

## PRÁCTICA N°5: CIRCUITOS RESONANTES. CARACTERÍSTICAS $I(\omega)$ y $\Phi(\omega)$

Objetivos: utilización del osciloscopio para estudiar las características de dos circuitos resonantes (uno en serie y otro en paralelo).

Material: osciloscopio, polímetro, generador de baja frecuencia y componentes RLC.

### 1. CARACTERÍSTICAS DE UN CIRCUITO RLC SERIE

Al mencionar las características de un circuito resonante, como por ejemplo un circuito RLC serie, normalmente uno se refiere a la dependencia con la frecuencia de la corriente y a las diferencias de potencial en sus componentes.

En el caso de un circuito RLC serie, como el indicado en la figura 1, lo más usual es estudiar la dependencia de la corriente  $I$  con la frecuencia angular del generador  $\omega$ . Esta corriente vendrá dada por la expresión:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} \quad (1)$$

Cuya amplitud  $|I|$  y fase  $\Phi$  vendrán dadas por (ver figura 2):

$$|I| = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (2)$$

$$\text{tg } \Phi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad (3)$$

donde hemos tomado el origen de fases en la fuerza electromotriz del generador, es decir,  $\varepsilon = |\varepsilon|e^{j0}$ .

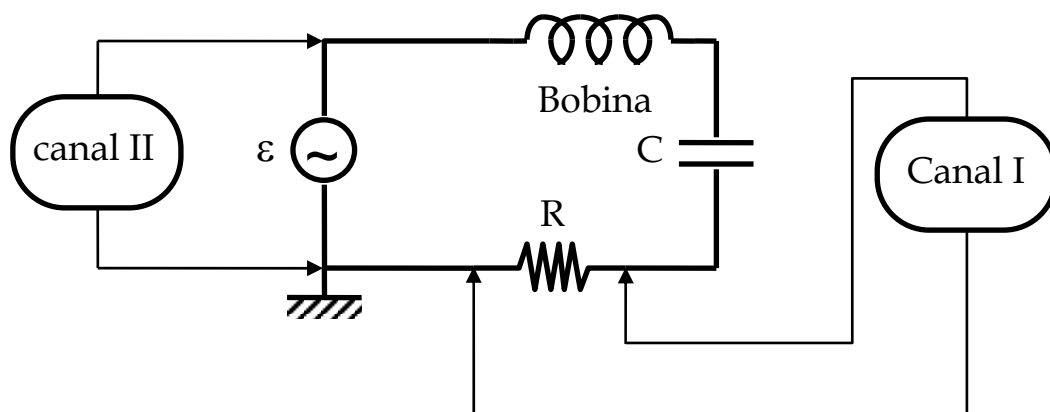


Figura 1. Circuito resonante serie RLC

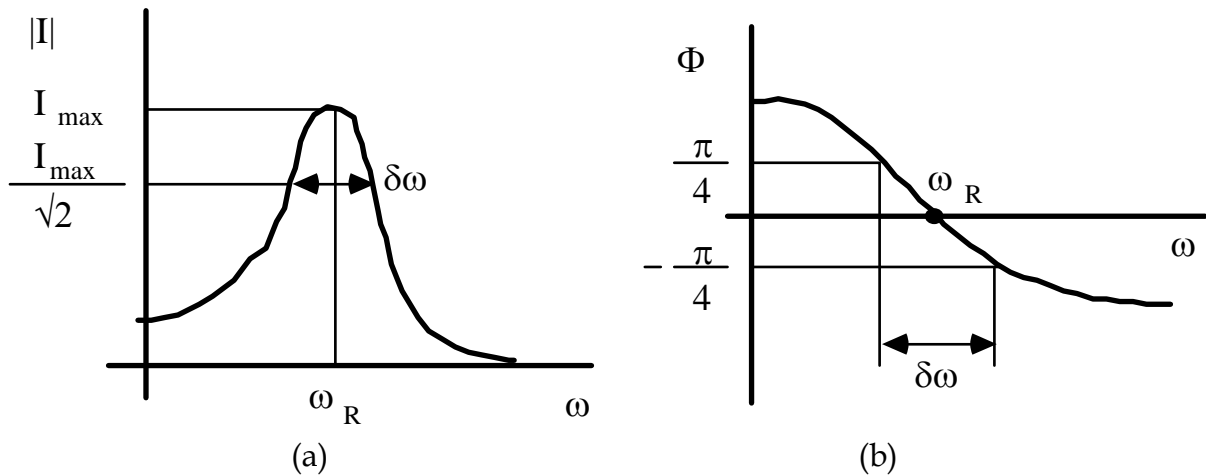


Figura 2. Características de un circuito resonante serie RLC: (a) Módulo de la corriente, (b) Fase de la corriente.

Se define la **frecuencia de resonancia**  $\omega_R$  como aquella frecuencia para la cual el desfase sea cero, por lo que en nuestro caso (ver figura 2b):

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (4)$$

Observemos que cuando  $\omega = \omega_R$ ,  $|I|$  tendrá su valor máximo, tal y como la figura 2a representa de forma esquemática. Una característica que se busca en los circuitos resonantes es que ese máximo de corriente sea lo más agudo posible, lo que permite desarrollar ciertas aplicaciones prácticas de los circuitos RLC, como por ejemplo filtros de frecuencia. Para medir esa característica se define el **factor de calidad**  $Q$  como  $2\pi$  por el cociente entre la energía almacenada y la energía disipada en un ciclo. Esta definición es aplicable a todo tipo de sistema resonante, ya sea mecánico, electromagnético, etc. En el caso de un circuito RLC serie, otra definición de  $Q$  equivalente y de interpretación más directa es:

$$Q = \frac{\omega_R}{\delta\omega} \quad (5)$$

donde  $\delta\omega$  es la anchura del pico de resonancia medida, o bien en la gráfica de  $|I|$  en función de  $\omega$  (figura 2a) en los puntos en los que la corriente se atenúa un factor  $\sqrt{2}$  respecto a su valor máximo, o bien medida en la gráfica de  $\Phi$  en función de  $\omega$  (figura 2b) en los puntos en los que  $|\Phi|$  toma el valor  $\pi/4$ .

El valor de  $Q$  en función de los componentes RLC de acuerdo con las definiciones anteriores viene dado por:

$$Q = \frac{\omega_R L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

Otro circuito resonante muy empleado es el circuito RLC paralelo, que en cierto modo tiene propiedades complementarias respecto del RLC serie. La figura 3 es el esquema del circuito que vamos a estudiar, cuyas ecuaciones teóricas pueden deducirse análogamente a las deducidas anteriormente para el circuito serie. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, hay que considerar la resistencia de la bobina  $R_B$ . Si no la consideramos, el factor de calidad de la resonancia sería  $\infty$ , ya que no se disiparía energía en el circuito (la impedancia del paralelo bobina-condensador,  $Z_{BC}$  sería  $\infty$  en la resonancia, y por tanto no pasaría corriente por R). El cálculo exacto es bastante complicado, pero podemos obtener relaciones sencillas, si tenemos en cuenta las aproximaciones:  $R_B \ll L\omega$  y cerca de la resonancia  $Z_{BC} \gg R$ . Con estas consideraciones se puede obtener:

$$|I| = |\varepsilon| \frac{C}{L} \sqrt{R_B^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (7)$$

$$\text{tg}\Phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_B} \quad (8)$$

En este caso el factor de calidad viene dado por:

$$Q = \frac{\omega_R}{\delta\omega} = \frac{1}{R_B} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

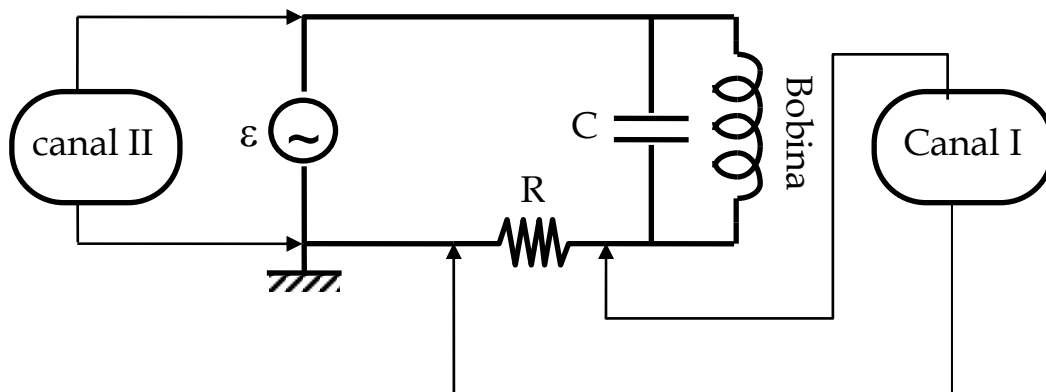


Figura 3. Circuito resonante paralelo

## 2. CARACTERÍSTICAS DEL CIRCUITO RESONANTE SERIE RLC

### 2.1. MEDIDA DE $|I|$ EN FUNCIÓN DE $\omega$

Montar el circuito de la figura 1 y conectar los canales del osciloscopio tal y como se indica. Recordar que la malla exterior de los cables coaxiales debe conectarse siempre a un punto común, tierra o masa, que debe coincidir con la masa del generador de señal; es decir, **todas las mallas externas** de los cables coaxiales deben estar conectadas a un único punto común (Consultar al profesor si tenéis dudas en la forma de realizar la conexión). Observar que la corriente  $|I|$  se calcula dividiendo la

amplitud medida en el canal A (ó I) entre la resistencia R ( $|I| = |V_R|/R$ ). En el eje de abscisas podemos representar  $f$  en lugar de  $\omega$  por comodidad, ya que son proporcionales ( $\omega=2\pi f$ ).

