Resolución de ecuaciones no lineales

1. Aplicar el método de Newton-Raphson para determinar la raiz cuadrada de 50. Deducir la expresión o fórmula de Newton para raíces cuadradas.

2. Deducir la fórmula de Newton para el cálculo de raíces cúbicas. Aplicarlo al cálculo de la raiz de 70.

3. Resuelva la ecuación $\log(2-x^2)-x^2 = 0$ usando el método de Newton-Raphson partiendo de $x_0 = 1$ y hallando la raiz con una precisión de 0.0001.

4. Determine con un error absoluto menor de 0.001 la solución de la ecuación $x - \cos x = 0$.

5. Resuelva mediante el método de Newton-Raphson la ecuación:

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{1 - \log x} - 2 = 0$$

   partiendo de $x_0 = 1$ e iterando hasta que el error sea menor de 0.0001. Determinar la solución exacta y comparar con el resultado numérico.

6. Una esfera de densidad ρ y radio r tiene una masa de $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. El volumen de un segmento esférico viene dado por $\frac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3)$. Mediante el método de Newton-Raphson calcular la profundidad a la cual se hunde una esfera de densidad 0.6 en el agua como fracción de su radio. Obtener una precisión mejor del 0.1% en el cálculo.

7. Resuelva la ecuación $f(x) = e^{e^x} - 5 = 0$ mediante el método de Newton-Raphson partiendo del punto $x_0 = 1$ de forma que la precisión de la raiz sea mejor que 0.0002

8. Considérese el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 2$ del que queremos obtener las raíces contenidas en el intervalo $[-4, 4]$. Para ello:

   (a) Calcule los valores del polinomio para x entre -4 y 4 con paso unidad.

   (b) A partir de la tabla anterior encuentre puntos de partida adecuados para llevar a cabo el método de Newton-Raphson.

   (c) Determine las raíces con error absoluto menor de 0.001

   (d) ¿ Puede haber raíces para $x < -4$?

   (e) ¿ Puede haber raíces para $x > 4$?

9. Considere la ecuación:

$$2x - \cos x = 3$$

   (a) Demostrar que esta ecuación tiene una sola raiz.

   (b) Determinar el valor de la raiz mediante el método de Newton-Raphson, partiendo del punto $x = 0$ y haciendo las iteraciones necesarias para que el error sea menor que 0.0001.

10. Usando el método de Regula Falsi resuelva la ecuación $x+\tan x = 0$ partiendo del intervalo $[1.9, 2.1]$, iterando hasta que la solución tenga una precisión absoluta de 0.001

    Repetir el cáculo pero usando el método de Newton Raphson partiendo de $x = 1.7$ hasta alcanzar una precisión de 0.0001

11. Resolver mediante el método de Newton la ecuación no lineal

$$x^2 - \exp(-x) = 0$$

con una precisión numérica de 10^{-5}, partiendo de $x_0 = 0$.

12. Sea el polinomio $x^3 - 2x^2 + 4x - 4$

(a) Encontrar una raíz de dicho polinomio con una precisión de 10^{-6}.

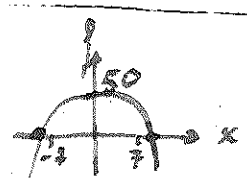
(b) Demostrar analíticamente que es la única raíz del polinomio.

RAICES DE ECUACIONES NO LINEALES

T. 1

1

$$x^2 = 50 \rightarrow 50 - x^2 = f(x) = 0$$



$$x_{i+1} = x_i + \frac{50 - x_i^2}{2x_i} = \frac{x_i}{2} + \frac{25}{x_i}$$

i	x	$-f/f'$	f(x)
0	7	0,071428571	1
1	7,071428571	-0,00036075	-0,00510204
2	7,071067821	$-9,2 \cdot 10^{-9}$	-0,00000013
3	7,071067812	0	0

$$x = r^{1/2} \rightarrow -x^2 + r = 0 \rightarrow x_{i+1} = x_i + \frac{r - x_i^2}{2x_i}$$

$$= \frac{x_i}{2} + \frac{r}{2x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{r}{x_i}\right)$$

i	x	Δx	f
0	-9	1,72222222	-31
1	-7,277777778	0,203774385	-2,966049383
2	-7,074003393	+0,002934971	-0,041524
3	-7,071068421	0,000000609	-0,000008613
4	-7,071067812	0	0

Δx :

$\epsilon_{i+1} \approx$ 0,06870229 ϵ_i^2

2

$$r - x^n = 0 \longrightarrow x_{i+1} = x_i + \frac{r - x_i^n}{n x_i^{n-1}} = x_i\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{r}{n x_i^{n-1}}$$

$$70 - x^3 = 0 \rightarrow n = 3 \qquad = \frac{1}{n}\left(x_i(n-1) + \frac{r}{x_i^{n-1}}\right)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{70 - x^3}{3x^2}$$

i	x	Δx	f
0	9	-2,711934156	~~-2,711934156~~ -659
1	6,288065844	-1,505898836	-178,6286901
2	4,782167008	-0,573757029	-39,36395733
3	4,208409978	-0,085333424	-4,533947788
4	4,12307655 3	-0,00171974	-0,091312935
5	4,121286078	-0,000000778	-0,000039647
6	4,121285 3	0	0

f

$\epsilon_{i+1} = 0,0004 \cdot \epsilon_i^2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\log(2-x_i^2) - x_i^2}{\frac{-2x_i}{2-x_i^2} - 2x_i} = x_i + \frac{1}{2x_i} \cdot \frac{\log(2-x_i^2) - x_i^2}{\frac{1}{2-x_i^2} + 1}$$

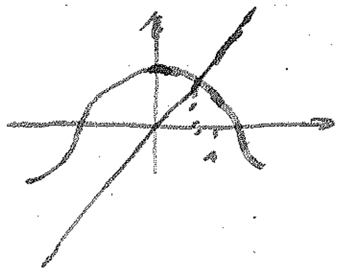
i	x	Δx	f
0	1	-0,25	-1
1	~~1,25~~ 0,75	~~-0,15392441~~ -0,159188365	~~-1,82472943~~ -0,104892146
2	0,590811634	-0,069215834	-0,131326673
3	0,521595799	-0,020968979	-0,034534067
4	0,50062682	-0,004921726	-0,007744846
5	0,495705093	-0,0010443	-0,001625504
6	0,494660793	-0,00021914	-0,000335391
7	0,49444879	-0,000044391	-0,000068903

$\Rightarrow 0,4944$

4)

$x - \cos x = 0 = f(x)$

$\varepsilon = 0,001$ $\quad f'(x) = 1 + \sin(x)$



$$x_{i+1} = x_i + \frac{\cos x - x}{\sin x + 1}$$

i	x	Δx	f
0	1	-0,249636132	0,459697694
1	~~0,244808777~~ 0,750363867	-0,011250976	0,018923073
2	0,73911289	-0,000027757	0,000046455

$\Rightarrow 0,739$

5)

$$f(x) = \frac{1+\log(x)}{1-\log(x)} - 2 = 0 \qquad x_0 = 1$$

$$\varepsilon = 0,0001$$

S. exacta

$\hookrightarrow 1 + \log(x) = 2 - 2\log x$

$3\log(x) = 1$

$\log(x) = 1/3 \qquad x = 10^{1/3} = 2,15443469$

$$f^*(x) = \frac{1 + \log(x) - 2 + 2\log(x)}{1-\log(x)} = \frac{3\log(x) - 1}{1-\log(x)}$$

$$= \frac{2\log x}{1-\log(x)} - 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{x - x\log x} + \frac{2\log x}{x(1-\log(x))^2} = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{1-\log x} + \frac{\log x}{(1-\log x)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{x}\left(\frac{1}{(1-\log(x))^2}\right)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{3\log(x) - 1}{(1-\log x)} \cdot \frac{x}{2}(1-\log(x))^2$$

$$= x_i - \frac{x_i}{2}(3\log x - 1)(1 - \log(x))$$

i	x	Δx	$f = \frac{1+\log x}{1-\log x} - 2$
		0,5	−1
0	1		
1	1,5	0,291494518	−0,57254669
2	1,791494519	0,160779743	−0,321851275
3	1,952274262	0,088905207	−0,180951235
4	2,041179467	0,049554012	−0,101948279
5	2,090733482	0,027784828	−0,057831117
6	2,118518311	0,015636933	−0,032499081
7	2,134155244	0,008819675	−0,018369788
8	2,142974919	0,0049809	−0,010387014
9	2,14795582	0,002815014	−0,005874424
10	2,150770835	0,001591601	−0,003322691
11	2,152362436	0,000900099	−0,001879504
12	2,153262535	0,000509102	−0,001063194
13	2,153771638	0,~~000235384~~ 000287973	−0,000~~[illegible]~~ 601438
14	2,154059611	0,000162899	−0,000340231
15	2,15422251	0,000092149	−0,000192469
16	2,154314666	0,000052128	−0,00010888
17	2,154366789	0,000029489	−0,000061594
18	2,154396278		

2,1544

$$\frac{F_A}{F_G} = \frac{\frac{1}{3}\pi(3rh^2-h^3)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot \rho_e = \rho_e$$

$$\rho_e \frac{4}{3}\pi r^3 g = \rho_{liq} \cdot \frac{1}{3}\pi(3rh^2-h^3) \cdot g$$

$$\frac{0{,}6}{4}(3x^2-x^3) = \frac{x^2}{2{,}4}(3-x) = 1$$

$$\frac{x^2}{2{,}4}(3-x) - 1 = 0 = \frac{5}{12}x^2(3-x) - 1$$

$$3x^2 - x^3 - 2{,}4 = 0 = f(x)$$

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{3x^2-x^3-2{,}4}{6x-3x^2}$$

i	x_i	Δx	f
0	1	$0{,}1\overline{3}$ ~~$0{,}13333$~~	$-0{,}4$
1	$1{,}1\overline{3}$	0,0008044424	$-0{,}002370370$
2	1,134137758		

(7) $f(x) = e^{e^x} - 5 = 0$

$x_0 = 1 \qquad \varepsilon = 0{,}0002$

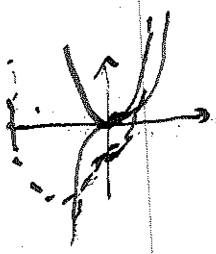
$$f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{e^x}-5}{e^{e^x}\cdot e^x} = x_i - \frac{1}{e^x}$$

i	x_i	Δx	f
~~0~~	~~1~~	~~$-0{,}367879441$~~	~~10,15426224~~
~~1~~	~~0,632120558~~	~~$-0{,}531463605$~~	~~6,563975151~~
~~2~~	~~0,100656953~~	~~$-0{,}904243147$~~	~~3,02193454~~
~~3~~	~~$-0{,}803586223$~~	~~$-2{,}233536545$~~	~~1,564774622~~
~~4~~	~~$-3{,}037122768$~~		~~1,049~~
0	1	$-0{,}246501232$ ~~$-1{,}1484553568$~~	10,15426224
1	0,753498767	$-0{,}189458136$	3,368041614
2	0,564040631	$-0{,}078422034$	0,799435777
3	0,485618597	$-0{,}00961054$	0,079333385
4	0,476008057	$-0{,}000623942$	0,00099046 $\to x = 0{,}4759$

(8)

$p(x) = x^4 + 3x^3 - 2$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
p	62	-2	-10	-4	-2	2	38	...	

$p' = 4x^3 + 9x^2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^4 + 3x_i^3 - 2}{4x_i^3 + 9x_i^2}$$

i	x	Δx	f
		0,0740740 74	-2
0	-3	-0,004874382	0,151836233
1	-3,0740	-0,000022312	0,000688737
2	-3,069199681	$-4 \cdot 10^{-10}$	0,000 000014
3	-3,069177368		

↳ -3,069

i	x	Δx	f
		0,153846153	2
0	1	0,037227594	0,330100486
1	0,846153846	0,002020867	0,016180233
2	0,808926251	0,0000005742	0,000045714
3	0,806905983		

↳ 0,807

c) d) $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 \quad > 4 \quad = x^2(4x+9) \quad >4 \rightarrow >0 \quad <4 \rightarrow <0$

$f''(x) = 12x^2 + 18x \quad x \geq 4 \quad$ no c. signo

(9) $2x - \cos x = 3 \quad \rightarrow \quad 2x = \cos x + 3$

a)

$f(x) = 2x - \cos x - 3$

$f'(x) = 2 + \sin x$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2x - \cos x - 3}{2 + \sin x}$$

i	x	Δx	f
		-2	-2
0	0	0,48676 5919	1,416146837
1	2	-0,01035982	-0,031062302
2	1,513234081	0,000000967	0,000002902
	1,523593901		

$x + \tan(x) = f(x) = 0$

$$c = \frac{a(b+\tan b) - b(a+\tan a)}{b+\tan b - a - \tan a} = \frac{a\tan b - b\tan a}{b - a + \tan b - \tan a}$$

$a = 1{,}9$, $b = 2{,}1$

$f(a) = 1{,}089$ $f(b) = 0{,}89$

i	a	b	c	f
0	1,9	2,1	2,044942221	0,09635609
1	1,9	2,044942221	2,03251086	0,022807958
2	1,9	2,03251086	2,029632218	0,005339664
3	1,9	2,029632218	2,028961773	0,001246804
4	1,9	2,028961773	2,028805815	0,000290947
5			2,0287	

$\to 2{,}029$

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i + \tan x_i}{1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

i	x	Δx	f
0	1,7	-0,097923397	-5,99660214
1	1,797923398	-0,122042833	-2,528927635
2	1,919966231	-0,086613985	-0,826621926
3	2,006580217	-0,021324661	-0,14100089
4	2,027904878	-0,000851724	-0,005224148
5	2,028756602	-0,000001235	-0,000007557

$\to 2{,}029$

11) $x^2 - \exp(-x) = 0 = f(x)$ $\quad f'(x) = 2x + \exp(-x)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - \exp(-x_i)}{2x_i + \exp(-x_i)}$$

i	x	Δx	f
0	0	-1	-1
1	1	0,266956394	0,632120558
2	0,733043605	0,029235818	0,056908448
3	0,703807786	0,000340317	0,000647391
4	0,703467468	0,000000045	0,000000087
5	0,703467422		

$\to 0{,}70347$

(12) $x^3 - 2x^2 + 4x - 4 = f(x) = 0$

(a) 10^{-6}

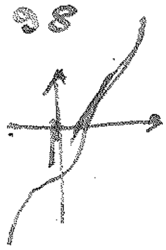
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 2x_i^2 + 4x_i - 4}{3x_i^2 - 4x_i + 4}$$

i	x	Δx	f
0	1	$-1/3$	-1
1	4/3	~~[illegible]~~ $0,\overline{037}$	~~[illegible]~~ $0,148148148$
2	~~1,138888895~~ 1,2956[illegible]	~~$-0,08[illegible]$~~	~~$-0,168292238$~~ $0,002692678$
~~3~~	~~1,[illegible]~~	$0,000698314$	
3	1,295597981	$0,000000238$	$0,00000092$
4	1,295597743		

↳ 1,295598

b) $f'(x) > 0 \ \forall x$



$3x^2 - 4x + 4$

$$x_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 16}}{6} \ \nexists \in \mathbb{R}$$

Sistemas Lineales

1. Descomponer mediante el método **LU** las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sean los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

   (a) Obtener la descomposición **LU** de la matriz.

   (b) Resolver el sistema.

3. Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dada la siguiente matriz triangular superior determinar su matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

5. La descomposición **LU** de una matriz viene dada, en forma empaquetada, por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   En la determinación de esta descomposición no se hizo ningún intercambio de filas.

   (a) Determínese la matriz original.

   (b) Resuélvase el problema lineal asociado a esta matriz para un vector de términos independientes.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (c) Compruébese el resultado.

6. Tenemos una matriz 3×3 descompuesta en la forma **LU**. En forma empaquetada dicha matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 28.0 & 31.0 & 37.0 \\ 0.1071 & 5.6786 & 24.0357 \\ 0.3214 & 0.5346 & 6.2579 \end{pmatrix}$$

   y para su obtención se hizo la siguiente reordenación de filas:

Fila	por fila
1	3
2	3
3	3

(a) Obtenga la matriz original.

(b) Resuelva el sistema lineal de ecuaciones asociado a un vector columna de términos independientes:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(c) Compruebe que la solución está bien.

7. Determínese la descomposición de Cholesky para la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y compruébese el resultado.

8. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Obténgase la descomposición de la misma mediante el método de Cholesky ($\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T = \mathbf{A}$).

9. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Obtener la descomposición de Cholesky de la matriz.

(b) Calcular el determinante utilizando dicha descomposición.

(c) Resolver el sistema $Ax = b$ donde $b = (16, 8, 6)^T$.

10. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

(a) Obtener la descomposición de Cholesky de la matriz.

(b) Calcular el determinante utilizando dicha descomposición.

(c) Resolver el sistema $Ax = b$ donde $b = (5, 13, 76)^T$.

