PROBLEMAS T. 1

1.1

$$\phi = 0, \quad \vec{A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qt}{r^2} \cdot \hat{r}$$

a) Calcular los campos, las cargas y las corrientes correspondientes a este potencial vector.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$$

} Es una carga puntual
↳ potenciales "raros", singularidades

↳ $\rho(\vec{r},t) = q\cdot\delta(\vec{r})$; $\vec{J} = \vec{0}$ ya que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)}_{4\pi\delta(\vec{r})} = \rho/\varepsilon_0$

¿Satisface contr. de Coulomb/Lorentz?

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = -\frac{qt}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}) \neq 0 \rightarrow \text{NO C. Coul.}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\cancel{\frac{\partial\phi}{\partial t}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \neq 0 \rightarrow \text{NO c. Lorentz}$$

} en $\vec{r}=0$ no se cumple

b) Dada esta transformación $\psi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r}$ de contraste, calcular los nuevos potenciales y discutir el resultado

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi = -\frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} - \frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)}_{-\hat{r}/r^2} = \vec{0}$$

} cumplen C. Lorentz + Coulomb

↙ Para sacar ψ si no te lo diesen

$$\nabla^2\psi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{qt\,\delta(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Rightarrow \text{Solución por ec. de Poisson}$$

Si $\nabla^2\phi = -\frac{\overbrace{q\cdot\delta(\vec{r})}^{\rho(\vec{r})}}{\varepsilon_0} \rightarrow_{y} \phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ → Análogamente: $\psi = -\frac{qt}{4\pi\varepsilon_0 r}$

1.2

Suponemos que en un cierto contraste, los potenciales vienen dados por: $\phi = 0$; $\vec{A} = A_0 \operatorname{sen}(Kx - \omega t)\hat{y}$. Calcular los campos y testear que se cumplen las ecuaciones de Maxwell. ¿Qué condición debe satisfacer $\omega(K)$ para que se cumplan las E.M? ¿Qué contraste satisfacen estos potenciales? → $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ → Con. Coulomb
→ $\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{1}{c^2} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ → C. Lorentz ⇓ satisface ambos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = A_0\omega\cos(Kx - \omega t)\hat{y}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = A_0 K\cos(Kx - \omega t)\hat{z} \qquad (B_i = u_i\,\epsilon_{ixy}\,\partial_x A_y)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -A_0\omega K\operatorname{sen}(Kx - \omega t)\hat{z} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -A_0 K\omega\sin(Kx-\omega t)\hat{z} \checkmark$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \checkmark$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \hat{y}\,(-)\cdot(-)A_0K^2\sin(Kx - \omega t) = \mu_0\cancel{\vec{J}}^{=0} + \overbrace{\mu_0\varepsilon_0}^{1/c^2} A_0\omega^2\sin(Kx - \omega t)\hat{y}$$

Para que se cumplan E.M → $K^2 = \omega^2/c^2 \rightarrow \omega = cK$

(1.3)

Tenemos un hilo metálico (conductor) filiforme (sección despreciable), rectilíneo e indefinido por el que circula una corriente

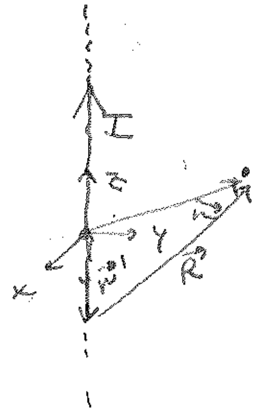
$$I = I(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ I_0, & t \geq 0 \end{cases} \quad ; \; I_0 = \text{cte}$$

Calcular los potenciales (a) y campos generados (b) por este hilo.

No es DC $\left(\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\varphi\right)$!

a) $\rho = 0$ (metal)

$\hookrightarrow \phi = 0$



$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I(\vec{r}\,',t_r)\cdot d\vec{l}\,'}{R}$$

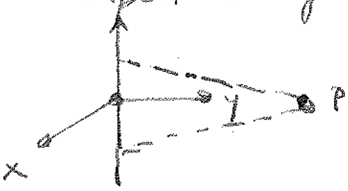
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int \frac{I(t-R/c)\cdot dz'}{R}$$ ...... cilíndricas

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = r\,\hat{u}_r + (z-z')\,u_z$$

$$R^2 = r^2 + (z-z')^2$$

Al ser ∞ en z, elegimos $z=0$ para simplificar y sin pérdida de generalidad.

$$R^2 = r^2 + z'^2$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \hat{z}}{4\pi}\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(t_r)}{(r^2+z'^2)^{1/2}}\,dz'$$

...... función escalón

$I(t_r) \neq 0$ si $t_r > 0 \rightarrow t - \frac{R}{c} > 0$ porque $I(t_r') = I_0\cdot\theta(t_r) = I_0\,\theta\!\left(t-\frac{R}{c}\right)$

$\hookrightarrow$ Límites: $t = \frac{R_{max}}{c} \rightarrow c^2t^2 = r^2 + z'^2_{max} \rightarrow z'_{max\pm} = \pm\sqrt{c^2t^2 - r^2}$

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{4\pi}\int_{z'_{max-}}^{z'_{max+}} \frac{dz'}{(r^2+z'^2)^{1/2}} \overset{\text{simétrico}}{=} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{z}\int_0^{\sqrt{c^2t^2-r^2}} \frac{dz'}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{z}\left[\ln\left(z' + \sqrt{r^2+z'^2}\right)\right]_0^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{z}\left[\ln\left(\sqrt{(ct)^2-r^2} + ct\right) - \ln r\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{z}\,\ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}\right)$$

b) $$\vec{E}(r,t) = -\cancelto{0}{\vec{\nabla}\phi} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\hat{z}\,\frac{\cancel{r}\cdot 1/\cancel{r}}{ct + \sqrt{(ct)^2-r^2}}\left(c + \frac{1\cdot \cancel{2}c^2t}{\cancel{2}\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi}\hat{z}\,\frac{1}{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}\cdot\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2-r^2}}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\right) = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi}\hat{z}\,\frac{1}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}$$

$$\vec{B} = \underset{\text{cilíndricas}}{\vec{\nabla}\times\vec{A}} = \left(\frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial A_z}{\partial\phi}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}}\right)\hat{u}_r + \hat{u}_z\frac{1}{r}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}}\right) + \hat{u}_\varphi\left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial z}} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)$$

$$= -\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{u}_\varphi = -\hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\,\frac{r}{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}\cdot\left(\frac{r\frac{1}{2}\left((ct)^2-r^2\right)^{-1/2}\cdot(-2r) - 1\cdot\left(ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}\right)}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{\varphi}\left(\frac{-r^2\cdot((ct)^2-r^2)^{-1/2} - ct - \sqrt{(ct)^2-r^2}}{((ct)^2-r^2)^{1/2}+ct}\right)$$

$$= +\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{\varphi}\left(\frac{\cancel{r^2} + ct\,((ct)^2-r^2)^{1/2} + (ct)^2 - \cancel{r^2}}{\left(ct+((ct)^2-r^2)^{1/2}\right)\cdot\left((ct)^2-r^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{\varphi}\cdot ct\underbrace{\left(\frac{\cancel{ct+((ct)^2-r^2)^{1/2}}}{\cancel{ct+((ct)^2-r^2)^{1/2}}}\right)}_{1}\cdot\frac{1}{((ct)^2-r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0\cdot ct}{2\pi r\cdot\sqrt{(ct)^2-r^2}}\hat{\varphi} \quad \to \quad t\to\infty$$

(no hay transitorio → DC)
lo recuperas Ley de Biot-Savart

También se pueden calcular campos directamente, sin pasar por los potenciales, mediante las ecuaciones de Jefimenko.

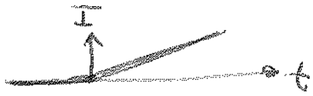
c) Comprobar que se cumple el contraste de Lorentz

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\to 0} = 0$ $(\phi=0)$

$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{\text{cilíndricas}} = 0+0+\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$ (no dependencia en z → ∞)

Por tanto se cumple. ✓

(1.4) Repetir el 1.3 para



$$I(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \alpha t, & t\geq 0, \quad \alpha = \text{cte}\end{cases}$$

a) $\phi = 0$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\hat{z}}{4\pi}\int_{z'_-}^{z'_+}\frac{\alpha\,(t-R/c)}{(r^2+z'^2)^{1/2}}\,dz' = \frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{4\pi}\left[\int_{z'_-}^{z'_+}\frac{t\,dz'}{(r^2+z'^2)^{1/2}} - \int_{z'_-}^{z'_+}\frac{dz'}{c}\right]\theta\left(t-\frac{R}{c}\right)$$

ver 1.3 — función escalón implícita

$$= \frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{4\pi}\left[2t\cdot\ln\left(\frac{ct+((ct)^2-r^2)^{1/2}}{r}\right) - \frac{1}{c}\,2\sqrt{(ct)^2-r^2}\right]$$

Supones siempre $t_r > 0$
↳ Si no → $=0$ todo (no llega I)

$$= \frac{\mu_0\alpha t\hat{z}}{2\pi}\cdot\left[\ln\left(\frac{ct+((ct)^2-r^2)^{1/2}}{r}\right) - \frac{1}{ct}\cdot\sqrt{(ct)^2-r^2}\right]$$

b) $$\vec{E} = 0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{2\pi}\left[\ln(\ ) + t\cdot\frac{\cancel{r}}{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}\cdot\left(c+\frac{1}{2\sqrt{\ }}\cdot 2c^2t\right) - \frac{1\cdot 2c^2t}{2c\sqrt{\ }}\right]$$

$$= -\frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{2\pi}\left[\ln(\ ) + \frac{ct}{ct+\sqrt{\ }}\,\frac{(\sqrt{\ }+ct)}{\sqrt{\ }} - \frac{ct}{\sqrt{\ }}\right] = -\frac{\mu_0\alpha\hat{z}}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}\right)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \underset{\text{cil.}}{=} -\hat{\varphi}\,\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\hat{\varphi}\,\frac{\mu_0\alpha t}{2\pi}\left[\frac{r}{ct+\sqrt{\ }}\underbrace{(\ldots)}_{1.3} - \frac{1}{ct}\,\frac{1}{2\sqrt{\ }}(-2r)\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}(+\hat{\varphi})\left[\frac{ct}{r\sqrt{\ }} - \frac{r/ct}{\sqrt{\ }}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat{\varphi}\cdot\frac{1}{r\,ct\sqrt{\ }}\cdot\left((ct)^2-r^2\right)$$

$$= \frac{\mu_0\alpha\hat{\varphi}}{2\pi r c}\sqrt{(ct)^2-r^2} \qquad t\to\infty \to \infty$$

c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ → Se cumple el contr. Lorentz y el de Coulomb también

(1.5) Repetir 1.3 para

$I = I_0 \, \delta(t)$, $I_0 = cte$ $\qquad z'_\pm = \pm\sqrt{(ct)^2 - r^2}$

a) $\rho = 0 \rightarrow \phi = 0$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{z'_-}^{z'_+} \frac{\delta(t - R/c)}{(r^2 + z'^2)^{1/2}} \cdot dz' \Rightarrow \delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\delta(x - x_i')}{\left|\frac{dg}{dx}\right|_{x = x_i'}}$$

$g(x_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots M$

$$t - \frac{R_i}{c} = g(z_i') = 0$$

$$c^2 t^2 = R_i^2 \rightarrow c^2 t^2 = z_i'^2 + r^2 \rightarrow \begin{array}{l} z_1' = z'_+ \\ z_2' = z'_- \end{array}$$

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{1 \cdot 2z}{2\sqrt{z^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{c} = -\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\delta\left(t - \frac{R}{c}\right) = \frac{\delta(z' - z'_+)}{\left|-\frac{z'_+}{c}(r^2 + z_+'^2)^{-1/2}\right|} + \frac{\delta(z' - z'_-)}{\left|-\frac{z'_-}{c}(r^2 + z_-'^2)^{1/2}\right|}$$

$z'_- = z'_+ \cdot (-1)$

$$\hookrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}}{4\pi}\left[\frac{c\,(r^2 + z_+'^2)^{1/2}}{|z'_+|(r^2 + z_+'^2)^{1/2}} + \frac{c\,(r^2 + z_-'^2)^{1/2}}{|z'_-|(r^2 + z_-'^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \hat{z}\, c}{2\pi |z'_+|} = \frac{\mu_0 I_0 c\, \hat{z}}{2\pi\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \quad //$$

b) $$\vec{E} = 0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi}\hat{z}\left(-\frac{1}{2}\right)\left((ct)^2 - r^2\right)^{-3/2} \cdot 2c^2 t$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 c^3 t\, \hat{z}}{2\pi\left((ct)^2 - r^2\right)^{3/2}} \rightarrow \text{NO es una onda}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{\varphi} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi}\hat{\varphi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left((ct)^2 - r^2\right)^{-3/2} \cdot (-2r)$$

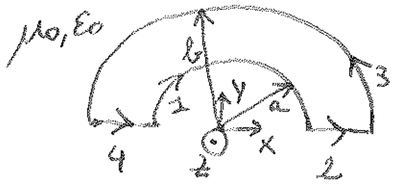
$$= -\frac{\mu_0 I_0 c r}{2\pi}\left((ct)^2 - r^2\right)^{-3/2} \cdot \hat{\varphi} \quad //$$

c) Cumplen C. de Lorentz

1.6

Tenemos una corriente filiforme (en un hilo conductor) que tiene la siguiente forma:

$$I = I(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \alpha t & t\geq 0 \end{cases}$$



Calcular ϕ, $\vec{A}$ y $\vec{E}$ en el punto de coordenadas $(0,0,0)$.

