I

cuándo métrica plano

Pitág. siempre localØ?

Kgauss (métrica) E, G

Espacio tangente

Símbolos Chris.

Ecuacs geodésicas $\{(q,\dot{q})$

vector $\dot{\vec{x}} = v_0$ es geodésica

K → aplicads, sgdo

Superficies K cte

$T_p(M)$, → Base

métrica cilindro,

ecuacs geod + solución

cuántas unen 2 puntos

K = cte ≥ 0 pone siempre

II

Cuales son nuevos

Campo de vectores

curvas integrales

grupo unip. transformads

Volumen invariante del plano euclídeo cart. pol.

III

ppo Equival E, métrica Mink → Rel. general

Po cte moviØ

redshift $W_\infty = WV$

identificar gravitac con geometría $\vec{x}, t$

Proyecciones estereográficas

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4R^4(du^2+dv^2)}{(R^2+u^2+v^2)^2} = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$$x = \frac{2R^2 u}{R^2+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2R^2 v}{R^2+u^2+v^2}, \quad z = R\frac{u^2+v^2-R^2}{R^2+u^2+v^2}$$

$$W = \frac{R^2 u}{u^2+v^2}, \quad v' = \frac{R^2 v}{u^2+v^2}, \quad u = \frac{Rx}{R-z}, \quad v = \frac{Ry}{R-z}$$

T. I

Euclides → 5 postulados $\begin{cases} 4: \text{homogeneidad e isotropía del espacio, } \infty \text{ extendible} \\ 5^{\circ}: P \text{ exterior a recta } \exists! \text{ paralela (no se cruza)} \end{cases}$

$!5$ → !Tales, !Pitágoras

→ $(\alpha+\beta+\gamma) = \pi - C \cdot A$ → esfera: $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \frac{A}{R^2}$ → hiperbólica $\alpha+\beta+\gamma-\pi = -\frac{A}{R^2}$ $\Big\}$ $R\to\infty$, $A\to 0$ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ euclídea

↳ Pitágoras $<A$ → + aproxima

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ (Plano), válido ∀ geometría localϕ → esfera $\theta = \pi/2$, $x = R\theta$, $y = R\phi$

$= R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$

$f(x,y,z)=0$ → Tma f. implícita asegura q localϕ alrededor punto, se puede hacer, $\nabla F \neq 0$

↳ $z = f(x,y)$

→ $\left.\begin{aligned} z &= z(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ x &= x(u,v) \end{aligned}\right\}$ $\vec{x} = \vec{x}(u,v)$ → $ds^2 = \sum g_{ij}\, du^i du^j$ $\quad g_{ij} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j}$

→ Esfera $|_{p.s}$ → $ds^2 = 4(du^2 + dv^2) = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2$

→ Cilindro → $ds^2 = dz^2 + R^2 d\phi^2$ ↗ S. revolución?

Curvas u, v

$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u, v_0)$, $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v)$ → Vectores tangentes a la curva, base espacio lineal bidimensional: plano tangente a la superficie en P dado

---

Geodésicas

$l = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{d\lambda} \cdot \frac{du^j}{d\lambda}} \cdot d\lambda$ $\quad$ λ: parámetro $u^i(\lambda)$ $\forall\lambda$

→ extremo, $\hat{=}$ Lagrange $\delta l = 0$

$L = \frac{1}{2} g_{ij}(u^k)\, \dot{u}^i \dot{u}^j$, $\quad g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = cte$ → $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial u^k} = 0$

$\lambda = s$ → $\frac{ds}{ds} = 1$

$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(g_{ki} \frac{du^i}{ds}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \cdot \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds} = 0$ $\boxed{\text{Ecuas geodésicas sobre una superficie}}$

$\frac{d}{ds}(g_{ki}\dot{u}^i) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^i\dot{u}^j$

Sistemas de coordenadas localmente cartesianos

$ds^2|_p = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \quad \forall S$

- Única geodésica $\vec{X}(s)$ que pasa por P y $\vec{v}$ de vect. tangente $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$, $\frac{d\vec{X}}{ds}(0) = \vec{v}$; varias $\vec{v}$ → malla geodésicas
- Si punto cercano a P, ∃! geodésica que pase por P y lo alcance

$\frac{d^2\xi^i}{ds^2}(0) = 0$ + ec. geod $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi^k} g_{ij}(p) = 0$ → noudoso! $\quad$ δ_{ki} es siempre en P

Taylor: $ds^2 = g_{ij}(\xi)\, d\xi^i d\xi^j = \underbrace{g_{ij}(\xi^k=0)}_{\delta_{ij}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \xi^k} g_{ij}(\xi^k=0)} \ldots + \Theta(\xi^k)^2$

↳ curvatura intrínseca

geodésicas ~ rectas cerca de P

Sistema de coordenadas normales de Gauss:

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + g_{22}(\xi^1,\xi^2)(d\xi^2)^2 \quad \text{con } g_{22}(0,\xi^2)=1$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi^i}(0,\xi^2)=0$$

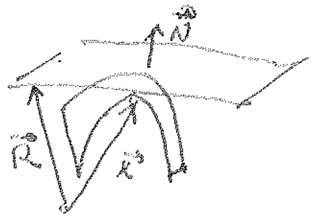
$$\begin{cases} g_{ij}(\vec{x}(s)) = \delta_{ij} \\ \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k}(\vec{x}(s)) = 0 \end{cases}$$