PROBLEMAS LINEALES

1

a) $$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

$c_{11} = \cancel{2}\, a_{11} = 2$

$b_{21} = \cancel{a}\, \dfrac{a_{21}}{c_{11}} = \dfrac{1}{2}$ $\longrightarrow 1 \rightleftarrows 3 \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$

$b_{31} = \dfrac{a_{31} \cancel{\ldots}}{c_{11}} = \dfrac{4}{2}$

$(1,2,3) \rightarrow (3,2,1)$

$c_{11} = 4$
$b_{21} = 1/4$
$b_{31} = 2/4$ $\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1\\ 1/4 & 3 & 2\\ 1/2 & 4 & 5\end{pmatrix}$

$c_{12} = a_{12} \cancel{\ldots} = 6$

$c_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = 3 - 1/4 \cdot 6 = 3/2$

$b_{32} = \dfrac{a_{32} - b_{31}c_{12} \cancel{\ldots}}{c_{22}} = \dfrac{4 - 1/2\cdot 6}{3/2} = \dfrac{1}{3/2}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1\\ 1/4 & 3/2 & 2\\ 1/2 & 2/3 & 5\end{pmatrix}$

$c_{13} = a_{13} = 1$

$c_{23} = a_{23} - b_{21}c_{13} = 2 - \frac{1}{4}\cdot 1 = 7/4$

$c_{33} = a_{33} - b_{31}c_{13} - b_{32}c_{23} =$
$= 5 - 1/2 \cdot 1 - 2/3 \cdot 7/4 = \frac{9}{2} - \frac{7}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1\\ 1/4 & 3/2 & 7/4\\ 1/2 & 2/3 & 10/3\end{pmatrix}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = P^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0\\ 1/2 & 2/3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1\\ & 3/2 & 7/4\\ & & 10/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$P \cdot L \cdot U = A$ ✓

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 3$
$b_{21} = 0$
$b_{31} = \frac{1}{3}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1/3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$c_{12} = 0$
$c_{22} = \cancel{-1-0} = -1$
$b_{32} = \frac{3 - 1/3 \cdot 0}{-1} > \quad (2 \leftrightarrow 3)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1/3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = 0$
$c_{22} = 3 - 1/3 \cdot 0 = 3$
$b_{32} = \frac{-1 - 0}{3} = -1/3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1/3 & 3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$c_{13} = 3$
$c_{23} = 0 - 1/3 \cdot 3 = -1$
$c_{33} = 3 - \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1/3 & 3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 8/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \circlearrowleft 2,3 \checkmark$$

$P^T \cdot (\quad) = A$

---

② a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$c_{11} = 2$
$b_{21} = -\frac{2}{2}$
$b_{31} = \frac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = -4$
$c_{22} = 4 - 4 = 0$ ✗
$b_{32} = \frac{-1 - 1/2 \cdot (-4)}{0}$

$\circlearrowleft 2,3$

$$\begin{pmatrix} +2 & -4 & -4 \\ 1/2 & -1 & +1 \\ -1 & +4 & -2 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = -4$
$c_{22} = 4 - 1 - 1/2 \cdot (-4) = 1$
$b_{32} = \frac{4 - (-1) \cdot (-4)}{1} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$c_{13} = -4$
$c_{23} = 1 - 1/2 \cdot (-4) = 3$
$c_{33} = -2 - (-1) \cdot (-4) - 0 = -6$

$$P = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ $\qquad LU = \begin{pmatrix} \cancel{4} & 6 & \cancel{1}\\ 1/4 & \cancel{1/2} & 7/4 \\ \cancel{1/2} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4\\ 1/2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$P^{-1}LU\vec{x} = \vec{w}$

$LU\vec{x} = P\vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} = \vec{z}$

$L\vec{y} = \vec{z} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/2 & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

$y_1 = z_1 = -2$

$y_2 = z_2 - b_{21}y_1 = 0 - 1/2\cdot(-2) = 1$

$y_3 = z_3 - b_{31}y_1 - b_{32}y_2 = 4 - (-1)\cdot(-2) - 0 = 2$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

$x_3 = \frac{y_3}{c_{33}} = 2/-6 = -1/3$

$x_2 = \frac{y_2 - c_{23}x_3}{c_{22}} = \frac{1 - 3\left(\frac{-1}{3}\right)}{1} = +2$

$x_1 = \frac{y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3}{c_{11}} = \frac{-2 - (-4)\cdot(+2) - (-4)\left(\frac{-1}{3}\right)}{-6} = \ldots$

$= \frac{-2 + 8 - \frac{4}{3}}{2} = \ldots -8 + \frac{4}{3} = -2$ ✓

$2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -2$

$x_1 = \frac{-2 + 4x_2 + 4x_3}{2} = \frac{-2+8-4/3}{2} = +\frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}\right) = +\frac{7}{3}$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4\\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}7/3\\2\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14/3 - 8 + 4/3\\ -\frac{14}{3} + 8 + 2/3 \\ 7/3 - 2 - 1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\+4\\0\end{pmatrix}$ ✓

b)

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad c_{11} = 2,\quad b_{21} = \frac{3}{2},\quad b_{31} = \frac{3}{2} \qquad \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9\\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$c_{11} = 3,\quad b_{21} = 2/3,\quad b_{31} = 3/3 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9\\ 2/3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \quad c_{12} = 3,\quad c_{22} = -1 - 2/3\cdot 3 = -3,\quad b_{32} = \frac{3 - 1\cdot 3}{-3} = 0$

$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9\\ 2/3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad c_{13} = 9,\quad c_{23} = 1 - 2/3\cdot 9 = -5,\quad c_{33} = 5 - 1\cdot 9 - 0 = -4 \qquad P = P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9\\ 2/3 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9\\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9\\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 0$ $\qquad x_3 = \frac{4}{-4} = -1$

$y_2 = -1$ $\qquad x_2 = \frac{-1-(-1)\cdot(-5)}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$

$y_3 = 4 - 0 = 4$

$$x_1 = \frac{-2\cdot 3 - (-1)\cdot 9}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

$(1,2,3) \to (3,2,1) \to (3,1,2)$

3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to c_{11} = 2,\ b_{21} = \frac{1}{2},\ b_{31} = \frac{3}{2} \xrightarrow{(1,3)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to c_{11} = 3,\ b_{21} = 1/3,\ b_{31} = 2/3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 2/3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to c_{12} = 2,\quad c_{22} = 1 - 1/3\cdot 2 = 1/3,\quad b_{32} = \frac{2 - 2/3\cdot 2}{1/3} = \frac{2/3}{1/3} \xrightarrow{(2,3)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2/3 & 2 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = 2$

$c_{22} = 2 - 2/3\cdot 2 = 2/3$

$b_{32} = \frac{1 - 1/3\cdot 2}{2/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \to c_{13} = 1,\quad c_{23} = 1 - 2/3\cdot 1 = 1/3,\quad c_{33} = 1 - 1/3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cdot P^T = A$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U^{-1} \to e_{11} = \frac{1}{3}$ $\quad e_{12} = -\frac{1/3\cdot \cancel{2}}{2/3} = -\cancel{3/2}\ 1$ $\quad e_{23} = -\frac{3/2\cdot 1/3}{1/2} = -1$

$e_{22} = 3/2$ $\quad e_{13} = -\frac{1/3\cdot 1 + (-\cancel{1})\cdot 1/3}{1/2} = +\cancel{1/5}\ 0$

$e_{33} = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -\cancel{3/2}\,1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3} + a = 0 \rightarrow a = -2/3 \qquad \frac{1}{2} + c = 0$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$1/3 - \frac{1}{3} + b = 0 \rightarrow b = 0$$

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b^{-1} & c^{2} & d \\ 0 & e^{1/2} & f^{-9/8} & g \\ 0 & 0 & h^{1/4} & i^{1/32} \\ 0 & 0 & 0 & j^{1/8} \end{pmatrix} = I$$

$$a = 1 \qquad b + 2e = 0 \qquad e = 1/2 \qquad 2f + 9/4 = 0$$

$$b = -1 \qquad 4i - 1/8 = 0 \qquad f = -\frac{9}{8}$$

$$i = 1/32$$

$$c - \frac{9}{4} + 1/4 = 0 \rightarrow c = 2$$

$$2g + \frac{9}{32} - \frac{1}{8} = 0 \rightarrow g = -\frac{5}{46} \qquad d - \frac{45}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{4} = 0$$

$$d = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1/8 \\ 0 & 1/2 & -9/8 & -5/46 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/32 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$[L \cdot U] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 1$ $\qquad$ $x_3 = 1/2$

$y_2 = 3 - 1 \cdot 3 = 0$ $\qquad$ $x_2 = \frac{4 \cdot 1/2}{1} = 2$

$y_3 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $x_1 = \frac{1 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1/2}{2} = \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/4 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

6) $A' = P^{-1}[L \cdot U]$ $\qquad$ $1 \leftrightarrow 3$

$123 \to 321 \to 312$ $\qquad$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A = P^T \cdot L \cdot U$

$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $L \cdot U \cdot \vec{x} = \underbrace{P \cdot \vec{w}}_{w'}$

$Ly = w'$

$U \cdot x = y$

Fernando Hueso González
Grupo B - 2º Física
Cálculo numérico

2.6

$$A' = (LU) = \begin{pmatrix} 28.0 & 31.0 & 37.0 \\ 0.1071 & 5.6786 & 24.0357 \\ 0.3214 & 0.5346 & 6.2579 \end{pmatrix}$$

$1 \to 3$
$2 \to 3$ $\Rightarrow$ Matriz de permutaciones $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$3 \to 3$

$(1,2,3) \to (3,2,1) \to (3,1,2)$

a) ¿A?

$P \cdot A = L \cdot U$

(unitaria, ortogonal)

$\to P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = P^{-1} \cdot L \cdot U$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1071 & 1 & 0 \\ 0.3214 & 0.5346 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28.0 & 31.0 & 37.0 \\ 0 & 5.6786 & 24.0357 \\ 0 & 0 & 6.2579 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28.0 & 31.0 & 37.0 \\ 2.9988 & 8.9987 & 27.9984 \\ 8.9992 & 12.99917956 & 30.99918522 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2.9988 & 8.9987 & 27.9984 \\ 8.9992 & 12.99917956 & 30.99918522 \\ 28.0 & 31.0 & 37.0 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{x} = \vec{v} \quad | \cdot P$

$P \cdot A \cdot \vec{x} = P \cdot \vec{v}$

$L \cdot U \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{w}$

$U \cdot \vec{x} = \vec{y}$

$L \cdot \vec{y} = \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1071 & 1 & 0 \\ 0.3214 & 0.5346 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 9$

$y_2 = 1 - 9 \cdot 0.1071 = 0.0361$

$y_3 = 4 - 0.3214 \cdot 9 - 0.0361 \cdot 0.5346 = 1.08810094$

$U \cdot \vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{pmatrix} 28.0 & 31.0 & 37.0 \\ 0 & 5.6786 & 24.0357 \\ 0 & 0 & 6.2579 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0.0361 \\ 1.08810094 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \dfrac{1.08810094}{6.2579} = 0.17387637$

$x_2 = \dfrac{0.0361 - 24.0357 \cdot x_3}{5.6786} = -0.729605938$

$x_1 = \dfrac{9 - 37.0\, x_3 - 31.0\, x_2}{28.0} = 0.899441371$

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2.9988 & 8.9987 & 27.9984 \\ 1.9992 & 12.99917956 & 30.99918522 \\ 28.0 & 31.0 & 37.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.899441371 \\ -0.729605938 \\ 0.17387637 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 0.9995999986 \\ 3.9999999989 \\ \ldots \end{pmatrix} \approx \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

⑦

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\quad l_{11}=\sqrt{a_{11}}\quad \cancel{l_{21}}=\frac{1}{l_{11}}(a_{12})$$

$$\begin{pmatrix}a&&\\b&c&\\d&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&d\\ \cdot&c&e\\ &&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

$a=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\,b=1 \to b=1/\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\,d=1 \quad d=1/\sqrt{3}$

$b^2+c^2=3=\frac{1}{3}+c^2 \longrightarrow c=\sqrt{\frac{8}{3}}$

$bd+ce=-1$

$\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{8}{3}}e=-1$

$d^2+e^2+f^2=3=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+f^2$

$-\sqrt{\frac{2}{3}}\Leftarrow e=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}$

$f=\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\1/\sqrt{3}&\sqrt{\frac{8}{3}}&0\\1/\sqrt{3}&-\sqrt{\frac{2}{3}}&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\\0&\sqrt{\frac{8}{3}}&-\sqrt{\frac{2}{3}}\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\checkmark$$

⑧

a) $$A=\begin{pmatrix}7&-1&-1\\-1&5&1\\-1&1&5\end{pmatrix}$$

$l_{11}=\sqrt{7}$ $\qquad l_{22}=\sqrt{5-\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{34}{7}}$

$l_{21}=-\frac{1}{\sqrt{7}}$ $\qquad l_{32}=\sqrt{\frac{7}{34}}\left(1-\frac{1}{7}\right)=\sqrt{\frac{7}{34}}\cdot\frac{6}{7}=\sqrt{\frac{36}{7\cdot 34}}=\sqrt{\frac{18}{7\cdot 17}}$

$l_{31}=-\frac{1}{\sqrt{7}}$ $\qquad l_{33}=\sqrt{5-\frac{1}{7}-\frac{18}{7\cdot 17}}=\sqrt{\frac{34}{7}-\frac{18/17}{7}}=\sqrt{\frac{34\cdot 17-18}{7\cdot 17}}$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{7}&0&0\\-1/\sqrt{7}&\sqrt{\frac{34}{7}}&0\\-1/\sqrt{7}&\sqrt{\frac{18/17}{7}}&\sqrt{\frac{560/17}{7}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{7}&-1/\sqrt{7}&-1/\sqrt{7}\\0&\sqrt{\frac{34}{7}}&\sqrt{\frac{18/17}{7}}\\0&0&\sqrt{\frac{560/17}{7}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&-1&-1\\-1&5&1\\-1&1&5\end{pmatrix}\checkmark$$

$$B = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \quad l_{11} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \quad l_{21} = \frac{30}{\sqrt{60}} = \sqrt{15} \quad l_{31} = \frac{20}{\sqrt{60}} = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$l_{22} = \sqrt{20 - \frac{30^2}{60}} = \sqrt{\frac{1200 - 900}{60}} = \sqrt{\frac{300}{60}} = \sqrt{5}$$

$$l_{32} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(15 - \frac{600}{60}\right) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$l_{33} = \sqrt{12 - \frac{20^2}{60} - 5} = \sqrt{7 - \frac{20}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{15} & 0 & 0 \\ \sqrt{15} & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{\frac{20}{3}} & \sqrt{5} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{15} & \sqrt{15} & \sqrt{\frac{20}{3}} \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \checkmark$$

9

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow l_{11} = 2 \quad l_{31} = 0$

$l_{21} = 1$

$$l_{22} = \sqrt{5 - 1} = 2$$

$$l_{32} = \frac{1}{2}(2 - 0) = 1$$

$$l_{33} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

b)

$$\det A = \det M \cdot M^T = |M|\,|M^T| = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 2^4 = 16 \checkmark$$

c) $A\vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = L \cdot L^T \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow y_1 = 8, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 6$$

$$L^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_3 = 6 \quad x_2 = -3 \quad x_1 = \frac{11}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \checkmark$$

Valores y vectores propios

1. Realizar una iteración del método de Jacobi en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Realizar dos iteraciones del método de Jacobi en la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Considérese la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Hácer una rotación de Jacobi para anular el término a_{13}.

4. Aplicar dos rotaciones de Jacobi a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Escribir el resultado de cada iteración y la matriz de rotación correspondiente.

5. Diagonalizar por Jacobi la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Escribir el resultado de cada iteración y la matriz de rotación correspondiente.

6. Aplicar dos rotaciones de Jacobi a la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Escribir el resultado de cada iteracción y la matriz de rotación correspondiente.

7. Aplicar dos rotaciones de Jacobi a la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Al diagonalizar una matriz **A** por el método de Jacobi procedemos a realizar una rotación en el plano **pq**, con el fin de anular el elemento a_{pq}. De las siguientes proposiciones indicar cuales son verdaderas y cuales son falsas, justificando la respuesta:

   (a) Tras la rotación, la suma de los elementos diagonales de la matriz permanece constante.

   (b) La rotación sólo se puede llevar a cabo si $a_{pp} \neq a_{qq}$

   (c) El módulo de cada uno de los elementos no diagonales siempre disminuye o se queda igual, tras la mencionada rotación.

⑩

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

a) $l_{11} = 1 \quad l_{31} = 1$

$l_{21} = 1$

$l_{22} = \sqrt{5-1} = 2$

$l_{32} = \frac{1}{2}(5-1) = 2$

$l_{33} = \sqrt{14-1-4} = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix} \checkmark$$

b) $\det A = |L| \cdot |L^T| = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36$

$= 5 \cdot 14 + 5 \cdot 2 - 5 - 25 - 14 = 56 - 20 = 36 \checkmark$

c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 76 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 76 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = 21 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 21 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_3 = 7 \\ x_2 = -5 \\ x_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 76 \end{pmatrix} \checkmark$$

VALORES Y VECTORES PROPIOS

①

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad a_{32} = -2 \quad \Big| \quad a_{23} = -2 \rightarrow \tan 2\theta = -\frac{2 \cdot (-2)}{3-(-1)} = 1$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot (-2)}{(-1)-3} = -1 \qquad \rightarrow 2\theta = -\pi/4 \rightarrow \theta = -\pi/8$$

$a'_{33} = (-1)\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 3\sin^2(\pi/8) + 4\,\text{sen}(-\pi/8)\cos(-\pi/8) = -1,828427125$

$a'_{22} = (-1)\,\text{sen}^2(-\pi/8) + 3\cos^2(-\pi/8) - 4\,\underbrace{\text{sen}(-\pi/8)\cos(-\pi/8)}_{\sqrt{2}/4} = 3,828427125$

$a'_{13} = a_{13}\cos\theta - a_{12}\sin\theta = 0,923879532$

$a'_{23} = \cancel{a_{23}\cos\theta} - \cancel{a_{22}\sin\theta} = 0$

$a'_{12} = a_{13}\sin\theta + a_{12}\cos\theta = -0,382683432$

$a'_{32} = \cancel{a_{32} \, a_{23}\sin\theta}\ 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\theta = \pi/8$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & c \end{pmatrix}$

$a_{23} = -2$

$a'_{23} = 0$

$a'_{12} = \cancel{a_{12}} c - a_{13} s = -s \qquad a'_{22} = a_{22}c^2 + a_{33}s^2 - 2a_{23}sc$

$a'_{13} = \cancel{a_{12}} s + a_{13} c = c \qquad = 3c^2 - s^2 + 4sc$

$= 3,828427125$

$a'_{33} = a_{22}s^2 + a_{33}c^2 + 2a_{pq}cs$

$= 3s^2 - c^2 - 4sc = -1,828427125$

$a'_{12} = -0,382683432$

$a'_{13} = 0,9238795532$

$$\begin{pmatrix} 2 & -0,382683432 & 0,9238795532 \\ \| & 3,828427125 & 0 \\ \| & 0 & -1,828427125 \end{pmatrix}$$

$Tr(A) = Tr(A') = 4$

2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$a_{12} = -1 \qquad tg\, 2\theta = -\dfrac{2\cdot(-1)}{3-3} = +\infty$

$a'_{12} = 0 \qquad \rightarrow \theta = \pi/4$

$a'_{31} = a_{31}^{0} c - a_{32}^{0} s = 0$

$a'_{32} = a_{31} s + a_{32} c = 0$

$a'_{33} = a_{33} = 2$

$a'_{11} = a_{11}c^2 + a_{22}s^2 - 2a_{12}sc = 3c^2 + 3s^2 - 2\cdot(-1)sc = 3+1 = 4$

$a'_{22} = a_{11}s^2 + a_{22}c^2 + 2a_{12}sc = 3 - 1 = 2$

$B' = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ✓ $\qquad (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$

$((3-\lambda)^2 - 1)(2-\lambda) = 0 \qquad \lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 4$

②

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 1 \qquad tg\,2\theta = -\dfrac{2}{0} = -\infty \rightarrow \theta = -\pi/4$

$p = 1, \; q = 2$

$a'_{i1} \rightarrow a'_{31} = a_{3\cancel{1}}C - a_{32}S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$a'_{32} = a_{3\cancel{1}}S + a_{32}C = 1/\sqrt{2}$

$a'_{11} = a_{11}C^2 + a_{22}S^2 - 2a_{12}SC = \dfrac{1}{2}(-2) + (-2)\dfrac{1}{2} - 1 = -3$

$a'_{22} = a_{11}S^2 + a_{22}C^2 + a_{12} = \dfrac{1}{2}(-2) + (-2)\dfrac{1}{2} + 1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$Tr = \checkmark$

$(4 > 2) \quad 2 > 1 \checkmark$

$a_{13} = 1/\sqrt{2} \qquad tg\,2\theta = -\dfrac{2/\sqrt{2}}{-3+2} = \sqrt{2}$

$a'_{21} = \cancel{a_{21}}c - a_{23}S = -0,3250575583$

$a'_{23} = \cancel{a_{21}}S + a_{23}C = 0,627963093$

$a'_{13} = 0$ $\qquad 1 > 0,5$

$a'_{22} = a_{22}$

$a'_{11} = a_{11}C^2 + a_{33}S^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta = -3,366025404$

$a'_{33} = a_{11}S^2 + a_{33}C^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta = -1,633974596$

$Tr = (-6)$

③

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 1$

$tg\,2\theta = -\dfrac{2}{1-3} = 1 \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{8}$

$a'_{21} = a_{21}C - a_{23}S = -C + S = -0,5411961$

$a'_{23} = a_{21}S + a_{23}C = -S - C = -1,306562965$

$a'_{13} = 0$

$a'_{22} = a_{22} = 2$

$a'_{11} = a_{11}C^2 + a_{33}S^2 - a_{13}/\sqrt{2} = c^2 + 3s^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0,585786437$