$\rho = 0$ (conductor perfecto) $\rightarrow \phi = 0$ //

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I(\vec{r}\,', t_r)\cdot d\vec{l}\,'}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{\alpha t_r'\, d\vec{l}\,'}{R}$$

$\vec{r} = (0,0,0) \rightarrow R = r'$, $\vec{R} = -\vec{r}\,'$; $\vec{r}_1 = a\cdot\hat{u}_r$, $r_2 \in [a,b]$, $r_3 = b$, $r_4 \in [a,b]$

camino cerrado

$$\hookrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0\alpha}{4\pi}\int \frac{t - r'/c}{r'}\, d\vec{l}\,' = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 \;;\; \vec{A}_0 = \frac{\mu_0\alpha}{4\pi}\oint \frac{(-r'/c)}{r'}\, d\vec{l}\,' = 0$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0\alpha}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{t}{a}\cdot a\cdot d\varphi\,(-\hat{\varphi}) = -\frac{\mu_0\alpha}{4\pi}(t)\cdot\left[\int_0^{\pi} -\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, \hat{x} + \cos\varphi\, d\varphi\, \hat{y}\right]$$

$$= -\frac{\mu_0\alpha}{4\pi}(t)\cdot\left[\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\hat{x} + \operatorname{sen}\varphi\Big|_0^{\pi}\hat{y}\right] = -\frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\cdot[-1-1] = \frac{\mu_0\alpha t}{2\pi}$$

$|x'| = x' \in [a,b] > 0$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\int_a^b \frac{1}{|x'|}\cdot\hat{u}_x\, dx' = \frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\hat{x}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

ver $\vec{A}_1$

$$\vec{A}_3 = \frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{b\, d\varphi}{b}(\hat{\varphi}) = \frac{\mu_0\alpha t}{2\pi}\hat{\varphi} = -\vec{A}_1$$

$y' \equiv -x'$

o bien $\ln\left(\frac{1}{x'}\right)$

o bien $\int_b^a (-)\frac{dy'}{y'} = \int_a^b \frac{dy'}{y'} = \ln\frac{b}{a}$

$$\vec{A}_4 = \frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\int_{-b}^{-a} \frac{1}{|x'|}(+\hat{x})\, dx' = \hat{x}\frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}(-)\int_{-b}^{-a}\frac{dx'}{x'} = -\hat{x}\frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{-a}{-b}\right)$$

$x' < 0 \rightarrow |x'| = -x'$

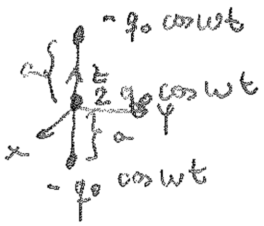
$$= \frac{\mu_0\alpha t}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x} = \vec{A}_2$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_2 + \vec{A}_4 + \vec{0} = 2\vec{A}_2 = \frac{\mu_0\alpha t}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{x}$$ //

$$\vec{E} = -\underbrace{\nabla\phi}_{0} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$ //

No puedes calcular $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ porque sólo conoces $\vec{A}(0,0,0,t)$ y necesitarías en todo $\mathbb{R}^3$ → o bien con ecs. de Jefimenko.
↳ conocerlo/calcularlo

(1.7) Calcular la potencia radiada y la distribución angular de potencia del cuadrupolo lineal de la figura



Cilíndricas

$Q_{total} = 0 \to$ dipolos se cancelan $\to \nexists\, p_{el}$

Tampoco hay momento magnético por simetría (demo complicada)

↳ Sólo habrá Q_{el}

$$\tilde{Q}_{ij} = \left(3x_{mi}x_{mj} - r_m^2\delta_{ij}\right)\tilde{q}_m$$

$-q_0\cos\omega t = q_1 \to \vec{r}_1 = (0,0,a)$; $\tilde{q}_1 = -q_0$

$2q_0\cos\omega t = q_2 \to \vec{r}_2 = \vec{0}$; $\tilde{q}_2 = 2q_0$

$-q_0\cos\omega t = q_3 \to \vec{r}_3 = (0,0,-a)$; $\tilde{q}_3 = -q_0$

$$\tilde{Q}_{xx} = -r_m^2\,\tilde{q}_m = (-)\,2q_0a^2 = 2q_0a^2$$

$$\tilde{Q}_{yy} = \tilde{Q}_{xx}$$

$$\tilde{Q}_{xy} = \tilde{Q}_{yx} = \tilde{Q}_{zx} = \tilde{Q}_{xz} = \tilde{Q}_{yz} = \tilde{Q}_{zy} = 0$$

$$\tilde{Q}_{zz} = (3a^2 - a^2)(-2q_0) = -4a^2q_0$$

$$Q = 2a^2q_0\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_{rad_Q} = \frac{\mu_0\omega^6}{1440\pi c^3}\,\tilde{Q}_{mn}\cdot\tilde{Q}_{mn}^{*} = \frac{\mu_0\omega^6}{1440\pi c^3}\,4\cdot a^4q_0^2\,(1+1+4)$$

$$= \frac{\mu_0\omega^6}{60\pi c^3}\,a^4q_0^2 \;//$$

$$\frac{dP_{rad_Q}}{dS_r} = \vec{N}_{Qrad}\cdot\hat{r} = \underbrace{\frac{\omega^6\mu_0}{1152\pi^2c^3}\cdot\frac{1}{r^4}}_{\alpha}\left[\tilde{Q}_{ij}\tilde{Q}_{im}^{*}x_jx_m - \frac{1}{r^2}\underbrace{\tilde{Q}_{ij}\tilde{Q}_{mn}^{*}x_ix_jx_mx_n}_{\tilde{Q}_{mm}}\right]$$

matriz diagonal

$$= \alpha\left[\tilde{Q}_{ii}\tilde{Q}_{ii}^{*}x_i^2 - \frac{1}{r^2}\tilde{Q}_{ii}\tilde{Q}_{mm}^{*}x_i^2x_m^2\right]$$

$$= \alpha\left[4a^4q_0^2(x^2+y^2+4z^2) - \frac{1}{r^2}\cdot(Q_{ii}x_i^2)^2\right]$$

$$= \underbrace{\alpha\,4a^4q_0^2}_{\beta}\left[x^2+y^2+4z^2 - \frac{1}{r^2}(x^2+y^2-2z^2)^2\right]$$

$$= \beta\left[x^2+y^2+4z^2 - r^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)^2\right] \qquad z = r\cos\theta$$

$$= \beta\left[r^2+3z^2 - r^2\left(1-3\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)^2\right] = \beta\left[r^2+3z^2 - r^2(1-3\cos^2\theta)^2\right]$$

$$= \beta\left[r^2+3z^2 - r^2(1-6\cos^2\theta+9\cos^4\theta)\right] = \beta\left[3r^2\cos^2\theta + 6r^2\cos^2\theta\right.$$

$$\left.- 9r^2\cos^4\theta\right] = 9\beta r^2\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) = 9\beta\cos^2\theta\sin^2\theta$$

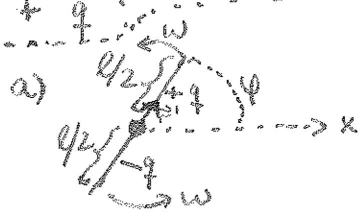
$$= \frac{\mu_0\omega^6}{\pi^2c^3}\cdot\frac{a^4q_0^2}{32}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\sin^2\theta\cos^2\theta \;// \;\to 4 \text{ lóbulos}$$

Se comprueba que $\int\left(\frac{dP_{rad_Q}}{dS_r}\right)\cdot dS_r = \int \blacktriangle\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = P_{rad}$ //

↳ Haciendo cambio de variable $\cos\theta = t$ //

(1.8) Una varilla delgada de longitud l, con carga $+q$ repartida uniformemente en una mitad y $-q$ en la otra, gira con $\omega = \text{cte}$ alrededor de un eje que pasa por su centro. a) Calcular la potencia radiada en la aproximación dipolar eléctrica. b) ¿Cómo cambia el resultado si toda la varilla tiene carga $+q$?

a)



$\varphi = \varphi(t) = \omega t$

$\vec{r}\,' = r'\hat{r}' = r'(\underbrace{\cos(\omega t)\hat{x} + \text{sen}(\omega t)\hat{y}}_{\hat{r}'})$

con $r' \in [-l/2, l/2]$

$\vec{m}_p = \int_{l'} \vec{r}\,'(t)\rho_e(\vec{r}\,')\,dl' \overset{Q_T = 0}{=} Q_{T+}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\left(\frac{l}{4}\hat{r}' - \left(-\frac{l}{4}\right)\hat{r}'\right)$ → centros de carga

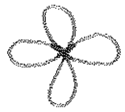
$= q\frac{l}{2}\cdot\hat{r}' = q\cdot\frac{l}{2}(\cos\omega t\,\hat{x} + \text{sen}\,\omega t\,\hat{y}) = \vec{m}_{p1} + \vec{m}_{p2}$

$\tilde{\vec{m}}_{p1} = q\frac{l}{2}\hat{x}$; $\tilde{\vec{m}}_{p2} = q\cdot\frac{l}{2}\hat{y}\cdot e^{-j\pi/2}$ → fasores

$\vec{m}_{p1} = \text{Re}\{\tilde{\vec{m}}_{p1}e^{j\omega t}\} = q\frac{l}{2}\hat{x}\cos\omega t$ ✓

$\vec{m}_{p2} = \text{Re}\{\tilde{\vec{m}}_{p2}e^{j\omega t}\} = q\frac{l}{2}\hat{y}\cos(\omega t - \pi/2) = q\cdot\frac{l}{2}\hat{y}\sin\omega t$ ✓

Giro mecánico de la varilla → genera oscil. armónica dipolos



planos $\perp$, desfasados $\pi/2$

$P_{rad} = P_{rad1} + P_{rad2}$ → Al ser $\perp$ ($\hat{x} \perp \hat{y}$) → no acoplan

$$P_{rad} = \frac{\mu_0\omega^2}{12\pi c}\left(\|\tilde{\vec{m}}_{p1}\|^2 + \|\tilde{\vec{m}}_{p2}\|^2\right) = \frac{\mu_0\omega^2}{12\pi c}q^2\frac{l^2}{4}(1 + 1)$$

$$= \frac{\mu_0\omega^2 q^2 l^2}{24\pi c}$$

b) $Q_T \neq 0$

$\vec{m}_p(t) = \int_{V'} \vec{r}\,'\rho_e(\vec{r}\,')\cdot dV' = \frac{q}{l}\int_{-l/2}^{+l/2} r'\hat{r}'\cdot dr' = 0$ (por simetría)

$\vec{m}_m(t) = \frac{1}{2}\int_{V'} \vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,')dV = \frac{1}{2}\int r'\hat{r}'\times\lambda\cdot dr'\cdot\vec{v}\,'$

$= \frac{q}{2l}\int r'dr'\,\hat{r}\times\omega r'\hat{\varphi} = \frac{q\omega}{2l}\hat{z}\int_{-l/2}^{l/2} r'^2dr' = \frac{q\omega}{l}\hat{z}\cdot\frac{(l/2)^3}{3} = \frac{q\omega l^2}{24}\hat{z}$

→ Momento dipolar constante, representa una corriente estacionaria (DC), no oscila, ($\omega' = 0$) $\neq \omega$, por tanto no radia.