→ sobre toda la geodésica, no sólo en 1 punto — de refer ∈ ≙ euclidiana

-//→ no a región x q ∃ curvatura

Stma. que + se aproxima al euclidiano

Curvatura extrínseca:



varia respecto plano tangente

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \quad \rightarrow (\vec{R} - \vec{x}(p))\vec{N}(p) = 0$$

$$\vec{x}(u^k + du^k) = \vec{x}(u^k) + \dots$$

$$b \cdot \vec{N} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \vec{N} \cdot du^i du^j$$

Curvatura extrínseca $\dfrac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \vec{N} = b_{ij} = b_{ji}$ (matriz simétrica)

$$= -\frac{\partial \vec{N}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j}$$

Curvaturas y direcciones principales

$$b^i{}_j = g^{ik} b_{kj} \quad , \quad g^{ik} = (g^{-1})_{ik} \quad , \quad g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j$$

↓

diagonalizable, vectores propios ortogonales (2)

$b^i{}_j \cdot \vec{e_1}^j = k_1 \vec{e_1}^i$ $\qquad k_1, k_2$ = curvaturas principales

$b^i{}_j \cdot \vec{e_2}^j = k_2 \vec{e_2}^i$ $\qquad \vec{e_1}, \vec{e_2}$ = direcciones "

× cilindro $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix}$ $\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial z}, \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \phi}$

× esfera $\begin{pmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & -1/R \end{pmatrix}$ → degenerada!

Símbolos de Christoffel

$\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}$ = vectores tangentes (base) $\qquad \dfrac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma_{ij}{}^k \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^k} + b_{ij} \cdot \vec{N}$

$$\Gamma_{ij}{}^k = \Gamma_{ji}{}^k$$

$$\Gamma_{ij}{}^k \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^k}{ds^2} = 0 \quad \rightarrow \text{Ecuas geodésicas}$$

$$\Gamma^l{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

Curvatura de Gauss

$K = \det b^i{}_j(p)$ → siempre diagonalizable, det invaria bajo cambio base

→ esfera $K > 0 = 1/R^2$

$K = K_1 \cdot K_2$ ↳ extrínsecos → producto intrínseco

Si $ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \leftrightarrow K = 0$

Tma egregium

K es intrínseco

$R^k{}_{lij}$ → tensor de curvatura de Riemann $R^k{}_{lij} = \frac{\partial \Gamma^k{}_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^k{}_{li}}{\partial u^j} + \Gamma_{lj}{}^r \Gamma_{ir}{}^k - \Gamma_{li}{}^r \Gamma^k_{jr}$

$$K = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - \left(\Gamma_{11}{}^i \Gamma_{22}{}^j - \Gamma_{12}{}^i \Gamma_{12}{}^j\right) g_{ij}\right]$$

$g = \det g_{ij}$

Si $E = G = \Omega \rightarrow K = -\frac{1}{2\Omega}\nabla^2_{uv} \ln \Omega$

universo → K = cte si hay, ppo. cosmológico → K = 0 ; contenido energético curva curvatura tiempo expande universo

Significado

- Desviación relativa entre dos geodésicas muy próximas
- Corrección para la longitud de un círculo geodésico infinitesimal
  $L = 2\pi\left(r - \frac{1}{6}K r^3 + \dots\right)$

$\frac{d^2 \Delta L}{d(\xi^1)^2} = -K \Delta L$ → acelerac relativa entre dos geodésicas $\Delta L(\Delta\xi^1) = \sqrt{g_{22}(\Delta\xi^1, \xi^2)}\,\Delta L$

$K = 0 \leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial(\xi^1)^2} g_{22} = 0 \quad (g_{22}(0) = 1)$

× Coordenadas localmente polares r, ϕ

$f(r,\phi) \sim r - \frac{1}{3!}K r^3 + \dots$ $\qquad K = -\frac{f''}{f}$

$L = \int ds = \int_0^{2\pi} f(r,\phi)\, d\phi$, $A \hat{=} \dots = \pi r^2\left(1 - \frac{1}{12}K r^2\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{6}K r^2\right) \cdot 2\pi r$

Curvatura constante negativa

$ds^2 = \frac{4R^4}{(u^2+v^2-R^2)^2}(du^2 + dv^2) \rightarrow K = -\frac{1}{R^2} \leftarrow ds^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi\, d\phi^2)$

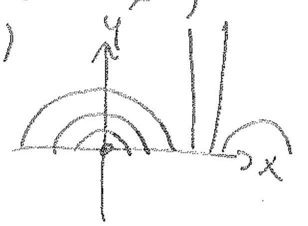
(cambio variables)

$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ Modelo del semiplano de Poincaré

dtcia a $y = 0 \rightarrow \infty$: frontera aparente

No se cumple 5º postulado

$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$



Bola abierta $\mathbb{R}^n$ $\to$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ldots$ radio r centrada en $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ (n-tupla) $B_r(\vec{y})=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \,/\, |x-y|=\sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2}<r\}$

Abierto U de $\mathbb{R}^n$ $\to$ conjunto de $\mathbb{R}^n$ expresable como unión de bolas abiertas (no necesariamente conexo)

Variedad diferenciable

variedad n-dimensional M: conjunto de puntos (elementos) y una colección de subconjuntos $\{\theta_\alpha\}$ satisfaciendo:

1) Si $P\in M$, $\exists$ al menos un θ_β / $p\in\theta_\beta$ $\to$ $M=\bigcup_\alpha \theta_\alpha$

