función recursiva h tal que

$$W_{h(x)} = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{si } D_x \cap A \neq \emptyset, \\ f^{-1}(D_x), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

g se computa de acuerdo con las instrucciones

- ▶ Si $fh(x) \notin D_x$, $g(x) = fh(x)$
- ▶ Si $fh(x) \in D_x$, $g(x) =$ primer miembro de $f(K)$ que no pertenece a D_x

Como $f(K)$ es infinito, $g(x)$ converge para todo x

g cumple las propiedades del lema

Reducciones. Tipos

g cumple las propiedades. $W_{h(x)} = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{si } D_x \cap A \neq \emptyset, \\ f^{-1}(D_x), & \text{en otro caso} \end{cases}$

▶ Si $fh(x) \notin D_x$, $g(x) = fh(x)$

▶ Si $fh(x) \in D_x$, $g(x) = \text{primero de } f(K) \notin D_x$

Por definición, $g(x) \notin D_x$

$$\begin{aligned} D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset A & \implies & W_{h(x)} = \mathbb{N} \\ & \implies & h(x) \in W_{h(x)} \\ & \implies & h(x) \in K \\ & \implies & g(x) \in A \end{aligned}$$

La última \implies : $fh(x) \in A$ (caso i) o $g(x) \in f(K) \subseteq A$ (caso ii)

$$\begin{aligned} D_x \neq \emptyset \ \& \ D_x \subset \bar{A} & \implies & W_{h(x)} = f^{-1}(D_x) \\ & \implies & h(x) \notin f^{-1}(D_x) \\ & \implies & h(x) \notin W_{h(x)} \ \& \ fh(x) \notin D_x \\ & \implies & h(x) \in \bar{K} \ \& \ fh(x) \notin D_x \\ & \implies & g(x) \in \bar{A} \end{aligned}$$

Reducciones. Tipos

m -completo si y sólo si 1-completo

Teorema

A es m -completo si y sólo si es 1-completo.

Demostración.

\implies) Si A es m -completo, A es r.e. y $K \leq_m A$ vía una f recursiva
Veamos que $K \leq_1 A$ y, como K es 1-completo, A es 1-completo
Sea g la función del lema:

- ▶ Si $fh(x) \notin D_x$, $g(x) = fh(x)$
- ▶ Si $fh(x) \in D_x$, $g(x) = \text{primero de } f(K) \notin D_x$

Definimos f^* como sigue

- ▶ $f^*(0) = f(0)$
Así, $0 \in K \iff f^*(0) \in A$
- ▶ Para computar $f^*(n+1)$ se sigue el ▶ Algoritmo

La función f^* es inyectiva y cumple, para todo x ,

$$x \in K \iff f^*(x) \in A$$

Reducciones. Tipos

Ejercicio 2.3.21

Aplicar el procedimiento de la demostración del Teorema de Myhill cuando se tiene que $A \leq_1 B$ vía f y $B \leq_1 A$ vía g , donde

$$A = \{x \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}$$

$$B = \{x \mid x + 1 \text{ es múltiplo de } 3\}$$

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = x + 1$$

Reducciones. Tipos

Algoritmo del primer ejemplo

1. A partir de x_0 se hallan los quintuplos de la máquina P_{x_0} .
2. A partir de P_{x_0} se hallan los quintuplos de una máquina P tal que P con x e y como input se para
 - a) En el estado *acepta* con output y , si P_{x_0} con input y se para en x o menos pasos
 - b) En el estado *rechaza*, si P_{x_0} con input y no se para en x o menos pasos
3. A partir de P se hallan los quintuplos de una máquina Q tal que Q con input s computa el siguiente programa [Programa](#)
4. A partir de los quintuplos de Q se halla el índice x_1 de la máquina Q

Reducciones. Tipos

Programa del primer ejemplo

$Pila = \emptyset$

$z = 0$

$y = 0$

while $longitud(Pila) < s + 1$ **do**

$P(z, y)$

if $P(z, y)$ se para en **acepta** & $y \notin Pila$

then $Pila = Pila \cup \{y\}$

$y = y + 1$

if $y > z$ **then** $y = 0; z = z + 1$

endwhile

output s

Para cada s , Q enumera (pone en la pila) s elementos de W_{x_0} sin repetir ninguno

▶ Algoritmo

Reducciones. Tipos

Procedimiento para el Teorema de Myhill

- ▶ **Paso 0:** $h_0 = \emptyset$
 - ▶ h_0 es inyectiva y su dominio es finito
 - ▶ Cumple: para todo $y \in \text{Dom}(h_0)$, $y \in A \iff h_0(y) \in B$
- ▶ **Paso $s + 1 = 2x + 1$**
 - ▶ Suponemos que h_s es inyectiva, $\text{Dom}(h_s)$ es finito y para todo $y \in \text{Dom}(h_s)$, $y \in A$ sii $h_s(y) \in B$
 - ▶ Para cada $z \in \text{Dom}(h_s)$, hacemos que $h_{s+1}(z) = h_s(z)$
 - ▶ Si $h_s(x)$ está definido, no hacemos nada más
 - ▶ En otro caso: si $x \notin \text{Dom}(h_s)$, se enumera el conjunto
$$X = \{f(x), fh_s^{-1}f(x), \dots, f(h_s^{-1}f)^n(x), \dots\}$$
hasta que aparezca uno y que no este en el rango de h_s
 - ▶ Definimos $h_{s+1} = h_s \cup \{(x, y)\}$, es decir, $h_{s+1}(x) = y$
Este y debe existir puesto que f y h_s son inyectivas y $x \notin \text{Dom}(h_s)$ ▶ Prueba