$a'_{33} = a_{11}S^2 + a_{33}C^2 + a_{13}/\sqrt{2} = s^2 + 3c^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 3,414213562$

$Tr = 6 \checkmark \qquad 3 > 2 \checkmark$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = 1 \qquad tg\,2\theta = -\frac{2}{1-1} = -\infty \rightarrow \theta = -\pi/4$$

$$R_\theta = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad Tr = \checkmark = 3$$

$$2 > 1$$

$$a_{13} = 1/\sqrt{2}$$

$$tg\,2\theta = -\frac{2/\sqrt{2}}{0-1} = \sqrt{2}$$

$$a'_{13} = 0$$

$$a'_{21} = a_{21}c - a_{23}s = -s/\sqrt{2}$$

$$a'_{31} = a_{21}s + a_{23}c = c/\sqrt{2}$$

$$a'_{11} = \cancel{a_{11}c^2} + a_{22}s^2 - 2sc\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a'_{33} = \cancel{a_{11}}s^2 + a_{22}c^2 + \frac{2sc}{\sqrt{2}}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}888073834 & 0{,}459700843 & 0 \\ -0{,}459700843 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}888073834 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \cancel{\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}} \qquad A'' = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -s/\sqrt{2} & -s/\sqrt{2} & c/\sqrt{2} - s \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ c/\sqrt{2} & c/\sqrt{2} & s/\sqrt{2} + c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -sc/\sqrt{2} + s^2 - sc/\sqrt{2} & -s/\sqrt{2} & 0 \\ & 2 & c/\sqrt{2} \\ & & \frac{2sc}{\sqrt{2}} + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}366025403 & -0{,}325087583 & \\ 0 & 2 & 0{,}62796303 \\ 0 & 0 & 1{,}366025404 \end{pmatrix}$$

$$T_r = 3 \checkmark$$

$$1 > 1/2 \checkmark$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 1$

$\operatorname{tg} 2\theta = -\dfrac{2}{0} = -\infty \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4}$

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -6 & 6 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$a_{23} = \sqrt{2}$ $\qquad Tr = 19$ ✓

$3 > 2 \cdot \rightarrow \operatorname{tg} 2\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{6-5} = -2\sqrt{2} \rightarrow \cancel{\theta}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}816496558 & -0{,}577350269 \\ 0 & 0{,}577350269 & 0{,}816496558 \end{pmatrix}$$

$a'_{11} = a_{11} \qquad a'_{23} = 0$

$a'_{12} = a_{12} C - a_{13} S = 0$

$a'_{13} = a_{12} S + a_{13} C = 0$

$a'_{22} = a_{22} C^2 + a_{33} S^2 - a_{23} S2\theta = \cancel{3{,}666667}\ 7$

$a'_{33} = a_{22} S^2 + a_{33} C^2 + a_{23} S2\theta = 4$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$Tr = 19$ ✓

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 2 \qquad tg\,2\theta = -\frac{4}{2-2} = -\infty \qquad \theta = -\pi/4$

$a'_{13} = 0$

$a'_{21} = a_{21}c - a_{23}s = c - s = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$

$a'_{23} = a_{21}s + a_{23}s = s + c = 0$

$a'_{22} = a_{22}$

$a'_{11} = a_{11}c^2 + a_{33}s^2 - a_{13} \cdot s(-\pi/2) = 2\frac{1}{2} + 2 \cdot 1/2 + 2$

$a'_{33} = a_{11}s^2 + a_{33}c^2 + a_{13}s(-\pi/2) = 1 + 1 - 2 = 0$

$\hookrightarrow A' = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Tr = \checkmark \quad 6 > 2 \checkmark$

$a'_{12} = \sqrt{2} \rightarrow tg\,2\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{0} = -\infty$

$\theta = -\pi/4$

$a'_{12} = 0$

$a'_{31} = a_{31}c - a_{32}s = 0$

$a'_{32} = a_{31}s + a_{32}c = 0$

$a'_{33} = 0 = a_{33}$

$a'_{11} = a_{11}c^2 + a_{22}s^2 + a_{12}s2\theta = 4/2 + 4/2 + \sqrt{2}$

$a'_{22} = a_{11}s^2 + a_{22}c^2 + a_{12}s2\theta = 2 + 2 - \sqrt{2}$

$$A' = \begin{pmatrix} 4+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Fernando Jiménez González

3.7.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{simétrica positiva} ✓$$

↓ Jacobi

1ª Rotación θ: $\quad a_{pq} > \rightarrow a_{21} = 2$

$$tg\,2\theta = -\frac{2a_{21}}{\underset{4-4}{a_{22}-a_{11}}} = -\infty$$

$\hookrightarrow \theta = -\pi/4 \quad \rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$r_{11} = \cos\theta$
$r_{22} = \cos\theta \leftarrow \{p=2, q=1$
$r_{21} = \sin\theta$
$r_{12} = -\sin\theta$

$$\rightarrow R_{21} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R_{21}^{T} \overset{\rightarrow \text{ortogonal}}{=} R_{21}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A' = R_{21}^{T} A \cdot R_{21}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ simétrica ✓

$Tr(A) = 12 = Tr(A')$ ✓

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Converge

$S = 4+1+1 = 6 > S' = 4$ ✓

2^{a} rotación θ_2: $\rightarrow a_{32} = \sqrt{2}$

$$\operatorname{tg} 2\theta_2 = \frac{-2a_{32}}{a_{33} - a_{22}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2}$$

Método alternativo a multiplicar matrices:
Usar fórmula:

$p = 3$, $q = 2$

$$a_{22}'' = a_{22}' \cos^2\theta_2 + a_{33}' \sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_2\cos\theta_2$$
$$a_{33}'' = a_{22}' \sin^2\theta_2 + a_{33}' \cos^2\theta_2 - 2\sin\theta_2\cos\theta_2$$

$a_{22}'' = 6.732050808$

$a_{33}'' = 3.267949192$

$a''_{12} = \cos\theta_2 \cdot \overset{a'_{12}}{0} - \sin\theta_2 \cdot \overset{a'_{13}}{0} = 0$

$a''_{13} = \sin\theta_2 \cdot \underset{a'_{12}}{0} + \cos\theta_2 \cdot \underset{a'_{13}}{0} = 0$

$a''_{32} = 0$ (escogemos ese valor para determinar θ_2)

$$\Rightarrow A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6.732050808 & 0 \\ 0 & 0 & 3.267949192 \end{pmatrix}$$

$Tr(A'') = 10 = Tr(A') = Tr(A)$ ✓

$0 = S'' < S' < S$ ✓

Interpolación

1. Dada la siguiente tabla de valores:

x	2	3	4	5
$f(x)$	0.5	$0.\widehat{3}$	0.25	0.2

encuentre el valor de la función para $x = 1.5$ mediante:

(a) Interpolación de Lagrange tomando dos puntos, tres puntos y cuatro puntos.

(b) Construir la tabla de diferencias divididas de Newton y obtener los resultados del apartado anterior.

(c) Mediante el algoritmo de Neville.

2. Considerar la siguiente tabla de datos de la función $f(x) = e^x$.

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6
f_i	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

Obtener una cota del error cometido debido a la interpolación polinómica efectuada cuando aproximamos el valor de $e^{1/3}$.

3. Dada la siguiente tabla de valores

x	-1	1	2	3
$f(x)$	0	4	15	40

encuentre el valor de la función para $x = 1.5$ utilizando todos los puntos de la tabla, mediante el algoritmo de Neville.

4. Escriba los polinomios de interpolación de Lagrange y Newton para los siguientes datos:

x	-2	0	1
$f(x)$	0	1	-1

Escriba ambos polinomios en la forma $ax^2 + bx + c$ para verificar que se trata de la misma función.

5. Determínese explicitamente el valor del polinomio interpolador de tercer grado que pasa por los puntos (0,1), (1,2), (2,1) y (3,-1).

6. Para una cierta función conocemos las siguientes diferencias divididas de Newton: $f[4] = 37$, $f[2, 4] = 19$, $f[1, 2, 4] = 8$ y $f[-1, 1, 2, 4] = 2$.

(a) Obtener el polinomio interpolador $P(x)$ de grado 3 para los puntos de interpolaciónn $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$

(b) Usar la interpolaciónn polinomica para encontrar el valor de $f(0)$

(c) Suponiendo que sabemos que $|f^{(4)}(x)| < 0.765$ para $-1 \leq x \leq 4$, encontrar una cota superior al error en la estimación anterior de $f(0)$.

7. Utilizar una Spline cúbica natural para encontrar una aproximación a: $f(2.5)$ dados los siguientes datos:

x	$f(x)$
2.2	0.5207843
2.4	0.5104147
2.6	0.4813306

8. Utilizar una Spline cúbica natural para encontrar una aproximación a $f(1.25)$ dados los siguientes datos:

x	$f(x)$
1.1	0.48603
1.2	0.86160
1.3	1.59751
1.4	3.76155

9. Calcular una aproximación de f(2.5) por interpolación de la tabla:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	3	4	4

   (a) Utilizando interpolación de Lagrange
   (b) Utilizando diferencias divididas
   (c) Mediante el algoritmo de Neville
   (d) Utilizando un spline cúbico natural

10. Dada la siguiente tabla de datos:

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$\tan(\theta)$	0.0	0.57735	1.0	1.73205

calcular la tangente de 39° mediante el método de las diferencias divididas de Newton.

11. Dada la siguiente tabla de valores

x	-1	1	2	3
$f(x)$	0	4	15	40

encuentre el valor de la función para $x = 1.5$ utilizando todos los puntos de la tabla, utilizando el algoritmo de Neville.

12. Construir una Spline cúbica natural para aproximar $f(x) = e^{-x}$ utilizando los valores dados por $f(x)$ en $x = 0,\ 0.25,\ 0.75,\ 1.0$. Integrar la Spline en el intervalo [0,1] y comparar con el resultado exacto. Utilizando las derivadas de la Spline obtener una estimación de $f^{'}(0.5)$ y $f^{''}(0.5)$ y comparar con los valores exactos.

13. Dada la siguiente tabla de datos:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	6	25

   (a) Utilizar una spline cúbica natural para encontrar una aproximación a $f(1.5)$.
   (b) Si los datos de la tabla han sido obtenidos mediante el polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 2$, ¿Cómo es posible que, aún siendo una spline cúbica, no se obtenga el resultado correcto ?
   (c) ¿Qué condición de contorno hay que imponer para asegurar que la spline reproduzca la función original? Compruébese calculando la spline con dicha condición.

INTERPOLACIÓN

X	2	3	4	5
y	0,5	0,3	0,25	0,2

a) $x = 1,5$

$$P_1(x) = \frac{(x-3)}{2-3} \cdot 0,5 + \frac{(x-2)}{3-2} \cdot 0,3 = 0,5(3-x) + 0,3(x-2)$$

$P_1(1,5) = 0,6$

$$P_2(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} 0,5 + \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} \cdot 0,3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} \cdot 0,25$$

$$P_2(x) = 0,25(x-3)(x-4) - 0,3(x-2)(x-4) + 0,125(x-2)(x-3)$$

$P_2(1,5) = 0,65625$

$$P_3(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)} 0,5 + \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)} \cdot 0,3$$

$$+ \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-2)(4-3)(4-5)} 0,25 + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)} 0,2$$

$$= -(x-3)(x-4)(x-5)\frac{0,5}{6} + 0,15(x-2)(x-4)(x-5)$$

$$- 0,125(x-2)(x-5)(x-3) + \frac{0,2}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$P_3(1,5) = 0,703125$

b) $P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots$

$f[x_0] = 0,5$

$f[x_1] = 0,3$

$f[x_2] = 0,25$

$f[x_3] = 0,2$

$f[x_0, x_1] = \frac{-0,2}{1}$, $f[x_1, x_2] = -0,05$, $-0,05$

$+\frac{0,15}{2}$, 0

$-\frac{0,15}{2 \cdot 3}$

$P_1(x) = 0,5 - 0,2(x-2) \rightarrow P_1(1,5) = 0,6$ ✓

$P_2(x) = 0,5 - 0,2(x-2) + \frac{0,15}{2}(x-2)(x-3) \Rightarrow P_2(1,5) = 0,65625$ ✓

$P_3(x) = 0,5 - 0,2(x-2) + \frac{0,15}{2}(x-2)(x-3) - \frac{0,15}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$

↳ $P_3(1,5) = 0,703125$

2 $P_0 = 0,5$ $\quad P_{01} = \frac{(1,5-2)P_1 - (1,5-3)P_0}{1}$

3 $P_1 = 0,3$

4 $P_2 = 0,25$ $\quad P_{12} = 0,375$

$0,375$

5 $P_3 = 0,2$

$$P_{12} = \frac{(x-3)\,0,25 - (x-4)\,0,3}{1} = 0,375$$

$$P_{23} = (x-4)\,0,2 - (x-5)\,0,25 = 0,375$$

$$P_{012} = \frac{(x-2)P_{12} - (x-4)P_{01}}{2} = 0,65625$$

$$P_{123} = \frac{(x-2)P_{23} - (x-5)P_{12}}{2} = 0,375$$

$$P_{0123} = \frac{(x-2)P_{123} - (x-5)P_{012}}{3} = 0,703125$$

② $f(x) = e^x$

x	0	0,2	0,4	0,6
y	1,0000	1,2214	1,4918	1,8221

$e^{1/3}$ $\qquad h = 3$

$$E(x) = \frac{f^{4}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$= \frac{e^{\xi}}{4!}(x-0)(x-0,2)(x-0,4)(x-0,6) \leq \frac{e^{0,6}}{24}(1/3)(\ldots)$$

$$= 0,000059987$$

D. div. 1,0000

1,0000			
	1,107		
1,2214		0,6125	
	1,352		0,227083333
1,4918		0,74875	
	1,6515		
1,8221			

$$P = 1 + 1,107x + 0,6125(x-0,2)x + 0,227083333(x-0,2)x(x-0,4)$$

$$= 1,395549383$$

$E_{real} = 0,000063042 \approx E_{est.}$

error extra redondeos en 5 cifra decimal datos tabla

③

x	-1	1	2	3
y	0	4	15	40

$x = 1{,}5$

$P_0 = 0$ ✓
$P_1 = 4$
$P_2 = 15$
$P_3 = 40$

$$P_{01} = \frac{4\cdot(1{,}5+1) - 0\cdot(1{,}5-1)}{2} = 5 \checkmark$$

$$P_{12} = \frac{15(1{,}5-1) - 4\cdot(1{,}5-2)}{1} = 9{,}5$$

$$P_{23} = 40(1{,}5-2) - 15\cdot(1{,}5-3) = 2{,}5$$

$$P_{012} = \frac{9{,}5(1{,}5+1) - 5(1{,}5-2)}{2+1} = 8{,}75 \checkmark$$

$$P_{123} = \frac{2{,}5(1{,}5-1) - 9{,}5(1{,}5-3)}{2} = 7{,}75$$

$$P_{0123} = \frac{7{,}75(1{,}5+1) - 8{,}75(1{,}5-3)}{4} = 8{,}125 \checkmark$$

0			
	2		
4		3	
	11		1
15		4	
	25		
40		7	

$$P(1{,}5) = 0 + 2(1{,}5+1) + 3(1{,}5+1)(1{,}5-1) \checkmark$$
$$+ \tfrac{4}{4}(1{,}5+1)(1{,}5-1)(1{,}5-2) \checkmark$$
$$= 8{,}125 \checkmark$$

④

x	-2	0	1
y	0	1	-1

-2	0		
		$1/2$	
0	1		$-5/6$
		-2	
1	-1		

$$P(x) = \frac{1}{2}(x+2) - \frac{5}{6}x(x+2)$$
$$= \frac{1}{2}x + 1 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{3}x =$$
$$= -\frac{7}{6}x - \frac{5}{6}x^2 + 1$$

$$P_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)}\cdot 0 + \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)}\,1 - \frac{(x+2)x}{(1+2)(1)}$$

$$= -\frac{1}{2}(x+2)(x-1) - \frac{1}{3}(x+2)x$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2+2x-x-2) - \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} = [illegible]$$

y	1	2	1	-1

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 2 & & -1 & \\ & -1 & & 1/6 \\ 1 & & -3/2 & \\ & -2 & & \\ -1 & & & \end{array}$$

$P(x) = 1 + x - x(x-1) + \frac{x}{6}(x-1)(x-2)$

$P(0) = 0$ ✓

$P(1) = 2$ ✓

$P(2) = 1$ ✓

$P(3) = -1$ ✓

7 $f(2,5)$

x	2,2	2,4	2,6
y	0,5207843	0,5104147	0,4813306

Spline cúbica natural

$S_0 = \underset{0,5207843}{a_0} + b_0(x-2,2) + c_0(x-2,2)^2 + d_0(x-2,2)^3$

$S_1 = 0,5104147 + b_1(x-2,4) + c_1(x-2,4)^2 + d_1(x-2,4)^3$

$\Rightarrow 0,5207843 + b_0(2,4-2,2) + c_0(2,4-2,2)^2 = 0,5104147$
$+ d_0(0,2)^2$

$b_0 + 2c_0(2,4-2,2) = b_1$

$2c_0 = 2c_1$ $\qquad 2c_0 + 6d_0(x-2,2) = 0 \; |_{x=2,2}$

$\cancel{S''_0(x_0) = 2c_0 = 2c_1 = 0}$ $\qquad \cancel{b_0} + 2c_0(x-2,2) + 3d_0(x-2,2)^2 \; |_{x=2,2}$

$\cancel{S' = b_0 + 2c_0(x-2,2) + 3d_0(x-2,2)^2 \; |} = 0$

$S'' = 2c_0 + 6d_0(x-2,2) = \Big|_{x=2,2} = 0 \rightarrow c_0 = 0 \rightarrow \cancel{c_2 = 0}$

$\hat{=} \cancel{b_0} c_1 \mid \cancel{d_0} = 0$

$2c_1 + 6d_0(2,6-2,4) = 0$

$2c_1 + 1,2d_0 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) + \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2(h_0+h_1) & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ 0 \end{pmatrix}$

$c_0 = 0$

$c_2 = 0$

Fernando Hueso González

4.6.

$$f[-1] = 2 \qquad f[-1,1] = 1 \qquad f[-1,1,2] = \cancel{8}\ -2 \qquad f[-1,1,2,4] = \underline{2}$$
$$f[1] = 4 \qquad f[1,2] = -5 \qquad f[1,2,4] = \underline{8}$$
$$f[2] = -1 \qquad f[2,4] = \underline{19}$$
$$f[4] = \underline{37}$$

a) $P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$x_0 = -1 \longrightarrow \cancel{f[-1]} = a_0 = f[-1]$
$x_1 = 1 \longrightarrow \cancel{f[1]} = a_1 = f[-1,1]$
$x_2 = 2 \longrightarrow \cancel{f[2]} = a_2 = f[-1,1,2]$
$x_3 = 4 \longrightarrow \cancel{f[3]} = a_3 = f[-1,1,2,4]$

$$f[-1,1,2,4] = \frac{f[1,2,4] - f[-1,1,2]}{4-(-1)}$$

$$f[-1,1,2] = 8 - 10 = -2$$

$$f[1,2] = f[2,4] - \underset{(4-1)}{3} \cdot f[1,2,4] = -5$$

$$f[2,4] = \frac{f[4] - f[2]}{4-2} \longrightarrow f[2] = 37 - 38 = -1$$

$$\frac{f[2] - f[1]}{2-1} = -5 \longrightarrow f[1] = 4$$

$$f[-1,1] = -3 \cdot f[-1,1,2] + f[1,2] = 1$$
$$f[-1,1] = \frac{f[1] - f[-1]}{2} \longrightarrow f[-1] = 4 - 2 = 2$$

$$P_3(x) = 2 + (x+1) - 2(x+1)(x-1) + 2(x+1)(x-1)(x-2)$$

b) $P_3(0) = 2 + 1 - 2\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2) = 9$