(1.9) Sea una esfera hueca centrada en el origen de un sistema de referencia. La carga Q está repartida uniformemente sobre su superficie. El radio a de la esfera varía de esta forma: $a = a(t) = a_0 (r_0 + \sin\omega t)$, dando así lugar a una oscilación electromagnética. Calcular la potencia radiada por esta esfera.

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

Si radia → en 1ª aproximación : dipolo

$$\vec{m}_p(t) = \int_{S'} \vec{r}'(t)\,\sigma(t)\,dS' = \int_{S'} a(t)\hat{u}_r' \cdot \frac{Q}{4\pi a^2(t)} a^2(t)\cdot d\theta' d\varphi' \sin\theta'$$

$$= \frac{a(t)Q}{4\pi}\int_S \hat{u}_r' \sin\theta' d\theta' \cdot d\varphi' \quad = 0 \text{ por simetría}$$

$$\vec{m}_m = \frac{1}{2}\int \vec{r}' \times \vec{J}\cdot dV \quad ; \quad \vec{J} = \frac{d}{dt}(\sigma)\,\hat{u}_r'$$

$$= \frac{1}{2}\int a(t)\cdot \hat{u}_r' \times \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\cdot \hat{u}_r' \cdot r'^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi' dr' = 0$$

$r' = a(t)$; $dr' = a_0\omega\cos\omega t\, dt$

Por tanto no radia.

Otra manera de verlo es calculando con tma. de Gauss $\vec{E}$ fuera de la esfera (donde hipotéticamente habría radiación):

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q/\varepsilon_0 \longrightarrow \vec{E} = E(r)\cdot \hat{u}_r \quad \text{(simetría)}$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r \quad \text{(similar a carga puntual)}$$

⟹ NO es un campo de radiación

$$\vec{B} \overset{\text{Jefimenko}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)\times\vec{R}}{R^3}\cdot dV' + \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_{V'}\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r')\times\vec{R}}{R^2}dV' \quad ; \quad \vec{R} = r\hat{u}_r - r'\hat{u}_r'$$

$$\left(= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{K}\times\vec{R}}{R^3}\cdot dS' + \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_{S'} \frac{\dot{\vec{K}}'(t_r')\times\vec{R}}{R^2}dS' \right)$$

$$\vec{J}'(t) = \frac{d\sigma}{dt}\cdot\hat{u}_r'$$

$$\vec{J}'\times\vec{R} = r\frac{d\sigma}{dt}\cdot\hat{u}_r\times\hat{u}_r' + 0$$

$$\dot{\vec{J}}'(t_r) = \left.\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right|_{t=t_r'}\cdot\hat{u}_r'$$

$$= -\frac{\mu_0 r}{4\pi}\cdot\left(\int \frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{1}{R^3}\hat{u}_r' d\theta' d\varphi' \sin\theta'\right)\times\hat{u}_r\ldots + \vec{B}_{rad}$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\left.\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right|_{t=t_r'}\left(\int \frac{\hat{u}_r' d\theta' d\varphi' \sin\theta'}{R^2}\right)\times r\hat{u}_r$$

→ Lejos de la esfera, $R \approx r = cte$

$$\vec{B}_{rad} = ctes\left(\int \hat{u}_r' d\theta' d\varphi' \cdot \sin\theta'\right)\times\hat{u}_r$$

⟹ $= 0$ por simetría

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\sigma}{dt}\frac{1}{r^2}\left(\int \hat{u}_r' d\theta' d\varphi' \sin\theta'\right)\times\hat{u}_r \quad \text{por simetría}$$

⟹ $= 0$

$\vec{B} = 0$ → Lógico: desde lejos se ven mismos campos que para una carga puntual.

(1.10) → Ver en hoja aparte la resolución

↳ Sea un anillo de radio a centrado de referencia cartesiano en el plano XY. Sobre el anillo hay una densidad lineal de carga, dada por $\rho_\ell = F\sin^2\varphi$, $F = \text{cte} > 0$. El anillo gira con velocidad angular ω alrededor del eje z.

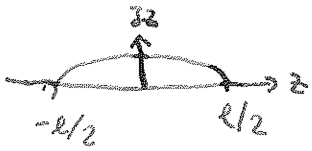
a) Calcular la potencia radiada en la aproximación dipolar eléctrica y magnética

b) Repetir (a) si $\rho_\ell = F\sin\varphi$

(1.11)

Calcular el diagrama de radiación y la potencia radiada por una antena lineal de longitud ℓ cuya distribución de corriente filiforme viene dada por:

$\vec{J} = J_z\hat{z}$; $J_z = J_0 \sin\left(K\frac{\ell}{2} - K|z'|\right)\cdot\cos(\omega t)$



$\vec{r}\,' = z'\hat{z}$; $z' \in \left[-\ell/2, \ell/2\right]$; $\vec{r} = \rho\,\hat{u}_r + z\hat{z}$ (cilíndricas)

↳ $r' = z'$; $\rho^2 = x^2+y^2$; $r^2 = \rho^2 + z^2$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = \rho\,\hat{u}_r + (z - z')\,\hat{u}_z$

Sólo vale 1ª aproximación $r \gg \ell$, pero no $\lambda \gg \ell$

↳ $e^{-jKR} = e^{-jKr}\, e^{-jK(R-r)} \underset{r\gg r'}{\simeq} e^{-jKr}\, e^{-jKr\frac{1}{2}\eta}$

con $\eta = \underbrace{\frac{r'^2}{r^2}}_{\approx 0} - \frac{2r'}{r}\cos\theta = -\frac{2r'}{r}\cos\theta$ (θ fijo, $r' \to 0$) $\longrightarrow e^{-jKR} = e^{-jKr}\, e^{jKr'\cos\theta}$; $\frac{1}{R} \sim \frac{1}{r}$

$$\hookrightarrow \tilde{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{e^{-jKR}}{R}\,\tilde{\vec{J}}\cdot d\vec{\ell} \simeq \frac{\mu_0 J_0\hat{z}}{4\pi}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz'\,\frac{e^{-jKr}\,e^{jKr'\cos\theta}}{r}\sin\left(K\left(\frac{\ell}{2} - |z'|\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0\hat{z}}{4\pi}\cdot\frac{e^{-jKr}}{r}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz'\,\sin\left(K\left(\frac{\ell}{2} - |z'|\right)\right)\cdot e^{-jKz'\cos\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0\hat{z}\,e^{-jKr}}{4\pi\, r}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz'\,\frac{1}{2j}\left[e^{jK\left(\frac{\ell}{2} - |z'| - z'\cos\theta\right)} - e^{-jK\left(\frac{\ell}{2} - |z'| + z'\cos\theta\right)}\right] dz'\,\hat{z}$$

$z' < 0 \to |z'| = -z'$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{8\pi j}\,\frac{e^{-jKr}}{r}\,\hat{z}\left[\int_0^{\ell/2} e^{jK\left(\frac{\ell}{2} - z'(1+\cos\theta)\right)}dz' + \int_{-\ell/2}^{0} e^{+jK\left(\frac{\ell}{2} + z'(1-\cos\theta)\right)}dz'\right.$$

$$\left. - \int_0^{\ell/2} e^{-jK\left(\frac{\ell}{2} - z'(1-\cos\theta)\right)}dz' - \int_{-\ell/2}^{0} dz'\,e^{-jK\left(\frac{\ell}{2} + z'(1+\cos\theta)\right)}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\,\frac{e^{-jKr}}{r}\,\hat{z}\cdot\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{-jK(1+\cos\theta)}\left(e^{-jK\frac{\ell}{2}\cos\theta} - e^{jK\frac{\ell}{2}}\right) + \frac{1}{jK(1-\cos\theta)}\left(e^{jK\frac{\ell}{2}} - e^{jK\frac{\ell}{2}\cos\theta}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1\cdot\left(e^{jK\frac{\ell}{2}\cos\theta} - e^{-jK\frac{\ell}{2}}\right)}{+jK(1-\cos\theta)} - \frac{1\cdot\left(e^{-jK\frac{\ell}{2}} - e^{jK\frac{\ell}{2}\cos\theta}\right)}{-jK(1+\cos\theta)}\right] \ldots$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{2jr}\hat{z}\left[\frac{2\cdot[\cos(k\frac{\ell}{2}\cos\theta)-\cos(k\ell/2)]}{-jk(1+\cos\theta)}+\frac{2\cdot[\cos(k\ell/2)-\cos(k\ell/2\cos\theta)]}{jk(1+\cos\theta)}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\hat{z}\;\frac{1}{k}\left[\cos\left(k\frac{\ell}{2}(\cos\theta)\right)-\cos\left(k\frac{\ell}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{kr}\cdot\hat{z}\left(\cos\left(\frac{k\ell}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{k\ell}{2}\right)\right)\left(\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{kr}\hat{z}\cdot\frac{\left(\cos\left(\frac{k\ell}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{k\ell}{2}\right)\right)}{\sin^2\theta}$$

$$\tilde{\vec{B}}_{rad} = jk\frac{\tilde{\vec{A}}\times\vec{r}}{r} = jk\,\overset{\propto\hat{z}}{\tilde{\vec{A}}}\times\frac{(z\hat{u}_z+\rho\cdot\hat{u}_\rho)}{(z^2+\rho^2)^{1/2}} = \frac{jk\tilde{A}}{r}\cdot\rho\cdot\hat{\varphi} \rightarrow \sin\theta = \rho/r$$

$$= jk\tilde{A}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$= \hat{\varphi}\cdot j\cdot\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\underbrace{\frac{\left[\cos\left(\frac{k\ell}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{k\ell}{2}\right)\right]}{\sin\theta}}_{f(\theta)} \qquad \cos\theta = z/r$$

$$\tilde{\vec{E}}_{rad} = c\cdot\tilde{\vec{B}}_{rad}\times\frac{\vec{r}}{r} = \frac{c}{r}\cdot\tilde{B}_{rad}\cdot\hat{\varphi}\times(\rho\cdot\hat{u}_r+z\cdot\hat{u}_z)$$

$$= c\,\tilde{B}_{rad}\;\hat{\varphi}\times(\sin\theta\,\hat{u}_r+\cos\theta\,\hat{u}_z)$$

$$= c\,\tilde{B}_{rad}(\cos\theta\,\hat{u}_r-\sin\theta\,\hat{u}_z)$$

$$\tilde{N}_{rad} = \frac{1}{2\mu_0}\tilde{\vec{E}}_{rad}\times\tilde{\vec{B}}_{rad}^{*} = \frac{c}{2\mu_0}\tilde{B}_{rad}(\cos\theta\,\hat{u}_r-\sin\theta\,\hat{u}_z)\times\tilde{B}_{rad}^{*}\cdot\hat{\varphi}$$

$$= \frac{c}{2\mu_0}\|\tilde{B}_{rad}\|^2(\cos\theta\,\hat{u}_z+\sin\theta\,\hat{u}_r)$$

$$= \frac{c}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 I_0^2}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\cdot f^2(\theta)\underbrace{(\cos\theta\,\hat{u}_z+\sin\theta\,\hat{u}_r)}_{=\hat{r}\text{ (esféricas)}}$$

$$= \frac{c\mu_0}{8\pi^2}I_0^2\frac{1}{r^2}f^2(\theta)\underbrace{(\sin\theta\,\hat{u}_r+\cancel{\cos}\sin\theta\,\hat{u}_z)}_{\text{cilíndricas}\rightarrow\text{cil.}}$$

$$= \frac{c\mu_0}{8\pi^2}I_0^2\frac{1}{r^2}f^2(\theta)\,\hat{r} = \frac{dP_s}{dS_r} \rightarrow P_{rad} = \int_S\vec{N}_{rad}\cdot\vec{dS} \rightarrow \text{integración numérica}$$

→ 2 configuraciones típicas

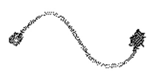
(i) Antena de media onda: $k\ell = \pi \rightarrow \ell = \lambda/2$

$$f_{\lambda/2}(\theta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

Dipolo:

(ii) Antena de onda completa: $k\ell = 2\pi \rightarrow \ell = \lambda$

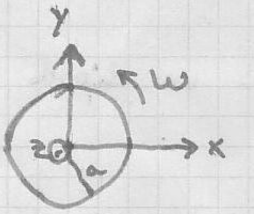
$$f_\lambda(\theta) = \frac{4\cdot\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\sin^2\theta}$$



$> \lambda \rightarrow$ Más directivo, pero menos resolución, hay que girarlo mucho

- móvil → todas direcciones ($< \lambda$)
- radar → discernir objeto, va girando ($> \lambda$)
  anticolisión

Problema a entregar



Anillo de radio a

$\rho_{lineal} = \lambda = F \sin^2 \varphi$; $F = cte, > 0$

↳ en $t=0$

Gira con W alrededor eje z.

