Dificultades en el aprendizaje del concepto de límite de una función analizadas en 1º de Bachillerato

Yanis Fontenla Barba

Universidad de Valencia

yafonbar@alumni.uv.es

Miércoles 13 de Julio, 2022

Tabla de Materias

1. Introducción y Motivación
2. Marco Teórico
3. Metodología
4. Cuestiones Teóricas
5. Cuestión Gráfica
6. Cuestiones Prácticas
7. Conclusiones
8. Propuesta de mejora al experimento
9. Bibliografía

Conocer las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos de límite es vital para saber identificar el/los origen/es del problema y poder construir una secuencia para que el docente mejore significativamente su instrucción en la materia. El docente puede comenzar el estudio haciéndose dos preguntas,

- ¿Cuáles son las dificultades conceptuales que pueden hallar los alumnos entorno a la noción de límite?
- ¿Es posible cuantificar estas dificultades pudiendo hallar los obstáculos didácticos en la materia?

El concepto de límite genera muchas dificultades de aprendizaje en los estudiantes debido al alto grado de abstracción del propio concepto en sí de límite y que los estudiantes olvidan con facilidad (Ortega y Blázquez, 2001).

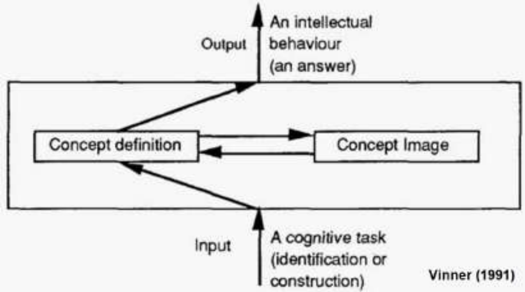
Ello conlleva a un esfuerzo suplementario por parte del docente para conocer estas dificultades y errores, y, poder darles solución.

Marco Teórico

Las definiciones de Tall y Vinner (1981) para comprender los procesos cognitivos que tienen lugar en el estudiante cuando adquiere conceptos:

- La **imagen conceptual** como ese 'algo' que se crea en la mente del estudiante compuesto por diversas representaciones, textos y/o imágenes que los mismos estudiantes recuerdan como ejemplos de dicho concepto.
- La **definición del concepto** como esa componente verbal que un estudiante tiene en la mente y recita cuando es debido.

Los conceptos pueden estar ligadas directamente entre ellas y la información que las definen deben compenetrarse una a otra para el correcto aprendizaje de los conceptos por parte del estudiante.



Marco Teórico

Los estudios e investigaciones en torno al concepto de límite de una función que ayudaron a crear el cuestionario y en el que se apoya este trabajo de análisis de las dificultades son:

- Williams (1991) nos dice que los alumnos no logran adoptar una visión más formal del concepto de límite y tienen dificultades con su representación algebraica y gráfica.
- Jordaan (2005) llega a la conclusión de que los estudiantes entienden el concepto de el límite como algo inalcanzable, usando expresiones 'tiende a' o 'se acerca', ya conocidas por Tall (1991).
- Bezuidenhout (2001) concluye de sus estudios que una gran mayoría de los alumnos de primer año de carrera tienen dificultades en la comprensión de las relaciones entre conceptos y además, se basan en gran medida en hechos y procedimientos aislados.
- Moru (2009) concluye que los alumnos tenían una concepción limitada del número entorno al límite, la expresión 'cerca de' era usada con cierta ambigüedad, los alumnos no aportaban los símbolos correctos y necesarios para definir formalmente el límite de la función. Además, los alumnos negaban la existencia del límite donde la función no estaba definida en la representaciones gráficas de la función.
- Blázquez y Ortega (2000) elaboraron toda una categorización de las dificultades halladas en el aprendizaje del concepto de límite y errores que cometen los estudiantes de Bachillerato al resolver los problemas para ayudar construir una secuencia didáctica que mejore la instrucción.