$f(0) \approx$

c)

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

si conocemos la cota superior de f^4 en el intervalo $-1, 4 \rightarrow f^{n+1}$ en ξ será menor que dicho valor. $n=3$, y conocemos $P_3(x)$ y los puntos que interpola

$$\hookrightarrow |f(0) - P_3(0)| = \frac{|f^4(x)|}{4!} \cdot (0+1)(0-1)(0-2)(0-4)$$

$$= \frac{0.765}{\cancel{12}\ 24} = \cancel{0.06375} \quad 0.\cancel{0}2\ 3$$

↳ Cota del error superior del ~~valor~~ $f(0)$

$$8.33625 \leq f(0) \leq P_3(0) + \frac{|f^4(x)|}{12} = 9 + \frac{0.765}{12} = 9.06375$$

¿?

$$\cancel{\frac{0.765 \times (-1)(1)(2)(4)}{4 \cdot 3 \cdot 2}} = 0.255$$

7

$S_0 = a_0 + b_0 (x-2{,}2) + c_0 (x-2{,}2)^2 + d_0 (x-2{,}2)^3$

$S_1 = a_1 + b_1 (x-2{,}4) + c_1 (x-2{,}4)^2 + d_1 (x-2{,}4)^3$

$S'_0 = \cancel{a_0} + b_0 + 2c_0 (x-2{,}2) + 3d_0 (x-2{,}2)^2$

$S'_1 = b_1 + 2c_1 (x-2{,}4) + 3d_1 (x-2{,}4)^2$

$S''_0 = 2c_0 + 6d_0 (x-2{,}2)$

$S''_1 = 2c_1 + 6d_1 (x-2{,}4)$

$\rightarrow \quad 2c_0 = 0$

$2c_1 + 6\cdot 0{,}2\, d_1 = 0$

$S_0 = 0{,}5207843 + \cancel{-0{,}002530875}\ 0{,}028454875 (x-2{,}2) - \cancel{1{,}232928125}\ 0{,}584928125 (x-2{,}2)^3$

$S_1 = 0{,}5104147 \cancel{+0{,}08409...}\ \cancel{-0{,}04673...}\ -0{,}0586325 (x-2{,}4) + \cancel{1{,}232928125}\ + 0{,}584828125 (x-2{,}4)^3 - 0{,}\cancel{0394537}\ \cancel{73975...}\ -0{,}350896875 (x-2{,}4)^2$

$S1 = -0{,}15048125$

$f(2{,}5) = \cancel{0{,}49957 1434}\ 0{,}497627134$

3 $\quad b_0 + 2\cancel{c_0}\cdot 0{,}2 + 3d_0 \cdot 0{,}2^2 = b_1$

$\cdot \quad a_0 + b_0 \cdot 0{,}2 + \cancel{c_0}\, 0{,}2^2 + d_0\, 0{,}2^3 = a_1$

1 $\quad a_1 + b_1\, 0{,}2 + c_1\, 0{,}2^2 + d_1\, 0{,}2^3 = a_2 = 0{,}4813306$

$0{,}2 b_0 + 0{,}2^3 d_0 = a_1 - a_0$

$0{,}2 b_1 + 0{,}2^2 c_1 + 0{,}2^3 d_1 = a_2 - a_1$

$b_0 + 0{,}2^2 \cdot 3 d_0 - b_1 = 0$

$2c_1 + 1{,}2 d_1 = 0$

$2(h_0 + h_1) c_1 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$

$\frac{4}{3}\cdot 0{,}2^2 c_1 = \cancel{...} -0{,}0\cancel{394537}$ $\quad c_0 = 0$

$-0{,}0187145$

$2\cdot\frac{\cancel{2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 c_1}}{3} = 0{,}4 \rightarrow c_1 = \frac{3}{0{,}4} = \cancel{...}\ \frac{15}{2} = -0{,}\cancel{7397536875}\ 350896875$

$\cancel{d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3\cdot 0{,}2}} = \frac{15}{3\cdot 0{,}2} \mid \frac{5}{0{,}2} = 25 \quad d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3\cdot 0{,}2} = -\cancel{1{,}232928125}\ 0{,}584828125$

$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3\cdot 0{,}2} = \cancel{1{,}232928125} + 0{,}584828125$

$b_0 = \frac{a_1 - a_0}{0{,}2} - \frac{0{,}2}{3}(2\cancel{c_0}^{\,0} + c_1) = \cancel{-0{,}002530875}\ 0{,}028454875$

$b_1 = a_2 - a_1 - \frac{0{,}2}{3}(2c_1 + \cancel{c_2}) = \cancel{0{,}08409...}$

$$\begin{array}{cccc} 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}4 \\ 0{,}48603 & 0{,}86160 & 1{,}59751 & 3{,}76155 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{0{,}1}(a_2-a_1) - \frac{3}{0{,}1}(a_1-a_0) \\ \frac{3}{0{,}1}(a_3-a_2) - \frac{3}{0{,}1}(a_2-a_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot 0{,}1\, c_1 + 0{,}1\, c_2 = \frac{3}{0{,}1}(0{,}36034)$$

$$0{,}1 c_1 + 4 \cdot 0{,}1\, c_2 = \frac{3}{0{,}1}(1{,}482813)$$

$$0{,}1 c_2 - 16 \cdot 0{,}1 c_2 = \frac{3}{0{,}1}(0{,}3\ldots - 4 \cdot 1{,}4\ldots)$$

$$c_2 = \cancel{110{,}41824}\ 107{,}0436$$
$$c_1 = 0{,}2646 \qquad c_3 \cdot$$

$$d_0 = \frac{c_1 - 0}{3 \cdot 0{,}1} = 0{,}882 \qquad b_0 = \frac{a_1 - a_0}{0{,}1} - \frac{0{,}1}{3}(2\cancel{c_0} + c_1) = \cancel{3{,}8\ldots}\ 3{,}74688$$

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3 \cdot 0{,}1} = 355{,}93 \qquad b_1 = \frac{a_2 - a_1}{0{,}1} - \frac{0{,}1}{3}(2c_1 + c_2) = 3{,}77334$$

$$d_2 = \frac{\cancel{c_3} - c_2}{3 \cdot 0{,}1} = -356{,}812 \qquad b_2 = \frac{a_3 - a_2}{0{,}1} - \frac{0{,}1}{3}(2c_2) = 14{,}50416$$

$$f(1{,}25) \approx s_1(1{,}25)$$

$$S_1(x) = 0{,}86160 + 3{,}77334(x - 1{,}2) + 0{,}2646(x - 1{,}2)^2 + 355{,}93(x - 1{,}2)^3$$

$$S_1(1{,}25) = 1{,}09541975$$

(3) $f(2,5)$

x	1	2	3	4
y	0	3	4	4

a) $P_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 4$

$= \frac{3}{2} (x-1)(x-3)(x-4) - 2(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$

$P_3(2,5) = 3,6875$

b)

0			
	3		
3		-1	
	1		$\frac{1}{6}$
4		$-\frac{1}{2}$	
	0		
4			

$P_3(x) = 3(x-1) - (x-1)(x-2) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$

$P_3(2,5) = 3,6875$ ✓

c) $P_0 = 0$ $\qquad P_{01} = \frac{(x-1) \cdot 3 - (x-2) \cdot 0}{1} \overset{x=2,5}{=} 4,5$

$P_1 = 3$

$P_2 = 4$ $\qquad P_{12} = 3,5 = (2,5-2) \cdot 4 - (2,5-3) \cdot 3$

$P_3 = 4$ $\qquad P_{23} = 4 = (2,5-3) \cdot 4 - (2,5-4) \cdot 4$

$P_{012} = \frac{(2,5-1) \cdot 3,5 - (2,5-3) \cdot 4,5}{2} = 3,75$

$P_{123} = \frac{(2,5-2) \cdot 4 - (2,5-4) \cdot 3,5}{2} = 3,625$

$P_{0123} = \frac{(2,5-1) \cdot 3,625 - (2,5-4) \cdot 3,75}{3} = 3,6875$ ✓

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30(-2) \\ 30(-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0,4 c_1 + 0,1 c_2 = -60$

$0,1 c_1 + 0,4 c_2 = -30$

$1,6 c_2 - 0,1 c_2 = -120 + 60$

$c_1 = -140$ $\qquad c_2 = -0,4$

$b_1 = \frac{a_2 - a_1}{0,1} - \frac{0,1}{3}(2c_1 + c_2) = 20,\overline{6}$ ✓

$$\begin{array}{c|l}
0 & 0,0 \\
30 & 0,57735 \\
45 & 1,0 \\
60 & 1,73205
\end{array}$$

> 0,019245 > 0,000198481 > 0,0000008151

> 0,028176666 > 0,000687555

> 0,048803333

$P_3(x) = 0,019245(x) + 0,000198481\,x\,(x-30) + 0,0000008151(x)(x-30)(x-45)$

$= 0,803055825$ // $\cancel{0,8084444}$

$E_{real} = 0,007$

(11)

x	-1	1	2	3
y	0	4	15	40

$P_0 = 0$ $\quad P_{01} = \dfrac{4(1,5+1) - 0}{2}$

$P_1 = 4$

$P_2 = 15$ $\quad \hat{=}\ 3$

$P_3 = 40$

(12)

$f(x) = e^{-x}$

$x \quad 0 \quad 0,25 \quad 0,75 \quad 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 2\cdot 0,75 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 2\cdot 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{6,587390139} \\ \cancel{-2,7780\ 2,13457} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,589542599 \\ 2,217534149 \end{pmatrix}$$

$1,5\,C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 6,...^{1,5} \quad \rightarrow C_1 = 7,767956467$

$\frac{C_1}{2} + 1,5\,C_2 = -2,7... ^{2,2}\quad \rightarrow C_2 = -4,722305074$

$C_2 = \cancel{1,665160607}\ 1,265764958$

$C_1 = 0,637773413$

$b_0 = 1,082953882$

$b_1 = \cancel{...4602.78}\ 1,24241033$

$b_2 = 2,194166421$

$d_0 = 0,850364455$

$d_1 = 0,41866103$

$d_2 = -1,68768661$

(12) $f(x) = e^{-x}$

x	0	$0{,}25$	$0{,}75$	$1{,}0$
e^{-x}	e^{-0}	$e^{-0{,}25}$	$e^{-0{,}75}$	e^{-1}
	a_0	a_1	a_2	a_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}8157852221 \\ 0{,}5847600843 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0{,}8\ldots \qquad \to c_2 = 0{,}2346237727$$

$$\frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 = 0{,}5\ldots \qquad c_1 = 0{,}4656488905$$

$$b_0 = \frac{a_1 - a_0}{0{,}25} - \frac{0{,}25}{3}(2c_0 + c_1) = -0{,}9236000943$$

$$b_1 = \frac{a_2 - a_1}{0{,}5} - \frac{0{,}5}{3}(2c_1 + c_2) = -0{,}8071188716$$

$$b_2 = \frac{a_3 - a_2}{0{,}25} - \frac{0{,}25}{3}(2c_2) = -0{,}4570524$$

$$d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} = 0{,}620865206$$

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3 \cdot 0{,}5} = -0{,}154016785$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3 \cdot 0{,}25} = -0{,}3128316836$$

$$\int_0^{0{,}25} \left(e^{-0} + b_0(x-0) + c_0(x-0)^2 + d_0(x-0)^3\right)dx$$

$$+ \int_{0{,}25}^{0{,}75} \left(e^{-0{,}25} + b_1(x-0{,}25) + c_1(x-0{,}25)^2 + d_1(x-0{,}25)^3\right)dx$$

$$+ \int_{0{,}75}^{1} \left(e^{-0{,}75} + b_2(x-0{,}75) + c_2(x-0{,}75)^2 + d_2(x-0{,}75)^3\right)dx$$

$$= a_0(x) + \frac{b_0}{2}(x-0)^2 + \frac{c_0}{3}(x-0)^3 + \frac{d_0}{4}(x-0)^4 \Big|_0^{0{,}25}$$

$$+ \ldots = 0{,}2217437784 + 0{,}3054973227 + 0{,}1047225249$$

$$= 0{,}63196636$$

$$\varepsilon_r = 0{,}00015488$$

$f = x$ ... x ...

x	0	1	2	3
y	-2	-1	6	25

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 4c_1 + c_2 = 18 \\ c_1 + 4c_2 = 36 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 2{,}4 \\ c_2 = 8{,}4 \end{matrix}$$

$d_0 = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8 \qquad b_0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}(2{,}4) = 0{,}2$

$d_1 = \frac{6}{3} = 2 \qquad b_1 = 7 - \frac{1}{3}(2 \cdot 2{,}4 + 8{,}4) = 2{,}6$

$d_2 = \frac{-8{,}4}{3} = -2{,}8 \qquad b_2 = 19 - \frac{1}{3} \cdot 8{,}4 \cdot 2 = 13{,}4$

$f(1{,}5) \approx -1 + 2{,}6 \, \cancel{(x-1)}\,0{,}5 + 2{,}4 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}5^3 = 1{,}15$

$f(1{,}5) = 1{,}375$

c)

$x^3 - 2$

$\rightsquigarrow f''(0) = S''(0) \quad f'(0) = 0 = b_0 \qquad b_0 = 0$

$2c_0 = 0 \qquad f'(3) = 27 = b_2 \qquad \hookrightarrow \frac{3}{h_0} \frac{a_1 - a_0}{h_0} = 2c_0 + c_1$

$b_n = 0 \qquad$ SNCB $\quad s_2 = a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3$

$b_{n-1} \Rightarrow b_2 =$

$S_2' = b_2 + 2c_2(x-2) + 3d_2(x-2)^2$

$S_2'(3) = f'(3) = 27 = b_2 + 2c_2 + 3d_2$

$= b_2$

$\frac{a_3 - a_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(2c_2 + c_3)$

$27 = a_3 - a_2 - \ldots + 2c_2 + 3\frac{c_3 - c_2}{h_2}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 36 \\ 28 \end{pmatrix}$

$c_2 = 8$

$2c_0 + c_1 = 3$

$c_0 + 4c_1 + 8 = 18$

$c_1 + 32 + c_3 = 36$

$24 = c_2 + 2c_3 \longleftarrow = a_3 - a_2 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3$

$7c_1 + 16 = 33$

$c_3 = \frac{11}{7}$

$c_1 = 17/7 = 2{,}428571429$

$c_0 = \frac{2}{7}$

$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3}$

$b_1 = a_2 - a_1 - \frac{1}{3}(2c_1 + c_2) = \ldots$

$2c_0 + c_1 = 3$

$c_0 + 4c_1 + c_2 = 18 \qquad c_0 + 4\cdot(3-2c_0) + c_2 = 18$

$c_1 + 4c_2 + c_3 = 36 \qquad c_0 + 12 - 8c_0 + c_2 = 18$

$c_2 + 2c_3 = 24$

$-7c_0 + c_2 = 6$

$3 - 2c_0 + 4(6+7c_0) \cancel{+4} + c_3 = 36 \qquad c_2 = 6 + 7c_0$

$3 - 2c_0 + 24 + 28c_0 + 12 - \frac{c_2}{2} = 36$

$27 + 26c_0 + 12 - 3 - \frac{7}{2}c_0 = 36 \rightarrow c_0 = 0$

$\hookrightarrow c_2 = 6$

$b_1 = a_2 - a_1 - \frac{1}{3}(2c_1 + c_2) = 7 - \frac{1}{3}(2\cdot 3 + 6) \qquad c_3 = 69$

$= 3 \qquad c_1 = 3$

$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3} = 1$

$P_1(x) = -1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + 1(x-1)^3$

$P_1(1,5) = 1,375$ ✓

(12 b)

$f'(0,5) \approx S_1'(0,5) = \cancel{a_1 + 2b_1(x-0,25)} + b_1 + 2c_1\cdot 0,25 + 3d_1\cdot 0,25^2$

$= -0,60324241$

$-e^{-0,5} = -0,606530659 \qquad E_r = 0,00328826$

$f''(0,5) = S_1''(0,5) = 2c_1 + 6d_1\, 0,25 = 0,23822276$

$e^{-0,5} = 0,606530659 \qquad E_r = 0,4$!

Derivación e integración numérica

1. Sea la función $f(x) = \sqrt(x)$. Calcúlese $f'(x)$ en $x = 1$ numéricamente, aplicando el método de extrapolación de Richardson (extrapolación al límite) a las derivadas numéricas con pasos $h =$ 0.8, 0.4 y 0.2 ¿En qué factor mejora el error la extrapolación de Richardson con respecto al valor obtenido con $h = 0.2$?

2. Calcular la derivada primera de $\tan(x)$ en $x = 1$ por el método de extrapolación de Richardson, utilizando $h = 0.1, 0.2, 0.4$ y dos pasos de extrapolación. Comparar con el valor exacto.

3. Calcular la integral $\int_0^1 e^x dx$ mediante la regla trapezoidal repetida con pasos $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$ y $h = 0.125$. Repetir el cálculo utilizando la regla de Simpson con pasos $h = 0.5$ y $h = 0.25$.

4. Determínese el valor de la integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}\right) dx$$

mediante la regla trapezoidal con pasos de integración $h = \pi/2$ y $h = \pi/4$. Mejórese el resultado mediante la extrapolación de Richardson (extrapolación al límite) y hágase una estimación del error.

5. Obténgase la fórmula de integración de Bode

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]$$

con $x_n = x_0 + nh$, a partir de la regla trapezoidal con pasos h, $2h$ y $4h$, y la extrapolación de Richardson.

6. Dedúzcase la regla de integración de Simpson mediante el siguiente procedimiento (*Método de los coeficientes indeterminados*):

   (a) Supóngase la fórmula

   $$\int_0^{2h} f(x)dx \approx af(0) + bf(h) + cf(2h)$$

   (b) Determínese a, b y c exigiendo que la ecuación aproximada anterior se cumpla *exacta* para los casos en que $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$

7. Un cuerpo está sometido a la fuerza conservativa $F(x) = x - \frac{1}{x}$ y se desplaza desde la posición $x = 1$ hasta $x = 1.8$. Usando la regla trapezoidal determinar el trabajo realizado usando pasos de valor 0.2, 0.4 y 0.8 y haciendo todas las extrapolaciones de Richardson posibles. Obténgase también una estimación del error del mejor resultado.

8. Determínese el valor de la integral:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

mediante la regla trapezoidal y las adecuadas extrapolaciones de Richardson y hágase una estimación del error del mejor resultado.

9. Se desea determinar una regla de integración numérica de dos puntos, de forma que se tenga la relación aproximada:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

Deben encontrarse los valores de $\{x_1, x_2\}$ y $\{w_1, w_2\}$ con el fin de que la mencionada fórmula sea exacta para polinomios de grado 0, 1, 2 y 3. Determinada dicha fórmula, aplíquese al cálculo de la integral

$$\int_{-1}^{+1} e^x dx$$

y compárese con el resultado obtenido mediante la regla de Simpson ($h = 1$).

10. Calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{\sinh(x)}{x} dx$$

mediante la regla trapezoidal con 1, 2 y 4 intervalos seguida de las extrapolaciones de Richardson a orden $\sim h^2$ y $\sim h^4$

11. Se desea determinar una regla de integración especializada para calcular integrales del tipo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot f(x) dx$$

expresando el resultado mediante la forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot f(x) dx = w_0 f(0) + w_1 f(\frac{\pi}{4}) + w_2 f(\frac{\pi}{2})$$

Para obtener los pesos imponemos la condición de que la regla de integración sea exacta cuando $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$. Determinar los pesos w_0, w_1 y w_2 y aplicar la regla al cálculo de la integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot e^x dx$$

y comparar con el valor exacto.

12. Una cierta integral definida calculada mediante la regla trapezoidal con distintos valores para el número de intervalos arroja los siguientes resultados:

Num. intervalos	Regla Trapezoidal
3	0.6023893
6	0.7171683
9	0.7483628

Use la extrapolación de Richardson para obtener el mejor valor posible de la integral y una estimación del error de dicho valor.

13. Se quiere hacer una integral definida de una cierta función $f(x)$, cuyos valores se dan en la tabla que sigue:

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	2.71828	3.0042	3.3201	3.6693	4.0552	4.4817	4.9530

Con estos datos se puede calcular la integral mediante la regla trapezoidal para varios casos: con 1 intervalo, con 2 intervalos, con 3 intervalos y con 6 intervalos. Obtenga los valores de estas aproximaciones a la integral y el tablero de todas las extrapolaciones de Richardson posibles, indicando finalmente el valor de la mejor estimación numérica y su error.

14. Realizar una estimación de la función error para $x = 1$ mediante el método de integración de Romberg comenzando con paso $h = 1$ y realizando tres extrapolaciones.

$$\mathrm{erf(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2} \mathrm{dt}$$

15. Estimar la probabilidad de una distribución normal de media nula y varianza unidad entre x = -1 y x = 1 mediante el método de Romberg, utilizando la regla trapezoidal con 1, 2 y 4 subintervalos.

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

① $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f'(1) = \frac{1}{2}$ $\quad f'(x) \simeq \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right)$

$h = 0{,}8 \rightarrow 0{,}5590169944$ ~~0,50254481~~

$h = 0{,}4 \rightarrow 0{,}510774109$ $> 0{,}4946833147 > 0{,}5001422281$

$h = 0{,}2 \rightarrow 0{,}50254481$ $> 0{,}499980171$

$E_0 / E_f = 179$ 2 órdenes magn.

②

$\tan(x) \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow x = 1 \rightarrow f' = \frac{1}{\cos^2 1} = 3{,}4255188821$

$h = 0{,}4 \rightarrow 6{,}3821836 34$

$h = 0{,}2 \rightarrow$ ~~1,5...3065~~ $3{,}856282663$ $> 3{,}010982339 > 3{,}438644245$

$h = 0{,}1 \rightarrow 3{,}523007198$ $> 3{,}411915376$

$\epsilon = 0{,}013125425$

③ $\int_0^1 e^x dx = e - 1 = 1{,}7182818 28$ $\quad 0{,}25 \quad 0{,}5 \quad 0{,}75 \quad 1$

$h = 1 \quad R(0) = \frac{e+1}{2} = 1{,}8591409 14$

$h = 0{,}5 \quad R(1) = \frac{R(0)}{2} + 0{,}5\left(e^{0{,}5}\right) = 1{,}753931092$

$h = 0{,}25 \quad R(2) = \frac{R(1)}{2} + 0{,}25\left(e^{0{,}25} + e^{0{,}75}\right) = 1{,}727221905$

$h = 0{,}125 \quad R(3) = \frac{R(2)}{2} + 0{,}125\left(e^{0{,}125} + e^{0{,}375} + e^{0{,}625} + e^{0{,}875}\right)$

$= 1{,}720518592$

$R(0,0)$ $\quad R(1,1)$
$R(1,0)$ $\quad R(2,1)$ $\quad R(2,2)$
$R(2,0)$ $\quad R(3,1)$ $\quad R(3,2)$ $\quad R(3,3)$
$R(3,0)$

Simpson

$h = 0{,}5 \rightarrow I = \frac{0{,}5}{3}\left(e + 1 + 4e^{0{,}5}\right) = 1{,}71886115 7$

$h = 0{,}25$

$\rightarrow I = \frac{0{,}25}{3}\left(e + 1 + 4(e^{0{,}25} + e^{0{,}75}) + 2e^{0{,}5}\right) = 1{,}7183188 42$

$R(3,1) = 1{,}718284154$

$R(3,2) = 1{,}718281841$

$R(2,2) = 1{,}718282688$ $\rightarrow R(1,3) = 1{,}718281814$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) dx$$

$h = \pi/2$

$$\cancel{I(\pi/2, 0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi/2}{2}\left(\exp\left(\frac{\sin 0}{\sqrt{2}}\right) + e\left(\frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}}\right) + 2\cdot e\left(\frac{\sin \pi/2}{\sqrt{2}}\right) + 2\, e\frac{\sin\pi}{\sqrt{2}} + 2e\frac{\sin 3\pi/2}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \cancel{0{,}6302959918}\ \cancel{1{,}0052959918}\ \cancel{1{,}1302959918}\ \cancel{1{,}10922402211}$$

$h = \pi/4$

$$\cancel{I(\pi/4, 0) = \frac{\pi/4}{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 + e\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} + e\frac{\sin \pi/2}{\sqrt{2}} + e\frac{\sin 3\pi/4}{\sqrt{2}} + e\frac{\sin 5\pi/4}{\sqrt{2}} + e\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{2}} + e\frac{\sin\frac{7\pi}{4}}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= 1{,}1253960942$$

$$I(\pi/2, 0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^0 + e^0}{2} + e^{1/\sqrt{2}} + e^0 + e^{-1/\sqrt{2}}\right) = 1{,}130295918$$

$$I(\pi/4, 0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{e^0 + e^0}{2} + e^{1/2} + e^{1/\sqrt{2}} + e^{1/2} + e^0 + e^{-1/2} + e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-1/2}\right)$$

$$= 1{,}128960942 \checkmark$$

$$S(\pi/2) = 1{,}12851595$$

$$\epsilon \simeq I(\pi/4) - S(\pi/2) = 0{,}000444992$$

5) $x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$T(4h) = \frac{f_0 + f_4}{2}\cdot 4h = \left(\frac{f_0 + f_4}{\cancel{4}}\right)2h$$

$$T(2h) = \frac{f_0 + f_4}{2}\cdot 2h + f_2\cdot 2h = (f_0 + f_4)h + f_2\cdot 2h$$

$$T(h) = \frac{f_0 + f_4}{2}\cdot h + (f_1 + f_2 + f_3)h = (f_0 + f_4)\frac{h}{2} + h(f_1 + f_2 + f_3)$$

$$S_1 = \left((f_0 + f_4)\cdot 4h + f_2\cdot 8h - (f_0 + f_4)\,2h\right)/3 = \left((f_0 + f_4)2h + f_2\cdot 8h\right)/3$$

$$S_2 = \left((f_0 + f_4)h + 4h(f_1 + f_2 + f_3) - \cancel{4} f_2\cdot 2h\right)/3 = \left((f_0 + f_4)h + 4h(f_1 + f_3) + 2h f_2\right)$$

$$B_1 = \frac{1}{45}\left(16h(f_0 + f_4) + 64h(f_1 + f_3) + 32h f_2 - 2h(f_0 + f_4) - 8h f_2\right)$$

$$\dots = \frac{2h}{45}\left(7(f_0 + f_4) + 32(f_1 + f_3) + 12 f_2\right)$$

(6)

a) $\int_0^{2h} f(x)dx \simeq a f(0) + b f(h) + c f(2h)$

$f(x) = 1,\ f(x) = x,\ f(x) = x^2$

$\int_0^{2h} dx = 2h = a + b + c$

$\int_0^{2h} x\,dx = 2h^2 = 0 + bh + c2h$

$\int_0^{2h} x^2 dx = \frac{8}{3}h^3 = 0 + bh^2 + c4h^2$

$a + b + c = 2h$

$b + 2c = 2h$

$b + 4c = \frac{8}{3}h$

$\left(\frac{8}{3} - 2\right)h = 2c$

$\hookrightarrow c = \frac{h}{3}$ ✓

$b = \frac{4h}{3}$ ✓

$a = \frac{1}{3}h$ ✓

(7) $F(x) = x - \frac{1}{x}$

$x = 1 \rightarrow x = 1{,}8$

$W = \int_a^b F dx = \frac{x^2}{2} - \ln x \Big|_1^{1,8} = 0{,}532213335$

$\Delta V = -\int_a^b F dx = -W$

0	1	2	3	4
1	1,2	1,4	1,6	1,8

$h = 0{,}8$ $R(0) = \frac{h}{2}(f_0 + f_4) = 0{,}4\overline{97}$

$> 0{,}531640211$

$R(1) = \frac{R(0)}{2} + 0{,}4 f_2 = 0{,}5231746\overline{03}$

$> 0{,}532204585$

$> 0{,}532169312$

$R(2) = \frac{R(1)}{2} + 0{,}2(f_1 + f_3) = 0{,}52992063\overline{4}$

$E_{est} = 0{,}000035273$

$E_{real} = 0{,}00000875$

$E_{est} - E_{real} = 0{,}000026523$

(8) $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

0,946145881 $>$ 0,946083003

0,946086933 $>$ 0,946083069

0,946083311

0,946083071

$T(0) = \frac{1}{2}(\sin 1 + 1) = 0{,}920735492$

$T(1) = \frac{T(0)}{2} + 0{,}5\left(\frac{\sin 0{,}5}{0{,}5}\right) = 0{,}939793284$

$E_{est} = 0{,}000000002$

$T(2) = \frac{T(1)}{2} + 0{,}25\left(\frac{\sin 0{,}25}{0{,}25} + \frac{\sin(0{,}75)}{0{,}75}\right) = 0{,}944513521$

$T(3) = \frac{T(2)}{2} + 0{,}125\left(\frac{\sin 0{,}125}{0{,}125} + \frac{\sin 0{,}375}{0{,}375} + \frac{\sin 0{,}625}{0{,}625} + \frac{\sin 0{,}875}{0{,}875}\right)$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

x_1, x_2, w_1, w_2

$$w_k = \int_0^n \phi_k(s)ds$$

$$\phi_k(s) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(s-i)}{(k-i)}$$

$n = 3 \rightarrow x_0, x_1, x_2, x_3$

$$\rightarrow \phi_1(s) = \frac{(s-0)}{1-0} \cdot \frac{(s-2)}{1-2} \frac{(s-3)}{1-3} = \frac{s(s^2-5s+6)}{2}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_0^3 s^3 - 5s^2 + 6s = \frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{4} - \frac{5}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2\right)$$

$$= 1{,}125$$

$$\phi_2(s) = \frac{(s-0)(s-1)(s-3)}{(2-0)\ (2-1)\ (2-3)} = -\frac{1}{2} s(s^2-4s+3)$$

$$= -\frac{1}{2}(s^3 - 4s^2 + 3s)$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}\int_0^3 s^3 - 4s^2 + 3s = -\frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{4} - \frac{4}{3} \cdot 3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2\right) = 1{,}125$$

?

② $\int_{-1}^{+1} a_0\,dx = w_1 a_0 + w_2 a_0 \rightarrow w_1 + w_2 = 2$

$\int_{-1}^{+1} (a_1 + b_1 x)dx = 2a_1 = w_1(a_1 + b_1 x_1) + w_2(a_1 + b_1 x_2)$

$\int_{-1}^{+1} (a_2 + b_2 x + c_2 x^2) = 2a_2 + \frac{2c_2}{3} = w_1(a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_1^2) + w_2(a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_2^2)$

$\int_{-1}^{+1} (a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + d_3 x^3) = 2a_3 + \frac{2c_3}{3} = w_1(a_3 + b_3 x_1 + c_3 x_1^2 + d_3 x_1^3) + w_2(a_3 + b_3 x_2 + c_3 x_2^2 + d_3 x_2^3)$

$\hookrightarrow b = c = d = 0$

$2a = w_1 a + w_2 a \rightarrow w_1 + w_2 = 2$

$a = c = d = 0 \rightarrow 0 = w_1 b x_1 + w_2 b x_2 \rightarrow w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$

$a = b = d = 0 \rightarrow \frac{2c}{3} = c(x_1^2 w_1 + x_2^2 w_2) \rightarrow w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$

$a = b = c = 0 \rightarrow 0 = d(w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3) \rightarrow w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$

(Sim $\rightarrow w_1 = w_2 = 1$; $x_1 = -x_2$ Antis. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ x pro)

$a = c = 0 \rightarrow 0 = w_1(b x_1 + d x_1^3) + w_2(b x_2 + d x_2^3)$

$a = b = 0 \rightarrow \frac{2c}{3} = w_1(c x_1^2 + d x_1^3) + w_2(c x_2^2 + d x_2^3)$

$2a + \frac{2c}{3} = a + \cancel{\frac{b}{\sqrt{3}}} + \frac{c}{3} + \cancel{\frac{d}{3\sqrt{3}}} + a - \cancel{\frac{b}{\sqrt{3}}} + \frac{c}{3} - \cancel{\frac{d}{3\sqrt{3}}}$ $\forall c, d$

$\int_{-1}^{1} P_3(x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\int_{-1}^{+1} f(x) \underset{\text{3.ord.}}{\simeq} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\int_{-1}^{+1} e^x\,dx \simeq e^{1/\sqrt{3}} + e^{-1/\sqrt{3}} = 2,342696088$

$I = e - \frac{1}{e} = 2,350402387$ $\int e^x$

$S = \frac{1}{3}(e^{-1} + 4e^0 + e) = 2,36205375$

$$\int_0 \frac{\sinh(x)}{x}\,dx$$

$$T_0 = \frac{1+\sinh 1}{2} = 1{,}087600597$$

$$T_1 = T_0/2 + \sinh 0{,}5 = 1{,}064855604$$

$$T_2 = T_1/2 + 0{,}25\left(\frac{\sinh 0{,}25}{0{,}25} + \frac{\sinh 0{,}75}{0{,}75}\right) = 1{,}059165696$$

$> 1{,}057327273$

$> 1{,}057258427$

$1{,}057250957$

(11)

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cdot f(x)\,dx = w_0 f(0) + w_1 f(\pi/4) + w_2 f(\pi/2)$$

$f(x) = 1,\ f(x) = x,\ f(x) = x^2 \ \rightarrow$ orden 2

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1 = w_0 + w_1 + w_2$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx = x\cos x\Big|_{\pi/2}^{0} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = 1 = \cancel{w_1}\ w_1\cdot\frac{\pi}{4} + w_2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx = x^2\cos x\Big|_{\pi/2}^{0} + \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = 1 = w_1\cdot\frac{\pi^2}{16} + w_2\cdot\frac{\pi^2}{4}$$

$$w_0 + w_1 + w_2 = 1$$

$$\frac{\pi^2}{4}\left(w_1/2 + w_2\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{w_1}{4} + w_2\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{w_1}{2} - \frac{w_1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{w_1}{4}$$

$$2\pi - 4 = \pi^2 w_1$$

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2\pi-4}{4\pi^2} + w_2\right) = 1$$

$$= \frac{2\pi-4}{16} + \frac{\pi^2 w_2}{4} = 1$$

$$\frac{\pi^2}{4}w_2 = 1 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\pi^2 w_2 = 5 - \frac{\pi}{2}$$

$$w_2 = \frac{5-\pi/2}{\pi^2}$$

$$w_0 = 1 - w_1 - w_2$$

$$= 1 - \frac{5-\pi/2}{\pi^2} - \frac{2\pi-4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 5 + \pi/2 - 2\pi + 4}{\pi^2}$$

$$= \frac{\pi^2 - 1 - 3\pi/2}{\pi^2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, e^x\, dx \cong \frac{\pi^2 - 1 - 3\pi/2}{\pi^2} \cdot e^0 + \frac{2\pi - 4}{\pi^2} e^{\pi/4} + \frac{5 - \pi/2}{\pi^2} \cdot e^{\pi/2}$$

$$= 2,600001567$$

$$I_{ex} = \int_0^{\pi/2} \sin x\, e^x\, dx = e^x \cos x \Big|_{\pi/2}^{0} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, e^x\, dx$$

$$= e^x \cos x \Big|_{\pi/2}^{0} + \sin x\, e^x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, e^x\, dx$$

$$2I = 1 + e^{\pi/2} \qquad I = \frac{1 + e^{\pi/2}}{2} = 2,905823869$$

$e^{\frac{\pi}{4}} = 0,785398$

$2,193328$

$\sum 2,4022 \quad 0,2$

(12)

$$I_{00} = I_0 + c_2\left(\frac{h}{3}\right)^2 + c_4\left(\frac{h}{3}\right)^4 + O(h^6)$$

$$I_{10} = I_1 + c_2\left(\frac{h}{6}\right)^2 + c_4\left(\frac{h}{6}\right)^4 + O(h^6)$$

$$I_{20} = I_2 + c_2\left(\frac{h}{9}\right)^2 + c_4\left(\frac{h}{9}\right)^4 + O(h^6)$$

$$\frac{4}{3^4 \cdot 2^4} = \frac{1}{3^4 \cdot 4}$$

$$- \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3^4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{3^3 \cdot 4}$$

$$S_1 = \frac{4 I_{10} - I_{00}}{3} + \frac{c_4}{3}\left(4\left(\frac{h}{6}\right)^4 - \left(\frac{h}{3}\right)^4\right) + O(h^6) = \frac{4 I_1 - I_0}{3} - \frac{1}{324} h^4$$

$$S_2 = \frac{\frac{9^2}{6^2} I_2 - I_1}{\frac{9^2}{6^2} - 1} + \frac{c_4\left(\frac{9^2}{6^2}\left(\frac{h}{9}\right)^4 - \left(\frac{h}{6}\right)^4\right)}{\left(\frac{9^2}{6^2} - 1\right)} = \frac{2{,}25 I_2 - I_1}{1{,}25} - \frac{c_4 h^4}{2916 \cdot \frac{c_4}{1{,}25}}$$

$$= \frac{9I_2 - 4I_1}{5}$$

$$\rightarrow \frac{9 S_2 - S_1}{8} = B_1$$

$0,6023893 > 0,7754279 66 > 0,7755 4 7 04$

$0,7171683 > 0,7733184$

$0,7483628$

$e_{est} = 0,002236304$

$6h = 0,6$ $T_1 = \cancel{6,302733335}\ 2,301384 = 2,301394276$

$3h = 0,3$ $T_2 = \cancel{4,7237156667}\ 2,251482 = 2,251486138$

$2h = 0,2$ $T_3 = \cancel{2,242188}\ 2,242188 = 2,242194803$

$h = 0,1$ $T_6 = 2,236614 = 2,236612578$

$$I = T_1 + c_2(6h)^2 + c_4(6h)^4 + c_6(6h)^6 + \Theta(h^8)$$
$$= T_2 + c_2(3h)^2 + c_4(3h)^4 + c_6(3h)^6 + \Theta(h^8)$$

$$S_2 = \frac{4T_2 - T_1}{3} + \frac{c_4h^4}{3}\underbrace{(4\cdot 3^4 - 6^4)}_{-324} + \frac{c_6h^6}{3}\underbrace{(4\cdot 3^6 - 6^6)}_{-14580} + \Theta(h^8)$$

$$I = T_3 + c_2(2h)^2 + c_4(2h)^4 + c_6(2h)^6 + \Theta(h^8)$$
$$= T_4 + c_2h^2 + c_4h^4 + c_6h^6 + \Theta(h^8)$$

$$S_3 = \frac{3^2T_3 - 2^2T_2}{9-4} + \underbrace{\frac{c_4h^4}{5}}_{-36}\underbrace{(9\cdot 2^4 - 4\cdot 3^4)}_{-180} + \underbrace{\frac{c_6h^6}{5}(9\cdot 2^6 - 4\cdot 3^6)}_{-468} + \Theta(h^8)$$

$$S_6 = \frac{4T_4 - T_3}{3} + \frac{c_4h^4}{3}\underbrace{(4-2^4)}_{-4} + \frac{c_6h^6}{3}\underbrace{(4-2^6)}_{-20} + \Theta(h^8)$$

$$B_3 = \frac{9S_{30} - S_{20}}{8} - \frac{9}{8}\cdot 468h^6c_6 + \underbrace{\frac{14580}{8}}_{1296}c_6h^6 + \Theta(h^8)$$

$$B_6 = \frac{9S_{60} - S_{30}}{8} - \underbrace{\frac{180}{8}c_6h^6 + \frac{468}{8}}_{36}c_6h^6$$

$$F_6 = \frac{36B_{60} - B_{30}}{35} + \Theta(h^8)$$

2,301394276 → 2,234849 (50092)