Reducciones. Tipos

Procedimiento para el Teorema de Myhill II

► Paso $s + 1 = 2x + 2$

- Suponemos que h_s es inyectiva, $Dom(h_s)$ es finito y para todo $y \in Dom(h_s)$, $y \in A$ sii $h_s(y) \in B$
- Para cada $z \in Dom(h_s)$, hacemos que $h_{s+1}(z) = h_s(z)$
- Si $h_s^{-1}(x)$ está definido, no hacemos nada más
- En otro caso: si $x \notin Dom(h_s)$, se enumera el conjunto
$$X = \{g(x), gh_s g(x), \dots, g(h_s g)^n(x), \dots\}$$
hasta que aparezca uno y que no este en el dominio de h_s
- Definimos $h_{s+1}^{-1}(x) = y$
Este y debe existir puesto que g y h_s^{-1} son inyectivas y $x \notin Rg(h_s)$
- Además $x \in A$ sii $y \in B$, ya que se tienen las equivalencias:

$$\begin{aligned}x \in A &\iff f(x) \in B \\ &\iff h_s^{-1} f(x) \in A \\ &\iff fh_s^{-1} f(x) \in B \\ &\dots\end{aligned}$$

Reducciones. Tipos

Demostración de la existencia de y . $X = \{f(x), fh_s^{-1}f(x), \dots, f(h_s^{-1}f)^n(x), \dots\}$

$Rg(h_s)$ es finito

si no existe ese y , $X \subseteq Rg(h_s)$, X sería finito y

habría dos elementos repetidos en la sucesión

$$f(x), f(h_s^{-1}f)^0(x), f(h_s^{-1}f)^1(x), \dots, f(h_s^{-1}f)^n(x), \dots$$

Sean $f(h_s^{-1}f)^i(x)$ y $f(h_s^{-1}f)^t(x)$ los primeros repetidos con $i < t$

Como $X \subseteq Rg(h_s)$, se tiene que, para cada j ,

$$f(h_s^{-1}f)^j(x) \in Rg(h_s)$$

$$(h_s^{-1}f)^{j+1}(x) \in Dom(h_s)$$

de lo que se sigue que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$x \neq (h_s^{-1}f)^{j+1}(x) \text{ ya que } x \notin Dom(h_s)$$

Al ser f inyectiva, para todo j , $f(x) \neq f(h_s^{-1}f)^{j+1}(x)$ y

$$(h_s^{-1}f)(x) \neq (h_s^{-1}f)^{j+2}(x)$$

En general, para todo k y j , $(h_s^{-1}f)^k(x) \neq (h_s^{-1}f)^{k+j+1}(x)$

Así, no pueden haber elementos repetidos

Reducciones. Tipos

Programa para la demostración del Teorema de Myhill

$$i = 0$$

$$h_i = \emptyset$$

$$h_i^{-1} = \emptyset$$

$$\text{Dom}(h_i) = \emptyset$$

$$\text{Rg}(h_i) = \emptyset$$

while true do

$$h_{i+1} = h_i$$

$$h_{i+1}^{-1} = h_i^{-1}$$

$$\text{Dom}(h_{i+1}) = \text{Dom}(h_i)$$

$$\text{Rg}(h_{i+1}) = \text{Rg}(h_i)$$

$$i = i + 1$$

Reducciones. Tipos

Continuación del programa

```
if  $i = 2x + 1$  then  
  begin  
    if  $x \notin \text{Dom}(h_i)$  then  
      begin  
         $y = f(x)$   
        while  $y \in \text{Rg}(h_i)$  do  
           $y = fh_i^{-1}(y)$   
        endwhile  
         $h_i = h_i \cup \{(x, y)\}$   
         $h_i^{-1} = h_i^{-1} \cup \{(y, x)\}$   
         $\text{Dom}(h_i) = \text{Dom}(h_i) \cup \{x\}$   
         $\text{Rg}(h_i) = \text{Rg}(h_i) \cup \{y\}$   
      endif  
    endif
```

Reducciones. Tipos

Segunda continuación del programa

if $i = 2x + 2$ **then**

begin

if $x \notin Rg(h_i)$ **then**

begin

$y = g(x)$

while $y \in Dom(h_i)$ **do**

$y = gh_i(y)$

endwhile

$h_i = h_i \cup \{(y, x)\}$

$h_i^{-1} = h_i^{-1} \cup \{(x, y)\}$

$Dom(h_i) = Dom(h_i) \cup \{y\}$

$Rg(h_i) = Rg(h_i) \cup \{x\}$

endif

endif

endwhile [▶ Volver](#)

Reducciones. Tipos

Algoritmo para calcular $f^*(n+1)$

If $f(n+1) \in \{f^*(0), \dots, f^*(n)\}$

then

begin

Sea V igual a $\{f(n+1)\}$;

Sea x tal que $D_x = V$;

Se calcula $g(x)$;

while $g(x) \in \{f^*(0), \dots, f^*(n)\}$ **do**

begin

Sea V igual a $V \cup \{g(x)\}$;

Sea x tal que $D_x = V$;

Se calcula $g(x)$

end

$f^*(n+1) = g(x)$;

end

else

$f^*(n+1) = f(n+1)$