Marco Teórico

- Gösku (2017), Amatangelo (2013) y Przenioslo (2004) concluyen de sus investigaciones que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y saber interpretar los puntos de tendencia del límite de la función en las representaciones gráficas.

Muchos trabajos incorporan el uso de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para la resolución de problemas y evaluación de los mismos en situaciones reales de aula, donde GeoGebra es recurso muy útil que se apoyan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Hohenwarter y Jones, 2007). Los trabajos son:

- Sari (2017) nos dice que las representaciones geométricas sobre el concepto de límite son importantes para aclarar ideas y mejorar el aprendizaje en los estudiantes.
- Aydos (2018) concluye de sus investigaciones que las puntuaciones promedio de un grupo de estudiantes talentosos aumentó significativamente y que el aprendizaje de las matemáticas mejoró a través de la tecnología, GeoGebra.

Metodología

La intervención del estudiante en prácticas fue realizada sobre el tema de indeterminaciones y las intervenciones de la tutora del centro sobre los conceptos de funciones reales de variable real, recorrido de la función, dominio de la función, concepto de límite de una función en un punto y en el infinito, cálculo de límites y límites laterales. Todos estos son recogidos en el currículo de matemáticas según el Decreto 87/2015.

El experimento abarca los siguientes conceptos básicos del límite de una función:

- Definición de límite de una función $f(x)$ de una variable x.
- Diferencias entre conceptos como, tendencia de la función $f(x)$ acercándose a un punto o $\pm\infty$ y el valor de la función en el punto.
- Estudio de límites en un punto, límites laterales, continuidad y discontinuidad de la función.
- La aplicación del dominio de una función D_f al cálculo de límites, concepto de imagen de la función en un punto y cálculo del límite de la función en el punto.
- Resolución de problemas con indeterminaciones de tipo ∞/∞, $\infty - \infty$ y $\frac{0}{0}$.

Metodología

El diseño del experimento:

- Cuestionario de actividades y problemas.
- 28 participantes (16-18 años) de 1º Bachillerato Científico de un centro de Educación Secundaria de la C. Valenciana.
- Participantes sentados en mesas separadas de 1 a 2 metros entre sí y repartidos por el aula según una disposición en cuadrícula.
- Experimento realizado tras acabar el temario de límites por parte de la tutora del centro y tras la intervención del estudiante en prácticas con los tipos de indeterminaciones ∞/∞ y $\infty - \infty$.
- El cuestionario fue entregado a cada uno de los estudiantes boca abajo, sin posibilidad de leer las cuestiones hasta comenzar el experimento.
- Los participantes tuvieron un total de 35 a 40 minutos para responder a las preguntas del cuestionario.
- El experimento fue realizado el día 3 de marzo del año 2022, en horario de mañana.

El cuestionario consta de 6 preguntas y/o problemas de tres tipos:

- **Tipo teórico** (2): Las preguntas son abiertas y el alumno debe de explicar y argumentar la respuesta con sus propias palabras.
- **Tipo gráfico** (1): Las respuestas a las preguntas sobre representaciones gráficas de una función $f(x)$ son de respuesta a opción múltiple. También deberán de explicar y argumentar con sus propias palabras algunos apartados.
- **Tipo práctico** (3): El alumno deberá contestar a las preguntas por medio de operaciones y cálculos hasta hallar la solución al problema.

Cuestión 1.- Define el límite de una función, para ello puede usar un lenguaje escrito y/o algebraico, incluido símbolos, gráficas y/o tablas.

La cuestión es extraída de los trabajos de estudio de Beynon y Zodman (2015), basado en el trabajo de Williams (1991) y mencionados en Jordaan (2005). Con los resultados, es posible saber como comprenden los alumnos la definición de límite de una función interpretado con sus propias palabras.

Resultados escritos de los participantes a la Cuestión 1

Los estudiantes responden a la cuestión usando un lenguaje sencillo e informal.

el límite de una función es que tendiendo a un número o infinito número de la función delimita.

El alumno argumenta que el límite es la tendencia a un número o infinito. El resultado esta clasificado como **Número** en el diagrama.