2,251486138 → 2,234752 (6~~77~~35)

2,242194803 → 2,2347561836

2,236612578

2,234750 (69) ; 2,2347564 (0599)

→ 2,2347568 (0596) $\in 10^{-6}$

$E_{est} = 3\cdot 10^{-9}$

V. réel $= 2,2347505946$ $E_{réel} = 6\cdot 10^{-11}$

Fernando Hueso González 2º Física
Cálculo Numérico

(13)

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	2,71828	3,0042	3,3201	3,6693	4,0552	4,4817	4,9530

Regla trapezoidal 1, 2, 3, 6 intervalos, $h = 0,6$

nº intervalos

$R(1,0) = \frac{h}{2}(y_0 + y_6) = \qquad = 2,301384$ ✓

$R(2,0) = \frac{h}{2}\left(\frac{y_0+y_6}{2} + y_3\right) = 2,251482$ ✓

$R(3,0) = h/3\left(\frac{y_0+y_6}{2} + y_2 + y_4\right) = 2,242188$ ✓

$R(6,0) = h/6\left(\frac{y_0+y_6}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right) = 2,236614$ ✓

1ª extrapolación:

$I = R(h) + c_2 h^2 + \dots$

$\;\; = R\left(\frac{h}{2}\right) + c_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \dots$

$I\left(1 - \frac{1}{4}\right) = R\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{4}R(h) + \theta(h^4) \rightarrow I = \frac{4R\left(\frac{h}{2}\right) - R(h)}{3} + \theta(h^4)$

↳ útil en 2 casos:

$S_1 = \frac{4R(2,0) - R(1,0)}{3} = 2,234848 = S(h)$ ✓

$S_3 = \frac{4R(6,0) - R(3,0)}{3} = 2,234756 = S\left(\frac{h}{3}\right)$ ✓

Para S_2:

$I = R\left(\frac{h}{2}\right) + \theta\left(\frac{h}{2}\right)^2$

$\;\; = R\left(\frac{h}{3}\right) + \theta\left(\frac{h}{3}\right)^2 \longrightarrow S_2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{R(3,0) - \frac{4}{9}R(2,0)}{1 - \frac{4}{9}}$

$S_2 = \frac{9R(3,0) - 4R(2,0)}{5} = 2,2347528$ ✓

2ª extrapolación

$\rightarrow I = S(h) + \theta(h^4) = S\left(\frac{h}{2}\right) + \theta\left(\frac{h}{2}\right)^4 \qquad I = R(1,1) - C_4\frac{h^4}{4} + \theta(h^6)$

$\;\;\;\; 36$

↳ $Z(h) = \frac{16S_2 - S_1}{15} = 2,234746453 = Z_1 \quad 324$ ✗

409

$R(1,2) = \frac{9-1}{5}$

$I = S\left(\frac{h}{2}\right) + \theta\left(\frac{h}{2}\right)^4 = S\left(\frac{h}{3}\right) + \theta\left(\frac{h}{3}\right)^4$

$R(1,2) = \frac{9-1}{5}$

$Z\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{S\left(\frac{h}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^4 S\left(\frac{h}{2}\right)}{\dots} = 2,23475678 = Z_2$ ✗

$$I = Z(h) + \Theta(h^6)$$
$$= Z\left(\frac{h}{2}\right) + \Theta\left(\frac{h}{2}\right)^6$$

$$\hookrightarrow X = \frac{2^6 Z\left(\frac{h}{2}\right) - Z(h)}{2^6 - 1} = \frac{4^3 Z_2 - Z_1}{4^3 - 1} = 2{,}234756952$$

$\Rightarrow$ mejor estimación numérica

Estimación del error:

$$\Delta_{est} = |X - Z_2| = 163{,}73 \cdot 10^{-9} = 0{,}000\ 000\ 163\ 73$$

$\frac{2}{81}$ $\qquad \frac{32 - 1}{31}$

$\frac{1}{1296}$ $\qquad 2'2347569$

(14)

$x = 1$
$h = 1$

$$\operatorname{erf}(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$$

$h = 1$ $\quad T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) = 0{,}68393972$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\left(e^{-0{,}5^2}\right) = 0{,}73137025$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{-0{,}25^2} + e^{-0{,}75^2}\right) = 0{,}742984097$$

$$T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{1}{8}\left(e^{-0{,}125^2} + e^{-0{,}375^2} + e^{-0{,}625^2} + e^{-0{,}875^2}\right)$$

$$= 0{,}745865614$$

0,747180428 $\quad$ 0,746833709 $\quad$ 0,746823861

0,746855379 $\quad$ 0,746824169

0,74682612

• $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0{,}842700487$

(15)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$T_0 = \frac{2}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1{,}213061319 \quad > 1{,}737687107$$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + 1\left(e^{-0}\right) = 1{,}60653066 \quad > 1{,}712152757 \quad > 1{,}7104718$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + 0{,}5\left(e^{-\frac{0{,}5^2}{2}} + e^{-\frac{0{,}5^2}{2}}\right) = 1{,}685762232$$

• $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}68237352$

68% N.C.

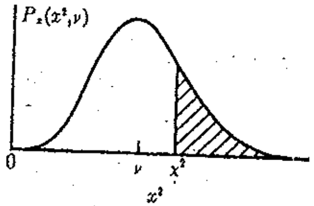


TABLE C.4
χ^2 distribution. Values of the reduced chi-square $\chi^2_\nu = \chi^2 / \nu$ corresponding to the probability $P_\chi(\chi^2; \nu)$ of exceeding χ^2 vs. the number of degrees of freedom ν

	P							
ν	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
1	0.00016	0.00063	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.275	0.455
2	0.0100	0.0202	0.0515	0.105	0.223	0.357	0.511	0.693
3	0.0383	0.0617	0.117	0.195	0.335	0.475	0.623	0.789
4	0.0742	0.107	0.178	0.266	0.412	0.549	0.688	0.839
5	0.111	0.150	0.229	0.322	0.469	0.600	0.731	0.870
6	0.145	0.189	0.273	0.367	0.512	0.638	0.762	0.891
7	0.177	0.223	0.310	0.405	0.546	0.667	0.785	0.907
8	0.206	0.254	0.342	0.436	0.574	0.691	0.803	0.918
9	0.232	0.281	0.369	0.463	0.598	0.710	0.817	0.927
10	0.256	0.306	0.394	0.487	0.618	0.727	0.830	0.934
11	0.278	0.328	0.416	0.507	0.635	0.741	0.840	0.940
12	0.298	0.348	0.436	0.525	0.651	0.753	0.848	0.945
13	0.316	0.367	0.453	0.542	0.664	0.764	0.856	0.949
14	0.333	0.383	0.469	0.556	0.676	0.773	0.863	0.953
15	0.349	0.399	0.484	0.570	0.687	0.781	0.869	0.956
16	0.363	0.413	0.498	0.582	0.697	0.789	0.874	0.959
17	0.377	0.427	0.510	0.593	0.706	0.796	0.879	0.961
18	0.390	0.439	0.522	0.604	0.714	0.802	0.883	0.963
19	0.402	0.451	0.532	0.613	0.722	0.808	0.887	0.965
20	0.413	0.462	0.543	0.622	0.729	0.813	0.890	0.967
22	0.434	0.482	0.561	0.638	0.742	0.823	0.897	0.970
24	0.452	0.500	0.577	0.652	0.753	0.831	0.902	0.972
26	0.469	0.516	0.592	0.665	0.762	0.838	0.907	0.974
28	0.484	0.530	0.605	0.676	0.771	0.845	0.911	0.976
30	0.498	0.544	0.616	0.687	0.779	0.850	0.915	0.978
32	0.511	0.556	0.627	0.696	0.786	0.855	0.918	0.979
34	0.523	0.567	0.637	0.704	0.792	0.860	0.921	0.980
36	0.534	0.577	0.646	0.712	0.798	0.864	0.924	0.982
38	0.545	0.587	0.655	0.720	0.804	0.868	0.926	0.983
40	0.554	0.596	0.663	0.726	0.809	0.872	0.928	0.983
42	0.563	0.604	0.670	0.733	0.813	0.875	0.930	0.984
44	0.572	0.612	0.677	0.738	0.818	0.878	0.932	0.985
46	0.580	0.620	0.683	0.744	0.822	0.881	0.934	0.986
48	0.587	0.627	0.690	0.749	0.825	0.884	0.936	0.986
50	0.594	0.633	0.695	0.754	0.829	0.886	0.937	0.987
60	0.625	0.662	0.720	0.774	0.844	0.897	0.944	0.989
70	0.649	0.684	0.739	0.790	0.856	0.905	0.949	0.990
80	0.669	0.703	0.755	0.803	0.865	0.911	0.952	0.992
90	0.686	0.718	0.768	0.814	0.873	0.917	0.955	0.993
100	0.701	0.731	0.779	0.824	0.879	0.921	0.958	0.993
120	0.724	0.753	0.798	0.839	0.890	0.928	0.962	0.994
140	0.743	0.770	0.812	0.850	0.898	0.934	0.965	0.995
160	0.758	0.784	0.823	0.860	0.905	0.938	0.968	0.996
180	0.771	0.796	0.833	0.868	0.910	0.942	0.970	0.996
200	0.782	0.806	0.841	0.874	0.915	0.945	0.972	0.997

TABLE C.4
χ^2 distribution (*continued*)

	P							
ν	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	0.916	1.204	1.609	2.303	2.996	3.912	4.605	6.908
3	0.982	1.222	1.547	2.084	2.605	3.279	3.780	5.423
4	1.011	1.220	1.497	1.945	2.372	2.917	3.319	4.617
5	1.026	1.213	1.458	1.847	2.214	2.678	3.017	4.102
6	1.035	1.205	1.426	1.774	2.099	2.506	2.802	3.743
7	1.040	1.198	1.400	1.717	2.010	2.375	2.639	3.475
8	1.044	1.191	1.379	1.670	1.938	2.271	2.511	3.266
9	1.046	1.184	1.360	1.632	1.880	2.187	2.407	3.097
10	1.047	1.178	1.344	1.599	1.831	2.116	2.321	2.959
11	1.048	1.173	1.330	1.570	1.789	2.056	2.248	2.842
12	1.049	1.168	1.318	1.546	1.752	2.004	2.185	2.742
13	1.049	1.163	1.307	1.524	1.720	1.959	2.130	2.656
14	1.049	1.159	1.296	1.505	1.692	1.919	2.082	2.580
15	1.049	1.155	1.287	1.487	1.666	1.884	2.039	2.513
16	1.049	1.151	1.279	1.471	1.644	1.852	2.000	2.453
17	1.048	1.148	1.271	1.457	1.623	1.823	1.965	2.399
18	1.048	1.145	1.264	1.444	1.604	1.797	1.934	2.351
19	1.048	1.142	1.258	1.432	1.586	1.773	1.905	2.307
20	1.048	1.139	1.252	1.421	1.571	1.751	1.878	2.266
22	1.047	1.134	1.241	1.401	1.542	1.712	1.831	2.194
24	1.046	1.129	1.231	1.383	1.517	1.678	1.791	2.132
26	1.045	1.125	1.223	1.368	1.496	1.648	1.755	2.079
28	1.045	1.121	1.215	1.354	1.476	1.622	1.724	2.032
30	1.044	1.118	1.208	1.342	1.459	1.599	1.696	1.990
32	1.043	1.115	1.202	1.331	1.444	1.578	1.671	1.953
34	1.042	1.112	1.196	1.321	1.429	1.559	1.649	1.919
36	1.042	1.109	1.191	1.311	1.417	1.541	1.628	1.888
38	1.041	1.106	1.186	1.303	1.405	1.525	1.610	1.861
40	1.041	1.104	1.182	1.295	1.394	1.511	1.592	1.835
42	1.040	1.102	1.178	1.288	1.384	1.497	1.576	1.812
44	1.039	1.100	1.174	1.281	1.375	1.485	1.562	1.790
46	1.039	1.098	1.170	1.275	1.366	1.473	1.548	1.770
48	1.038	1.096	1.167	1.269	1.358	1.462	1.535	1.751
50	1.038	1.094	1.163	1.263	1.350	1.452	1.523	1.733
60	1.036	1.087	1.150	1.240	1.318	1.410	1.473	1.660
70	1.034	1.081	1.139	1.222	1.293	1.377	1.435	1.605
80	1.032	1.076	1.130	1.207	1.273	1.351	1.404	1.560
90	1.031	1.072	1.123	1.195	1.257	1.329	1.379	1.525
100	1.029	1.069	1.117	1.185	1.243	1.311	1.358	1.494
120	1.027	1.063	1.107	1.169	1.221	1.283	1.325	1.446
140	1.026	1.059	1.099	1.156	1.204	1.261	1.299	1.410
160	1.024	1.055	1.093	1.146	1.191	1.243	1.278	1.381
180	1.023	1.052	1.087	1.137	1.179	1.228	1.261	1.358
200	1.022	1.050	1.083	1.130	1.170	1.216	1.247	1.338

Modelado de datos experimentales

1. Ajuste, minimizando la función χ^2, la curva $y = A + Be^{x^2}$ a la tabla de datos:

x	y	σ
0.0	5.1	0.2
1.0	8.2	0.1
1.5	22.0	0.2
2.0	112.1	0.1
2.5	1039.0	0.3

   Como resultado debe presentar los valores de los parámetros ajustados, sus errores y el valor de χ^2. ¿ Es un ajuste aceptable ?

2. Dada la tabla de datos experimentales:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	-5.0	-2.3	1.2	5.6	11.3
σ	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

   determine los parámetros A y B de la función

$$F(x) = Ax^2 - Be^{-x}$$

   que dan el χ^2 mínimo. Determine también:

   (a) El valor del χ^2 del ajuste.

   (b) Si el ajuste es aceptable o no.

   (c) El error de los parámetros ajustados.

3. Determínense los parámetros a y b que ajustan a la tabla de datos de la curva

$$y = ax + be^{-\frac{x^2}{2}}$$

   Obténgase también el valor de χ^2 y los errores con que se determinan los parámetros. ¿Se trata de un buen ajuste ?

x	$f(x)$	σ
-2	-1	0.4
-1	5	0.2
0	10	0.2
1	7	0.2
2	4	0.4

4. Determínense los parámetros a y b que ajustan a la tabla de datos de la curva $y = a + b\sin(x)$. Obténgase también el valor de χ^2 y los errores con los que se determinan los parámetrso. Hágase una representación gráfica de los valores ajustados, así como de los empíricos.

x	$f(x)$	σ
0.0	1.80	0.2
0.3	1.71	0.2
0.5	1.50	0.2
0.7	1.45	0.2
0.9	1.17	0.2
1.0	1.17	0.2

5. Sospechamos que el conjunto de datos experimentales:

x	0.0	2.50	5.00	7.50	10.00
y	2.02	6.72	24.04	85.02	296.79
σ	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

puede ser descrito por una ley exponencial de la forma $y = ae^{bx}$. Se trata de realizar un ajuste por mínimos cuadrados a dichos datos, obteniendo los parámetros a y b con su error así como el valor de χ^2.¿ Cuan bueno es el ajuste ?

6. Se desea ajustar la función modelo

$$y = \sqrt{ax^2 + b}$$

al conjunto de datos especificado en la tabla que sigue. Para hacer que el ajuste sea lineal, háganse las transformaciones adecuadas de la función y la variable, así como de los errores, y complétese la tabla.

x_i	y_i	σ_i	x_i'	y_i'	σ_i'
0.1	1.0	0.05			
0.6	1.4	0.20			
1.0	2.1	0.05			
1.5	2.8	0.10			
2.0	3.6	0.20			

(a) Obtener la trasformación de la función.

(b) Obtener la trasformación de los errores.

(c) Parámetros del ajuste con sus errores.

(d) Matriz de covarianzas.

(e) ¿ Es un buen ajuste ?

7. Un oscilador armónico libre amortiguado de frecuencia propia $\omega = 0.5$ radianes/s satisface la ecuación del movimiento $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t)$. Se miden los siguientes valores de x y t

t (s)	$x \pm 0.001$ m
1.00	0.790
2.00	0.444
3.00	0.056
4.00	-0.276

Calcular la amplitud inicial A y la constante de amortiguamiento γ mediante ajuste de mínimos cuadrados, minimizando χ^2. (Nota: Para pasar obtener un problema lineal es necesario pasar de la variable x a una nueva variable y, de forma que los parámetros no dependan del tiempo.)

8. Sabemos que un muelle se comporta como un oscilador anarmónico, que satisface la siguiente relación entre fuerza y elongación:

$$F(x) = -kx - \alpha x^2$$

Se suspende el muelle en posición vertical fijando un extremo a un soporte y en el otro se cuelga un platillo en el que se colocan diferentes pesas. Las elongaciones se miden con una precisión de 1 mm, lo que es equivalente a una sensibilidad de 20 g al valor de la masa. Se obtienen los siguientes valores de la elongación en función de la masa:

$m(g)$	0	200	400	600	800	1000
$x(mm)$	0	20	35	55	65	75

(a) Plantear las ecuaciones normales que dan los valores óptimos de los parámetros k y α (mínimos cuadrados) ajustando mediante polinomios ortogonales sobre este conjunto discreto de puntos. Tomar errores sólo en la variable dependiente (la fuerza).

(b) Calcular los valores de dichos parámetros, expresándolos en las unidades correspondientes. Tomar la aceleración de la gravedad como g=10 m/s^2.

(c) Calcular el valor de χ^2. ¿Se obtiene un buen ajuste?

