

Practica 5

Esta practica consta de 5 ejercicios. Aquí escribiré los códigos fuente(en azul) y comentare los resultados obtenidos al ejecutarlos(en negro). Los archivos *.cpp ,los archivos *.h y los archivos *.exe están en el disquete adjunto.

Ejercicio 1;

Sea el sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4\end{aligned}$$

Que podemos expresar como el producto de una matriz de coeficientes A multiplicada por el vector de incógnitas $x = (x_1, x_2, x_3)$ igual al vector de soluciones $w = (w_1, w_2, w_3)$;

$$A * x = w$$

Este ejercicio consta de tres apartados;

a) Obtener la descomposición de la matriz LU a mano. Este proceso consiste en descomponer la matriz A como el producto de dos matrices triangulares, una inferior(matriz L) y otra superior(matriz U). De forma que podemos escribir la ecuación anterior como;

$$L * y = w$$

Donde $y = U * x$.

Descompondremos la matriz de coeficientes utilizando la descomposición de Dolittle(fijaremos el valor de los coeficientes $l_{kk} = 1$ para $k = 1, 2, 3$). Coeficientes de la matriz L ;

$$l_{11} = 1 \quad l_{12} = l_{13} = l_{23} = 0$$

$$l_{21} = l_{31} = 3/2 \quad l_{22} = 1$$

$$l_{32} = l_{33} = 1$$

Coeficientes de la matriz U ;

$$u_{11} = 2 \quad u_{12} = -1 \quad u_{13} = 1$$

$$u_{21} = u_{31} = u_{32} = 0$$

$$u_{22} = 9/2 \quad u_{23} = 15/2$$

$$u_{33} = -4$$

b) Resolver el sistema mediante dicha composición a mano.

Multiplicando la matriz L por el vector y encontramos el valor de los componentes del vector y .

Cuando conocemos íntegramente el vector y solo tenemos que multiplicar la matriz u por el vector x e igualar con el vector y . Así obtenemos directamente el valor de los componentes del vector x (vector incógnita).

Calculamos el vector y ;

$$L * y = w$$

Obtenemos que $y = (-1, 3/2, 4)$.

Y ahora calculamos el vector x sabiendo que;

$$U * x = y$$

Finalmente obtenemos el valor del vector incógnita x , $x = (1, 2, -1)$.

c) Escribid la matriz del sistema...resolver el sistema. Comprobad que el resultado es correcto.

He escrito la matriz del sistema en el archivo m1p5.dat y el vector de soluciones en el archivo w1p5.dat

xalin(e_1).cpp (solo incluyo los cambios que he introducido en el código);

Incluyo los ficheros m1p5.dat y w1p5.dat donde están declaradas la matriz del sistema y el vector de soluciones

```
string fmatriz="m1p5.dat";  
string fvector="w1p5.dat";  
ALineal xal;
```

Introduzco la dimensión de la matriz de coeficientes, $n = 3$.

```
int n = 3;  
RMatriz m(n,n);
```

El programa funciona correctamente.

Ejercicio 2;

Sean el sistema de ecuaciones;

i)

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & -3x_4 & = 4 \\ x_1 & + 3x_3 + x_4 & = 0 \\ & x_2 - x_3 - x_4 & = 3 \\ 3x_1 & + x_3 + 2x_4 & = 1 \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{rcl} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 12x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 10x_4 & = & -10 \\ 3x_1 - 13x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & -39 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 18x_4 & = & -16 \end{array}$$

a) Resolvedlos mediante el programa xalin.cpp;

Las modificaciones que debo introducir son iguales que en el ejercicio anterior. En los dos casos la matriz tiene dimensión 4.

Escribo la matriz de coeficientes i) en el archivo m2p5.dat, ii) en el archivo m3p5.dat y el vector de soluciones w , i) en el archivo w2p5.dat, ii) en el archivo w3p5.dat

Vector incógnita x , i) $x = (1, 2, 0, -1)$, ii) $x = (1, 3, -2, 1)$

b) Calculo del determinante y de la inversa de la matriz de coeficientes.

Determinante i) -12 , ii) 140

El programa funciona correctamente.

c) Modificad el programa...vuestro programa debe ser capaz de calcular:

i. La inversa de la matriz del sistema A^{-1} .

ii. La solución del sistema de ecuaciones a partir de la ecuación $x = A^{-1} * w$, donde w es el vector de términos independientes y x el vector de incógnitas.

xalin(e_2).cpp (solo incluyo los cambios que he introducido en el código);

```
//Introduzco la modificacion para calcular x en funcion de la matriz inversa.
cout <<"Ahora calcularemos la solucion a partir del conocimiento de la matriz
inversa."<<endl;
cout <<"La inversa de A es,minv= "<< minv <<endl;
cout <<"Si conocemos la matriz inversa,podemos calcular el vector de soluciones como
x=minv*w;"<<endl;
cout <<"El vector de soluciones x es, x= "<< minv*w <<endl;

return 0;
```

El programa funciona correctamente.

Ejercicio 3;

Consideramos la matriz real y simétrica A:

a)En este primer apartado realizaremos una primera iteración del algoritmo de Jacobi a mano. Calculamos la matriz A' a partir de una matriz de rotación R mediante la relación;

$$A' = R * A * R^T$$

Realizaremos esta primera iteración a partir del elemento de mayor modulo fuera de la secuencia principal, el elemento a_{23} .