Polares → $r = a, \varphi$ $\vec{r}'(t)$ → seguiré este procedimiento

distinguible, puedo seguir cada punto

Posición de un dl' del anillo: → en $t=0$ → $\vec{r}'_0 = a(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ ↙ $z=0$

$\vec{r}'^{\varphi_0}(t) = a\,\hat{u}_r'(t) = a\,(\cos(\varphi_0 + wt), \sin(\varphi_0 + wt)) \rightarrow \lambda = \lambda(\vec{r}')$

Una descripción equivalente sería $\vec{r}' \neq \vec{r}(t) = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$; $\lambda = \lambda(t) = F\sin^2(\varphi_0 - wt)$

→ Calcular Prad en aproximación dipolar eléctrica y magnética. Para ello calcularemos los momentos dipolares respectivos:

$$\vec{m}_p(t) = \int_{l'} \vec{r}'(t)\cdot\lambda(\vec{r}')\cdot dl' = \int_0^{2\pi} \vec{r}'(t)\cdot F\sin^2\varphi_0\cdot a\,d\varphi_0$$ → procedimiento similar al ejercicio de la varilla

↳ con la descripción equivalente sería: $\int_0^{2\pi} \vec{r}'(\varphi_0)\cdot\lambda(t)_{\varphi_0}\cdot d\varphi_0$ → procedimiento alternativo

$$= a^2 F \int_0^{2\pi} (\cos\varphi_0\cos wt - \sin\varphi_0\sin wt, \sin\varphi_0\cos wt + \cos\varphi_0\sin wt)\cdot\sin^2\varphi_0\,d\varphi_0$$

$$= \frac{\sin^3\varphi_0}{3}\Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad \int_0^{\pi} = -\int_{\pi}^{2\pi}$$

$$= a^2F\Big[\hat{u}_x\Big(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi_0\cos\varphi_0\cos wt\,d\varphi_0 - \int_0^{2\pi} d\varphi_0\sin^3\varphi_0\sin wt\Big)$$
$$+ \hat{u}_y\Big(\int_0^{2\pi}\sin^3\varphi_0\cos wt\,d\varphi_0 + \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi_0\cos\varphi_0\sin wt\,d\varphi_0\Big)\Big]$$

⇒ las cuatro integrales son cero por simetría en el intervalo $0-2\pi$.

↳ Toda la carga en el anillo es positiva → ∄ momento dipolar

$$\vec{m}_m(t) = \frac{1}{2}\int_{l'} \vec{r}'(t)\times\lambda_{(\vec{r}')}\vec{v}'\cdot dl' \; ; \; \vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = a\,W\,\underbrace{(-\sin(\varphi_0+wt), \cos(\varphi_0+wt))}_{\hat{u}_{\varphi}'}$$

; $\lambda(t,\vec{r}') = F\sin^2(\varphi_0)$; $dl' = a\,d\varphi_0$

$$\rightarrow \vec{m}_m(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 W\,\hat{u}_r'\times\hat{u}_{\varphi}'\,F\sin^2\varphi_0\,a\,d\varphi_0 = \frac{Fa^3W}{2}\hat{k}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi_0\,d\varphi_0$$

$$= \frac{Fa^3W}{2}\cdot\hat{k}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi_0\Big)d\varphi_0 = \frac{Fa^3W}{2}\cdot\pi\,\hat{k}$$

↳ Momento dipolar constante, representa una corriente estacionaria en un circuito cerrado (DC) $\vec{I}$, por tanto no radia.

↳ $\tilde{\vec{m}}_m = \frac{Fa^3W}{2}\pi\hat{k}$, con $W' = 0$ / ↳ no es movimiento armónico

$$\vec{m}_m = Re\{\tilde{\vec{m}}_m\cdot e^{jW't}\} = \frac{Fa^3W\pi\hat{k}}{2}\cdot\cos W't = \frac{Fa^3W\pi}{2}\hat{k}$$

$$Prad_m = \frac{\mu_0 \omega'^4}{12\pi c^3} \cdot \|\vec{m}_m\|^2 = 0 \quad \text{porque } \omega' = 0 \quad //$$

$Prad_{el} = 0$ porque $\tilde{\vec{m}}_p = 0$

$Prad_{total} = 0$ → Representa, a grandes distancias, un dipolo magnético (imán) de valor constante.

b) $\lambda = F \sin\varphi$ → ¿Qué cambia?

$$\vec{m}_p = a^2 F \Big[\hat{u}_x \Big(\int_0^{2\pi} \sin\varphi_0 \underbrace{\cos\varphi_0}_{\frac{1}{2}\sin 2\varphi_0} \cos\omega t \, d\varphi_0 - \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \sin^2\varphi_0 \sin\omega t \Big) + \hat{u}_y \Big(\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi_0 \cos\omega t \, d\varphi_0 + \int_0^{2\pi} \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \sin\omega t \, d\varphi_0 \Big) \Big]$$

$$= a^2 F \big[\hat{u}_x (0 - \pi \sin\omega t) + \hat{u}_y (\pi \cos\omega t + 0) \big]$$

$$= a^2 F \pi (-\sin\omega t, \cos\omega t) \rightarrow \text{corresponde a oscilación armónica}$$

↳ Otra manera de obtenerlo es con la carga total positiva y la separación entre los centros de carga.

$$\vec{m}_p = Q_{T+} \cdot (\vec{r}^+ - \vec{r}^-) \quad ; \quad Q_{T+} = \int_0^{\pi} F \sin\varphi \cdot a \, d\varphi = aF \cdot 2$$

$$\vec{r}^+ - \vec{r}^- = \frac{a}{2} (-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

- - - - - - - - -

$$\vec{m}_m = \frac{F a^3 \omega}{2} \hat{k} \int_0^{2\pi} \sin\varphi_0 \, d\varphi_0 = 0$$

$Prad_m = 0$

$$Prad_{el} = \frac{\mu_0 \omega'^2}{12\pi c} \|\tilde{\vec{m}}_p\|^2$$

$$\vec{m}_{p1} = -\pi a^2 F \sin\omega t \, \hat{u}_x \rightarrow \tilde{\vec{m}}_{p1} = \pi a^2 F \overbrace{e^{+j\pi/2}}^{j} \hat{u}_x \quad / \quad \text{con } \omega' = \omega$$

$$Re\{ \pi a^2 F e^{+j\pi/2} \cdot e^{j\omega' t} \} = \pi a^2 F \cos(\omega' t + \pi/2) = -\pi a^2 F \sin\omega' t \checkmark$$

$$\vec{m}_{p2} = +\pi a^2 F \cos\omega t \, \hat{u}_y \rightarrow \tilde{\vec{m}}_{p2} = \pi a^2 F \hat{u}_y \quad / \quad \text{con } \omega' = \omega$$

$$Re\{ \pi a^2 F e^{j\omega' t} \} = \pi a^2 F \cos\omega' t \checkmark$$

$$\hookrightarrow Prad_{tot} = Prad_{el} = \frac{\mu_0 \omega'^4}{12\pi c} \|\tilde{\vec{m}}_p\|^2 = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} \left(\|\tilde{\vec{m}}_{p1}\|^2 + \|\tilde{\vec{m}}_{p2}\|^2 \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} \pi^2 a^4 F^2 (1 + 1) = \frac{\mu_0 \omega^4 \pi a^4 F^2}{6c}$$

El sistema radia como un dipolo eléctrico en el origen que rota en el plano x-y con velocidad angular ω.

(2.1) Definimos la aceleración ordinaria de esta forma:
$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$. Demostrar que la 2ª ley de Newton relativista se puede expresar de esta forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left(\vec{a} + \frac{\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right)$$

$$\rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right) = m_0\left[\frac{\frac{d\vec{u}}{dt}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} + \frac{\vec{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2u}{c^2}\right)\cdot\frac{du}{dt}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\cdot\left[\vec{a} + \frac{\vec{u}\cdot\left(u\,\frac{du}{dt}\right)}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\right] = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left[\vec{a} + \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right] //$$

Puesto que

$$\left.\begin{aligned} d(\vec{u}\cdot\vec{u}) &= d(u^2) = 2u\,du \\ &= \vec{u}\cdot d\vec{u} + d\vec{u}\cdot\vec{u} = 2\vec{u}\cdot d\vec{u} \end{aligned}\right\} \vec{u}\cdot d\vec{u} = u\,du \rightarrow u\frac{du}{dt} = \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}\cdot\vec{a}$$

(2.2) Se define la aceleración propia como un cuadrivector en el espacio M^4: $\alpha^\mu = \frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$; $\alpha^\mu \in M^4$

a) Calcular la componente α^0 y expresar la relación entre $\vec{a}$ y $\vec{\alpha}$

b) Expresar el término $\alpha_\mu\alpha^\mu$ en función del vector $\vec{a}$

c) Demostrar la relación $\eta^\mu\alpha_\mu = 0$

d) Escribid la versión de Minkowski de la 2ª ley de Newton en términos de α^μ y evaluar el producto $K^\mu\eta_\mu = 0$

a) $$\alpha^0 = \frac{d\eta^0}{d\tau} = \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = \frac{d^2(ct)}{d\tau^2} = c\,\frac{d^2t}{d\tau^2} = c\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = c\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)$$

$$= \frac{c\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\cdot\left(-\frac{2u}{c^2}\right)\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c}\,\frac{\left(1-\frac{u}{c}\right)^{-1/2}}{\left(1-\frac{u}{c}\right)^{3/2}}\cdot u\cdot\frac{du}{dt} =$$

$$= \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^2}\cdot\overset{\text{ver 2.1.}}{\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}} = \frac{1}{c}\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^2} //$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\eta}}{d\tau} = \frac{1}{m_0}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{m_0}\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{m_0}{m_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\cdot\left(\vec{a} + \frac{\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right)$$

mom relativista; 2.1

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}\left(\vec{a} + \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right) = \frac{\gamma}{m_0}\vec{F}$$

b) $\alpha_\mu \alpha^\mu = g_{\mu\nu}\alpha^\mu\alpha^\nu = \alpha_0^2 - \|\vec{\alpha}\|^2 = \frac{1}{c^2}\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^4} - \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}\cdot\left(a^2 + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2\cdot u^2}{(c^2-u^2)^2}\right.$ — invariante, escalar, norma de un vector

$$\left. + 2\,\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{c^2-u^2}\right) = \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3\cdot(c^2-u^2)} - \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2\, u^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2(c^2-u^2)^2} - \frac{a^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} - \frac{2(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{(c^2-u^2)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{a^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2(c^2-u^2)}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{u^2}{c^2-u^2} - 2\right)$$

$$= \quad '' \quad + \quad '' \quad \cdot\left(\frac{c^2-u^2}{c^2-u^2} - 2\right) = \dots + \dots \underbrace{(1-2)}_{-1}$$

$$= \frac{-1}{(1-u^2/c^2)^2}\left(a^2 + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{c^2-u^2}\right)$$

c) $\eta^\mu \alpha_\mu = 0 = g_{\mu\nu}\eta^\mu\alpha^\nu = \eta^0\alpha^0 - \vec{\eta}\cdot\vec{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\cdot\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})\cdot 1/c}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^2}$ Ver 2.2a)

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\cdot\vec{u}\cdot\overbrace{\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(\vec{a} + \frac{\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right)}^{2.2\,a)}$$

$$= \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left(\vec{u}\cdot\vec{a} + \frac{u^2(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\cdot\left(\frac{c^2-u^2+u^2}{c^2-u^2}\right)$$

$$= \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{3/2}}\Big[\underbrace{\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} - \frac{c^2}{c^2-u^2}}_{=0}\Big] = 0$$

d) $K^\mu = m_0\alpha^\mu$

$K^\mu\eta_\mu = m_0\alpha^\mu\eta_\mu \overset{2.2\,c)}{=} 0$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0\frac{d\vec{\eta}}{dt} = m_0\frac{d\vec{\eta}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = m_0\cdot\vec{\alpha}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = m\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\vec{\alpha}$ — Masa relativista

$= m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\vec{u}\right)$

(2.3) Demostrar la igualdad $K_\mu K^\mu = \frac{-1+\frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta}{1-u^2/c^2}F^2$, donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{F}$.