2) Para cada θ_α $\exists$ aplic. biyectiva $\psi_\alpha\, \theta_\alpha \to \psi_\alpha(\theta_\alpha)\equiv U_\alpha$ (abierto $\mathbb{R}^n$)
... a trozos como $\mathbb{R}^n$

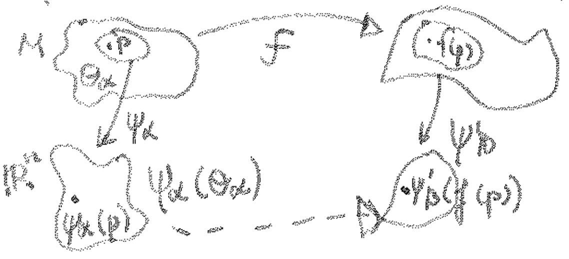
3) Si $\theta_\alpha\cap\theta_\beta\neq\emptyset$ $\Rightarrow$ $\psi_\alpha(\theta_\alpha\cap\theta_\beta)$ y $\psi_\beta(\theta_\alpha\cap\theta_\beta)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$.
y $(\psi_\beta)(\psi_\alpha)^{-1}$ es diferenciable y tiene inversa difer $\equiv$ difeomorfismo
$\hookrightarrow \psi_\alpha(\theta_\alpha\cap\theta_\beta)\to\psi_\beta(\theta_\alpha\cap\theta_\beta)$

Aplic. entre abiertos de $\mathbb{R}^n$

× A cada par $(\theta_\alpha,\psi_\alpha)$ se le denomina carta / stma. de coordenadas
× Conjunto de todas las cartas $\to$ Atlas (maximal)
× $\mathbb{R}^n$, S^1, ..., abiertos

Aplicaciones diferenciables entre 2 variedades

$f: M\to M'$ diferenciable en P si en coord. locales $(\theta_\alpha,\psi_\alpha)$, $(\theta'_\beta,\psi'_\beta)$ define aplic. " en $\mathbb{R}^n$ $\psi'_\beta f \psi_\alpha^{-1}$ en $\psi_\alpha^{-1}(p)$, solución $\forall$ carta



× q cambios coordenadas siempre diferenciables

Concepto de vector y espacio tangente

$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}$ $\to$ vectores tangentes, base $\Rightarrow$ $\vec{v}=\sum v^i \left.\frac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}\right)_p = v^i \left.\frac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}\right)_p$

$\Rightarrow \vec{v}=v^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$ ↙ vect. tang. ~ derivada direccional

Espacio de las derivadas direccionales en $P\in M$ $(\equiv T_p(M))$ es espacio de las aplicaciones $v: \mathcal{F}(M)\to\mathbb{R}$ que verifican
< linealidad $v(af+bg)=av(f)+bv(g)$ ($a,b\in\mathbb{R}$)
< regla Leibnitz $v(fg)=f(p)\cdot v(g)+g(p)v(f)$

× T_p es espacio vectorial real de dim $T_p(M)=n=$ dim (M)
$(v+g)(f)=v(f)+g(f)$

× base de $T_p(M)$, $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$

× (θ,ψ), $f\psi^{-1}: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\to f$ es valor de la derivada $f(g(x))=\left.\frac{dg}{dx}\right|_p$

n - Derivadas direccionales
$\vec{e}_\mu(p)=\frac{\partial}{\partial x^\mu}(f\cdot\psi^{-1})\big|_{\psi(p)}\in\mathbb{R}$ (depende de ψ)

Vectores tangentes en P para (θ, φ), $\{x^\mu\}$ base $T_P(M)$:

$$\vec{e}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P = X_\mu$$

$$v = \sum v^\mu X_\mu = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

Cambio de base: $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P = \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)_P \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)_P$ ≘ Jacobiano

Respecto a cartas:

Base: $X_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f\,\psi^{-1})\Big|_{\psi(p)} \in \mathbb{R}$

$X'_\nu(f) = \frac{\partial}{\partial x'^\nu}(f \cdot \psi'^{-1})\Big|_{\psi'(p)} \in \mathbb{R}$

$$\boxed{X_\mu(f) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} X'_\nu(f)}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P = \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)_P$$

$\det \neq 0$

Componentes:

$v'^\nu = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)_P \cdot v^\mu$ ley contravariante — componentes vector, comp. covector

$v = v^\mu X_\mu = v'^\nu X'_\nu$

Base $X'_\lambda = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\right)_P X_\mu$ ley covariante — base vector / comp. covector

---

$c: I \subset \mathbb{R} \to M$ curva diferenciable

$\in \mathcal{F}(M)$ $\quad f \cdot c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vector T en $P \to T(f) = \frac{d}{dt}(f \cdot c)_P \in \mathbb{R}$

$f \cdot \psi^{-1} \equiv f(x^\mu)$

$\psi \cdot c \equiv x^\mu(t)$ $\quad T(f) = \frac{d}{dt}(f \cdot c) = \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)_P X_\mu(f) = \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)_P \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P$

Campo de vectores v: (M)

aplic. que asigna a cada $p \in M \to v_p \in T_p(M)$ difere.

$v = v^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$; $v^\mu(x)$ funciones difere.