El límite de una función es una operación matemática que se utiliza para definir a que valor tiende la y cuando la x tiende a un cierto valor.

El alumno argumenta que el límite es una operación matemática utilizada para definir a que valor tiende la y cuando la x tienden a un cierto valor. El resultado esta clasificado como **Cálculo** en el diagrama.

El límite de una función se basa en el número de en función que define a la gráfica por donde la función tiende en cada lado. como por ejemplo en esta función, su límite es ∞. Límite es el valor que te acercas en el eje "y".

El alumno argumenta que el límite se basa en el número de una función que define a la gráfica por donde la función tiende. Este participante argumenta el resultado entorno a la gráfica. El resultado esta clasificado como **Otro** en el diagrama.

Cuestiones Teóricas

Cuestión 2.- Dados $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $f(x_0)$. Explica el significado de estos dos conceptos.

Cuestión basada en Bezuidenhout (2001), proporciona información sobre límite, función en el punto y continuidad de la función en el punto. Los resultados de los 28 participantes son:

- $39'3\%$ no respondieron a la cuestión.
- $60'7\%$ usan expresiones (tendencia o comportamiento) para explicar el límite de la función en el punto y la función en x_0, conllevando a un barrera conceptual entre las nociones.
- $3'6\%$ usó valores numéricos en la definición de los conceptos.

Ninguno logró relacionar los dos conceptos para introducir o explicar la idea de continuidad de la función en x_0.

Se sustituye "x" por 0 en el límite, hay que cambiar todas las "x" que aparezcan en el límite por el 0, y después operas.

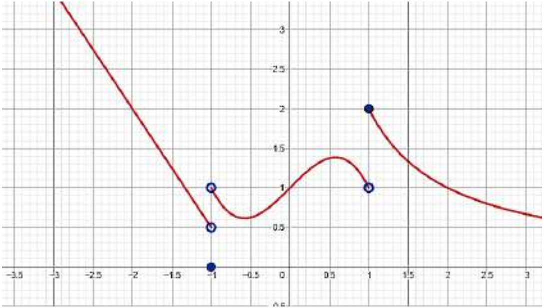
El estudiante aporta un método para resolver un problema de límite por medio de un ejemplo numérico descriptivo.

• $\lim_{x \to x_0}$ → la x del límite tiende a ser un num en concreto.

• $f(x_0)$ → la función es sobre un num en concreto.

El alumno intenta definir los dos conceptos, expone que el $\lim_{x \to x_0}$ es la x del límite tiende a ser un número en concreto y $f(x = 0)$ es la función sobre el número en concreto.

Cuestión 3.- Indica la solución correcta en cada uno de los apartados a partir de la gráfica de la función f(x) (Moru, 2009, Gösku, 2017, Amatangelo, 2013, Przenioslo, 2004, y Jordaan, 2005).



Apartados	Respuestas de alumno			
	Frecuencia absoluta		Porcentaje [%]	
	Correcta	Incorrecta	Correcta	Incorrecta
$\lim_{x \to -\infty} f(x)$	13	15	46'4	53'6
$\lim_{x \to -1^-} f(x)$	14	14	50'0	50'0
$\lim_{x \to -1^+} f(x)$	18	10	67'3	35'7
$\lim_{x \to 1^-} f(x)$	21	7	75'0	25'0
$\lim_{x \to 1^+} f(x)$	18	10	67'3	35'7
$\lim_{x \to +\infty} f(x)$	7	21	25'0	75'0
$f(x = -1)$	6	22	21'4	78'6
$f(x = 1)$	11	17	39'3	60'7

Los resultados, en tanto por ciento, sobre el tipo de error que cometen los estudiantes en sus respuestas incorrectas para cada uno de los apartados del problema.

$\lim_{x\to -\infty} f(x)$: El 86′7% eligió -∞, el 6′6% eligió 0 y 6′6% eligió 0′5.

$\lim_{x\to -1^-} f(x)$: El 35′7% eligió -1, el 35′7% eligió 0 y el 28′6% el 1.