$K_\mu K^\mu = m_0^2\alpha_\mu\alpha^\mu \overset{2.2\,b)}{=} \frac{-m_0^2}{(1-u^2/c^2)^2}\left(a^2 + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{c^2-u^2}\right) =$ $\vec{F} = [2.1]$

$$\left[= -\frac{m_0^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{a} + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})\cdot\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2-u^2}\right) = \frac{-m_0^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}\Big(\right]$$

$\vec{F}\cdot\vec{u} = F\cdot u\cdot\cos\theta$

2.1 $\rightarrow$ $\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\vec{a} + \frac{\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right) \Rightarrow F^2\dots$

$$F^2 = \frac{m_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(a^2 + \frac{u^2(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{(c^2-u^2)^2} + 2\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{c^2-u^2}\right) = \frac{m_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(a^2 + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2(u^2+2c^2-2u^2)}{(c^2-u^2)^2}\right)$$

$$= \frac{m_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(a^2 + \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{(c^2-u^2)^2}(2c^2-u^2)\right) \quad (*)$$

Por otro lado:

$$\vec{F}\cdot\vec{u} = F\cdot u\cdot\cos\theta = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\vec{a}\cdot\vec{u} + \frac{u^2(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right) = \frac{m_0\,\vec{u}\cdot\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{c^2-u^2+u^2}{c^2-u^2}\right)$$

$$= \frac{m_0\cdot\vec{u}\cdot\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{c^2}{c^2-u^2} \rightarrow \text{Despejamos y elevamos al cuadrado } \frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3}\cdot\frac{m_0^2}{1} = F^2u^2\cos^2\theta \quad (**)$$

$$\hookrightarrow \left(F^2 = \frac{m_0^2a^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} + (2c^2-u^2)\frac{F^2u^2\cos^2\theta}{c^4}\right)$$

$$-K_\mu K^\mu = \left[\frac{m_0^2a^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} + \frac{m_0^2(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2(c^2)}\right]\cdot\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[F^2 - \frac{m_0^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2(2c^2-u^2)}{c^4\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{m_0^2(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{c^2}\right] = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[F^2 + \frac{m_0^2(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3\cdot c^4}\left(c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) - (2c^2-u^2)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[F^2 + \frac{m_0^2(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3c^4}(-c^2)\right] \overset{(**)}{=} \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[F^2 - \frac{F^2u^2\cos^2\theta}{c^2}\right]$$

$$= \frac{F^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta\right]$$

$$\hookrightarrow K_\mu K^\mu = F^2\,\frac{-1+\frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta}{1-u^2/c^2}$$

(*) (página siguiente)

2.4 Una partícula de masa m_0 y carga q está sometida a la acción de un campo electromagnético E y B. Si la fuerza que se ejerce sobre la partícula es la fuerza de Lorentz, demostrar que la aceleración relativista sobre la partícula viene dada por esta expresión:

$$\vec{F} = q\cdot(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m_0}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} - \vec{u}\,\frac{(\vec{u}\cdot\vec{E})}{c^2}\right)$$

Partimos de 2.1)

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \cdot \left[\vec{a} + \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}\right] \longrightarrow \vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left(\vec{a}\cdot\vec{u} + \vec{a}\cdot\vec{u}\cdot\frac{u^2}{c^2-u^2}\right)$$

Despejamos $\vec{a}$:

$$= \frac{m_0\,\vec{a}\cdot\vec{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{m_0}\vec{F} - \frac{\vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\vec{a})}{c^2-u^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{m_0}\vec{F} - \frac{\vec{u}}{c^2-u^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{m_0}\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)(\vec{F}\cdot\vec{u})$$

$$= \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{m_0}\left(\vec{F} - \frac{\vec{u}}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{u})\right) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{m_0}\left(q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}) - \frac{\vec{u}}{c^2}\left(q\vec{E}\cdot\vec{u} + \underbrace{q\vec{u}\times\vec{B}\cdot\vec{u}}_{0}\right)\right)$$

$$= \frac{q\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{m_0}\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} - \frac{\vec{u}\cdot(\vec{E}\cdot\vec{u})}{c^2}\right)$$

* 2.3

Otra manera más corta es partir de:

$$K^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right) \qquad \frac{dE}{d\tau} = \vec{F}\cdot\vec{u} = F\cdot u\cos\theta$$

$$K^\mu K_\mu = \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 - \frac{F^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{F^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

γ

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{d(\gamma m_0 c^2)}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt} = m_0 c^2 \frac{(-1/2)\cdot\left(-\frac{2u}{c^2}\right)\cdot\frac{du}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

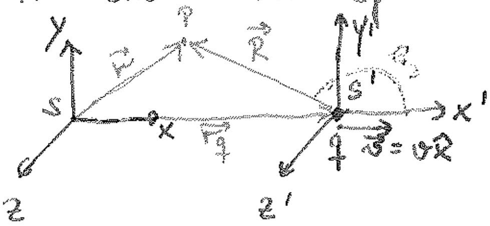
$u\,du = \vec{u}\cdot d\vec{u}$ (ver 2.1)

$$= \frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\cdot\vec{u}\cdot\vec{a}$$

$$K^\mu K_\mu = \frac{m_0^2}{c^2}\frac{(\vec{u}\cdot\vec{a})^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^4} - \frac{F^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \overset{**}{=} \frac{1}{c^2}\frac{F^2u^2\cos^2\theta}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{F^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(-1+\frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta\right)$$

2.5

Calcular los campos eléctrico y magnético que genera una carga puntual q, que se mueve a velocidad v constante en un sistema de referencia inercial.



$\vec{r}_q(t) = (vt, 0, 0)$; $\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}_q{}'(t) = \vec{0}$ (desde S') ; $\vec{r}\,' = (x', y', z')$

$\vec{R}' \neq \vec{R}$

Punto de cálculo de los campos en S y S'

En S': $\vec{E}' = \dfrac{q \cdot \hat{u}_{r'}}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \dfrac{q \cdot \frac{\vec{r}\,'}{r'}}{4\pi\varepsilon_0 (x'^2+y'^2+z'^2)} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{(x', y', z')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}$

$\vec{B}' = 0$ (carga en reposo en el sistema solidario S')

En S:

Direcciones no se alteran $\left\{ \begin{array}{l} y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$

T. Lorenz para x': $x' = \gamma(x - vt)$

$\vec{r}\,' = \vec{R}' = (x', y', z') = (\gamma(x-vt), y, z)$

$\vec{R} = (x - vt, y, z)$

$$\vec{E} = \gamma(\vec{E}' + \cancel{\vec{v} \times \vec{B}'}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{\vec{v}}{c}\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{E}'\right)$$

$$= \frac{\vec{E}'(\gamma + \gamma^2) - \gamma^2/c^2 \cdot v^2\, E_x{}'\,\hat{x}}{1+\gamma}$$

$$E_x = \frac{E_x{}'(\gamma + \gamma^2\overbrace{(1 - v^2/c^2)}^{1})}{1+\gamma} = E_x{}'$$

$$E_y = E_y{}'\,\frac{(1+\gamma)\gamma}{1+\gamma} = \gamma E_y{}'$$

$$E_z = \dots = \gamma E_z{}'$$

$$\vec{E} = \frac{q \cdot (x', \gamma y, \gamma z)}{4\pi\varepsilon_0 (x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-vt, y, z)}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \gamma\left(\cancel{\vec{B}'} + \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}'\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{\vec{v}}{c}\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\cancel{\vec{B}'}\right)$$

$$= \frac{\gamma\,\vec{v}\times\vec{E}'}{c^2} = \frac{\gamma v}{c^2}\cdot\hat{x}\times\vec{E}' = \frac{\gamma v}{c^2}\left(E_y{}'\,\hat{z} - E_z{}'\,\hat{y}\right)$$

$$= \gamma\,\frac{v}{c^2}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(0, -z', y')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma v q}{c^2\, 4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(0, -z, y)}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}_q = (x - vt, y, z)$$

$$R^2 = \underbrace{(x-vt)^2}_{R_x} + \underset{R_y}{y^2} + \underset{R_z}{z^2} = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

$$r'^2 = R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2$$

$$\vec{R}\cdot\hat{x} = R\cdot\cos\xi = R_x = x - vt$$

$$r'^2 = \gamma^2 R^2\cos^2\xi + R_y^2 + R_z^2 = \gamma^2 R^2\cos^2\xi + \underbrace{R^2 - R^2\cos^2\xi}_{R_x^2+R_y^2+R_z^2-R_x^2} = \gamma^2 R^2 - \gamma^2 R^2 \sin^2\xi$$

$$+ R^2\sin^2\xi = \gamma^2 R^2\left(1 + \sin^2\xi\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right) = \gamma^2 R^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\xi\right)$$

$$\vec E = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec R}{r'^3} = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec R}{\gamma^3 R^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\xi\right)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\frac{\vec R}{R^3}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\xi\right)^{3/2}}$$

$$\vec B = \frac{\gamma\,\vec v\times\vec E'}{c^2} = \frac{\vec v\times(\gamma E_x,\ E_y,\ E_z)}{c^2} = \frac{v}{c^2}\cdot\hat x\times\left(\vec E + E_x\hat x(\gamma-1)\right)$$

$$= \frac{v}{c^2}\hat x\times\vec E + \frac{v}{c^2}E_x\cdot\underbrace{\hat x\times\hat x}_{0}(\gamma-1) = \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E$$

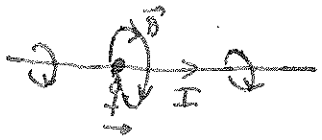
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)v\cdot\frac{\hat x\times\vec R}{R^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\xi\right)^{3/2}}$$

$\vec E$: + Intenso en las direcciones perpendiculares

$v\to c \to E_x\approx 0$

$v\to 0 \to E_x = E_y = E_z \Rightarrow$ campo que se mueve con $x' = x - vt$

$\vec B$: $B_x = 0$ siempre



$$\vec B = \frac{1}{c^2}\vec v\times\vec E \underset{v\ll c}{\approx} \frac{1}{c^2}\frac{\vec v\times\vec R}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\cdot\frac{\vec v\times\vec R}{R^3}$$

En 3º vimos: $\vec B_{mag} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec J(\vec r')\times\vec R}{R^3}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}q\cdot\frac{\vec v\times\vec R}{R^3}$

$\vec J\,dV = \rho\vec v\cdot dV = q\cdot\delta(\vec r)\cdot\vec v\cdot dV$

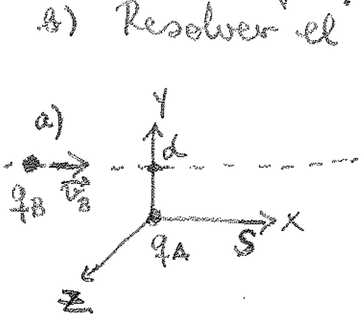
↳ sólo exacta a bajas velocidades

(2.6) La carga q_A está en reposo en el origen del SREF S. La carga q_B se mueve a velocidad v cte paralela al eje x en la recta $y=d$, $z=0$.

a) ¿Cuál es la fuerza electromagnética sobre q_B cuando cruza por el eje y?

b) Resolver el problema en el sistema S' asociado a q_B.

a)



fuerza sobre B . campo creado por A

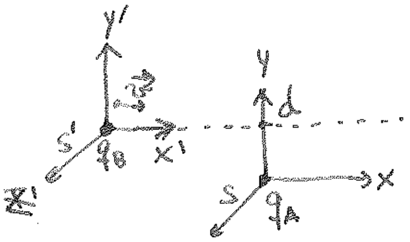
$$\vec F_B = q_B\cdot(\vec E_A + \vec v_B\times\vec B_A)$$

$$\vec E_A = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r}{r^3}\ ;\ \vec B_A = 0\ ;\ \vec v_B = v\hat x \to \vec F_B = q\cdot\vec E_A$$