Fijar la amplitud de la señal del generador en un valor dado (canal B ó II del osciloscopio) y **ANOTAD** dicho valor ( $|\varepsilon|$ ). Hacer un primer barrido de frecuencia y observar de forma aproximada el rango en el que se mueve la señal del canal A (ó I) así como el valor aproximado de la frecuencia correspondiente al máximo, o sea  $f_R$  ( $f_R = \omega_R/(2\pi)$ ). Al realizar este barrido debemos observar cualitativamente el comportamiento de la figura 2a (si no lo observamos, consultar con el profesor).

Medir seguidamente con detalle (por ejemplo con pasos de 1 ó 2 kHz fuera de la resonancia, y más pequeños en torno a la resonancia)  $|V_R|$  en función de la frecuencia  $f$  (en el rango entre 2 kHz y 50 kHz), construyendo la tabla:

$f(\text{kHz})$	$ V_R (\text{voltios})$

Conviene incluir en la tabla anterior el valor de  $|V_R|$  justo a la frecuencia de resonancia (valor máximo, en el caso del circuito serie RLC).

Para esta secuencia de medidas **no podemos** cambiar la amplitud del generador de señal ( $|\varepsilon|$ ), puesto que modificaríamos la estructura general de la curva (ver ecuación 2). Conviene tener presente que si por un descuido la modificamos, deberemos repetir toda la secuencia de medidas.

## 2.2. MEDIDA DE $\Phi$ EN FUNCIÓN DE $\omega$

Con el mismo montaje del apartado anterior, mediremos  $\Phi$  en función de  $\omega$  (ó por mayor comodidad  $f$ ) utilizando la configuración XY del osciloscopio (pulsando el conmutador XY que está al lado del mando TIME/DIV) y de acuerdo con las explicaciones del apéndice "Medida de desfases con el osciloscopio". Hacer un primer barrido de frecuencia y observar de forma aproximada cómo se deforma la elipse generada en el osciloscopio. Se observará que la frecuencia de resonancia  $\omega_R$  corresponde al caso de una elipse degenerada en una recta, pues en tal caso  $\Phi=0$ .

Medir seguidamente con detalle  $\Phi$  en función de  $f$ , construyendo la tabla:

$f$	$b$	$a$	$\Phi$

Observar que el signo de  $\Phi$  hemos de dárselo nosotros ya que el método de medida sólo nos proporciona  $|\Phi|$ . La figura 2b nos sirve de orientación para darle el signo adecuado a  $\Phi$ .

### 3. CARACTERIZACIÓN DEL CIRCUITO RESONANTE PARALELO RLC

Montar el circuito de la figura 3. Repetir las medidas de los apartados 2.1 y 2.2 para el circuito paralelo. La frecuencia de resonancia sigue siendo el valor de  $\omega$  que hace que el desfase sea cero, y por lo tanto, sigue cumpliéndose (4). Sin embargo, observar que el comportamiento de dicho circuito es diferente al del apartado 2, tal y como se puede deducir a partir de las expresiones (7) y (8). En la determinación del desfase  $\Phi$  hay que considerar el signo a partir del análisis de (8). Para analizar los resultados conviene medir el valor de  $R_B$  con un polímetro (desconectando previamente la bobina del circuito).

### 4. CUESTIONES

En el circuito serie hay que considerar que el generador y la bobina tienen resistencia interna que puede no ser despreciable frente a  $R$  (sobre todo la del generador,  $r$ ). En realidad, en el circuito serie podemos tener en cuenta todas las resistencias de manera muy simple, basta con cambiar  $R$  por  $R+R_B+r$  en las expresiones (2),(3) y (6). En el circuito paralelo habría que hacer el tratamiento exacto para tener en cuenta todas las resistencias del circuito. El valor de  $R$  se puede deducir del código de colores,  $R_B$  se puede medir con un polímetro y  $r$  está indicado en el generador.

Obligatorias:

- a) Representar gráficamente  $|I|$  en función de  $f$  para el circuito serie. Deducir de dicha gráfica el valor de  $\omega_R$  y luego el de  $L$ , tomando en cuenta el valor conocido de  $C = 47 \text{ nF}$  (ecuación 4). Medir así mismo  $\delta\omega$  en la gráfica y evaluar el factor de calidad  $Q$  con las ecuaciones (5) y (6). Representar sobre la gráfica experimental la curva teórica (ecuación 2), comentando el acuerdo entre ambas.
- c) Representar gráficamente  $\Phi$  en función de  $f$  para el circuito serie. Deducir de la gráfica  $\omega_R$ ,  $\delta\omega$  y  $Q$ . Representar sobre los puntos experimentales la curva teórica (ecuación 3). Comparar el valor de  $Q$  obtenido con el del apartado a).
- e) Representar gráficamente  $|I|$  en función de  $f$  para el circuito paralelo. Deducir de dicha gráfica el valor de  $\omega_R$  y luego el de  $L$ , tomando en cuenta el valor conocido de  $C = 47 \text{ nF}$  (ecuación 4). Comparar los resultados con los del apartado a). Explicar porqué el comportamiento es distinto al del circuito RLC serie. Ayuda: tened en cuenta el distinto comportamiento de la impedancia de bobina y condensador ( $Z_{BC}$ ) en ambos circuitos.

Opcionales:

- d) Repetir para el circuito paralelo el análisis realizado para el circuito serie, es decir, la comparación de las curvas de amplitud y desfase en función de la frecuencia con las curvas teóricas y la obtención del factor de calidad (en este caso conviene obtener  $\delta\omega$  a partir de la gráfica de  $\Phi$  en función de  $f$ ).

## APÉNDICE: MEDIDA DE DESFASES CON EL OSCILOSCOPIO

Dadas dos señales sinusoidales:

$$V_1 = V_{10} \text{ sen}(\omega t + \Phi_1)$$

$$V_2 = V_{20} \text{ sen}(\omega t + \Phi_2)$$

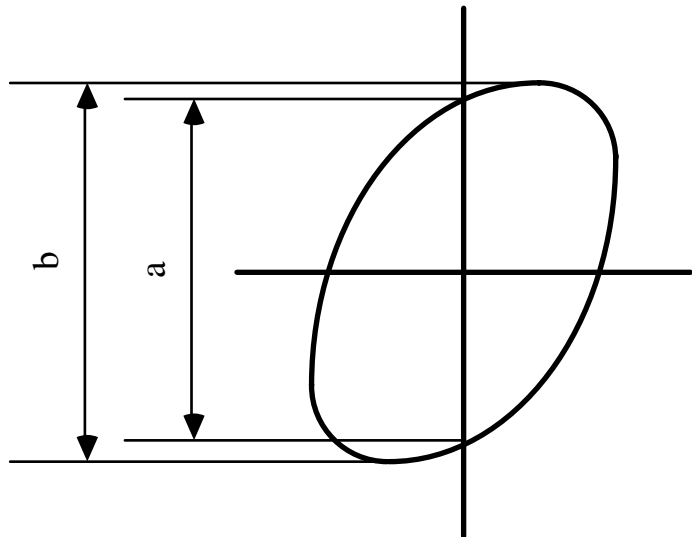
la medida del desfase entre ambas señales  $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  puede realizarse mediante la función XY de un osciloscopio. Previa conexión de  $V_1$  y  $V_2$  a los bornes de entrada de los canales A y B, la función XY configura el osciloscopio de tal modo que en la pantalla se obtiene la gráfica  $V_1$  en función de  $V_2$ .

La gráfica  $V_1$  en función de  $V_2$  es una elipse, a partir de la cual puede medirse el desfase  $\Phi$  mediante la relación:

$$\text{sen} |\Phi| = \frac{a}{b}$$

El valor de  $b$  se puede medir desplazando la posición horizontal (X-POS.) para poder ver mejor las tangentes con el eje vertical. Sin

embargo, observar que para medir el valor de "a", la elipse debe estar bien centrada ya que dicho valor queda determinado por los cortes con el eje vertical. Para centrar perfectamente la elipse podemos usar el conmutador GD. Si pulsamos dicho conmutador para los dos canales, equivale a desconectar las dos señales, con lo que observaremos un punto en la pantalla. Este punto lo centraremos con los mandos que nos permiten desplazar la señal de la pantalla (X-POS. para el eje horizontal, e Y-POS. ó POSITION para el eje vertical). A continuación volveremos a la posición inicial con lo que tendremos la elipse centrada. El cociente  $a/b$  determina el módulo de  $\Phi$ , y su signo debe deducirse o bien por consideraciones físicas o bien por otras medidas distintas.