$= v'^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$

$t\, v^i(x^j + w^j(x)s) \approx t\, v^i(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^j} v^i(x) w^j(x)\right) s$

$= [v, w]^i\, st$

- Álgebra de Lie

2 campos $\to$ 3er campo : conmutador

$v, w \to [v, w]$

$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) = [v,w]^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \cdot f$ dif. campo

- Linealid
- Antisimetría
- Identidad de Jacobi $[v[w\,z]] + [w[z\,v]] + [z[v\,w]] = 0$

espacio vectorial con operación $[\ ]$ con propieds ↑ es un álgebra de Lie

Flujos y transformaciones infinitesimales

- flujo ≡ grupo uniparamétrico de difeomorfismos es aplica.:

$\mathbb{R} \times M \to M$

$(t, P) \to \phi_t(p)$ tal que i) $t \in \mathbb{R}$ fijado $\phi_t: M \to M$ es un difeomorfy

ii) $\forall s, t \in \mathbb{R} \to \phi_t \cdot \phi_s = \phi_{t+s}$ $\to (\mathbb{R}, +)$ grupo aditivo $t \circ s = t + s$

- A ϕt le asociamos campo de vectores

$p \in M \Rightarrow \mathbb{R} \to M$, $t \to \phi_t(p)$ una curva en M (órbita del flujo de ϕ_t por P_a tos)

vector tangente a la curva v_p, variando P en M → generamos campo de vectores en M llamado generador infinitesimal del flujo

Al revés:

Dado v en M → reconstruir flujo cuyo generador inf. es v localɸ

$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu(x^1, \dots x^n)$ S.e.dif. 1er orden ~ integrar

∃! curva (condicion) por $x_0^\nu (t=0)$ y $\left.\frac{dx^\mu}{dt}\right|_{t=0} = v^\mu(x_0^\nu)$

...intervalo recta real

flujo $(I \subseteq \mathbb{R}) \times U \to U$

$(t, x_0^\mu) \to x^\mu(t, x_0^\nu)$ $v \Rightarrow \frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu$

si $I \equiv \mathbb{R}$ → v es un campo completo

Mecánica analítica $\hat{=}$ $v = \frac{\partial H}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ → $\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ → $q = q(t, ..)$

$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ → $p = p_i(t, ..)$

c. vectores en espacio fásico

flujo ≡ ev. temporal ← generador infinitesimal

TENSORES

Covector (tensor 1-covariante)

$t: T_p(M) \to \mathbb{R}$

$v \to t(v) = t\left(v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right) = v^\mu\, t\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p = v^\mu t_\mu$

$t'_\nu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)_p t_\mu$ ley covariante $\hat{=}$ bases → depende de dirección (linealɸ)

espacio de covectores → espacio dual $T_p^*(M)$ $\dim T_p = \dim T_p^*$

- Diferencial de una función

$df(p): T_p(M) \to \mathbb{R}$

$v \to df(p)(v) = v_p(f) = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p (f \cdot \varphi^{-1})$

$d\psi_\alpha^\nu = v^\nu$

$df(p) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_p}_{\text{componentes}} \cdot \underbrace{dx^\mu}_{\text{...covector, ...base}}$ →

Base para $T_p(M)$: $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p$ duales

" " $T_p^*(M)$: $dx^\mu(p)$

$dx^\mu(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right) = \delta^\mu_\nu$

Tensor 2-covariante Aplicac bilineal

$T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$

$(v, w) \to t(v, w) = v^\mu w^\nu\, t\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_p\right) = v^\mu w^\nu t_{\mu\nu}$

$t'_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right)_p \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\right)_p t_{\mu\nu}$

Tensor r-contravariante y s-covariante aplicac multilineal

...→ general. vectores ...covectores

$t: \underbrace{T_p^* \times T_p^* \dots \times T_p^*}_{r} \times \underbrace{T_p(M) \times \dots T_p(M)}_{s} \to \mathbb{R}$

$t\left(dx^{\mu_1}(p), \dots, dx^{\mu_r}(p), \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}}\right)_p, \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu_s}}\right)_p\right) = t^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s}$

$t'^{\mu_1' \dots \mu_r'}{}_{\nu_1' \dots \nu_s'} = \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1}}\right)_p \dots \left(\frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\mu_r}}\right)_p \left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\right)_p \dots \left(\frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\nu_s}}\right) t^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s}$

Espacio de tensores $T_p{}^{r,s}(M)$

$T_p^{0,1}(M) \equiv T_p^*(M)$

$T_p^{1,0}(M) \equiv T_p^{**}(M)$ isomorfo a $T_p(M)$ } canónico xq no usa base

$v^{**}(\alpha) = \alpha(v)$ bidual

Vectores $|\psi\rangle$

Covectores $\langle\phi|$

Operaciones

- Suma (x compon.) $t^{-}_{-} + f^{-}_{-} = h^{-}_{-}$, $t + f = h$
- Multiplicá x escalar $\lambda \cdot t^{-}_{-} = (\lambda t)^{-}_{-}$
- Producto tensorial

$(v_1, v_2) \to t_1(v_1) \cdot t_2(v_2)$ $(t_1 \otimes t_2)_{\mu\nu} = (t_1)_\mu (t_2)_\nu$

$t^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \otimes \ell^{j_1 \dots j_{r'}}_{k_1 \dots k_{s'}} = (t \times \ell)^{\mu_1 \dots \mu_r j_1 \dots j_{r'}}_{\nu_1 \dots \nu_s k_1 \dots k_{s'}}$

$\delta^i{}_k = \delta^i_k$

- Contracción (componente i-dual con j-vectorial)

$C^i_j t = \sum_\sigma (\;,\; , dx^\sigma(p), \dots, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)(p), \dots)$; $Ct^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \sigma \mu_{i+1} \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \sigma \nu_{j+1} \dots \nu_s}$

$\hookrightarrow \sigma$ sumado, no libre

$t^{\mu\lambda}_{\nu} \xrightarrow{C} t^{\mu}_{\mu}{}^{\lambda}$ Arriba y abajo!