$\lim_{x\to -1^+} f(x)$: El 50% eligió -1, el 20% eligió 0, el 20% eligió 0′5 y el resto no contestó.

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$: El 71′4% eligió 2 y el resto eligieron 1′1.

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$: El 60% de eligió 1 y el 40% eligió -1.

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$: El 52′4% eligió +∞, el 23′8% escogió -∞, el 14′3% contestó 1 y el resto no contestó.

$f(x=-1)$: El 59% contestó -1, el 27′3% eligió 0′5 y el 13′7 % no contestó.

$f(x=1)$: El 82′4% eligió 1, el 5′9% contestó 0 y el 11′8% no contestó.

La gran mayoría de los errores que comenten los alumnos se origina al **identificar tender en una dirección con moverse en el eje x en esa misma dirección** Blázquez y Ortega (2000), contestando erróneamente, y generando confusión al elegir la respuesta correcta en los demás apartados.

Cuestión Gráfica

Comenta brevemente y razonadamente. ¿Qué sucede en el punto x=-1? Para ello explica el comportamiento de la función en los límites laterales (apartados (b), (c)). Además, ¿Qué sucede con la imagen en este punto? (apartado (g)). Finalmente, ¿Qué comportamiento tiene la función en el apartado (f)?

Esta cuestión permite al estudiante argumentar el comportamiento discontinuo de la función en x_0=-1, la tendencias de los límites laterales y la imagen en este punto y, el comportamiento asintótico de la función en el límite cuando x tiende a $+\infty$.

Comenta:

(b) x tiende a ~~∞~~ −1 por la izquierda, por lo tanto, seguimos función de −∞ a −1.

(c) x tiende a −1 por la dcha. por lo tanto, seguimos la función de ∞ hasta −1, siendo el resultado el límite 1.

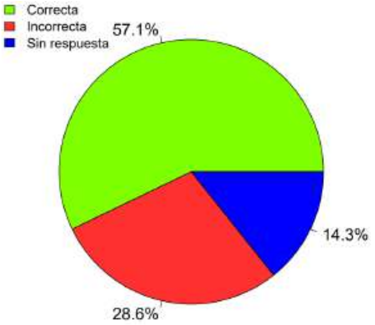
(g) llegan 3 partes de la función 2 abiertas y una cerrada justo en el punto x=−1. así que serían cerrados.

(f) llegan 2 ~~todas~~ partes de la función, como una es abierta y otra cerrada = cerrada

Cuestión 4.- Dada la siguiente expresión: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$,
(a) ¿Cuál es el dominio de la función (Dom_f)?
(b) ¿Cuál es la imagen de la función $f(x)$ en $x = 0$?
(c) Resuelve el límite de la función cuando x tiende a 0 y argumenta cada uno de los pasos que realizas.

La cuestión esta basada en el trabajo de Moru (2009) y proporciona información sobre límite, función en el punto y continuidad de la función en el punto.

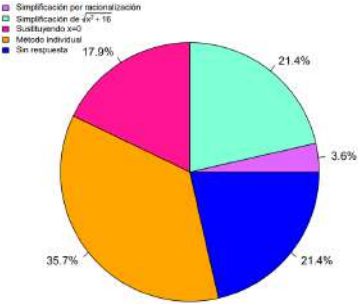
Respuestas de los participantes al Ap.(a)



Respuestas de los participantes al Ap.(b)

Respuestas de los participantes al Ap.(c)

Dificultades de los participantes al Ap.(c)



Solución:

(a) $x^2=0 \Rightarrow x=0 \quad x^2+16=0 \Rightarrow x^2=-16$ no existe $D=\mathbb{R}\sim\{0\}$

(b) $y=\dfrac{\sqrt{0^2+16}-4}{0^2} \Rightarrow y=\dfrac{4-4}{0} \Rightarrow y=\dfrac{0}{0}$