(Se leerá mejor si usamos los resultados o datos importantes)

# PRÁCTICA N°5: CIRCUITOS RESONANTES

10

3-12-09

## 2. Características del circuito RLC.

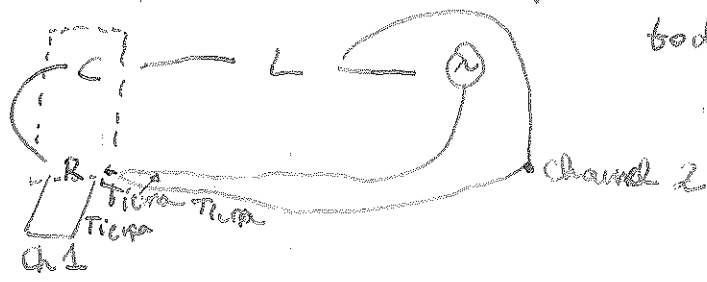
$r_{int} = 2,0 \pm 0,1 \Omega$ ,  $r_{ext} = 5 \pm 0,00030 \pm 0,0003$   
 $L = 3,8 \pm 0,1 \mu H$

2.1.  $|E|$  (V)

$C = 47 \mu F$

$N = 400$  espiras  
 $R_B = 2,6 \pm 0,1 \Omega$  (multímetro)

Montamos el circuito de la Figura 1 teniendo en cuenta juntar todos los cable-tierra.



Medimos la resistencia  $R$  con el multímetro y comparamos con el valor nominal:

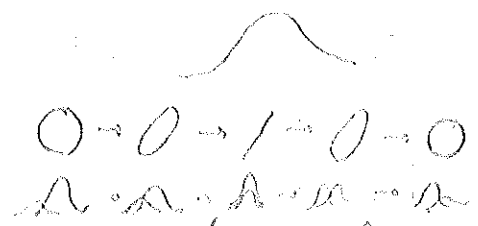
$R = 47,1 \pm 0,5 \Omega$   $\rightarrow$   $47 \Omega \pm 5\% = 47 \pm 2 \Omega$   
 $\rightarrow$  valores compatibles

Medimos los valores de  $V$  para distintas frecuencias, una vez fijada una amplitud en la señal del generador.

Medimos con el osciloscopio:

$2|E| = 15,2 \pm 0,4 V$

$|E| = 7,6 \pm 0,2 V$



Potencia consumida

En el primer barrido de frecuencias observamos cómo a bajas frecuencias, la señal  $V_R$  tiene muy poca amplitud, y la señal del generador tiene la amplitud  $E$  esperada. Además, la señal de  $V_R$  está desfasada prácticamente  $\pi/2$  respecto al generador (retrasada  $\rightarrow \Phi > 0$ ). En el modo x-y se observa una elipse prácticamente centrada. Al aumentar la frecuencia, la elipse se va inclinando, y la amplitud de  $V_R$  aumenta, mientras que la del generador  $E$  disminuye, lo que indica que el generador no se comporta idealmente debido a su impedancia ( $50 \Omega$ ) y a que cerca de la resonancia, cede mucha energía al circuito. Cerca de  $13 kHz$ , se encuentra la resonancia en amplitud alrededor de  $6,6 V$ , y en este caso la elipse ha degenerado en una recta. Las señales  $V_R$  y  $E$  están ahora en fase (no hay retardo:  $\Phi = 0$ ) y la amplitud  $E$  ha disminuido por ser no ideal hasta el valor mínimo. Si aumentamos más la frecuencia,  $V_R$  se adelanta a  $E$  ( $\Phi < 0$ ), la amplitud de  $V_R$  disminuye y  $E$  aumenta, y la recta en x-y se vuelve a transformar en una elipse con inclinación similar a la anterior a la resonancia. A medida que vamos aumentando la frecuencia, la elipse se va centrando progresivamente y la amplitud  $V_R$  disminuye (teóricamente,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I = \frac{E}{Z}$  y  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_R \rightarrow 0$ ), aunque a altas frecuencias aparecen efectos extra de impedancias en las resistencias. ( $\sim MHz$ ) El hecho de que la medida de  $E$  disminuya puede corregirse teniendo en cuenta una resistencia  $r = 50 \Omega$  en serie con  $R$ , que justifica la caída de potencial extra en  $E$ , en especial a altas corrientes (resonancia).

$f$ (kHz)	2 VR1
$2,00 \pm 0,02$	$453 \pm 5$ mV
$4,00 \pm 0,02$	$1991 \pm 5$ mV
$5,50 \pm 0,05$	$1,49 \pm 0,01$ V
$6,65 \pm 0,05$	$2,00 \pm 0,02$ V
7,70	$2,50 \pm 0,02$ V
8,70	2,95
9,35	3,50
9,80	3,93
$10,9 \pm 0,1$	4,98
$10,5 \pm 0,1$	4,52
$11,3 \pm 0,1$	5,48
$11,6 \pm 0,1$	6,01
12,3	6,51
12,7	6,58 $\rightarrow$ reson.
13,1	6,50
14,4	5,97
15,0	5,53
15,5	4,98
16,2	4,45
16,9	4,01
18,1	3,46
19,3	2,97
21,0	2,52
24,4	2,00
29,0	1,51
39,2	$998 \pm 5$ mV
72,0	$492 \pm 2$ mV

la medida de frecuencias, en lugar de utilizar el display del generador, lo medimos con el período del osciloscopio mediante los cursores en el modo  $\frac{1}{\Delta t}$ . El error lo estimamos analizando el intervalo de valores en que la posición del cursor no varía apreciablemente. La estimación del error de 2VR1 es similar.

En lugar de espaciar las medidas en frecuencias, invertimos las variables y movemos la frecuencia hasta que el voltaje aumenta un paso de 0,5V aproximadamente. De esta manera obtendremos un espaciado más adecuado para una gráfica sin puntos apretados.

El valor de 2VR1 en la resonancia (para  $f = 11,7 \pm 0,1$  kHz se ha determinado con precisión, y se ha verificado que en el modo x-y, la clipper había regenerado en una recta.

Con el valor de  $f_0$  y el valor nominal de  $C = 47$  nF, podemos calcular  $L$ :

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C} = 3,34 \pm 0,03 \text{ mH}$$

En cuanto a los valores de  $V_a$ , se observa una resonancia (máximo) en  $f_r$  y decaimiento a ambos lados, pero menos pronunciado por la parte derecha (mejor espaciado en la frecuencia), lo que indica que la curva (de tipo lorenciano) será asimétrica, con una cola larga por la derecha.

$$L_{tes} = \mu_0 N^2 S/l = 4,8 \pm 0,15 \text{ mH}$$

El valor es sensiblemente diferente al experimental, lo que puede deberse a que  $S$  no es correcto calculado como media de  $r_{int}$  y  $r_{ext}$  (por eso asoció un error grande, que sí solapa el error con el  $L$  experimental (mismo orden de magnitud).



2.2.

En el modo x-y, al hacer un primer barrido, observamos lo descrito en 2.1. En este caso, utilizaremos las mismas frecuencias que en 2.1, y para agilizar el procedimiento experimental, tomaremos como valor el del display del generador, pues en todas las medidas de 2.1 la discrepancia del valor marcado y el medido era del orden del margen de incertidumbre. La frecuencia de resonancia la encontramos en el display en  $f_r = 12,34 \pm 0,02 \text{ Hz}$ , pero no consideramos en general el mismo error que en las medidas con el osciloscopio, para evitar un posible error sistemático por leves desviaciones en el calibrado. En general  $f_r \approx f_{gen}$ .

$f \text{ (kHz)}$	$b \text{ (V)}$	$a \text{ (V)}$
$2,00 \pm 0,02$	$15,1 \pm 0,1$	$14,8 \pm 0,1$
$4,00 \pm 0,02$	15,0	14,7
$5,50 \pm 0,05$	14,8	14,6
$6,65 \pm 0,05$	14,6	14,3
7,70	14,3	13,9
8,70	13,8	13,2
9,35	13,3	12,6
9,80	12,8	11,9
$10,5 \pm 0,1$	11,9	10,4
10,9	11,3	$9,38 \pm 0,02$
11,6	$9,80 \pm 0,02$	6,76
11,9	$10,4 \pm 0,1$	8,06
12,3	$8,42 \pm 0,02$	3,40
12,8	7,92	0
13,1	8,02	$0,86 \pm 0,02$
14,4	9,68	6,60
15,0	$10,7 \pm 0,1$	8,46
15,5	11,4	9,58
16,2	12,1	10,7
16,9	12,7	11,6
18,1	13,4	12,5
19,3	13,8	13,1
21,0	14,1	13,6
24,4	14,5	14,2
29,0	14,7	14,5
39,2	14,9	14,7
72,0	15,1	15,0

Para realizar estas medidas se han centrado previamente las señales pulsando los botones GD de cada canal.