En $x=z=0$, $y=d$ (q_B cruza eje y) $\to \vec E_A = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\hat y}{d^2}$

$$\vec F_B = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\cdot\hat y$$

b)



$$\vec{F}_B' = q_B \cdot (\vec{E}_A' + \vec{v}_B' \times \vec{B}_A')$$

ley de composición de velocidades

$$\vec{v}_A' = \frac{\vec{v}_A - \vec{v}}{1 - \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}}{c^2}} = -\vec{v} = -v\hat{x} \qquad \vec{v}_A = 0$$

$\vec{v}_B' = \vec{0}$ (solidario en S')

1ª manera

$\vec{E}_A' = \rightarrow$ ver 2.5 $\vec{E}$ con $v \leftrightarrow -v$ y $y' = y+d$ ($\leftrightarrow$ "intercambiar primas")

$$\vec{E} = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x'+vt, y'+d, z')}{(\gamma^2(x'+vt)^2 + (y'+d)^2 + z'^2)^{3/2}} \rightarrow \vec{E}_A'(0, y'=0, 0) = \frac{q_A\gamma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(0, d, 0)}{d^3}$$

$x'=0, t=0 \rightarrow$ cruza eje y q_A, q_B en reposo

$$= \gamma \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{y}}{d^2}$$

$\vec{B}_A' \neq 0 \Rightarrow$ no contribuye porque $\vec{v}_B' = 0$

$$\vec{F}_B' = \gamma \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \hat{y} \quad //$$

2ª manera:

Partir de a) $\rightarrow \vec{F}_B = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \hat{y}$ $\rightarrow$ emplear transformación de fuerzas

$$F_x' = \frac{F_x - \beta/c\, \vec{F} \cdot \vec{u}}{1 - \beta/c\, u_x} = 0 \qquad \beta = v/c \quad u_x = v$$

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta \frac{u_x}{c})} = \frac{F_y}{\gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})} = \gamma F_y \Rightarrow \vec{F}_B' = \frac{\gamma q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \hat{y} \quad //$$

$$F_z' = \frac{F_z}{\dots} = 0$$

3ª manera ≈ 1ª manera sin usar 2.5 ≈ 2ª manera sin usar ~~transf.~~ fuerzas

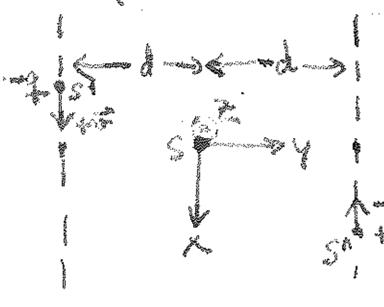
$E_x' = E_x$

$E_y' = \gamma(E_y - v B_z)$ $\rightarrow \vec{E}_A' = \gamma \cdot \frac{q_A \hat{y}}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ // (resultado (a))

$E_z' = E_z$

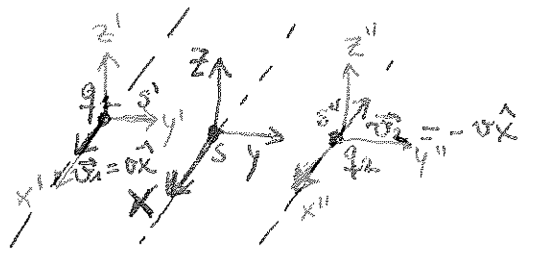
(2.7)

Dos cargas de valores $+q$ y $-q$ se mueven en un SREF S (sistema de referencia) en movimiento rectilíneo uniforme en trayectorias paralelas separadas una distancia $2d$, conforme indica la figura.



(~ bunch 10^{12} protones, 10^{14} e^-)

Queremos saber la fuerza que ejerce $-q$ sobre $+q$ y los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en el instante en que se cruzan las cargas. Expresar el resultado en el sistema S, S' y S''.



$\boxed{S}$ 1 sobre 2

$$\vec{F}_{12} = q_2(\vec{E}_1 + \vec{v}_2 \times \vec{B}_1)$$

Podemos utilizar 2.5 cambiando y por $y + d$

ya que $\vec{r}_{q_1} = (vt, -d, 0)$

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1 \gamma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x - vt,\ y + d,\ z)}{(\gamma^2(x-vt)^2 + (y+d)^2 + z^2)^{3/2}} \overset{x=0,\ z=0,\ y=d,\ t=0}{=} \frac{q_1 \gamma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2d}{(2d)^3}\hat{y} = \frac{q_1 \gamma}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y}$$

(calculamos en q2 cuando se cruzan)

$$\vec{B}_1 = \frac{\gamma v q_1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{2d\,\hat{z}}{(2d)^3} = \frac{\gamma q_1 v}{16\pi\varepsilon_0 d^2 c^2}\hat{z}$$

$$\vec{F}_{12} = q_2\left(\frac{q_1 \gamma}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{y} + (-v)\hat{x} \times \frac{\gamma q_1 v\,\hat{z}}{16\pi\varepsilon_0 d^2 c^2}\right) = \frac{\gamma \overset{-q}{q_1} \overset{+q}{q_2}\,\hat{y}}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= -\frac{\gamma q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y}$$

- Otra opción es emplear:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q_1 \cdot \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2 \sin^2\xi)^{3/2}} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \quad ; \quad \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2}\vec{v}_1 \times \vec{E}_1$$

con $\left.\begin{array}{l} \vec{r}_q = (vt, -d, 0) \\ \vec{r} = (-vt, d, 0) \end{array}\right\} \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q = (-2vt, 2d, 0)$

Cuando se cruzan $t = 0$, y $\xi = 90°$ (ángulo entre $\vec{R}$ y $\hat{x}$)

↳ se llega al mismo resultado que arriba

$\boxed{S''}$ S'' solidario con q2

$$\vec{F}_{12}'' = q_2(\vec{E}_1'' + \cancel{\vec{v}_2''} \times \vec{B}_1'') = q_2 \cdot \vec{E}_1''$$

porque $\vec{r}_{q_1}'' = (v''t'', -2d, 0)$, $\vec{r}'' = (x'', y'', z'')$, $\vec{R}'' = \vec{r}'' - \vec{r}_{q_1}''$

2.5 cambiando y por $y'' + 2d$

$$\vec{E}_1'' = \frac{q_1 \gamma''(x'' - v_1''t'',\ y'' + 2d,\ z'')}{4\pi\varepsilon_0(\gamma''^2(x - v''t'')^2 + (y'' + 2d)^2 + z''^2)^{3/2}} \overset{\text{al cruzarse}}{=} \frac{q_1 \gamma''}{16\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{y}}{d^2}$$

con $v_1'' = \dfrac{+v - (-v)}{1 - \frac{(-v)v}{c^2}} = \dfrac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$, $\gamma'' = \left(1 - \dfrac{v_1''^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{c^2 - \frac{4v^2}{(1+v^2/c^2)^2}}{c^2}\right)^{-1/2}$

$$\gamma'' = \left(\frac{c^2 + 2v^2 + \frac{v^4}{c^2} - 4v^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \cdot c^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{(1 - v^2/c^2)^2}{(1 + v^2/c^2)^2}\right)^{-1/2} = \frac{(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)} = \gamma^2(1 + v^2/c^2)$$

$$\vec{F}_{12}'' = \frac{q_2 \cdot q_1}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\frac{(1+v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)}\cdot\hat{y} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\frac{(1+v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)}\cdot\hat{y}$$

Se demuestra análogamente con el formalismo del ángulo ξ.

$\boxed{S'}$

$\vec{F}_{12} = q_2(\vec{E}_1' + \vec{v}_2' \times \vec{B}_1') \Rightarrow$ Por simetría, $\vec{v}_2' = -\vec{v}_1''$
(se llega igual por la transf. de velocidades)

en reposo 1 en S'

$$\vec{E}_1' = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(x', y', z')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}$$

$\vec{B}_1' = 0$ (carga en reposo)

$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1'$

$$\vec{E}_1'(x'=0, y=d=y'_{=d}, z=0) = \frac{q_1\hat{y}}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$$\vec{F}_{12}' = \frac{q_2 q_1 \hat{y}}{16\pi\varepsilon_0 d^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\cdot\hat{y}$$

Podemos comprobar que lo hemos hecho bien con la transformación de las fuerzas directamente:

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta\frac{u_x}{c})} = \frac{F_y}{(1-\frac{V(-v)}{c^2})}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F_y}{\gamma(1+\frac{v^2}{c^2})} = \frac{-\gamma q^2(1+\frac{v^2}{c^2})}{\gamma(1+\frac{v^2}{c^2})16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$u_x = \vec{v}_2\cdot\hat{x}$ $\quad \beta = \frac{\vec{v}_1}{c}\cdot\hat{x}$

$= F_y'$ ✓

$$F''_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\frac{(-V)}{c^2}\cdot(-v))} = \frac{-\gamma q^2(1+v^2/c^2)}{16\pi\varepsilon_0 d^2\gamma(1-v^2/c^2)}$$ ✓

Otra comprobación es calcular el invariante relativista $E^2 - c^2B^2$

$$E_1'^2 - c^2 B_1'^2 = \left(\frac{q_1}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\right)^2 = S$$

$$E_1''^2 - c^2 B_1''^2 = S\gamma''^2 - c^2\cdot\left(\frac{\vec{v}_1''\times\vec{E}_1''}{c^2}\right)^2 = S\gamma''^2 - \frac{V_1''^2 S\gamma''^2}{c^2} = S\gamma''^2\Big(\underbrace{1-\frac{V_1''^2}{c^2}}_{\gamma''^{-2}}\Big) = S$$ ✓

$$E_1^2 - c^2B_1^2 = S\gamma^2 - S\gamma^2\frac{v^2}{c^4}\cdot c^2 = S\gamma^2(1-v^2/c^2) = S$$ ✓

Por último, dada la simetría del problema se deduce:

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\vec{F}_{12}'' = -\vec{F}_{21}'$ $\quad\rightarrow$ las cargas se atraen al cruzarse.

$\vec{F}_{12}' = -\vec{F}_{21}''$

(2.8)

En un sistema de referencia inercial se tiene $\vec{B}=\vec{0}$, $\vec{E}\neq\vec{0}$ en todo $\mathbb{R}^3$.
¿Es posible encontrar un sistema Lorentz en el que $\vec{E}=0$ en todo $\mathbb{R}^3$?

↳ En todo $\mathbb{R}^3$ se cumple: $E^2 - c^2 \underbrace{B^2}_{0} = E^2 > 0 \rightarrow$ invariante Lorentz

¿$\exists$ $\underbrace{\cancel{E}'^2}_{E'=0} - c^2 B'^2 = \underbrace{-c^2 B'^2}_{<0}$?

↳ No puede existir en ningún punto del espacio $E'=0$ porque violaría la invarianza. (suponemos $E\neq 0$)
Es decir, de electrostática no puedes pasar con una T. L. a magnetostática ni viceversa.
T. L.: Transformada de Lorentz

(2.9)

Demostrar que la simetría o antisimetría de un tensor se preserva ante una T. L.

- $M^{\alpha\xi} = M^{\xi\alpha}$

$$M'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\xi M^{\alpha\xi} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\xi M^{\xi\alpha} \stackrel{\text{Intercambio índices mudos } \xi\leftrightarrow\alpha}{=} \Lambda^\mu_\xi \Lambda^\nu_\alpha M^{\alpha\xi} =$$

conmuto, son nºs

$$= \Lambda^\nu_\alpha \Lambda^\mu_\xi M^{\alpha\xi} = M'^{\nu\mu}$$

- $M^{\alpha\xi} = M^{\xi\alpha}$

$$M'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\xi M^{\alpha\xi} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\xi (-M^{\xi\alpha}) \stackrel{\xi\leftrightarrow\alpha}{=} -\Lambda^\mu_\xi \Lambda^\nu_\alpha M^{\alpha\xi}$$

conmuto

$$= -\Lambda^\nu_\alpha \Lambda^\mu_\xi M^{\alpha\xi} = -M'^{\nu\mu}$$

(2.10)

Una onda electromagnética plana, armónica y linealmente polarizada viaja en la dirección del eje $\hat{x}$ en un determinado sistema de referencia inercial S. El campo eléctrico está dirigido en el eje $\hat{y}$. ω es la frecuencia angular de la OEM, que se propaga en el vacío.

a) Escribir los campos de la OEM en S

b) La OEM es observada desde S', que se mueve en el eje común $x\leftrightarrow x'$ a velocidad v. Escribir los campos de la OEM en S'.

c) Calcular ω, λ y la velocidad de propagación de esa onda en S'.