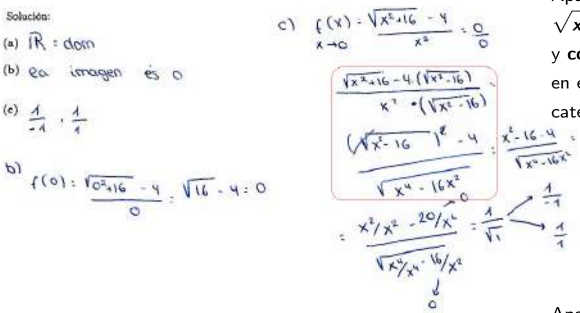
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} \cancel{\rightarrow \lim} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ C. I.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+16-16}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}=$$

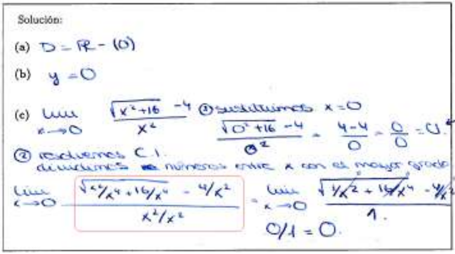
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}=\frac{1}{\sqrt{0^2+16}+4}=\frac{1}{4+4}=\frac{1}{8}$$

Apartado (c): El alumno usa el **método de simplificación por racionalización de radicales** para resolver el problema, según la clasificación **Moru** (2009), y resuelve correctamente el problema.

Resultados escritos de los participantes a la Cuestión 4



Apartado (c): El alumno intenta **simplificar** $\sqrt{x^2+16}$, según la clasificación **Moru** (2009), y **comete errores de cálculo algebraico sencillo** en el paso segundo de la igualdad, según la categorización de **Blázquez y Ortega** (2000).

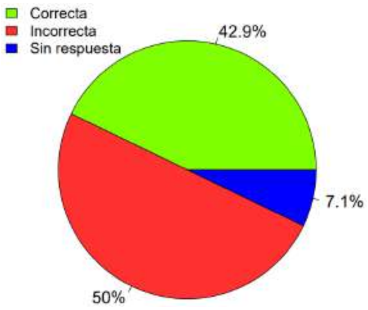


Apartado (c): El alumno usa un **método individual** en la resolución de problema, según la clasificación **Moru** (2009), dado que divide por el término de mayor grado de la función tanto en el numerador como en el denominador sin antes simplificar el numerador.

Cuestión 5.- Resuelve el siguiente límite $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+4} \right)$ y argumenta cada uno de los pasos que realizas.

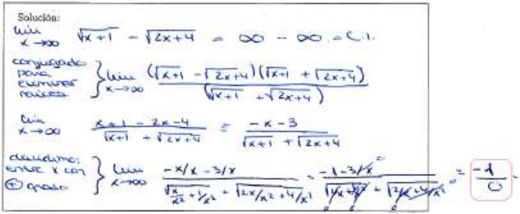
La cuestión plantea la resolución del límite de una función compuesta por la resta de tramas raíz cuadradas y polinómicas. Las respuestas de los estudiantes aportan información sobre las dificultades de los mismos frente al concepto y cálculo de límites, pudiendo categorizarlas por los niveles propuestos por Blázquez y Ortega (2000).