En este caso, con  $f_r$  según el generador,

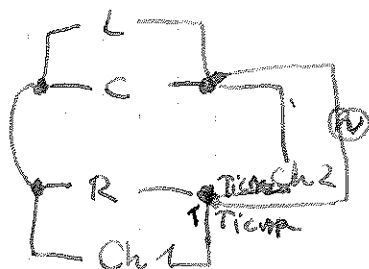
$$L = 3,22 \pm 0,08 \text{ mH},$$

valor compatible con el calculado en 2.1, como era lógico al ser similares las  $f_r$ .

Esto es también compatible.

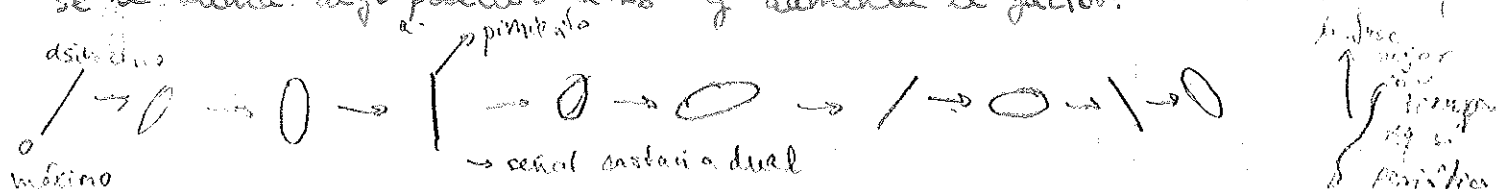
### 3. Circuito resonante RLC paralelo

misma  $|E|$



mínimo (figuras quebradas)

En un primer barrido, se observa un comportamiento distinto al RLC serie, pues se aprecia un mínimo cerca de la frecuencia de resonancia en  $V_R$ , en lugar de un máximo, y para frecuencias bajas y altas, parece que  $V_R$  tiende asintóticamente a un valor máximo. Esto se ve justificado por la ecuación (7), en la que el término de  $\omega - 1/\omega$  está ahora en el numerador. En resonancia, el sumando es cero y tenemos un mínimo, mientras que para valores distintos, al estar dividido al cuadrado, se le suma algo positivo a  $R^2$  y aumenta el factor.



El valor de  $E$ , a diferencia del circuito anterior es máximo en el mínimo de resonancia, y disminuye algo para altas y bajas frecuencias.

En cuanto al modo x-y, el aspecto varía sensiblemente respecto a RLC serie. En primer lugar se constata que la frecuencia de resonancia coincide con 2, ( $f_r \approx 42,5 \pm 0,1 \text{ kHz}$ ), que corresponde a una recta algo quebrada, con un aspecto sinusoidal y prácticamente vertical. Al ser la  $V_R$  pequeña, aparecen distorsiones en la señal inicial y comportamiento no ideal. Por otro lado, si bajamos desde  $f_r$  a 0, vamos viendo elipses que se inclinan hacia la derecha y tienden progresivamente (asintóticamente) a otra recta (pues a bajas frecuencias hay un máximo en RLC paralelo). Si aumentamos  $f_r$  a valores altos, la elipse centrada se va inclinando y se transforma en una recta. Si subimos la frecuencia lo suficiente, dicha recta se vuelve a transformarse en una elipse (inclinada hacia la izquierda), y esta de nuevo en una recta (sig.), y otra vez una elipse. Este comportamiento no está predicho por la fórmula (7), que solo es válida cerca de la resonancia. Si realizamos el análisis del RLC paralelo sin aproximaciones, se puede ver que a frecuencias bajas,  $\omega \rightarrow 0$ , como hemos visto, pero también a frecuencias muy altas, lo cual contradice la derivación. El hecho de que veamos varias resonancias se debe a que a frecuencias muy altas, las resistencias del circuito dejan de ser ideales y también tienen parte compleja en la impedancia, lo que hace que el circuito deje de ser RLC paralelo puro.

En cuanto al desfase entre las señales,  $V_R$  y  $E$ , se observa que antes de la resonancia,  $V_R$  está adelantada a  $E \rightarrow \Phi < 0$ , mientras que después de  $f_r$ , está retrasada ( $\Phi > 0$ )

(\*) Como la señal está distorsionada, pero sigue siendo periódica, se podría mejorar la medida con el método del desfase en el modo dual.

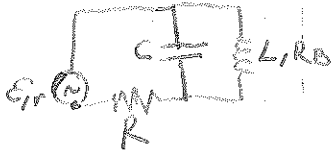
$f$ (kHz)	$2 V_{r1} $ (V)	$b$ (V)	$a$ (V)
$2,00 \pm 0,02$	$6,50 \pm 0,02$	$8,96 \pm 0,02$	$5,34 \pm 0,02$
$4,00 \pm 0,02$	5,67	$10,5 \pm 0,1$	$8,56 \pm 0,02$
$5,50 \pm 0,05$	4,26	12,6	$11,7 \pm 0,1$
$6,65 \pm 0,05$	3,45	13,5	12,8
7,70	2,73	14,0	13,4
8,70	2,12	14,3	13,3
9,35	1,77	14,5	14,2
9,80	1,51	14,6	14,4
$10,5 \pm 0,1$	1,14	14,8	14,4
10,9	$0,940 \pm 0,005$	14,9	14,4
11,3	0,746	14,9	14,4
11,6	0,603	14,9	14,4
12,3	0,291	14,9	13,7
$12,92 \pm 0,10$	0,151	15,0	0
	0,575	14,9	14,4
$14,4 \pm 0,1$	0,792	14,9	14,5
15,0	0,966	14,9	14,5
15,5	$1,20 \pm 0,02$	14,8	14,5
16,2	1,43	14,7	14,4
16,9	1,80	14,6	14,3
18,1	2,12	14,5	14,0
19,3	2,56	14,2	13,7
21,0	3,28	13,6	13,0
24,4	4,04	13,0	12,0
29,0	5,14	11,6	10,1
39,2	6,48	$9,22 \pm 0,02$	$6,30 \pm 0,02$
72,0 11 MHz	8,20	$10,1 \pm 0,01$	$9,16 \pm 0,02$

poner  
valores  
 $\Phi$

4.

En el circuito serie hemos tenido en cuenta a la hora de hacer los cálculos la  $r$  y la  $R_B$ .

En el circuito paralelo, hacemos un análisis más completo para poder ajustar la curva bajo de la resonancia.



$$Z_{tot} = r + R + Z_{BC}$$

$$Z_{BC} = \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C}$$

$$Z_B = R_B + jL\omega \quad Z_C = -\frac{j}{C\omega}$$

$$= \frac{(R_B + jL\omega)(-j/C\omega)}{R_B + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

→ si  $R_B \ll L\omega$   
 $2,6 \Omega \ll 0,003 \cdot 2\pi f \rightarrow f \gg 120 \text{ Hz}$

aproximación válida pues  $f_{res} = 2 \text{ kHz}$

$$\approx \frac{L/C}{R_B + j(L\omega - 1/C\omega)}$$

$$Z_{tot} = R + r + Z_{BC} = R + r + \frac{L/C \cdot e^{i\theta}}{\sqrt{R_B^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}$$

$$= R + r + \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$I_r = \frac{|E_r| e^{j\omega t}}{Z_{tot}} \Rightarrow |I_r| = \frac{|E_r|}{|Z_{tot}|} = \frac{|E_r|}{[(R+r + \rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{E}{(R+r + \rho \cos \theta + j \rho \sin \theta)} = \frac{|E|}{((R+r)^2 + \rho^2 + 2(R+r)\rho \cos \theta)^{1/2}}$$

$$2|V_r| = \frac{2|E| \cdot R}{\sqrt{(R+r)^2 + \rho^2 + 2(R+r)\rho \cos \theta}} \rightarrow \text{ecuación 3.1 a ajustar}$$

$$\Phi = -\arctg\left(\frac{\rho \sin \theta}{R+r + \rho \cos \theta}\right) \rightarrow \text{ecuación 3.2 a ajustar}$$

... (a) ...

a ... ?

4a)

para ...

¿Has probado a d...  
libe...  
(...  
añadiendo  $V_R$  a  $2V_R$ )

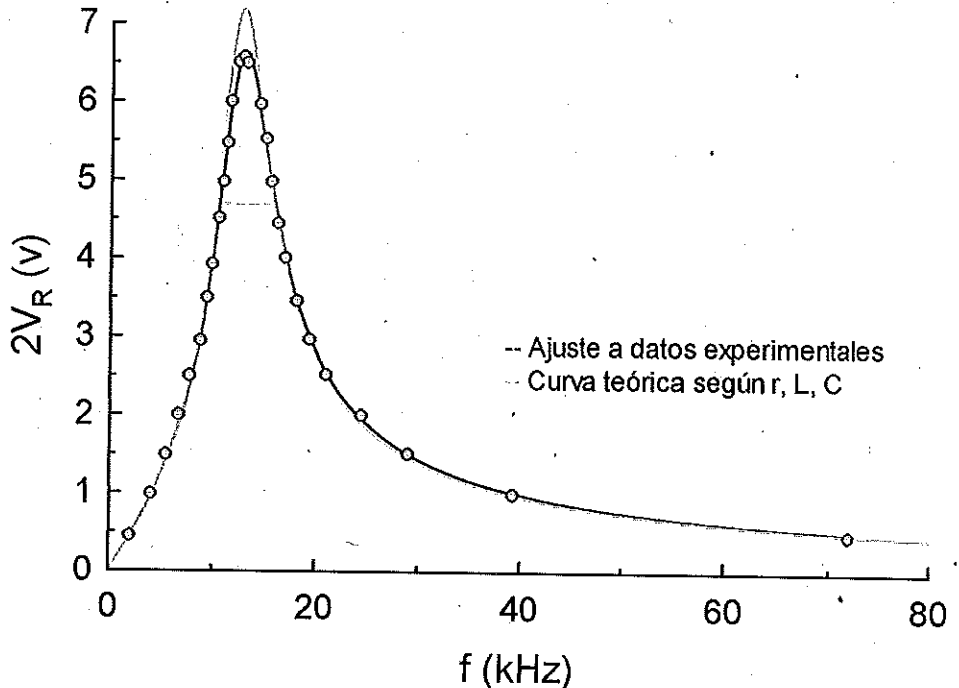


Figura 2.1: Resonancia en un circuito RLC serie de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia. Comparación del ajuste con la curva teórica.