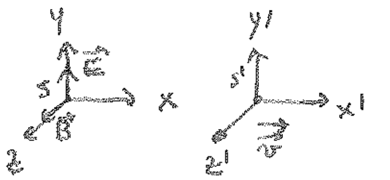
d) Describir la relación de la potencia transportada por la onda medida en S y S'.

$\boxed{5}$

a) $\left.\begin{array}{l}\vec{E} = E_0 \cdot \cos(\omega t - Kx)\,\hat{y} \\ \vec{B} = B_0 \cdot \cos(\omega t - Kx)\,\hat{z}\end{array}\right\}$ $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0.$

$\vec{E}\times\vec{B} = E_0 B_0 \cos^2(\omega t - Kx)\,\hat{x}$

$\vec{N} \propto \vec{E}\times\vec{B} \propto \hat{x} \rightarrow E_0 = cB_0$



$\vec{v} = v\hat{x} \rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{v}{c}\hat{x} = \beta\hat{x}$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{x}$; $\omega = ck$

b) $\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}\vec{\beta}(\cancel{\vec{\beta}\cdot\vec{E}})^{0} = \gamma(E_0\cos(\omega t - Kx)\hat{y} + vB\cdot\hat{x}\times\hat{z})$

$= \gamma\,[E_0\cos(\omega t - Kx) - vB_0\cos(\omega t - Kx)]\,\hat{y} = \gamma\vec{E}(1 - v/c) = \vec{E}\underbrace{\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}}_{K}$

$= K\cdot\vec{E}$

Por otro ~~lado~~ lado, $\omega t - Kx \overset{\text{T. Lorentz}}{=} \omega\gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') - K\cdot\gamma(x' + vt')$

$= \gamma(\omega t' + \frac{v}{c}Kx' - Kx' - Kvt') = \gamma(\omega - Kv)t' - \gamma Kx'(1 - \frac{v}{c})$

$= \underbrace{\gamma\omega(1 - \frac{v}{c})}_{\omega'}\cdot t' - \underbrace{\gamma K(1 - v/c)}_{K'}x' = \omega' t' - K'x'$, con $\begin{array}{l}\omega' = K\omega \\ K' = K.K\end{array}$

$\vec{E}' = KE_0\cos(\omega' t' - K'x')\hat{y}$ //

$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{\beta}\times\vec{E}}{c}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}(\cancel{\vec{\beta}\cdot\vec{B}})^{0} = \gamma(\vec{B} - \frac{vE}{c^2}\hat{x}\times\hat{y})$

$= \gamma(B_0\cos(\omega t - Kx)\hat{z} - \frac{vE_0}{c^2}\cos(\omega t - Kx)\hat{z})$

$= \frac{\gamma E_0}{c}\cos(\omega t - Kx)\hat{z}\,(1 - \frac{v}{c}) = K\vec{B}$ //

$\rightarrow \vec{E}\cdot\vec{B} = 0 = \underset{\text{invariante}}{\vec{E}'\cdot\vec{B}'}$ ✓

$E^2 - c^2B^2 = 0$

$= E'^2 - c^2B'^2$

$= K^2(E^2 - c^2B^2) = 0$ ✓ invariante

c) $\omega' = \omega K$ // $\rightarrow \omega' < \omega \rightarrow$ corrimiento al rojo

$K' = KK = \frac{2\pi}{\lambda}K = \frac{2\pi}{\lambda'} \rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{K}$ // $\lambda' > \lambda$

$c' = \frac{\omega'}{k'} = \frac{K\omega}{KK} = \frac{\omega}{k} = c$ //

d)

$P \propto \vec{E}\times\vec{B} \propto E_0^2\cos^2(\omega t - Kx)$

$P' \propto \vec{E}'\times\vec{B}' \propto K^2E_0^2\cos^2(\omega t - Kx)$

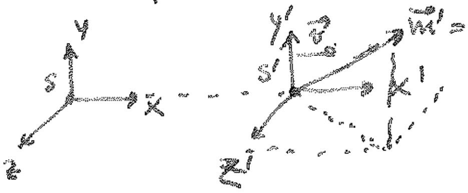
$\frac{P'}{P} = K^2 = \frac{1 - v/c}{1 + v/c}$ //

Potencia no es un escalar $\rightarrow$ depende del campo; no invariante

2.11 Tenemos un dipolo magnético $\vec{m}$ en el origen de S', que se mueve en la dirección $\overline{xx'}$ respecto a un sistema en reposo S. Asumiendo que el dipolo está orientado arbitrariamente y que por él circula una corriente DC,

a) Calcular el potencial escalar que se observa en S

b) Para el caso no relativista, demostrar que el potencial es el de un dipolo eléctrico.



$\vec{m}' = (m_x', m_y', m_z')$

- Dipolo magnético $\rightarrow I \neq 0,\ \rho = 0$

$\vec{E}' = 0 \ ;\ \vec{B}' \neq 0$

$\vec{m}' = I \cdot \vec{S}'$

$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \ ;\ \vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}' \times \vec{r}'}{r'^3}$ → luego hacer T·L a $\vec{E}$ y $\vec{B}$

↳ muy laborioso

↳ Se pueden transformar potenciales sin pasar por los campos

$$A'^{\mu} = (A'^0, \vec{A}') = \left(\frac{\phi'}{c}, \vec{A}'\right)$$

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\cancel{\rho}\, dV'}{R} = 0 \quad \rightarrow A'^{\mu} = (0, \vec{A}')$$

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(m_y' z' - m_z' y',\ m_y' x' - m_x' z',\ m_x' y' - m_y' x' \right) \cdot \frac{1}{r'^3}$$

$$A^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A'^{\nu} \Rightarrow \begin{pmatrix} A^0 \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix}$$

$y = y'$
$z = z'$

$$A^0 = \frac{\phi}{c} = \gamma\beta A_x' \rightarrow \phi = \gamma \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_y' z' - m_z' y'}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \gamma v \frac{m_y' z - m_z' y}{r'^3}$$

$\vec{r} = (x, y, z) \qquad \vec{r}_m = (vt, 0, 0)$

$\vec{r}' = (x', y', z') \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_m = (x - vt, y, z)$

$r'^2 = \gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \xi\right)$

$\vec{v} \times \vec{m} = v(m_y' \hat{z} - m_z' \hat{y}) \rightarrow \vec{R} \cdot (\vec{v} \times \vec{m}) = v(m_y' z - m_z' y)$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma \cdot \vec{R} \cdot (\vec{v} \times \vec{m})}{\gamma^3 R^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \xi\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1 - v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \xi} (\vec{v} \times \vec{m}) \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \cancelto{0}{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} = -\vec{\nabla}\phi$$

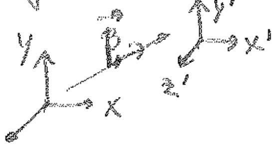
b) $$\lim_{v \ll c} \phi = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{v} \times \vec{m}) \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} (\vec{v} \times \vec{m}) \cdot \vec{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{R} \cdot \frac{(\vec{v} \times \vec{m})}{c^2}$$

Defines $\vec{p} = \frac{\vec{v} \times \vec{m}}{c^2}$ (dimensiones de dipolo eléctrico) $\rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}$ → Potencial del dipolo eléctrico

↳ prevalece sobre $\vec{m}$ de $\vec{A}$.

2.12

Las transformaciones de los campos electromagnéticos entre los sistemas S y S' son de la forma:



$$\vec E' = \gamma(\vec E + \vec v\times\vec B) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec\beta\cdot(\vec\beta\cdot\vec E)$$

$$\vec B' = \gamma\left(\vec B - \frac{\vec v\times\vec E}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec\beta\,(\vec\beta\cdot\vec B)$$

Descomponer $\vec E$ y $\vec B$ en las componentes paralelas y perpendiculares a v y estudiar cuáles se transforman y cuáles no. Suponer que los campos son uniformes en el espacio y en el tiempo.

$\hat u \equiv \frac{\vec v}{v}$ / $\|\hat u\| = 1$

$\vec E = \vec E_\parallel + \vec E_\perp \to E_\parallel = \vec E\cdot\hat u$; $\vec E_\perp\cdot\hat u = 0$

$\vec B = \vec B_\parallel + \vec B_\perp \to$ " "

$$\vec E' = \gamma(\vec E_\parallel + \vec E_\perp + v\cdot\hat u\times(\vec B_\parallel + \vec B_\perp)) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^2}{c^2}\hat u\cdot(\hat u(\vec E_\parallel + \vec E_\perp))$$

$$= \gamma(\vec E_\parallel + \vec E_\perp + \vec v\times\vec B_\perp) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec E_\parallel\cdot\frac{v^2}{c^2}$$

$$= \gamma\left(\vec E_\parallel - \frac{\gamma}{1+\gamma}\frac{v^2}{c^2}\vec E_\parallel\right) + \gamma\vec v\times\vec B_\perp + \vec E_\perp\gamma = \gamma\vec E_\parallel\left(1 - \frac{v^2/c^2}{1+\frac{1}{\gamma}}\right) + \gamma(\vec v\times\vec B_\perp + \vec E_\perp)$$

$$= \gamma\vec E_\parallel\left(\frac{1+\frac{1}{\gamma} - v^2/c^2}{1+1/\gamma}\right) + \gamma(\vec v\times\vec B_\perp + \vec E_\perp) = \frac{\gamma\vec E_\parallel}{1+1/\gamma}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{\gamma} - 1 + \frac{1}{\gamma^2}\right)}_{1} + \gamma(\vec v\times\vec B_\perp + \vec E_\perp)$$

$$= \underbrace{\vec E_\parallel}_{\vec E_\parallel'} + \underbrace{\gamma(\vec v\times\vec B_\perp + \vec E_\perp)}_{\vec E_\perp'} = \vec E_\parallel + \gamma(\vec v\times\vec B_\perp + \vec E_\perp) = \vec E_\parallel' + \vec E_\perp'$$

$$\vec B' = \gamma\left(\vec B_\parallel + \vec B_\perp - \frac{v}{c}\hat u\times(\vec E_\parallel + \vec E_\perp)\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^2}{c^2}\hat u\,(\hat u\cdot(\vec B_\parallel + \vec B_\perp))$$

$$= \gamma\left(\vec B_\parallel + \vec B_\perp - \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E_\perp\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)\vec B_\parallel$$

$$= \vec B_\parallel\left(\frac{\gamma(1+\gamma) - (\gamma^2 - 1)}{(1+\gamma)}\right) + \gamma\left(\vec B_\perp - \frac{\vec v}{c^2}\times\vec E_\perp\right) = \vec B_\parallel\left(\frac{\gamma + \cancel{\gamma^2} - \cancel{\gamma^2} + 1}{\gamma + 1}\right) + \gamma\left(\vec B_\perp - \frac{\vec v\times\vec E_\perp}{c^2}\right)$$

$$= \underbrace{\vec B_\parallel}_{\vec B_\parallel'} + \underbrace{\gamma\left(\vec B_\perp - \frac{\vec v\times\vec E_\perp}{c^2}\right)}_{\vec B_\perp'}$$

2.13 Los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en un sistema de referencia inercial S no son ni perpendiculares ni paralelos entre sí (caso general). Suponemos E y B uniformes en el espacio y en el tiempo.