Respuestas de los participantes

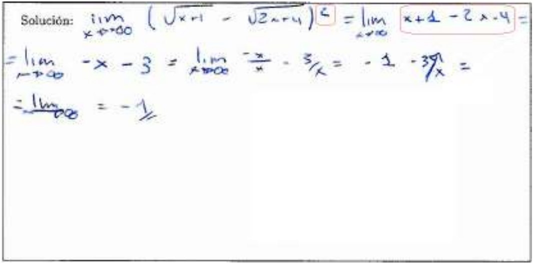


Dificultades de los participantes

Resultados escritos de los participantes a la Cuestión 5

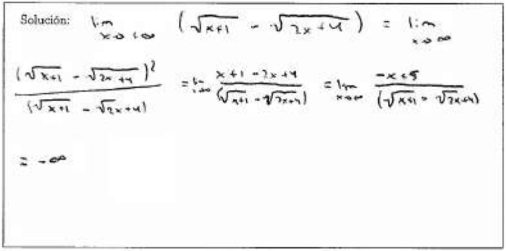

Solución:
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{2x+4} = \infty - \infty = C.I.$
conjugado para eliminar raíces $\left\{ \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+4})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4})} \right.$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-2x-4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4}} = \frac{-x-3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+4}}$
dividimos entre x con ⊕ grado $\left\} \lim_{x\to\infty} \frac{-x/x - 3/x}{\sqrt{\frac{x}{x^2} + 1/x^2} + \sqrt{2x/x^2 + 4/x^2}} = \frac{-1 - 3/x}{\sqrt{1/x + 1/x^2} + \sqrt{2/x + 4/x^2}} = \boxed{\frac{-1}{0}} \right.$

El problema fue resuelto correctamente por el alumno no obstante, no halló el resultado final del problema ya que **confunde límites finitos de infinitos**, según la categorización de Blázquez y Ortega (2000), es decir, no logra identificar que el límite de la función es $-\infty$ cuando x tiende a ∞.


Solución: $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+4})^2 = \lim_{x\to\infty} \boxed{x+1-2x-4} =$
$= \lim_{x\to\infty} -x-3 = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x} - 3/x = -1 - 3/x =$
$= \lim_{\infty} = -1$

El alumno usa un **método individual** según la categorización de Blázquez y Ortega (2000), elevando al cuadrado la función sin más. Además, el alumno comete errores de cálculo sencillo en la resolución del problema, desarrollando el cuadrado de la diferencia.

Resultados escritos de los participantes a la Cuestión 5



Solución: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+4}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}$

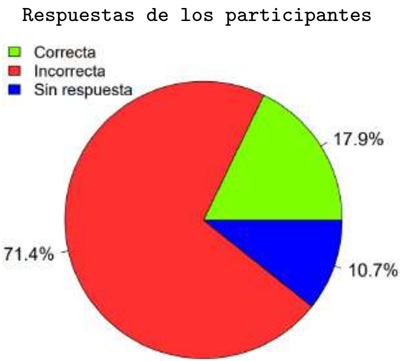
$$\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+4})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+4})} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1-2x+4}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+4})} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+5}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+4})}$$

$= -\infty$

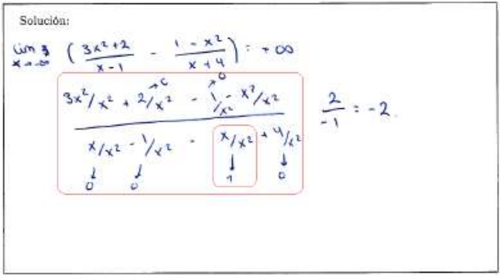
El alumno usa un **método individual** para resolver el problema, según la categorización de Blázquez y Ortega (2000), multiplicando y dividiendo la función por el mismo término, y halla el resultado al problema, -∞. Aunque, no describe todos lo pasos.

Cuestión 6.- Resuelve el siguiente límite $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^2+2}{x-1} - \frac{1-x^2}{x+4} \right)$ y argumenta cada uno de los pasos que realizas.

La cuestión plantea la resolución del límite de una función compuesta por la resta de tramas racionales. Las respuestas de los estudiantes aportan información sobre las dificultades de los mismos frente al concepto y cálculo de límites, pudiendo categorizarlas por los niveles propuestos por Blázquez y Ortega (2000).