Ecuación:  $2 V_R = 15,2 \cdot 47,1 \cdot 1 / ((47,1 + r + 2,6)^2 + (2\pi f L - 1/(2\pi f C))^2)^{1/2}$

Curva teórica:  $C = 47 \text{ nF}$ ,  $L(f_r) = 3,29 \pm 0,07 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

Resultados del ajuste:  $mcc = 0,9992$

$r = 58,5 \pm 1,2 \Omega$

$L = 3,18 \pm 0,06 \text{ mH}$

$C = 47,4 \pm 1,0 \text{ nF}$

Corte con  $V_{max}/2^{0.5}$  en  $f_1 = 10,53 \pm 0,02 \text{ kHz}$  y  $f_2 = 15,95 \pm 0,02 \text{ kHz}$

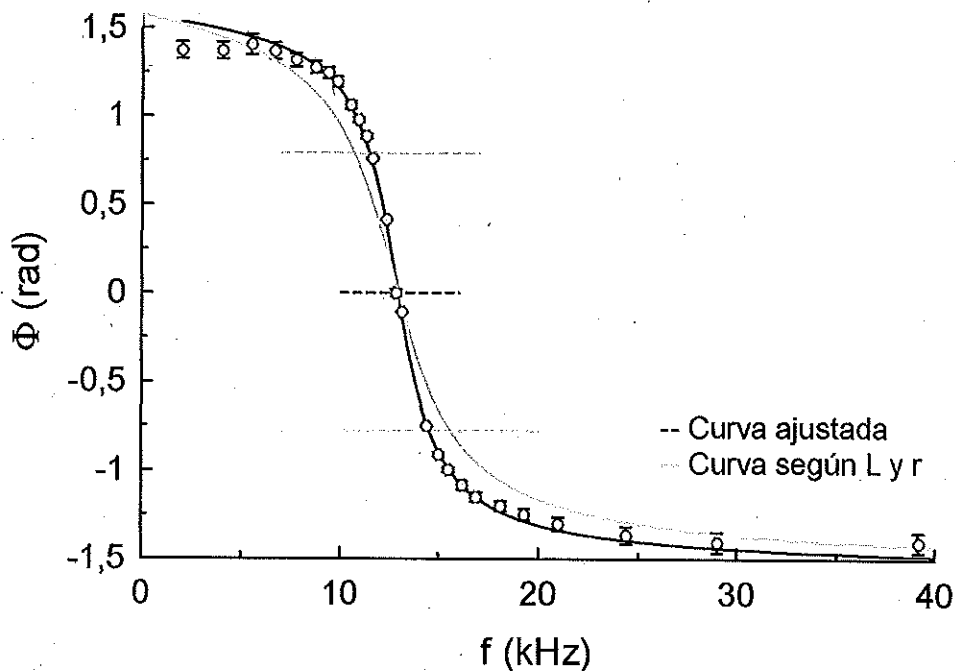
$f_{r,aj} = 12,96 \pm 0,04 \text{ kHz}$  (leído en la gráfica)  $\delta f = 5,42 \pm 0,03 \text{ kHz}$

Se observa que el ajuste a los puntos es muy bueno por el alto coeficiente de correlación lineal y la escasa dispersión. Además, el valor de los parámetros ajustados es compatible con los valores nominales y esperados.  $C$  coincide con el valor nominal, y  $L$  en el calculado a partir de la  $f_r$ .  $r$  difiere sensiblemente del valor nominal de  $50 \Omega$ , que no heules medido, con lo que podría ser distinto, ya que el acuerdo de la curva teórica con los puntos, es peor en especial por esa desviación (a menor  $r$ , la curva es más picuda). No obstante, la desviación es pequeña, y podría mejorarse consultando el manual del fabricante los datos del fabricante sobre el error en la impedancia. Si calculásemos  $L$  a partir de la  $f_r$  del ajuste y el valor nominal de  $C$ , obtenemos  $3,21 \pm 0,07 \text{ mH}$ , mientras que para  $C_{aj}$ ,  $L$  es el del ajuste, siendo todos los valores compatibles.

En cuanto al factor de calidad, según (5)  $Q = \frac{\omega L}{R+r} = \frac{f_r}{\delta f} = 2,391 \pm 0,015$  y según (6),  $Q' = \frac{1}{R+r+R_0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 2,161 \pm 0,06$ , que difiere sensiblemente

del valor anterior. Si en lugar de tomar  $r$  nominal cogemos, el del ajuste (que es lo lógico si queremos comparar las dos  $Q$ ), qued  $Q'' = 2,33 \pm 0,06$ , que verifica la equivalencia de las ecuaciones 5 y 6. En cuanto al factor de calidad puede decirse que no es excesivamente grande, lo que se corresponde a una curva poco picuda (en comparación con una radio, por ejemplo), en parte debido a la existencia y al valor pequeño de la  $L$  pocas espiras. ✓

↑



**Figura 2.2:** Resonancia en un circuito RLC serie. Desfase de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia respecto al generador.

*Ecuación:*  $\Phi = \text{atan} \left( -\frac{2\pi f L - 1/(2\pi f C)}{47,1 + 2,6 + r} \right)$

*Curva teórica:*  $C = 47 \text{ nF}$ ,  $L(f_r) = 3,22 \pm 0,07 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

*Resultados del ajuste:*  $mcc = 0,999$

$$r = 13 \pm 4 \Omega$$

$$L = 3,23 \pm 0,04 \text{ mH}$$

$$C = 47 \text{ nF (valor nominal, no del ajuste)}$$

Corte con  $\pi/4$ :  $f_1 = 11,48 \pm 0,02 \text{ kHz}$ . Corte con  $-\pi/4$ :  $f_2 = 14,55 \pm 0,02 \text{ kHz}$ .

Corte con 0:  $f_r = 12,30 \pm 0,02 \text{ kHz}$

$$\Delta f = 3,07 \pm 0,03 \text{ kHz}$$

A partir de la curva ajustada y los puntos experimentales, se comprueba que  $f_r = 12,30 \pm 0,02 \text{ kHz}$ , valor compatible con lo esperado y los anteriores calculados, así como con la medida experimental directa. El ajuste es aceptable (salvo en los primeros puntos), pero el valor de  $r$  no coincide con lo esperado, y la gráfica teórica no concuerda nada bien con la distribución de puntos experimentales, lo cual indica un error en los valores nominales, o un error sistemático en el método de medida de las clipres, o bien un incorrecto desarrollo teórico como no tener en cuenta algún componente no ideal, efectos de carga, ...

El valor de  $\Delta f$  también sale distinto, menor que el anterior y que el que se esperaba según la curva teórica. En consecuencia, el valor de  $Q \propto \frac{1}{\Delta f}$  será mayor, como también se esperaba por ser  $r$  en el ajuste mucho menor que en el caso anterior (como si en el método de las clipres, la impedancia del generador se hubiese reducido drásticamente pero no  $L$ ,  $C$  y  $f_r$ ). Así pues:

$Q = \frac{1}{\Delta f} = 4,20 \pm 0,04$ , que difiere notablemente de los  $Q$  anteriores. Según 6 y los valores del ajuste,  $Q' = 4,2 \pm 1,3$  (como % grande en  $\Delta f$ ).

Los desviados en 2.2. cerca de  $f \approx 12 \text{ kHz}$  se deben a que es más complicado apreciar la diferencia entre  $a$  y  $b$ , y a que he reducido el error en el cociente según propagación matricial. En especial, el valor en la apreciación de  $a$  varía mucho en la clipse centrada de cara al resultado final (ya que el error con la derivada es muy grande. Si se estima el error suponiendo que los errores de  $a$  y  $b$  son independientes, las barras de error se llegan hasta la nube.

x-y  
r(w)  
?