Tensores simétricos y antisimétricos

- Simétricos $t_{i_1 \dots i_s} = t_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(s)}}$ $\sigma \equiv$ cualquier permutá de s elems S_s del grupo

NO mezclar arriba y abajo, siempre del mismo nivel

- Antisimétricos $t_{i_1 i_2 \dots i_s} = \pi(\sigma)\, t_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(s)}}$ $\forall$ stma coord! verificar ley

paridad permutá

Tensores antisimétricos covariantes $[T_p^{0,s}$ antis$] \equiv \Lambda^s_p(M)$

$\Lambda^0_p \equiv \mathbb{R} \to$ escalares

$\Lambda^1_p(M) = T_p^*(M) \to$ covectores } $\nexists$ permutás > 1 si

$\Lambda^n_p(M) \to \dim = \dim(M)$

$\Lambda^{s>n}_p(M) = 0$

$\dim \Lambda^s_p(M) = \binom{n}{s}$

1
n
⋮
n
1
0

$\to t_{j_1 j_2 \dots j_n} = \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} t_{12 \dots n}$ Símbolo de Levi Civita $\begin{cases} +1 & \text{si par} \\ -1 & \text{si impar} \\ 0 & \text{si repiten} \end{cases}$

$\to t'_{j_1 j_2 \dots j_n} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right) t_{j_1 j_2 \dots j_n}$

$\to \epsilon'_{j_1 \dots j_n} = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x'^{j_n}} \epsilon_{i_1 \dots i_n}$ → no ley tensorial usual

$\epsilon_{i_1 \dots i_n}$: densidad tensorial de peso $W = -1$

$\left\{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right\}^W$

Tensor métrico

2-covariante simétrico

$T_p \times T_p \to \mathbb{R}$

$(v, w) \to g(v, w) = v \cdot w \equiv$ producto escalar vectores v y w

i) $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ simétrico

ii) no degenerado $g(v, w) = 0$ $\forall v$ sii $w = 0 \iff \det g_{\mu\nu} \neq 0$

iii) Siempre $\exists$ base ortonormal $\vec{e}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p$, $g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \pm \delta_{\mu\nu}$

lorentziano

iv) Signatura métrica ($n^\circ +$, $n^\circ -$)

$(n, 0) \to$ Riemannianas ; $(n, 1) \to$ Lorenzianas

$g_{\mu\nu}$ no degenerado $\to$ aplicd biyectiva entre espacios duales (8)

$T_p(M) \longleftrightarrow T_p^*(M)$ $\qquad g(\cdot, v) : T_p(M) \to \mathbb{R}$

$v \longleftrightarrow g(\cdot, v)$ $\qquad w \to g(w, v)$

$v = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \to \underbrace{g(\cdot, v)}_{\text{covector}} = v_\mu \, dx^\mu$ $\quad$ ↳ isomorfy no canónico xq usas métrica

$\boxed{v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu}$ $\quad$ $\exists$ inversa métrica $\leftarrow$ dif $\to \boxed{v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu}$

- Relac con tensores cov. antis.

$g' = \left\{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right\}^2 g$ $\qquad \eta_{i_1 i_2 \ldots} = \sqrt{g}\, \epsilon_{i_1 i_2 \ldots}$ $\qquad \eta^{i_1 i_2 \ldots} = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_n j_n} \eta_{j_1 \ldots j_n}$

$\sqrt{g'} = \left|\det\left\{\frac{\partial x}{\partial x'}\right\}\right| \sqrt{|g|} \to$ construyes volumen invariante

$t_{12\ldots n} = \sqrt{|g|} \to$ cambia con coordenadas

$t'_{12\ldots n} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right) t_{12\ldots n}$ ↳ única componente independiente en el tensor de dim $= n$, resto $\propto 0$

Campos de tensores

aplicd q asigna tensor t a cada punto $P \in M$ es campo tensorial

$$t = \underbrace{t^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s}(x)}_{} \, dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}}$$

↳ Componentes del campo tensorial

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^\mu \otimes dx^\nu$$

- Una forma diferencial α es un campo de tensores covariante antisimétrico localm: $\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_s}(x)\, dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \ldots \otimes dx^{i_s}$ $\qquad 0 \leq s \leq n$

- Producto exterior:
  - $dx^i \wedge dx^j = dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i$
  - $dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_s} = \sum_\sigma \pi(\sigma)\, dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots dx^{i_{\sigma(s)}}$

↳ $\alpha = \frac{1}{s!} \alpha_{i_1 \ldots i_s}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}$

$\beta = \frac{1}{r!} \ldots$

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{r!\,s!} \alpha_{i_1 \ldots i_s}(x) \beta_{j_1 \ldots j_r}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \ldots \wedge dx^{j_r}$$

- $\alpha \wedge \beta = (-)^{r \cdot s} \beta \wedge \alpha$ $\quad$ Anticonmutativa graduada
- $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ $\quad$ Asociativa

Diferencial exterior

0-forma funciones $f(x)$ $\xrightarrow{d} df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i}_{\text{1-forma}} = \partial_i f dx^i$ $\qquad \alpha'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \alpha_i$ (ley tensorial (vectorial))