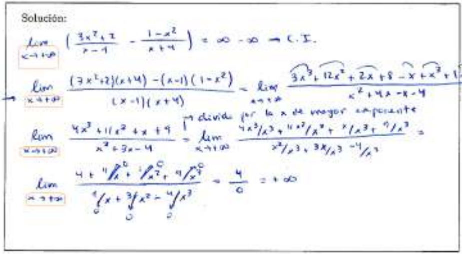
Resultados escritos de los participantes a la Cuestión 6


Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-\frac{1-x^2}{x+4}\right)=+\infty$$

$$\frac{3x^2/x^2+2/x^2-1/x^2-x^2/x^2}{x/x^2-1/x^2\cdot \boxed{x/x^2}+4/x^2}\qquad \frac{2}{-1}=-2$$

El alumno no haya el común denominador de las dos tramas de la función y no aplica correctamente el signo al numerador de la segunda trama. Según la categorización de Blázquez y Ortega (2000), el alumno comete **errores de cálculo algebraico sencillo**. Además, **confunde límites finitos de infinitos** con $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}$ es 1.


Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-\frac{1-x^2}{x+4}\right)=\infty-\infty\to \text{C.I.}$$

multiplica en cruz

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+2)(x+4)-(x-1)(1-x^2)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+12x^2+2x+8-x+x^3+1-x^2}{x^2+4x-x-4}$$

divide por la x de mayor exponente

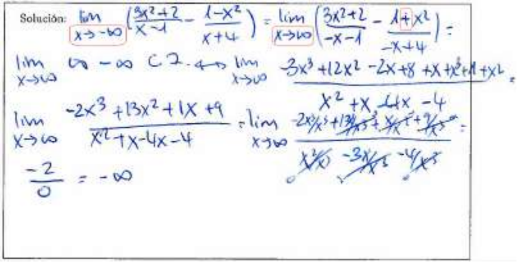
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+11x^2+x+9}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3/x^3+11x^2/x^3+x/x^3+9/x^3}{x^2/x^3+3x/x^3-4/x^3}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4+11/x+1/x^2+9/x^3}{1/x+3/x^2-4/x^3}=\frac{4}{0}=+\infty$$

El alumno **no identifica el signo entorno al límite**, según la categorización de Blázquez y Ortega (2000), y no usa la propiedad operativa de la función que permite deshacerse del signo menos que acompaña al infinito al que tiende la x en el límite ($-\infty \longrightarrow +\infty$ entonces $f(x) \longrightarrow f(-x)$).

Cuestiones Prácticas

Resultados escritos de los participantes a la Cuestión 5



Solución: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-\frac{1-x^2}{x+4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{-x-1}-\frac{1+x^2}{-x+4}\right) =$

$\lim_{x\to\infty} \infty-\infty$ C.I. $\to \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3+12x^2-2x+8+x+x^3+1+x^2}{x^2+x-4x-4} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3+13x^2+1x+9}{x^2+x-4x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x^3}{x^3}+\frac{13x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{9}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{4}{x^3}} =$

$\frac{-2}{0} = -\infty$

El alumno comete un **errores de cálculo algebraico sencillo** al resolver el problema, según la categorización de Blázquez y Ortega (2000). Este, aplica la propiedad operativa (-$\infty \longrightarrow +\infty$ entonces $f(x) \longrightarrow f(-x)$) erróneamente y aun así, halla el resultado del problema (-∞).

Conclusiones

Como bien dice Ortega y Blázquez (2001), el concepto de límite de una función conlleva dificultades de enseñanza para el docente y de aprendizaje por parte de los estudiantes debido al alto grado de abstracción del mismo concepto.

Los resultados de este trabajo dicen que las dificultades de los alumnos se halla sobre todo en:

- Comprender el concepto de límite de una función.
- Comprender la continuidad de la función en el punto y relacionar conceptos.
- Comportamiento discontinuo de las funciones, límites laterales, tendencias asintóticas con un 75% de respuestas incorrectas y la propia función en el punto con respuestas incorrectas de hasta el $78'6\%$.
- Identificar la imagen de la función en un punto donde no existe solución alguna.
- Resolución de problemas indeterminados. Los errores por simplificación de $\sqrt{x^2+16}$ y el uso de métodos individuales de resolución del problema son los más elevados en el apartado (c) de la cuestión 4, con $21'\%$ y $35'7\%$ respectivamente. Resaltan los errores de cálculo sencillo, $21'4\%$ para la cuestión 5 y $39'3\%$ de la cuestión 6, y el uso métodos individuales de resolución del problema, 25% para la cuestión 5 y $28'6\%$ para la cuestión 6.