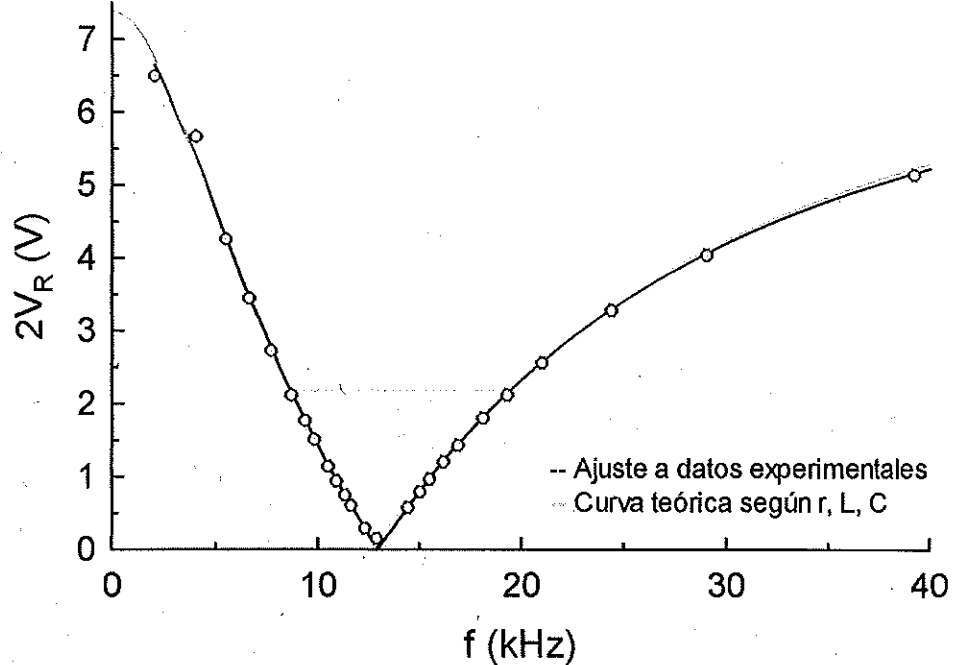
clipres?

?  
qual  
ni 3?

¿falta  
carga  
en  
método  
clipres?  
(r)  
-r

?

4b, c



**Figura 3.1:** Resonancia en un circuito RLC paralelo de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia. Comparación del ajuste con la curva teórica.

Ecuación: (3.1)

Curva teórica:  $C = 47\text{nF}$ ,  $L(f_r) = 3,29 \pm 0,07\text{ mH}$ ,  $r = 50\ \Omega$

Resultados del ajuste:  $mcc = 0,9993$

$r = 52,5 \pm 1,9\ \Omega$

$L = 3,17 \pm 0,06\text{ mH}$

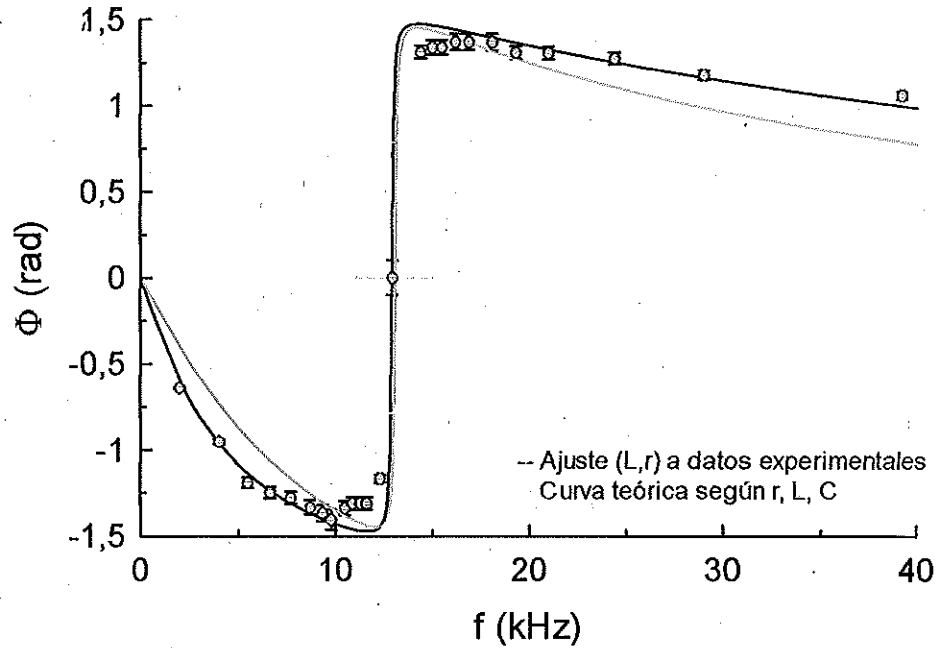
$C = 47,4 \pm 1,0\text{ nF}$

(Corte con  $V_{max}/2^{0.5}$  en  $f_1 = 8,60 \pm 0,02\text{ kHz}$  y  $f_2 = 19,45 \pm 0,02\text{ kHz}$   
 $f_r = 12,98 \pm 0,05\text{ kHz}$  (leído en la gráfica)  $\delta f = 10,85\text{ kHz} \pm 0,03$ )

En el caso del circuito paralelo, obtenemos una bobinada invertida, con un mínimo a la frecuencia de resonancia del RLC serie. El ajuste a la ecuación es muy bueno, y los parámetros son compatibles todos con los valores nominales y experimentales. En este caso,  $r$  sí es compatible con  $50\ \Omega$  (nominal).  $C$  es consistente con el valor nominal y  $L$  solapa su error con valores calculados anteriormente. En consecuencia, la curva ajustada concuerda muy bien con la teórica. Si calculamos  $L$  a partir de  $f_{aj}$  y  $C$  nominal:  $L = 3,13 \pm 0,04\text{ mH}$  que coincide con lo esperado y el valor ajustado, y es compatible con el teórico. Este comportamiento opuesto al RLC serie se debe a que cuando las frecuencias son bajas, el condensador hace de corto circuito y toda la corriente fluye sin apenas autoinducción por  $L$ , con lo que tenemos un máximo. A altas frecuencias, la bobina tiene mucha autoinducción y la corriente "pesa" más fácilmente por el condensador, que ya no hace de corto circuito. A frecuencias medias, tenemos ambos efectos de impedancias presentes y, en tanto, un mínimo. Por contra en el RLC serie tenemos los dos efectos superpuestos en la misma medida y cuando la impedancia de un elemento es despreciable, la del otro es dominante, y sólo en la frecuencia de resonancia se repelen adecuadamente.

En cuanto al factor de calidad, el ajustado es alto, de la bobina curva invertida teniendo en cuenta el valor máximo en  $f = 0$  y el mínimo en  $f_r$  como aproximación, por lo que  $Q = \frac{f_2}{f_1} = 1,156 \pm 0,006$ , que es menor que en el RLC serie. Según (3),  $Q = 93,5 \pm 1,3$ , lo que indica que el método para determinar  $Q$  ha sido incorrecto, y se repetirá en la medida de  $Q(f)$  de manera más adecuada.  $\rightarrow$  No, en realidad hay que hacer  $V_{min}$ .  
 Conto en  $f_1 = 12,91 \pm 0,1\text{ kHz}$ ;  $f_2 = 13,05 \pm 0,1\text{ kHz}$   $\rightarrow \delta f = 0,14 \pm 0,02\text{ kHz}$   
 $Q = 92 \pm 13 \rightarrow$  sí es compatible con el teórico.

4e)



**Figura 3.2:** Desfase de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia respecto al generador en un circuito RLC paralelo.

Ecuación: (3.2)

Curva teórica:  $C = 47\text{nF}$ ,  $L$  (Fig 3.1)  $= 3,17 \pm 0,06\text{ mH}$ ,  $r = 50\ \Omega$

Resultados del ajuste:  $mcc = 0,981 \pm 0,007$

$L = 3,239 \pm 0,006\text{ mH}$

$r = 16 \pm 10\ \Omega$

Corte con  $\pi/4$ :  $f_1 = 12,84 \pm 0,01\text{ kHz}$ , Corte con  $-\pi/4$ :  $f_2 = 12,97 \pm 0,01\text{ kHz}$

Corte con 0:  $f_r = 12,90 \pm 0,02\text{ kHz}$   $\delta f = 0,13 \pm 0,02\text{ kHz}$

Se comprueba que el ajuste no es muy bueno, pues hay tramos de curva con desviaciones sistemáticas respecto a lo esperado. El valor de  $L$  sí es compatible con lo esperado, pero el de  $r$  tiene mucho error, y toma un valor similar a Fig. 2.2, lo que hace pensar en un efecto del método de medida de la elipse no tenido en cuenta respecto al método de las amplitudes. En consecuencia, la curva teórica no ajusta adecuadamente (tan sólo cerca de la resonancia).

El valor medido de  $f_r$  es compatible con lo esperado, y  $L$  a partir de  $f_1$  y  $C \rightarrow L = 3,24 \pm 0,07$ , y por tanto también  $L$  lo es.

En cuanto al factor de calidad,  $Q = \left(\frac{Q_L}{f_r}\right)^{-1} = 99 \pm 11$ , valor que sí es compatible con (3)  $Q_{teo} = 101 \pm 4$ . El error debido a % error en  $\delta f$  grande. Como vemos, este método sí permite calcular  $Q$  adecuadamente, a diferencia de 3.1, donde primero me equivoqué al relacionar la anchura  $\delta f$  con la curva invertida. El segundo valor (6.7) sí es correcto.