1-forma $\alpha_i(x)$ $\xrightarrow{d} \frac{\partial}{\partial x^j} \alpha_i(x) - \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha_j(x)$ $\qquad$ Parte antisimétrica $t_{[i_1 \ldots i_r]} = \frac{1}{r!} \sum_\sigma \pi(\sigma)\, t_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(r)}}$

$\vdots$

$\alpha_{i_1 \ldots i_s}(x) \xrightarrow{d} (s+1)\, \partial_{[b} \alpha_{i_1 \ldots i_s]} = (d\alpha)_{b i_1 \ldots i_s} = \frac{1}{s!} \partial_b \alpha_{i_1 \ldots i_s} dx^b \wedge dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_s}$

$(d(d\alpha))_{c\, b\, i_1 \ldots i_s} = 0$ $\quad$ P. as. $(\partial) = 0$

- α es cerrada si $d\alpha = 0$
- α es exacta si $\exists \beta / \alpha = d\beta$
- Si α es exacta $\to \alpha$ es cerrada, al revés no en general

Relativid especial

Einstein 1905

- Constancia velocid luz (c) indep. emisor / --> receptor
- Equivalencia entre s. ref. inerciales MRel Unif. (ppo. relativid) < P.R. Galileo (Mecánica) / EM

× factor Doppler $K = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ $E_{fotón} = -p u$

× dilatd. temporal $\Delta t_0' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, \Delta t_0$ ↓ $\nu_{fotón}$ con

× $d = c \frac{v}{c+v} T$; $K^2 T = cT + 2d$ $E = -pu = \hbar\omega'$; $\vec{p} = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, 0, 0, \frac{\hbar\omega}{c}\right)$

× Simultaneid relativa [...] ...

× Contracción de longitud $L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, L'$

× Tr. Lorentz

$$t' = \frac{t - v/c^2\, x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Ley de adición de velocidades

$$v^x = \frac{v^{x'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} v^{x'}}$$

× Momento y energía relativistas

Conservad si $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, $E = \gamma m c^2$

Principio de equivalencia (1907)

× fallos < Mercurio perihelio / graves → corregir R. esp. ; a partir $m_i = m_g$ ↳ $= g$ para todos

En un pequeño stma. de refere en caída libre equivale a un S. de referencia inercial en un universo libre de graved

⇝ pequeño xq obvias acelerd relativa

⇒ deflexión luz en campo gravitatorio

⇒ red-shift  ≙ Doppler

$$\nu_2' = (1 + v/c)\,\nu_1 = \nu_1\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) = \nu_1\left(1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}\right) > \nu_1$$

↳ dilatd temporal $\frac{1}{\nu_1} = d\tau_1$

$$d\tau_2 = dt\left(1 + \frac{\phi(x)}{c^2}\right) \quad t \to \phi_\infty = 0 \quad \to + \text{ lento en c. grav.}$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) dt \quad \rightsquigarrow \frac{dl}{dt} = c(r) = c\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) \to \text{Fermat}$$

× Predicción 1912 deflexión:

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{c^2 D} \to \text{incorrecto}$$

× $S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}\, dt \to c(r) \to$ 1^er^ orden órbitas elípticas + correcciones → precesión perihelios no coincide incorrecta

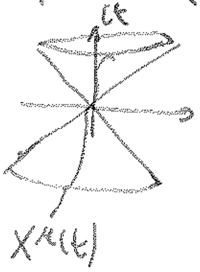
⇒ intuye q modificar

- EM 4 potenciales?
- Minkowski espacio-tiempo 4D
- Tradición matemática geómetras < Gauss / Riemann

Espacio-tiempo de Minkowski

$ds^2 = -c^2dt^2 + dx_i^2$ → Invariante bajo Tr. Lorentz

$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ → Vectores temporales / nulos / espaciales si $g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$ <0 / $=0$ / >0 — $(A^0,0,0,0)$ / $(A^0,A^0,0,0)$ / $(0,\dots)$



cono luz, futuro/pasado absoluto

(x,t) → sucesos

s: intervalo, $ds^2 = -c^2 d\tau^2$

τ: tiempo propio (en q $dx=0$) → mide longitud segmento

Tetravelocidad $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c,\vec{v})$, $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ $\quad \|u\|^2 = c^2$ → vector temporal

Tetramomento $p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

Estime con sólo dos

Ecuación movimiento, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, $\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$

Tetrafuerza $F^\mu = \gamma\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{F}\right)$

Gravedad es geometría

× Velocidad efectiva luz $c(r)$ → ecuaciones movimiento cant. incorrecta

$ds^2 = -c^2dt^2 + d\vec{x}^2$ → $c(r)$ → métrica variable

× Gravedad 'física', ≠ fuerzas → geometría

Generalizar, en lugar de variar c, interpretar como variar métrica

$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + (d\vec{x})^2$ → desarrollar en serie $g_{..}$. 1er orden es Mink.

$g_{00} = -1 + \dots$

× Hs. variar espacio, en R. E conectados! → general: $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$

In o sobre campo

$\eta_{\mu\nu}$ → Minkowski

ϕ → Gravedad Newton → Ec. Poisson

$(A^0=\phi, \vec{A})$ → EM → Ec. Maxwell

$g_{\mu\nu}(x)$ ~ Gravedad Einstein → Ecs ?