Propuesta de mejora al experimento

Este trabajo práctico tiene deficiencias o limitaciones a nivel de recursos, como por ejemplo:

- Informáticos para mejorar el aprendizaje de los conceptos.
- Participativos incrementando el número de estudiantes que complete el cuestionario de problemas y así incrementar la estadística de los datos.
- Temporales para ampliar el número de actividades del cuestionario e incluso tener la posibilidad de realizar un pre-test y post-test después de un semestre de docencia.
- A nivel de organización para una mejor planificación y reparto de las actividades entre los alumnos de clase y los diferentes cursos académicos.

Una solución podría ser el programa GeoGebra, creando cuestiones y problemas de límites de una función por medio de su *applet* e interfaz web. Según Sari (2017) y Bustos González (2013) GeoGebra mejora significativamente el nivel de aprendizaje de los alumnos y el nivel de instrucción y evaluación de los docentes. Según Cheng y Leung (2015) es posible realizar una propuesta didáctica mejorando la instrucción y aprendizaje sobre el concepto de límite por medio de representaciones gráficas y visuales.

Bibliografía

Amatangelo, M. L. (2013). Student Understanding of Limit and Continuity at a Point: A Look into Four Potentially Problematic Conceptions (Tesis de maestría) [https://scholarsarchive.byu.edu/etd/3639]. Brigham Young University, Utah, EE.UU

Aydos, M. (2018). The ımpact of teaching mathematics with geogebra on the conceptual understanding of limits and contınuıty: The case of Turkish gifted and talented students. http://hdl.handle.net/11693/30052.

Beynon, K. A. y Zollman, A. (2015). Lacking a Formal Concept of Limit: Advanced Non-Mathematics Students' Personal Concept Definitions, Investigations in Mathematics Learning, 8:1, 47-62, DOI: 10.1080/24727466.2015.11790347

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32:4, 487-500, DOI: DOI: 10.1080/00207390010022590

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000): El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. 970-625-246-0. México.

Bustos González, I. (2013). Propuesta didáctica : la enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del Geogebra (Tesis de maestría). Universidad de Bogotá D.C., Colombia

Cheng, K. y Leung, A. (2015). A dynamic applet for the exploration of the concept of the limit of a sequence. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46 (2), 187-204. DOI: 10.1080/0020739X.2014.951007

Bibliographie

Hohenwarter, Markus and Jones, Keith , BSRLM Geometry Working Group (2007) Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27 (3), 126-131.

Jordaan, T. (2009). Misconceptions of the limit concept in a Mathematics course for Engineering students (Tesis de maestrıa).

Kenneth A. Beynon y Alan Zollman (2015). Lacking a Formal Concept of Limit: Advanced Non-Mathematics Students' Personal Concept Definitions, Investigations in Mathematics Learning, 8:1, 47-62, DOI: 10.1080/24727466.2015.11790347

Moru, E.K. Epistemologial obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: a case from the national University of Lesotho. Int J of Sci and Math Educ 7, 431–454 (2009). DOI: 10.1007/s10763-008-9143-x

Nur, M.G. et al. (2017). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of limit using vignettes.

Ortega, T. y Blázquez, S. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4, 219-236.

Przenioslo (2004). Images of the Limit of Function Formed in the Course of Mathematical Studies at the University. Educational Studies in Mathematics, 55(1/3), 103–132. http://www.jstor.org/stable/4150304

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics. 12. DOI: 10.1007/BF00305619.

Bibliographie

Sari, P. (2017). GeoGebra as a Means for Understanding Limit Concepts. Southeast Asian Mathematics Education Journal, 7, 71-84. DOI: 10.46517/seamej.v7i2.55

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. DOI: 10.1007/0-306-47203-1_5.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. Journal for Research in Mathematics Education, 22(3), 219–236. DOI: 10.2307/749075