En este circuito, el  $Q$  es bastante grande y mucho mayor que para el RLC serie. Esto se traduce en una pendiente grande cerca de  $f_0$  en  $\Phi(f)$  y un pico (mínimo) en la amplitud  $V(f)$  poco redondeado.

En conclusión, podemos afirmar que en el método de la elipse, la  $r$  de la impedancia no influye tanto como en las amplitudes, y es posible que aparezca un efecto extra de  $C$  en el generador (valor nominal:  $3\text{ pF}$ ), que afecta en un desfase a la fórmula considerada.

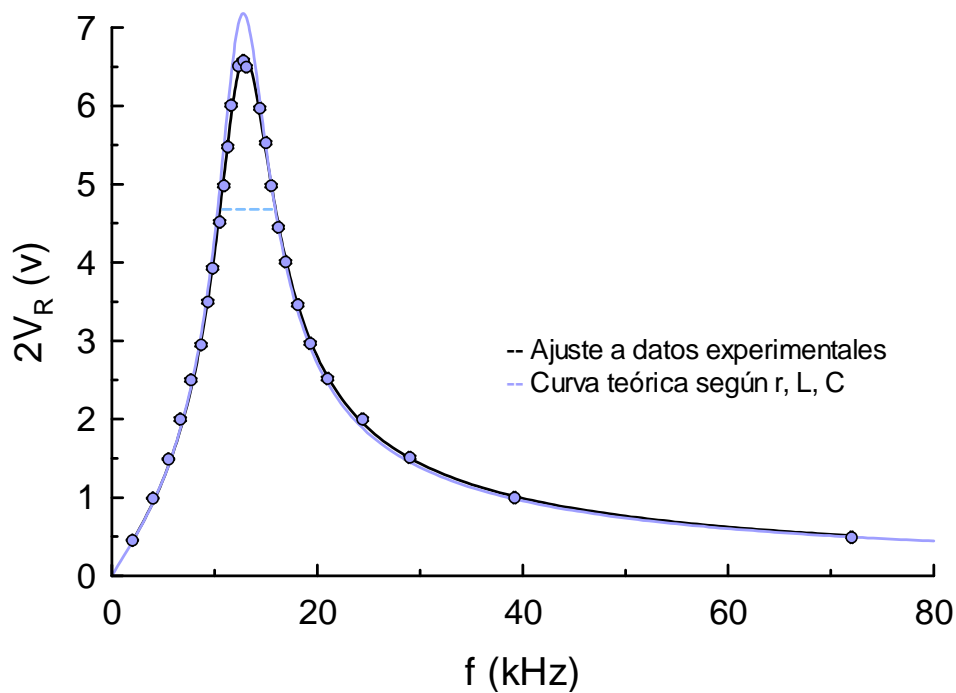


Datos Figura 2.2

f(kHz)	d(f)	$\phi$	d( $\phi$ )
2,00	0,02	1,37	0,05
4,00	0,02	1,37	0,05
5,50	0,05	1,41	0,06
6,65	0,05	1,37	0,05
7,70	0,05	1,32	0,04
8,70	0,05	1,27	0,03
9,35	0,05	1,24	0,03
9,80	0,05	1,19	0,03
10,5	0,1	1,06	0,02
10,9	0,1	0,979	0,014
11,3	0,1	0,887	0,012
11,6	0,1	0,761	0,003
12,3	0,1	0,416	0,003
12,8	0,1	0,00	0,02
13,1	0,1	-0,107	0,003
14,4	0,1	-0,750	0,003
15,0	0,1	-0,912	0,012
15,5	0,1	-0,998	0,014
16,2	0,1	-1,085	0,02
16,9	0,1	-1,152	0,03
18,1	0,1	-1,202	0,03
19,3	0,1	-1,251	0,03
21,0	0,1	-1,304	0,04
24,4	0,1	-1,367	0,05
29,0	0,1	-1,406	0,06
39,2	0,1	-1,407	0,06
72,0	0,1	-1,456	0,08

Datos Figura 3.2

f(kHz)	d(f)	$\phi$	d( $\phi$ )
2,00	0,02	-0,638	0,003
4,00	0,02	-0,953	0,014
5,50	0,05	-1,19	0,03
6,65	0,05	-1,25	0,03
7,70	0,05	-1,28	0,03
8,70	0,05	-1,33	0,04
9,35	0,05	-1,37	0,05
9,80	0,05	-1,41	0,06
10,5	0,1	-1,34	0,04
10,9	0,1	-1,31	0,04
11,3	0,1	-1,31	0,04
11,6	0,1	-1,31	0,04
12,3	0,1	-1,17	0,02
12,9	0,1	0,00	0,10
14,4	0,1	1,31	0,04
15,0	0,1	1,34	0,04
15,5	0,1	1,34	0,04
16,2	0,1	1,37	0,05
16,9	0,1	1,37	0,05
18,1	0,1	1,37	0,05
19,3	0,1	1,31	0,04
21,0	0,1	1,30	0,04
24,4	0,1	1,27	0,03
29,0	0,1	1,18	0,03
39,2	0,1	1,06	0,02
72,0	0,1	0,752	0,004
(1,10E+07	1,00E+06	1,14	0,02)



**Figura 2.1:** Resonancia en un circuito RLC serie de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia. Comparación del ajuste con la curva teórica.

*Ecuación:*  $2 V_R = 15,2 \cdot 47,1 \cdot \sqrt{\frac{1}{(47,1+r+2,6)^2 + (2\pi f L - 1/(2\pi f C))^2}}$

*Curva teórica:*  $C=47\text{nF}$ ,  $L(f_r) = 3,29 \pm 0,07 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

*Resultados del ajuste:*  $mcc = 0,9992$

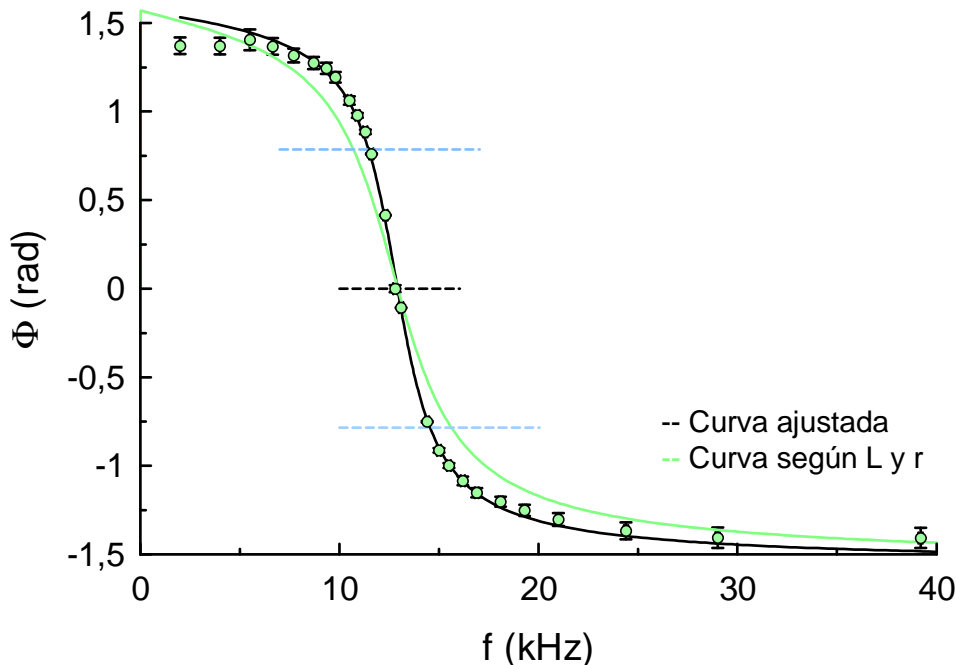
$r = 58,5 \pm 1,2 \Omega$

$L = 3,18 \pm 0,06 \text{ mH}$

$C = 47,4 \pm 1,0 \text{ nF}$

Corte con  $V_{max}/2^{0.5}$  en  $f_1 = 10,53 \pm 0,02 \text{ kHz}$  y  $f_2 = 15,95 \pm 0,02 \text{ kHz}$

$f_r = 12,96 \pm 0,04 \text{ kHz}$  (leído en la gráfica)



**Figura 2.2:** Resonancia en un circuito RLC serie. Desfase de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia respecto al generador.