MODELADO DE DATOS EXPERIMENTALES T-9

1) $y = A + B e^{x^2}$ $\qquad f_1 = 1, \; f_2 = e^{x^2}$

x	y	σ	$e^{x_i^2}/\sigma_i^2$	$e^{2x_i^2}/\sigma_i^2$	$g(x_i)$
0,0	5,1	0,2	25	25	4,873108131
1,0	8,2	0,1	271,8281828	738,9056099	8,3100718 37
1,5	22,0	0,2	237,1933969	2250,428287	21,88058391
2,0	112,1	0,1	5459,815003	298095,7987	112,0818869
2,5	1039,0	0,3	5755,698052	2981525,406	1039,049128

$$F_{12} = \sum_i \frac{e^{x_i^2}}{\sigma_i^2} = F_{21} = 11749,53463$$

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$F_{11} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} = 261,11111111$$

$$F_{22} = \sum_i \frac{\left(e^{2x_i^2}\right)^2}{\sigma_i^2} = 3\,282\,638,538$$

$$v_1 = \sum_i \frac{y_i \cdot 1}{\sigma_i^2} = 24251,94444$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{12} & F_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \sum \frac{y_i e^{x^2}}{\sigma_i^2} = 6599790,284$$

$$\Delta = F_{11} F_{22} - F_{12}^2 = 719081048,6$$

$$A = p_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & F_{12} \\ v_2 & F_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = 2,872875312 \pm 0,067565098$$

$$B = p_2 = \frac{\begin{vmatrix} F_{11} & v_1 \\ F_{12} & v_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 2,000232819 \pm 0,000602592$$

$$\chi^2 = \frac{(y_i - g(x_i))^2}{\sigma_i^2} = 5,060982619$$

$\nu = 5 - 2 = 3$ $\qquad \frac{\chi^2}{\nu} = 1,686994206$ ✓ $\quad P(\chi^2 > \chi_0) = 15\%$

x	0,0	-5,0	-4,820299548
y	0,5	-2,3	-2,201853338
σ	1,0	1,2	1,113935403
	1,5	5,6	5,420700931
	2,0	11,3	10,89634442

$2,887224507x^2 - Be^{-x}$

$F(x) = Ax^2 - Be^{-x}$

$F_{12} = \sum \frac{x^2 e^{-x}}{\sigma_i^2} = -1,562896099/\sigma_i^2$

$F_{11} = \sum \frac{x^4}{\sigma_i^2} = 22,125/\sigma_i^2$

$F_{22} = \sum \frac{e^{-2x}}{\sigma_i^2} = 1,571317432/\sigma^2$

$v_1 = \sum \frac{y x^2}{\sigma_i^2} = 58,425/\sigma^2$

$v_2 = \sum \frac{-y e^{-x}}{\sigma_i^2} = 3,174747591/\sigma^2$

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\Delta = 33,81523935/\sigma^4$

$p_1 = \frac{v_1 F_{22} - v_2 F_{12}}{\Delta} = 2,887224507 \pm 0,021652632$ $\quad \sqrt{\frac{F_{22}}{\Delta}}$

$p_2 = \frac{v_2 F_{11} - v_1 F_{12}}{\Delta} = 4,820299548 \pm 0,081249488$ $\quad \sqrt{\frac{F_{11}}{\Delta}}$

$\chi^2 = 24,42591139$

$\nu = 3 \quad \frac{\chi^2}{\nu} = 8 \gg 1 \quad P \ll 1\%$ → Mal ajuste

Mínimos cuadrados

Fernando Flueso González

x	0	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$y \pm 0,2$	1,80	1,71	1,50	1,45	1,17	1,17

$\rightarrow n = 6$

$f(x) = a + b \sin x \rightarrow$ Lineal en parámetros

$p_1 = a \quad f_1 = 1$

$p_2 = b \quad f_2 = \sin(x)$

$\sigma = \sigma_i = 0,2$

$\mathbb{F} \cdot \vec{p} = \vec{v}$

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \qquad F_{11} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{6}{\sigma^2}$$

$$F_{12} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\sin(x)}{\sigma^2} = \frac{3,043961327}{\sigma^2}$$

$$F_{22} = \sum \frac{\sin^2(x)}{\sigma^2} = \frac{2,053871934}{\sigma^2}$$

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \sum_{i=1}^{6} \frac{y_i}{\sigma^2} = \frac{8,8}{\sigma^2}$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{y_i \cdot \sin(x_i)}{\sigma^2} = 4,059607044/\sigma^2$$

$F_{11} a + F_{12} b = v_1$

$F_{12} a + F_{22} b = v_2$

↳ Resolver por Cramer

$$\Delta = \det(F) = \frac{1}{\sigma^4} \, 3,057531042$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & F_{12} \\ v_2 & F_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\cancel{1/\sigma^4}\,(8,8 \cdot 2,05\ldots - 3,04 \cdot 4,059\ldots)}{\cancel{1/\sigma^4}\; 3,057\ldots}$$

$$= 1,869739373$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} F_{11} & v_1 \\ F_{12} & v_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = -0,794502943$$

$C = F^{-1}$

Errores: $\delta(a) = \sqrt{C_{11}}$, $\delta(b) = \sqrt{C_{22}}$

$C_{11} = \frac{F_{22}}{\det(F)} = 0,026869678 \qquad C_{22} = \frac{F_{11}}{\det F} = 0,078494705$

↳ Ajuste parámetros:

$y = a + b \sin(x)$

↳ $y = (1,87 \pm 0,16) + (-0,8 \pm 0,3)\sin(x)$; $\delta(a) = 0,1631973$; $\delta(b) = 0,280169066$

Demostración:

Trapezoidal + Richardson $\equiv$ Simpson

$$R(n,1) = S(n) \rightarrow 2^n \text{ intervalos}$$

$$h = b - a$$

$a \quad x_i \quad b$

$$\frac{4R(n,0) - R(n-1,0)}{3} = \frac{h}{2^n}\left([f_0+f_n]+\dots\right)\cdot\frac{1}{3} \quad \Big| \cdot 3$$

$x_i - x_{i-1}$

$\downarrow \cdot 3$

$$4\cdot\frac{h}{2^n}\left(\frac{f_a+f_b}{2}+\sum_{i=1}^{2^n-1} f\left(a+\frac{h}{2^n}i\right)\right) - \frac{h}{2^{n-1}}\left(\frac{f_a+f_b}{2}+\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a+\frac{h}{2^{n-1}}i\right)\right)$$

$$= \frac{h}{2^n}\left([f_a+f_b] + 4\sum\dots + 2\sum\dots\right) \quad \Big| \cdot \frac{2^n}{h}$$

$$\hookrightarrow 4\left(\frac{f_a+f_b}{2}+\sum^{2^n-1}\dots\right) - 2\left(\frac{f_a+f_b}{2}+\sum^{2^{n-1}-1}\dots\right) = [f_a+f_b]+4\sum+2\sum\dots$$

descompongo $\sum$ en pares e impares $i=2k$ $\quad i = 2k+1 \rightarrow k=0 \dots 2^{n-1}-1$

$k=1 \dots 2^{n-1}-1$

$$\hookrightarrow 2(f_a+f_b) - (f_a+f_b) + 4\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(a+\frac{h}{2^n}(2k+1)\right)$$

$$+ 4\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a+\frac{h}{2^n}2k\right) - \underbrace{2\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a+\frac{h}{2^{n-1}}i\right)}_{=2\sum} = [f_a+f_b]+4\sum+2\sum$$

$$\hookrightarrow f_a+f_b + 4\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f\left(a+\frac{h}{2^n}(2k+1)\right) + 2\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a+\frac{h}{2^n}\cdot 2k\right)$$

|| impares desde f_1 a f_{n-1} // pares desde f_2 a f_{n-2}

R. Simps.

$$= [f_a+f_b] + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) \qquad (f_n = f_b)$$

q.e.d.

③ $y = ax + b \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 1{,}72837620\, x + b\, e^{-x^2/2}$

x	y	σ	F
-2	-1	0,4	-2,077246773
-1	5	0,2	4,454139562
0	10	0,2	10,10324534
1	7	0,2	7,91089208
2	4	0,4	4,936258263

$F_{11} = \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = 100$

$F_{22} = \sum \frac{e^{-x^2}}{\sigma_i^2} = 43{,}62291754$

$F_{12} = \sum \frac{x_i e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sigma_i^2} = -5{,}889942206$

$v_1 = \sum \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2} = \cancel{434{,}4867345}\ 112{,}5$

$v_2 = \sum \frac{y_i e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sigma_i^2} = 434{,}4867345$

$\Delta = 4327{,}600335$

$a = \frac{v_1 F_{22} - v_2 F_{12}}{\Delta} = 1{,}725376259 \pm 0{,}180400015$

$b = \frac{v_2 F_{11} - v_1 F_{12}}{\Delta} = 10{,}19324534 \pm 0{,}152011493$

$\chi^2 = 63{,}09674344$

$\nu = 3 \quad \rightarrow \chi^2/\nu = 21{,}0322481 \gg 1$

$P \ll 1\% \rightarrow$ Mal ajuste

$\chi^2 \Rightarrow f(x) = 1{,}869739373 - 0{,}794502943 \sin x$

x	y		
0	1,80	$\sigma = 0{,}2$	1,869739373
0,3	1,71		1,634947699
0,5	1,50		1,488834372
0,7	1,45		1,357906525
0,9	1,17		1,247383938
1,0	1,17		1,201188199

$\chi^2 = 0{,}651581741$

$\nu = 4$

$\chi^2/\nu = 0{,}162895435 < 1$

$P(\chi^2 > \chi_0) = 97\%$ → erros sobrestimados

⑤ $\ln y = \ln a + bx = y' = a' + bx$

x	y'	σ	$f'(x)$	
				~~0,160~~ 0,160 0,664396484 0,68427995
0	ln 2,02	0,2/y*	0,664396484	0,68427995
2,5	ln 6,72	·	~~1,922061837~~	1,936488305
5	ln 24,04	·	~~3,179727489~~	3,18869666
7,5	ln 85,02	·	~~4,437392542~~	4,440905015
10	ln 296,79	·	5,695057894	5,69311337

$F_{11} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} = \cancel{1669{,}602321}\ 2398496{,}623$

$F_{12} = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \cancel{111130{,}2282} = 23451463{,}7$ ~~11670,8573~~

$F_{22} = \sum \frac{x^2}{\sigma_i^2} = \cancel{862118{,}09833}\ 230743955{,}3$ ~~13294,40227~~

$v_1 = \sum \frac{y}{\sigma_i^2} = \cancel{7790{,}597605}\ \cancel{8677538}\ 4133876 90{,}5$

$\Delta = \cancel{1622649{,}53}\ 3{,}467447882 \cdot 10$

$v_2 = \sum \frac{xy}{\sigma_i^2} = \cancel{67022{,}84603}\ 1316231 68{,}3$ ~~1311053000~~

$a' = \frac{v_1 F_{22} - v_2 F_{12}}{\Delta} = \cancel{0{,}664396484 \pm 0{,}087159363}$ $0{,}68427995 \pm 0{,}00815755$

$b^* = \frac{v_2 F_{11} - v_1 F_{12}}{\Delta} = \cancel{0{,}503066147 \pm 0{,}010144038}$ $0{,}500883342 \pm 0{,}000831695$

$a = e^{a'} = \cancel{1{,}943317344} \pm \cancel{0{,}169372524}$ $1{,}982343835 \pm 0{,}008224375$

$\chi^2 = \cancel{0{,}062895723}$ $\nu = 3$ 1,013501598 ✓ 1 dato mal (2,5)

~~1115 84064~~ → 35% ✓ $\chi^2/\nu = \cancel{13{,}8643{,}05}$

⑥

$y = \sqrt{ax^2 + b}$

a) $y^2 = ax^2 + b \qquad y' = y^2 \, , \; x' = x^2 \rightarrow y' = ax + b$

b)

x	y	$\sigma = 2y_{ant}\,\delta(y)$	F
0,01	1	0,1	0,144929234
0,36	1,96	0,56	1,615646272
1	4,41	0,21	4,304957426
2,25	7,84	0,56	9,557518274
4	12,36	1,44	16,91110346

$F_{11} = \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = 37,98979655$

$F_{22} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} = 129,5355411$

$F_{12} = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} = 33,82745339$

$v_1 = \sum \frac{y_i x_i}{\sigma^2} = 184,5$

$v_2 = \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} = 237,5$

c) $\Delta = 3769,956759$

$a = \frac{v_1 F_{22} - v_2 F_{12}}{\Delta} = 4,202048678 \pm 0,185364381$

$b = \frac{v_2 F_{11} - v_1 F_{12}}{\Delta} = 0,1029087748 \pm 0,1003841185$

d) $C = \begin{pmatrix} \cancel{129,5355411} \; 0,634359954 & -0,0089994427 \\ -0,0089994427 & 0,0100076384 \end{pmatrix}$

e)

$\chi^2 = 19,~~38394438~~ \qquad \nu = 3$

$\frac{\chi^2}{\nu} = ~~6,4613147~~ 9 \cancel{5} > 1 \rightarrow$ No recta

$R \leq 1$

7

$x = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(0{,}5t)$

$\ln x = \ln A - \gamma t + \ln \cos(0{,}5t)$

$y = 1 \cdot A' - \gamma \cdot x + \ln\cos(0{,}5t) \cdot 1$

$y' = A - \gamma t = \ln x - \ln \cos 0{,}5t = \ln \dfrac{x}{\cos 0{,}5t}$ $\quad \delta = \left(\dfrac{\cos}{x} \dfrac{\delta(x)}{\cos}\right)$ [illegible]

$= a + bt$

t	y	σ_i
1	$-0{,}105138093$	$0{,}001265822$
2	$-0{,}196304246$	$0{,}002252252$
3	$-0{,}233619934$	$0{,}178571142$
4	$-0{,}410637304$	$0{,}003623188$

$F_{11} = \sum \dfrac{1}{\sigma_i^2} = 897444{,}1981$ $\quad \Delta = 6{,}1106137731 \cdot 10^{11}$

$F_{22} = \sum \dfrac{t^2}{\sigma_i^2} = 2631743{,}464$

$F_{12} = \sum \dfrac{t}{\sigma_i} = \cancel{928898{,}9224}\ 1323171{,}01$

$v_1 = \sum \dfrac{y_i}{\sigma_i^2} = -135603{,}4483$

$v_2 = \sum \dfrac{x_i y_i}{\sigma_i^2} = -268158{,}863$

$a = \dfrac{v_1 F_{22} - v_2 F_{12}}{\Delta} = -0{,}00336042 2 \pm 0{,}002075292$

$b = \dfrac{v_2 F_{11} - v_1 F_{12}}{\Delta} = -0{,}100204441 \pm 0{,}001211884$

$\gamma = 0{,}1002 \pm 0{,}0012$

$A = 0{,}997 \pm 0{,}002$

Ecuaciones diferenciales

1. Considérese la ecuación de movimiento
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x^2$$
con las condiciones iniciales $x(t=0) = 0$ y $v(t=0) = 10$. Determínese la posición y la velocidad para $t = 1$, usando la regla poligonal de Euler con paso $h = 0.2$

2. Una partícula de 1 Kg de masa se mueve, partiendo del origen, con una velocidad inicial de 10 m/s, y está sometida a una fuerza repulsiva combinada con otra de tipo viscoso dada por la expresión
$$F = \alpha x^2 - \beta v^2$$
siendo $\alpha = 1$ N/m^2 y $\beta = 0.002$ Kg/m.
   (a) Escríbase la ecuación diferencial que describe su movimiento.
   (b) Transfórmese en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer grado.
   (c) Escríbanse las fórmulas de integración para el método de la poligonal de Euler.
   (d) Determínese su movimiento rellenando la tabla adjunta

t	x	v	$\alpha x^2 - \beta v^2$
0.0	0.000	10.000	
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			

3. Considérese la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$$
con la condición de contorno $y(0) = 0$. Intégrese esta ecuación diferencial hasta $t = 0.5$ con pasos $\Delta T = 0.1$, usando el método de Euler.
Compárese el resultado con la evaluación numérica de la integral
$$y(0.5) = \int_0^{0.5} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$
por la regla trapezoidal con paso 0.1.

4. La trayectoria de un móvil, a lo largo de una línea recta se describe por la ecuación de Newton
$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^2$$
Partiendo del punto $x = 1$ con velocidad inicial $v = 1$ ¿ Cuánto tiempo transcurrirá hasta que el móvil llegue al punto $x = 2$? Utilícese el método de Euler con pasos de $\Delta x = 0.2$.

5. Integre la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = y(t) + \frac{1}{10}e^t$$
usando el método predictor-corrector para los valores de $t = 0.1, 0.2, ..., 1$ partiendo de la condición inicial $y(t=0) = 1$.

6. Considérese la ecuación diferencial $y^{'} = y$ con la condición de contorno $y(0) = -9$. Calcule el valor de y(1) usando el *método del punto medio*, con dos y cuatro subdivisiones del intervalo. A continuación, haga la extrapolación de Richardson, para obtener un valor mejor. Compare los distintos resultados con la solución analítica de la mencionada ecuación diferencial.

7. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t^2$$

con las condiciones de contorno para $t = 1$

$$x(1) = 4/3 \; ; \qquad ; \; \frac{dx(1)}{dt} = 8/3$$

lleve a cabo un paso de integración de valor $h = 0.1$ usando el método de Euler y el método predictor-corrector.

8. Consideremos el problema de valor inicial

$$y^{'} = x^2 + y$$

con la condición de contorno $y(0) = 1$, cuya solución exacta es $y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2$. Tomando una longitud de paso $h = 0.1$, obtener una aproximación de $y(0.3)$ y calcular el error cometido aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

9. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^2}$$

con la condición de contorno $x(1) = 1/e$, en el punto $t = 1$.

Obtenga numéricamente el valor de $x(2)$ usando el método de Bulirsch-Stoer, dando DOS pasos intermedios

10. Una partícula de masa 1 Kg está sometida a una fuerza dependiente de la posición $F = -x - 0.5x^2 + 0.5x^3$. En $t = 0$, su posición es 1 m y su velocidad nula. Calcular su posición en $t = 0.3$ s integrando la ecuación diferencial correspondiente utilizando el método del punto medio (u otro método con error en h del mismo orden o más elevado). Tomar $h = 0.1$ s.

11. El método de Runge Kutta de orden 4 aplicado a ecuaciones de la forma $y^{'} = f(t)$ coincide con la regla de Simpson. Considérese la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot e^{-t}$$

con la condición de contorno $y(0) = -1$.

(a) Calcúlese $y(1)$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 con pasos de tamaño $h = 0.5$.

(b) Calcúlese $y(1)$ mediante la regla de Simpson compuesta con tamaño del intervalo de $h = 0.25$

(c) Razónese la coincidencia del resultado.

12. Realizar 5 pasos de integración para la ecuación diferencial $y''(t) = -y(t)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 0$ con un paso de integración $h = 0.1$ por el método del punto medio. Comparar con la solución exacta $y(t) = cos(t)$

13. Sea la ecuación diferencial de un cuerpo sometido a una aceleración constante a:

$$y''(t) = -a$$

con las condiciones iniciales $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$

(a) Reducir esta ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

(b) Realizar un paso de integración de tamaño h por el método del punto medio o el de Runge-Kutta de segundo orden.

(c) Interpretar el resultado en términos de las leyes de la cinemática ¿Cúal es el error de truncado del método en este caso?

14. Sea un oscilador armónico amortiguado y forzado descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = sin(t)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$.

(a) Reducir la ecuación diferencial a un sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

(b) Realizar dos pasos de integración por el método de Euler con $h = 0.1$.

(c) Realizar un paso de integración por el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$.

15. Sea un péndulo simple de masa 1 Kg, suspendido de un hilo de longitud $l = 1$ m, que parte del reposo desde un ángulo de 90° con la vertical.