Obtenemos los elementos a_{ij} de la matriz A' ;

$$\begin{aligned}a_{12} &= a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0.7071 \\ a_{22} &= -1 \\ a_{23} &= a_{32} = 0 \\ a_{33} &= 4 \\ a_{11} &= 2\end{aligned}$$

b)He modificado xdiag.cpp para que calcule los valores propios de la matriz A y sus autovectores. Los valores propios de A son los elementos diagonales de matriz a diagonalizada. Al modificar xdiag.cpp consigo asociar cada uno de esos autovalores a su autovector correspondiente.

```
cout <<"Ahora asociamos cada autovector a su autovalor."<<endl;
RVector a(n);
cout <<"Los autovalores lamda(1),lamda(2)...lamda(n) son los elementos diagonales
de"<<endl;
cout <<"la matriz diagonalizada,siendo lamda(1)=m(1,1)...lamda(n)=m(n,n)."<<endl;
cout <<"Elegiremos las componentes de un vector (a).Si queremos conocer el"<<endl;
cout <<"autovector asociado al autovalor lamda(1),(a) tendra la forma"<<endl;
cout <<"a=(1,0,0...,0).Si queremos conocer el autovector asociado a lamda(2),"<<endl;
cout <<"(a) tendra la forma a=(0,1,0...,0).Asi sucesivamente."<<endl;
for (int i = 1; i <= n; i++)
{
```

```

        cout << "a("<i><<i><<"?" ;
        cin>>a(i);
    }
    cout <<"El autovector asociado al autovalor que has elegido es; "<<
    xd.autovectores()*a<<endl;

```

Cada uno de los autovalores λ_i son los elementos de secuencia principal de la matriz diagonal. De forma que si queremos calcular el autovalor asociado a λ_i solo tenemos que introducir un vector a de n componentes (tantas como la dimensión n de la matriz problema) con $a_i = 1$ y $a_j = 0$ para el resto de elementos del vector a .

Al multiplicar la matriz de autovectores por ese vector unitario obtenemos otro vector que es precisamente el autovector asociado a ese autovalor λ_i

c) Asociamos cada autovalor a su autovector;

$$\lambda_1 = 2.1 \quad P \quad U_1 = (0.95, 0.28, 0.12)$$

$$\lambda_2 = 3.9 \quad P \quad U_2 = (-0.21, 0.89, -0.41)$$

$$\lambda_3 = -2 \quad P \quad U_3 = (-0.22, 0.36, -0.91)$$

d) y e) La matriz de autovectores P es ortogonal y se cumple que $D = P^T * A * P$.
El programa funciona correctamente.

Ejercicio 4;

Repetimos el ejercicio anterior salvo el apartado a) y b) con una matriz A distinta.

c) Asociamos cada autovalor a su autovector;

$$\lambda_1 = 6 \quad P \quad U_1 = (0.5, -0.5, -0.5, 0.5)$$

$$\lambda_2 = 4 \quad P \quad U_2 = (0.5, 0.5, -0.5, -0.5)$$

$$\lambda_3 = 4 \quad P \quad U_3 = (0.5, -0.5, 0.5, -0.5)$$

$$\lambda_4 = 2 \quad P \quad U_4 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

d) y e) La matriz de autovectores P es ortogonal y se cumple que $D = P^T * A * P$.
El programa funciona correctamente.

Ejercicio 5;

Para el caso de matrices reales, simétricas y definidas positivas existe una factorización más sencilla que la LU llamada factorización de Choleski, en la que $A = L * L^T$.

El cálculo es análogo al cálculo de la matriz A en la descomposición LU , solo que en este caso la matriz U es la matriz L^T . Comenzamos con la fórmula de multiplicación de matrices para el caso de la descomposición LU ;

$$a_{ij} = \sum_k l_{ik} u_{kj} \quad \text{para } k = 1 \dots n$$

En el caso de la descomposición de Choleski solo tenemos que intercambiar los elementos u_{kj} por los elementos l_{kj} por tratarse de la misma matriz L traspuesta.

A partir de esta relación calculamos todos los elementos de la matriz A .

$$a_{11} = l_{11} l_{11}$$

$$a_{12} = l_{11} l_{21}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= l_{11}l_{31} \\
a_{13} &= l_{11}l_{31} \\
. \\
. \\
a_{1n} &= l_{11}l_{n1} \\
a_{21} &= l_{21}l_{11} \\
a_{22} &= l_{21}l_{21} + l_{22}l_{22} \\
a_{23} &= l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\
. \\
. \\
a_{2n} &= l_{21}l_{n1} + l_{22}l_{n2} \\
a_{31} &= l_{31}l_{11} \\
a_{32} &= l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \\
a_{33} &= l_{31}l_{31} + l_{32}l_{32} + l_{33}l_{33} \\
. \\
. \\
a_{3n} &= l_{31}l_{n1} + l_{32}l_{n2} + l_{33}l_{n3} \\
a_{n1} &= l_{n1}l_{11} \\
a_{n2} &= l_{n1}l_{21} + l_{n2}l_{22} \\
a_{n3} &= l_{n1}l_{31} + l_{n2}l_{32} + l_{n3}l_{33} \\
. \\
. \\
a_{nn} &= l_{n1}l_{n1} + .. + l_{nn}l_{nn}
\end{aligned}$$

Utilizando el método de descomposición de Choleski tenemos que;

$$(L * L^T) * x = w$$

$$L * y = w$$

$$L^T * x = y$$

Esta es la relación de recurrencia que utilizamos para resolver un sistema de ecuaciones utilizando la descomposición de Choleski, la única diferencia con el método de factorización LU consiste en calcular la descomposición, que obtenemos de forma análoga sustituyendo los elementos de la matriz u_{ij} por los elementos l_{ji} .

Resolución de la matriz A ;

Vector incógnita $x = (1, 1, 1, 1, 1)$

Resolución de la matriz B ;

Vector incógnita $x = (2, -2, -1)$