*Ecuación:*  $\Phi = \text{atan} \left( \frac{-[2\pi f L - 1/(2\pi f C)]}{47,1+2,6+r} \right)$

*Curva teórica:*  $C = 47\text{nF}$ ,  $L(f_r) = 3,22 \pm 0,07 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

*Resultados del ajuste:*  $mcc = 0,999$

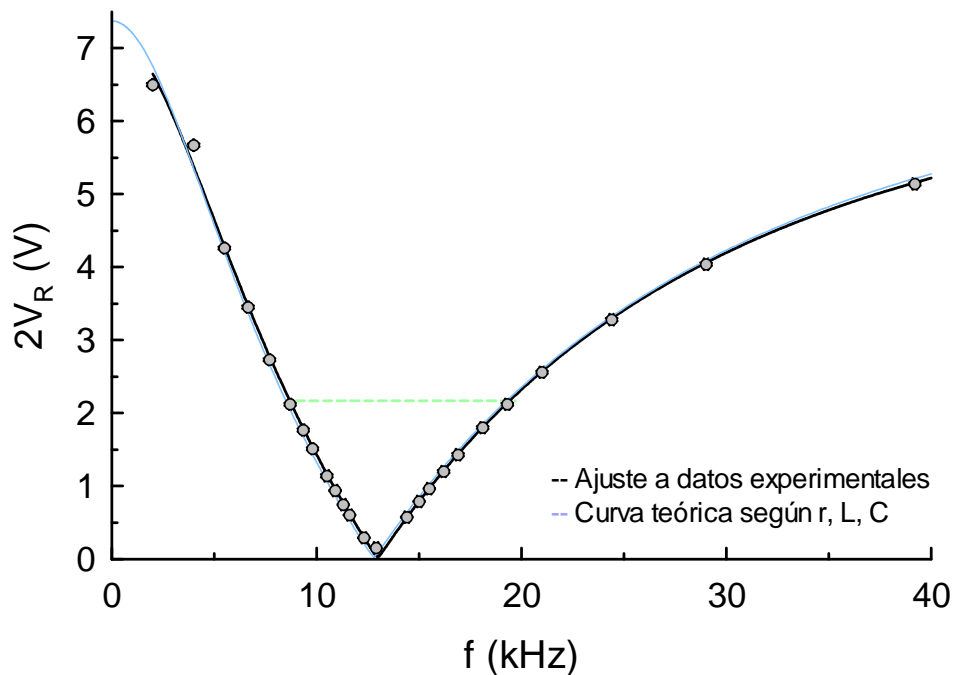
$r = 13 \pm 4 \Omega$

$L = 3,23 \pm 0,04 \text{ mH}$

$C = 47 \text{ nF}$  (valor nominal, no del ajuste)

Corte con  $\pi/4$ :  $f_1 = 11,48 \pm 0,02 \text{ kHz}$ , Corte con  $-\pi/4$ :  $f_2 = 14,55 \pm 0,02 \text{ kHz}$ .

Corte con 0:  $f_r = 12,90 \pm 0,02 \text{ kHz}$



**Figura 3.1:** Resonancia en un circuito RLC paralelo de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia. Comparación del ajuste con la curva teórica.

*Ecuación:* (3.1)

*Curva teórica:*  $C = 47\text{nF}$ ,  $L (f_r) = 3,29 \pm 0,07 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

*Resultados del ajuste:*  $mcc = 0,9993$

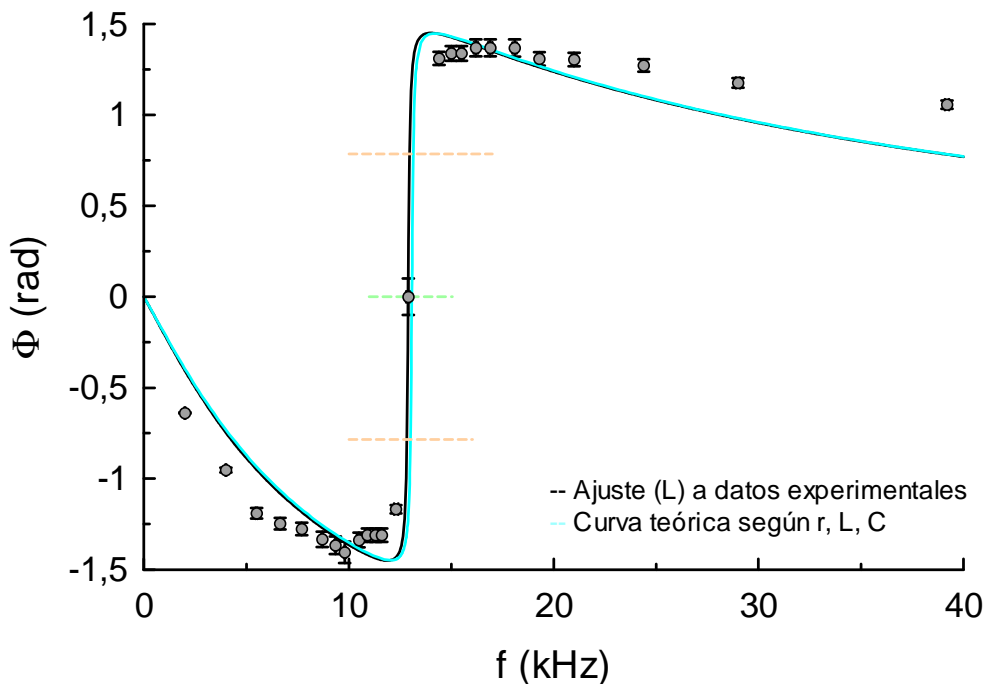
$r = 52,5 \pm 1,9 \Omega$

$L = 3,17 \pm 0,06 \text{ mH}$

$C = 47,4 \pm 1,0 \text{ nF}$

Corte con  $V_{\max}/2^{0.5}$  en  $f_1 = 8,60 \pm 0,02 \text{ kHz}$  y  $f_2 = 19,45 \pm 0,02 \text{ kHz}$

$f_r = 12,98 \pm 0,05 \text{ kHz}$  (leído en la gráfica)



**Figura 3.2:** Desfase de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia respecto al generador en un circuito RLC paralelo.

*Ecuación:* (3.2)

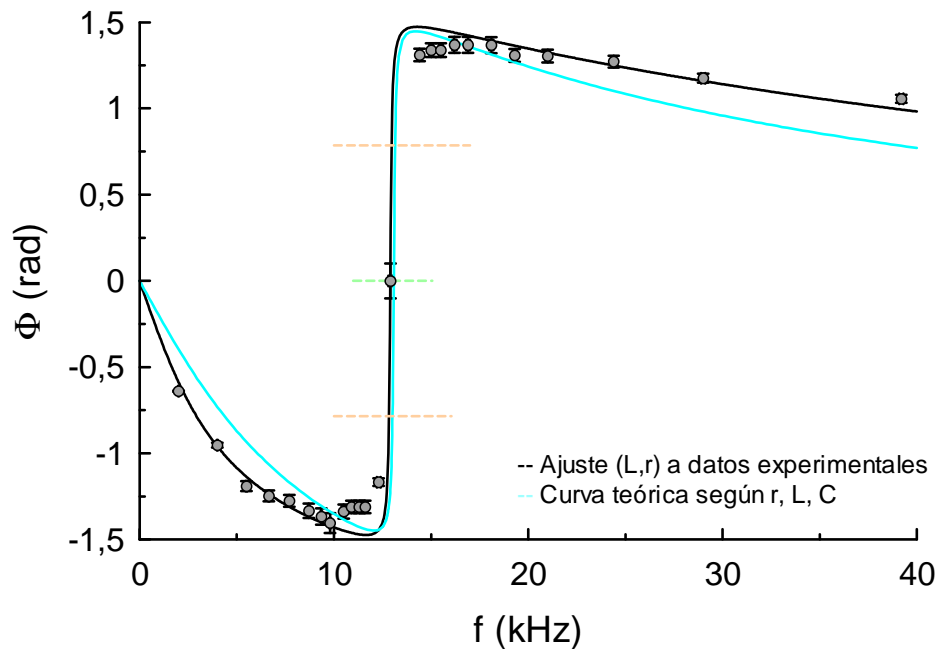
*Curva teórica:*  $C = 47\text{nF}$ ,  $L$  (Fig 3.1)  $= 3,15 \pm 0,06 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

*Resultados del ajuste:*  $mcc = 0,976$

$L = 3,239 \pm 0,018 \text{ mH}$

Corte con  $\pi/4$ :  $f_1 = 12,84 \pm 0,01 \text{ kHz}$ , Corte con  $-\pi/4$ :  $f_2 = 12,97 \pm 0,01 \text{ kHz}$

Corte con 0:  $f_r = 12,90 \pm 0,02 \text{ kHz}$



**Figura 3.2:** Desfase de la tensión en los bornes de la resistencia en función de la frecuencia respecto al generador en un circuito RLC paralelo.

*Ecuación:* (3.2)

*Curva teórica:*  $C = 47\text{nF}$ ,  $L$  (Fig 3.1)  $= 3,17 \pm 0,06 \text{ mH}$ ,  $r = 50 \Omega$

*Resultados del ajuste:*  $\text{mcc} = 0,997$

$L = 3,239 \pm 0,006 \text{ mH}$

$r = 16 \pm 10 \Omega$

Corte con  $\pi/4$ :  $f_1 = 12,84 \pm 0,01 \text{ kHz}$ , Corte con  $-\pi/4$ :  $f_2 = 12,97 \pm 0,01 \text{ kHz}$

Corte con 0:  $f_r = 12,90 \pm 0,02 \text{ kHz}$