Geodésicas temporales y nulas

$S = -mc\int(-ds)$ → $\delta S = 0$ → Geodésicas, $S = -mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda$

$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}}$

$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$, $r = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = cte \geq 0$, $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ = vector temporal

Curva cuyo vector tangente sea temporal → curva temporal

$cte = 0$ → $\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\alpha\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$

$cte > 0 = c^2$ → $\hat{=}$ x_0 con $\lambda = \tau$ → tpo propio

Geodésicas nulas
↳ trayectorias rayos de luz
Geodésicas temporales
↳ trayectorias partículas masivas

Gravedad distorsiona métrica Minkowski

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ + correcciones

$\to$ geodésica temporal de refer $\in \eta_{\mu\nu}$, $\frac{\partial}{\partial \xi^K} = 0$, ∂^2 ya no si $K \neq 0$

$\hookrightarrow g_{\mu\nu}|_p = \eta_{\mu\nu}$, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \xi}\Big|_p$ ... geodésicas normales de Riemann

$\hookrightarrow$ pequeños laboratorio

$\exists$ siempre cambio coord / anule graved en 1 geod.

$\hookrightarrow$ es en el q se monta experimentador τ

tamaño grande $\to$ se aprecia graved, aceler relativa $\to$ fuerzas residuales

Fuerzas de marea y curvatura

2 partículas $\to \exists$ aceler relativa

Newton $\frac{d^2}{dt^2} = -\partial^i\partial_j \phi \delta x^j$ $\qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{GM}{r^3}\left(\delta_{ij} - \frac{3x^i x^j}{r^2}\right)$

$\hookrightarrow$ Hessiano del potencial

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ $\bigcirc \to 0$

matriz traza 0, se deforma manteniendo el volumen

La acelerd relativa entre geodésicas próximas viene caracterizada por el tensor de curvatura de Riemann. $R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}$

$R^{\mu}{}_{\lambda\mu\beta} = R_{\lambda\beta} \to$ Tensor de Ricci

Ecns de Einstein en vacío: $R_{\lambda\beta} = 0 \to$ incógnita: métrica

$\delta x^{\mu} = \underbrace{\frac{d^2}{d\tau^2}}_{\text{covariante}} = R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}\, \delta x^{\alpha} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \to$ aceler relativa

$\downarrow$ soluciones

Geometría exterior a una estrella esférica

$R_{\mu\nu} = 0$, ec. Einstein en vacío, simétrica, sol. invariante

$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 + \underbrace{\frac{dr^2}{1-\frac{r_s}{r}} + r^2 d\Omega^2}_{\text{sim. esférica}}$ $\qquad$ Métrica de Schwarzschild 1916

$r_s = \frac{2GM}{c^2}$

- estacionaria $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$
- $ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}} \simeq r_2 - r_1$ si $r_s \ll r$, Área esfera $\to = 4\pi r^2$ ✓
- $g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \to \forall r$, no límite
- falla en $r = r_s$

Planetas $\to$ geod. temp

Luz $\to$ geod. nulas

$S = -mc\int \sqrt{-g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu}} = -mc \int d\tau \sqrt{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \dots}$ $\to$ tomas $\theta = \pi/2$

$\hookrightarrow$ 2 coordenadas cíclicas $\phi, t \to$ 2 ctes movimto $\to$ simetría + estacionario

$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dt}{d\tau}\right)} = 0 \to +\frac{1}{c}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} = +\frac{E}{c^2}$ ...x unid masa $\qquad \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = -c^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 c^2 + \frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} + r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$

$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)} = 0 \to L = mr^2 \frac{d\phi}{d\tau}$

Movif de rayo de luz (geodésicas nulas)

$\tau \to \lambda$, $u = \frac{1}{r}$

En general : $u'' + u = \frac{GM}{C^2} K + \frac{3GM}{c^2} u^2$ → luz $K = 0$; Planetas $K = 1$

	PPO EQUIV.	R. GENERAL	NEWTON ($c \to \infty$)
P	$u'' + u = \frac{GM}{L^2} + O(u^2)$	$u'' + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2$ ↳ prec. perihelio	$u'' + u = \frac{GM}{L^2}$
L	$u'' + u = \frac{GM}{L^2}$	$u'' + u = \frac{3GM u^2}{c^2}$ ↳ deflexión	$u'' + u = 0$

Planetas

$u = \frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2}(1 + \varepsilon \cos\phi)$ ε : excentricidad elipse

$\simeq \frac{GM}{L^2}\left(1 + \varepsilon \cos((1-\beta)\phi)\right)$ $\beta = \frac{3G^2M^2}{L^2c^2} \ll 1$

$\beta = 0 \to$ caso elíptico

$\beta \neq 0 \to \phi = 2\pi \to r \nearrow$, $> \phi / r =$

$\cos(1-\beta)(2\pi + \delta\phi_{prec}) = 1$ → órbita no cerrada $\delta\phi_{prec} \simeq \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1-\varepsilon^2)}$

Mercurio 43" / siglo ☆

Luz $u \simeq \frac{\sin\phi}{D} + \frac{GM}{c^2 D^2}(1 + \cos\phi + \cos^2\phi)$

↳ $\Delta\phi_{sol} \frac{4GM}{c^2 D} \simeq 1{,}75''$ $(D = R)$ → Eddington 1919 ☆

Redshift gravitatorio

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{1 - \frac{r_s}{r_1}}{1 - \frac{r_s}{r_2}}} \underset{r \gg r_s}{\simeq} \nu_1 \left(1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}\right)$$

☆ 1960 Harvard relojes atómicos

$\nu_2 < \nu_1$

Agujeros negros 1926

→ paradoja masas blancas (densas y frías)   Sol → $\rho \simeq 1$; EB → $\rho = 10^6$ $T \ll T_{sol}$

→ q' evita autocolapso ? → Ecin ?