(a) Plantear las ecuaciones del movimiento exactas (sin hacer la aproximación $\sin\theta \simeq \theta$, donde θ es el ángulo del péndulo con la vertical), en la forma de dos ecuaciones diferenciales de primer orden para el ángulo θ y la velocidad angular ω (o para la longitud de arco y la velocidad lineal, es indiferente).

(b) Realizar tres pasos de integración mediante la regla del punto medio con $h = 0.1$ s (se toma el tiempo inicial $t = 0$).

(c) Calcular las energías potencial y cinética en $t = 0.3$ s a partir de la posición y la velocidad obtenidas numéricamente ¿Se conserva la energía mecánica? Razonad la respuesta.

Nota: La relación entre la longitud de arco s y el ángulo θ es $s = l\theta$ (el ángulo en radianes), la misma que entre velocidad lineal y angular $v = l\omega$. La fuerza en la dirección tangencial es $F = -mg\sin\theta$. Si el origen de potencial $V = 0$ se toma en $\theta = \frac{\pi}{2}$, la energía potencial es $V = -mgl\cos\theta$.

ECUACIONES DIFERENCIALES T. 7

①
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x^2 \qquad x(t=0)=0 \;,\; v(t=0)=10$$

$\rightarrow t = 1,\ h = 0,2$

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad \rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot F(t, y_n)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -x^2 \qquad \rightarrow v_{n+1} = v_n + h \cdot (-x_n^2)$$

$$\rightarrow x_{n+1} = x_n + h \cdot v_n$$

	x	v	t	x^2
0	0	10	0	0
1	2	10	0,2	4
2	~~4,844~~ 4	9,2	0,4	16
3	~~4,0891748~~ 5,84	~~6,128988~~ 6	0,6	
4	5,~~303956332~~ 7,04	~~1,068901658~~ -0,82112	0,8	
5	~~4,392458553~~ 6,875776	~~-4,557488895~~ -10,23344	1	

②
$$F = \alpha x^2 - \beta v^2 \qquad m = 1\,kg \qquad v_0 = 10\,m/s \qquad \alpha = 1\,N/m^2,\ \beta = 0,002\,\frac{Ns^2}{m^2}$$

a) $$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha x^2 - \beta v^2$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^2 - 0,002v^2 \qquad b) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = x^2 - 0,002v^2 \end{cases}$$

c) $$v_{n+1} = v_n + h\left(x_n^2 - 0,002\,v_n^2\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + h v_n$$

t	x	v	~~α~~$x^2 - 0,002v^2$
0,0	0,000	10,000	-0,2
0,1	1	9,98	0,8007992
0,2	1,998	10,06007992	~~0,2024105546~~ 3,789593584
0,3	3,00407992	10,43903928	8,806176334
0,4	4,04791192	11,31965097	16,12932192
0,5	5,179847017	12,93258316	

(3) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ $\quad y(0)=0$ $\quad t=0{,}5 \quad dt=0{,}1$ $\quad y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$

$h = 0{,}1$

t	y	f
0	0	1
0,1	0,1000000	1,000050004
0,2	0,20000050	1,000800961
0,3	0,300085096	1,004074771
0,4	0,400492573	1,013051123
0,5	0,510623084	1,032795559

$y_1 = y_0 + h f_0$

$y_2 = y_1 + h f_1$

$\vdots$

$y_n = y_{n-1} + h f_{n-1} = y_0 + h(f_0 + \dots + f_{n-1})$

sin f_n

$y(0{,}5) = 0{,}1\left(\frac{f_0 + f_5}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + f_4\right) = 0{,}503437463$ ✓

(4)

$h = 0{,}2$

$\frac{d^2x}{dt^2} = x^2$ $\quad x(0)=1, \; v(0)=1 \;\to t\,(x=2?)$

$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{x^2}$ $\quad t(1)=0 \quad \eta(1)=0 \quad 1 = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\eta} \to \eta\Big|_{x=1} = 1$

$x\big|_{t=0} = 1 \quad t\big|_{x=1} = 0$

$\frac{dt}{dx} = \eta$ $\quad \to \eta_{n+1} = \eta_n + h \cdot \frac{1}{x^2}$

$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{x^2}$ $\quad \to t_{n+1} = t_n + h \cdot \eta$

$h = 0{,}2$

$v(x=1) = 1$

$\frac{1}{v} = 1$

$h = 0{,}2$

$\eta_n = \eta_{n-1} + 0{,}2 / x^2$

x	t	η
1	0	1
1,2	0,2	1,2
1,4	0,44	~~1,2694~~ ~~1,338~~ 1,440929705
1,6	0,707	~~1,334212018~~ 1,441701388 1,338
1,8	0,9959637 18	1,519054705
2,0	1,1299724659	1,5807831

4 $\frac{d^2x}{dt^2} = x^2$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} = \eta \quad \to \left(x^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta^2} \cdot \frac{d\eta}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{d\eta}{dx} = \frac{d(1/v)}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v^3}\frac{dv}{dt} = -\eta^3 x^2\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{x^2}{v} \quad \to \quad v_{n+1} = v_n + 0{,}2\cdot\frac{x_n^2}{v_n}$$

$$t_{n+1} = t_n + 0{,}2\cdot\frac{1}{v_n}$$

x	v	t
1	1	0
1,2	1,2	0,2
1,4	1,44	$0{,}3\overline{6}$
1,6	1,7122222	$0{,}50\overline{5}$
1,8	2,011249828	0,622362823
2,0	2,409011646 333436712	0,7218035527

5 $\frac{dy}{dt} = y(t) + \frac{1}{10}e^t \qquad h = 0{,}1 \qquad y(t=0) = 1$

$y_1 = y_0 + 0{,}1\left(y_0 + \frac{1}{10}e^0\right) = 1{,}11 \to t_1 = 0{,}1$

$\hookrightarrow y_{n+1} = y_n + 0{,}05\left(y_n + \frac{e^{t_n}}{10} + y^*_{n+1} + \frac{e^{t_{n+1}}}{10}\right) \Leftrightarrow y_{n+1} = 1{,}05 y_n + 0{,}05\left(\frac{e^{t_n}}{10} + \frac{e^{t_{n+1}}}{10}\right)$

$y_1 = 1{,}116343005 = (((K + 0{,}05 y_0^0)\cdot 0{,}05 + K)\times 0{,}05 + K)\times 0{,}05 + K) \qquad 1 - 0{,}05$

$(0{,}05^3 k + 0{,}05^3 y_0) + K\,0{,}05^2 + K\,0{,}05$

$= 0{,}05^n y_0 \qquad + K = \sum_{i=0}^{n-1} 0{,}05^i k + 0{,}05^n = \frac{K}{1 - 0{,}05}$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{1{,}05\, y_n + 0{,}005\left(e^{t_n} + e^{t_{n+1}}\right)}{0{,}95}$$

$$y_{n+1} = \frac{1{,}05\, y_n + 0{,}05(e^{t_n} + e^{t_{n+1}})}{0{,}95}$$

t	y
0	1
0,1	1,16343005
0,2	1,24609719
0,3	1,39073077
0,4	1,55215209
0,5	1,73206915
0,6	1,932659805
0,7	2,17663026
0,8	2,42806112
0,9	2,70830536
1,0	3,020642167

6

$y' = y \quad y(0) = -9 \rightarrow y = -9 \cdot e^x$

$y(1)$ p. medio $\quad y(1) = -24{,}46453646$

2 intervalos $\quad 0 \quad 0{,}5 \quad 1$

$y_{0,5} = y_0 + 0{,}5 \cdot y_0 = -13{,}5 \quad ; y_1 = -20{,}25 \quad y_1^0 = -18$

$y_1 = y_0 + 1 \cdot y_{0,5} = -22{,}5$

4 intervalos $\quad y_0 = -9 \quad y_{n-1} + 0{,}5\, y_n$

$y_{0,25} = -11{,}25 \rightarrow y_{0,5} = -14{,}625 \rightarrow y_{0,75} = -18{,}5625 \quad y_1 = -23{,}90625$

$4\, y(\ldots)$ $y^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right) = 2y\left(\frac{h}{2}\right) - y(h) \rightarrow y^1\left(\frac{h}{2}\right) = 2 \cdot (-22{,}5) - (-18) = -27$ → 1ª ext.

$y(1) = 4\, y \quad y^1\left(h/4\right) = 2 \cdot (-23{,}90625) - (-22{,}5) = -25{,}3\ldots$ → 1ª extr.

$\rightarrow y(\ldots) = \frac{4 \cdot y^1\left(\frac{h}{4}\right) - y^1\left(h/2\right)}{3} = -24{,}75$ → 2ª extr.

⑦ $\frac{d^2x}{dt^2} = t^2$ $\quad x(1) = 4/3 \quad v(1) = 8/3$

$h = 0{,}1$ 1 paso → Euler, p-c

$\frac{dx}{dt} = v$

$\frac{dv}{dt} = t^2$ → $v_{n+1} = v_n + h\, t_n^2$

→ $v_{n+1} = v_0 + 0{,}1\, t_0^2 = 8/3 + 1^2 \cdot 0{,}1 = 2{,}7\overline{6}$

↳ p-c

$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(t_n^2 + t_{n+1}^2) = 2{,}77716$

$x_{n+1} = 4/3 + 0{,}1 \cdot v_0 = 1{,}6$

↳ p-c → $x_{n+1} = x_0 + \frac{0{,}1}{2}(v_0 + v_1^*) = 4/3 + 0{,}05\,(8/3 + v_1)$

$= 1{,}608525$

⑧
$y' = x^2 + y \rightarrow y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2$

$y(0) = 1 \quad h = 0{,}1 \rightarrow y(0{,}3) \leftarrow$ RK4

$y(0{,}1) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = h\,F(x, y) = 0{,}1 \cdot (0^2 + 1) = 0{,}1$

$k_2 = h\,F(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) = 0{,}1\,(0{,}05^2 + 1{,}05) = 0{,}10525$

$k_3 = h\,F(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) = 0{,}1\,(\ldots) = 0{,}1055125$

$k_4 = h\,F(x + h, y + k_3) = 0{,}11155125$

→ $y(0{,}1) = 1{,}1055127 08 \longleftrightarrow 1{,}105512754$

$k_1 = 0{,}1\,(0{,}1^2 + y(0{,}1)) = 0{,}111155127 \quad k_2 = \cancel{0{,}1078827563}$ $0{,}1182788834$

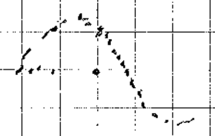
$k_3 = 0{,}1187720212;\ k_4 = 0{,}126423292$

$y(0{,}2) = 1{,}224208815 \longleftrightarrow 1{,}224208274$

$k_1 = 0{,}126420815 \quad k_2 = 0{,}134991855 \quad k_3 = 0{,}135420407$

NOTE BOOK $k_4 = 0{,}144962855 \rightarrow y(0{,}3) = 1{,}358576183 \longleftrightarrow 1{,}359576423$ → $\varepsilon_{real} = 0{,}00000024$

9) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^2}$ $x(1) = 1/e = e^{-1}$



$x(2) \to 2$ int $\to$ Bu $h = 0,5$

$f_0 = \frac{e^{-1}}{1^2}$

$f_1 = e^{-1} + 0,5\, e^{-1} = 1,5\, e^{-1}$

$f_2 = e^{-1} + \frac{1,5\, e^{-1}}{1,5^2} = 2,5\, e^{-1}$

$\hookrightarrow y(2) = \frac{1}{2}\left[f_2 + f_1 + 0,5 \frac{f_2}{2} \right] = \frac{2,875}{2}\, e^{-1} = 1,085244351$

0,367879441

$2,15625\, e^{-1} = 0,79324004 5$

10)

$m = 1\,kg$

$F = -x - 0,5x^2 + 0,5x^3$ $x(0) = 1$ $v(0) = 0$

$h = 0,1s \to t = 0,3s$

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -x - 0,5x^2 + 0,5x^3$

$\frac{dx}{dt} = v$ $\frac{dv}{dt} = -x - 0,5x^2 + 0,5x^3$

$x_1 = x_0 + 0,1\, v_0 = 1$ $v_1 = v_0 + 0,1(-1 - 0,5 + 0,5) = -0,1$

$x_{n+1} = x_{n-1} + 0,2\, v_n$ $v_{n+1} = v_{n-1} + 0,2(-x_n - 0,5x_n^2 + 0,5x_n^3)$

t	x	v
0	1	0
0,1	1	-0,1
0,2	0,98	-0,2
0,3	0,96	-0,2979208

11

$\frac{dy}{dt} = t \cdot e^{-t} \qquad y(0) = -1$

a) $y(1)$ RK4 $\quad h = 0,5$

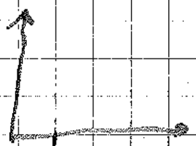
$y(0,5) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + k_4 + 2k_2 + 2k_3)$

$k_1 = 0,5 \cdot 0$

$k_2 = 0,5 (0,25 \cdot e^{-0,25})$

$k_3 = 0,5 \cdot 0,25 \cdot e^{-0,25}$

$k_4 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot e^{-0,5}$ $\qquad y = \int t \cdot e^{-t} dt$



$\hookrightarrow y(0,5) \underset{}{\overset{-y(0)}{=}} 0,090172176$

$k_1 = 0,5 \cdot 0,5 e^{-0,5}$

$k_2 = 0,5 \cdot 0,75 \cdot e^{-0,75}$

$k_3 = 0,5 \cdot 0,75 \cdot e^{-0,75}$

$k_4 = 0,5 \cdot 1 \cdot e^{-1}$

$\hookrightarrow y(1) \underset{-y(0)}{=} 0,264192545 \quad \rightarrow y(1) = -0,735807455$

b)

$y(1) = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_5 + 4 \cdot \text{imp} + 2 \cdot \text{par}\right) = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_5 + 4 \cdot (f_1 + f_3) + 2 f_2\right)$

$= \frac{h}{6}\left(0 + e^{-1} + 4 \cdot \left(e^{-0,25} \cdot 0,25 + 0,75 \cdot e^{-0,75}\right) + 2 \cdot e^{-0,5} \cdot 0,5\right)$

$= 0,264192545 \quad \rightarrow$ difieren en $y(0)$ (se pierde al derivar)

$\hookrightarrow y(t) = \int_0^t dy + y(0)$ //

c) RK4

$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{6}\left(f(t) + 4 \cdot f\left(t + \frac{h}{2}\right) + f(t+h)\right) \xrightarrow{RK4} \Sigma$

$y(t+H) = y(t) + \frac{h}{6}\left(f(t) + f(t+H) + \sum 4 f\left(t + \frac{\ell h}{2}\right) + \sum_1^{n-1} 2 f(t + \ell h)\right)$ $\qquad H/n = h$

$=$ Simpson ✓ $\left(\frac{h'}{3}\right) \quad h' = \frac{h}{2}$

(12) $y''(t) = -y(t) \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

$h = 0,1$

$y' = v \qquad v_1 = v_0 + 0,1 \cdot (-y_0) = -0,1$

$\frac{dx}{dt} = v \qquad y_1 = y_0 + 0,1 \cdot v_0 = y_0 = 1$

$\frac{dv}{dt} = -y \qquad v_{n+1} = v_{n-1} + 0,2(-y_n)$

$y_{n+1} = y_{n-1} + 0,2\, v_n$

t	y	v	cos y	sin y
0	1	0	1	0
0,1	1	-0,1	0,995	0,0998
0,2	0,98	-0,2	0,980	0,1987
0,3	0,96	-0,296	0,955	0,2955
0,4	0,9208	-0,392	0,92106	0,3894
0,5	0,8816	-0,48016	$\cos(0,5) \approx 0,877582561$	0,4794

$Er = \cancel{0,0232174438}$ $0,0040174438$

(13)

$y'' = -a \quad y(0) = y_0, \; y'(0) = v_0$

a) $\frac{dv}{dt} = -a \qquad$ b) T-C $\quad v(t+h) = v(t) + \frac{h}{2}(-a + -a) = v(t) - ha$

$\frac{dx}{dt} = v \qquad x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}(v(t) + v(t+h))$

$\cancel{x = x_0 + \frac{v_0}{2} t \quad \text{falta} \quad \frac{1}{2}(v_0 + v_n) t}$

$\cancel{= x_0 + (v_0 - at) \cdot \frac{t}{2} = v_0 t \quad x_0 + \frac{v_0}{2} t - \frac{1}{2} a t^2}$

$v(t+h) = v(t) - ah$ ✓

$\hookrightarrow x = x(t) + \frac{h}{2}(2v(t) - ah) = x(t) + v(t) \cdot h - \frac{1}{2} a t^2$

Error = 0

NOTE BOOK

(14)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \sin(t) \qquad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

a) $\frac{dx}{dt} = v$

$\frac{dv}{dt} = \sin(t) - x - v$

b) $h = 0{,}1$

$v_1 = 0{,}1 \cdot (\sin 0 - 1 - 0) = -0{,}1$

$x_1 = 1 + 0{,}1 \cdot 0 = 1$

$v_2 = -0{,}1 + 0{,}1 \cdot (\sin 0{,}1 - 1 + 0{,}1) = -0{,}180016658$ //

$x_2 = 1 + 0{,}1 \cdot (-0{,}1) = 0{,}99$ //

c)

$v(0{,}1) = v(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$x(0{,}1) = x(0) + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$

$k_1 = 0{,}1 \cdot (-1) = -0{,}1 \qquad l_1 = 0{,}1 \cdot 0 = 0$

$k_2 = 0{,}1 \cdot (\sin 0{,}05 - (1 + \frac{0{,}1}{2}) - 0 \qquad l_2 = 0{,}1 \cdot (0)$

$= -0{,}100002083 - 0{,}000002083 \qquad l_3 = 0$

$k_3 = 0{,}1 (\sin 0{,}05 - (1 + \frac{\quad}{2}) - (0 \qquad l_4 = 0$

$= 0{,}090501978$

$k_4 = -0{,}085431559$

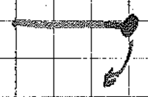
$v(0{,}1) = \cancel{0{,}50891678} \; -0{,}09108328 \qquad x(0{,}1) = 1$ zpm.

(15)

$m = 1\,kg$

$l = 1\,m$

$90°$



$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$

$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

$$m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = -mg\sin\theta \to \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$ $\qquad \theta(0) = \pi/2$

$\qquad\qquad \omega(0) = 0$

$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta = -g\sin\theta$

b) $h = 0,1\,s$

$\omega_1 = \cancel{\omega_0}^{0} + 0,1\cdot(-g) = -0,1g = -0,981$ $\qquad \theta_1 = \pi/2 + 0,1\cdot\cancel{\omega_0} = \pi/2$

$\omega_{n+1} = \omega_{n-1} + 0,2\cdot f_n$ $\qquad \theta_{n+1} = \theta_{n-1} + 0,2\,\omega_n$

$\omega_2 = 0 + 0,2\cdot(-g) = -0,2g = -1,962$ $\qquad \theta_2 = \pi/2 + 0,2(-0,1g)$

$= 1,374596327$

$\omega_3 = -0,981 - 0,2\cdot g\cdot\sin 1,3\ldots = -2,905357938$

$\theta_3 = \pi/2 + 0,2\cdot(-1,962) = 1,178396327$

$T = \frac{1}{2} m l^2 \omega_3^2 \cancel{mgl\cos\theta_3} = (0,463\,138726) = \cancel{mgl\cos\theta}\; mgl$

$+ mgl(1-\cos\theta_3)$

↳ $\frac{1}{2}\omega_3^2 - g\cos\theta_3 =$ $\qquad$ Er. integr. $\approx 10\%$