→ 1926 Fowler : presión degenerad electrónica (Pauli) contrarresta gravedad (no relativoy)

→ 1930 Chandrasekhar → 0,6c e^- → efectos relativoy

→ comportamiento crítico, límite Masa (> → ya no ~~estable~~)

$M_c \sim 1{,}4 M_{sol}$ masas blancas $M < M_c$ ⇐ Eddington

× Si $M > M_c$, al perder T (agota combustible), colapsa , $e^- + p \to n + \nu$

– – conversión a estrella de neutrones

→ 1938 Oppenheimer - Volkoff → presión de degenerad de neutrones $r \sim r_s$ obligado a Relat. General

× p grande → crea gravedad , $p < 0$ → Mcrítica máxima estabilidad estrella n

$M_{cn} \simeq 3 M_{sol}$

1   M_c 2   3

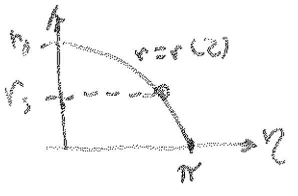
masa blanca   estrella n   implosión (pasa × n)

- 1939 Oppenheimer – Snyder $M > 3 M_{sol}$ → modelo de agujero negro
  $p \sim 0$, grav ≫, colapsa
  $\rho = 0$, $\rho(t)$ — exterior → métrica Schwarzschild

- geodésicas radiales

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right) + c^2\left(1-\frac{r_s}{r_0}\right) = c^2 r_s\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

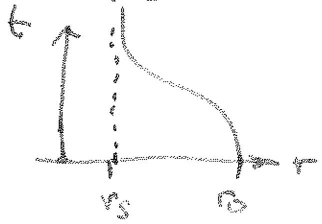
↳ $r = \frac{r_0}{2}(1+\cos\eta)$ $\quad c\tau = \sqrt{\frac{r_0^3}{4r_s}}\,(\eta+\sin\eta)$

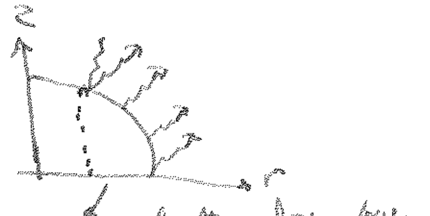


$\tau = \frac{r_0}{c}\sqrt{\frac{r_0}{4r_s}}\,\pi$

ρ diverge

→ $r(t) \to \infty$





red shift, frec. baja, $\lambda \approx \lambda$ universo

$t_\infty = \infty$ ⟵ τ finito
$\nu_\infty = 0$ ⟵ ν

→ métrica Schw. falla
problema de coordenadas

<u>Horizontes y singularidad</u>

métrica singularidad, engañosa, ir a escalares → $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{16 r_s^2}{r^6}$

↳ no hay divergencia en la curvatura en $r = r_s$, en $r=0$ sí xq $\rho \to \infty$.

→ otro sistema. coordenadas basadas en caída libre radial observador

$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{\frac{r_s}{r}}$, $d\tau = dt + f(r)\,dr$

$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1-r_s/r}$ ⟶ $dt_p = dt + \frac{\sqrt{r_s/r}}{c\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\,dr$

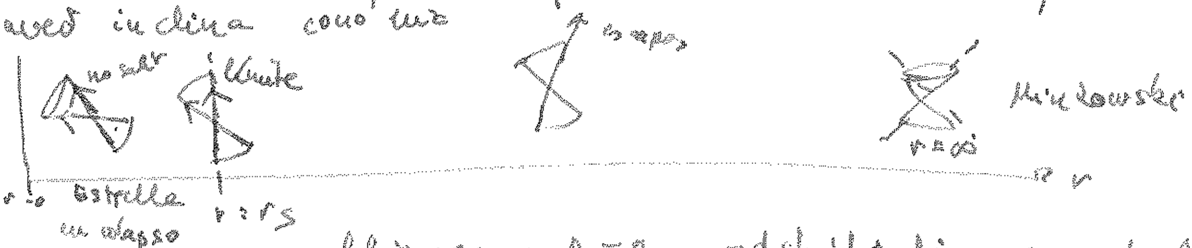
$ds^2 = -(1-r_s/r)\,c^2 dt_p^2 + 2c\sqrt{\frac{r_s}{r}}\,dt_p\,dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2$

Métrica de Schw. en las coordenadas de Painlevé – Gullstrand (1920)
1º se anula en $r=r_s$ xq no diag, no degen.

$$\begin{bmatrix} 1-r_s/r & c\sqrt{\frac{r_s}{r}} & & \\ c\sqrt{r_s/r} & 1 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

→ Al entrar en $r=r_s$, ya no puede salir nada
agujero negro

Cuando $r < r_s$ → temp. $dr\,dt_p < 0$ ⇒ $dr < 0$ → imposible salir
gravedad inclina conos luz



⟶ obligado a ν=0, redshift diverge, estrella aislada del resto universo

BH en modelos académicos
Wheeler 1965 'black hole'
radiación efecto túnel → ∞ $T \propto \frac{1}{M} < 3K$, disipa + q traga → estable