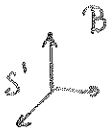
a) Encontrar un sistema S' donde sean paralelos

b) Encontrar un sistema S'' donde sean ortogonales.

a) 

$\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0 = E\cdot B\cdot\cos\chi$, $\chi \in (0, 180°)$

Buscamos $\chi' = 0°$ $\rightarrow \vec{E}'\times\vec{B}' = 0$



$$\vec{E}'\times\vec{B}' = (\vec{E}_\parallel' + \vec{E}_\perp')\times(\vec{B}_\parallel' + \vec{B}_\perp') = \vec{E}_\perp'\times\vec{B}_\perp' + \vec{E}_\parallel'\times\vec{B}_\perp' + \vec{E}_\perp'\times\vec{B}_\parallel' = 0$$

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = (\vec{E}_\parallel' + \vec{E}_\perp')\cdot(\vec{B}_\parallel' + \vec{B}_\perp') = E_\parallel'\cdot B_\parallel' + E_\perp'\cdot B_\perp' = E'\cdot B'$$

$$E'^2 B'^2 = (E_\parallel'^2 + E_\perp'^2)(B_\parallel'^2 + B_\perp'^2) = E_\parallel'^2 B_\parallel'^2 + E_\perp'^2 B_\perp'^2 + 2E_\parallel' E_\perp' B_\parallel' B_\perp'$$

Es lógico que
$\vec{E}_\perp'\times\vec{B}_\perp' = 0$

$\downarrow$ fórmula 2.12

propiedades producto vectorial paso sin explicar

$$\gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp)\times\gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}\times\vec{E}_\perp}{c^2}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp - \vec{E}_\perp\times(\vec{v}\times\vec{E}_\perp) + (\vec{v}\times\vec{B}_\perp)\times\vec{B}_\perp - (\vec{v}\times\vec{B}_\perp)\cdot\left(\frac{\vec{v}\times\vec{E}_\perp}{c^2}\right)$$

$\Rightarrow$ Defino $\vec{v} = \xi\cdot\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp$, $\xi = cte$ $= \gamma^2\left(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\cdot(\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp)) - \left(\frac{E_\perp^2}{c^2} + B_\perp^2\right)\vec{v}\right) = 0$

$$\frac{\vec{v}}{\xi} + \frac{\vec{v}}{c^2}\vec{v}\cdot\frac{\vec{v}}{\xi} - \left(\frac{E_\perp^2}{c^2} + B_\perp^2\right)\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \frac{1}{\xi} + \frac{v^2}{c^2\xi} - \left(\frac{E_\perp^2}{c^2} + B_\perp^2\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \xi = \frac{c^2 + v^2}{E_\perp^2 + c^2 B_\perp^2} \rightarrow \vec{v} = \frac{c^2 + v^2}{E_\perp^2 + c^2 B_\perp^2}\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp \quad //$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{v}}{c^2 + v^2} = \frac{\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp}{E_\perp^2 + c^2 B_\perp^2}$$

$$\hookrightarrow \vec{b}(c^2 + v^2) - \vec{v} = 0 \xrightarrow{\vec{b}\parallel\vec{v}} bc^2 + bv^2 - v = 0$$

$$\hookrightarrow v = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4b^2c^2}}{2b} \quad ; \quad b = \frac{\|\vec{E}_\perp\times\vec{B}_\perp\|}{E_\perp^2 + c^2 B_\perp^2} \quad //$$

b) No es posible porque
$\vec{E}\cdot\vec{B} \neq 0$ es un invariante $\rightsquigarrow$ $\vec{E}'\cdot\vec{B}' \neq 0$ obligatoriamente

(2.14) Ejemplo numérico de 2.13

$\vec{E} = E_0\hat{y}$, $E_0 = 10^8 \, V/m$

$\vec{B} = B_y\hat{y} + B_z\hat{z} = B_0(0, \cos K, \sin K)$; $B_0 = 1T$; $K = 30^\circ$

$\|\vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp\| = \overbrace{E_\perp B_\perp}^{E_0 B_0} \sin K = 5 \cdot 10^7$ Presupones que $\vec{v} = v\hat{x}$ $\vec{E}_\perp = \vec{E}$; $\vec{B}_\perp = \vec{B}$

$$k = \frac{5 \cdot 10^7}{(10^8)^2 + c^2 1^2} = 5 \cdot 10^{-10} \, s/m$$

$$v = \begin{cases} V_+ = 6,\cancel{5}\, c \\ V_- = 0,1535\, c \end{cases} \rightarrow \xi = \frac{c^2 + v_-^2}{E_\perp^2 + c^2 B_\perp^2} = 0,92\,216$$

$\vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp = 5 \cdot 10^7 \hat{x} \rightarrow \vec{v} = \xi \cdot \vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp = \underbrace{0,1533\, c}_{V_-}\hat{x}$

$\vec{\beta} = \frac{v_-}{c} = 0,1535$; $\gamma = 1,0\cancel{1199}$

$\rightarrow$ T. Lorentz

$E_y' = 77,8932\,4377 \, MV/m = \gamma(E_y - v_- B_z) = \gamma(10^8 - v_- B_0 \sin 30^\circ)$

$E_z' = 40,3684838 \, MV/m = \gamma(E_z + v_- B_y) = \gamma v B_0 \cos 30^\circ$ $\rightarrow \vec{E}' = \vec{E}'_\perp$

$B_y' = 0,876417031 \, T = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) = \gamma B_0 \cos 30^\circ$ $\rightarrow \vec{B}' = \vec{B}'_\perp$

$B_z' = \cancel{0,5059989009\,T}$ $0,45420684 \, T = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) = \gamma(B_0 \sin 30^\circ - \frac{v_-}{c^2} E_0)$

$\operatorname{tg} K_1' = \frac{E_z'}{E_y'} \rightarrow K_1' = 27,39562789$

$\operatorname{tg} K_2' = \frac{B_z'}{B_y'} \rightarrow K_2' = \cancel{30,00000002}$ $27,39564047$ ¿¿ son paralelos ✓

$\vec{E}'_\parallel \cdot \vec{B}' \neq 0$ ✓ $= 86,60257694 \, T \cdot V/m \cdot 10^{12}$
invariante Lorentz

$\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ ✓ $= 86,60254038 \, T \cdot V/m \cdot 10^{12}$

$\vec{E} \times \vec{B}$ no es un invariante.

(2.15)

Demostrar que la ecuación de ondas escalar es invariante ante una transformación de Lorentz.

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$\rightarrow$ simétrico

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\nabla^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad -\Box\psi = 0$$

producto de matrices $\hookrightarrow \mu$ índice sumado

$$\Box' \equiv \partial'_\mu \partial'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \cdot \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\partial^\alpha = \overbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}^{\Lambda'^\nu{}_\mu} \cdot \overbrace{\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}}^{\Lambda^\mu{}_\alpha} \cdot \partial_\nu \partial^\alpha = \underbrace{\Lambda'^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\alpha}\partial_\nu \partial^\alpha$$

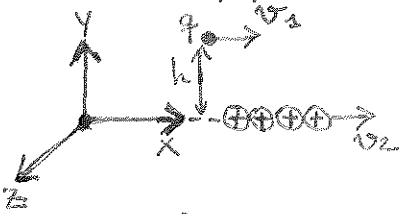
$$(\Lambda' \cdot \Lambda)^\nu{}_\alpha \partial_\nu \partial^\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta & 0 & 0 \\ \gamma^2\beta - \gamma^2\beta & -\gamma^2\beta + \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\Lambda' \cdot \Lambda)^\nu{}_\alpha = \delta^\nu_\alpha \rightarrow \Lambda \cdot \Lambda' = I \rightarrow \Lambda' = \Lambda^{-1}$$

$$\Box' \equiv \partial'_\mu \partial'^\mu = (\Lambda' \cdot \Lambda)^\nu{}_\alpha \cdot \partial_\nu \partial^\alpha = \delta^\nu_\alpha \partial_\nu \partial^\alpha = \partial_\alpha \partial^\alpha = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\text{índices mudos}} = \Box$$

$\rightarrow$ Por tanto es invariante

(2.16) En un sistema de referencia inercial S tenemos un haz rectilíneo de protones, de sección despreciable y que se propaga a una velocidad v_2. A una distancia h de ese haz se sitúa una carga puntual que se mueve a una velocidad v_1 en la misma dirección del haz. Calcular la fuerza que ejerce el haz sobre la carga puntual en el sistema S y en el sistema propio ligado a la partícula S', y el ligado a los protones S''.



haz genera $\vec{E}_2$ y $\vec{B}_2$

$Q \neq 0 \rightarrow$ densidad lineal $\rho_e = \frac{dq}{dl} \equiv \lambda$

$\boxed{S}$ $\vec{E}_2 = \vec{E}_{hilo\,\infty} \Rightarrow$ por Gauss $\vec{E}_{hilo\,\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\hat{u}_\rho$ $\quad \rho \rightarrow$ radio polares

$\vec{B}_2 = \vec{B}_{hilo} \rightarrow$ por Ampère $\vec{B}_{hilo\,\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{u}_\rho \quad \rightarrow I = \rho_e \cdot v_2 = \lambda v_2$ (en S)

$$\vec{F}_q = q\cdot(\vec{E}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_2)\Big|_{\vec{r} = d\cdot\hat{u}_\rho} ; \quad \vec{v}_1 = v_1\hat{x}$$

∞ en x, suponemos centrado en $x = 0$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\cdot\hat{y} \quad ; \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \lambda v_2}{2\pi h}\hat{z}$$

$$\vec{F}_q = \frac{q\lambda}{2\pi h}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{y} + v_1 v_2 \mu_0\, \hat{x}\times\hat{z}\right) = \frac{q\lambda}{2\pi h\varepsilon_0}\left(\hat{y} - \hat{y}\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)\hat{y}$$

$\rightarrow$ A $v_i \ll c$ $\quad \vec{F}_q \simeq q\cdot\vec{E}$ (domina el campo eléctrico)

$\rightarrow$ A $v_i = c \rightarrow \vec{F}_q = \vec{0}$

$\boxed{S'}$

$$\vec{F}_q' = q\left(\vec{E}_2' + \vec{v}_1' \times \vec{B}_2'\right) \rightarrow \vec{v}_1' = 0 \text{ (sistema solidario)}$$

$$= q\cdot\vec{E}_2'$$

$$\vec{E}_2' = \gamma\left(\vec{E}_2 + \vec{v}_1\times\vec{B}_2\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}_1\underbrace{(\vec{\beta}_1\cdot\vec{E}_2)}_{\propto\,\hat{y}} \quad ; \quad \vec{\beta}_1 = \frac{\vec{v}_1}{c} = \frac{v_1}{c}\hat{x}$$

$$= \gamma\left(\vec{E}_2 + \frac{v_1 \mu_0 \lambda v_2}{2\pi h}\hat{x}\times\hat{z}\right) = \frac{\gamma\,\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)\hat{y}$$

$$\vec{F}_q' = \gamma\vec{F}_q = \frac{\gamma q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)\hat{y}$$

Otra manera es con la transformación de fuerzas:

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta u_x}{c}\right)} = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} = \gamma F_y \quad ; \quad F_x = F_z = 0$$

Con la velocidad relativa sería más complicado.

Por completitud:

$$\vec{B}_2' = \gamma\left(\vec{B}_2 - \frac{\vec{\beta}_1}{c}\times\vec{E}_2\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}_1\cdot\left(\cancel{\vec{\beta}_1\cdot\vec{B}_2}\right)^{0}$$

$$= \gamma\left(\frac{\mu_0\lambda v_2}{2\pi h}\hat{z} - \frac{v_1}{c^2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\hat{x}\times\hat{y}\right) = \frac{\gamma\lambda \cancel{v_2}}{2\pi h\varepsilon_0}\hat{z}\left(\frac{v_2}{c^2}-\frac{v_1}{c^2}\right) = \frac{\gamma\lambda}{2\pi h\varepsilon_0 c^2}(v_2-v_1)\hat{z}$$

$\boxed{S''}$

$$\vec{F}_q'' = q\cdot\left(\vec{E}_2'' + \vec{v}_1''\times\vec{B}_2''\right)$$

En S'' → protones en reposo → sólo generan $\vec{E}$, no $\vec{B}$

↳ $\vec{B}_2'' = 0$

$$\vec{E}_2'' = \frac{\lambda''}{2\pi\varepsilon_0 h''}\hat{y}, \quad \text{con } h'' = h \text{ (direcciones perpendiculares no se alteran)}$$

$$\lambda'' = \underset{dt=0}{\frac{dq}{dx''}} = \frac{dq}{\gamma\, dx} = \frac{1}{\gamma}\frac{dq}{dx} = \lambda/\gamma \dashrightarrow \text{porque}$$

S'': $q \overset{x''}{\frown}$ → $\lambda'' = \frac{q}{x''}$
↳ sistema propio

S: $\lambda = \frac{q}{x} = \frac{q}{x''/\gamma} = \gamma\lambda''$

contracción de longitudes $x < x''$ se deduce de T.Lorentz

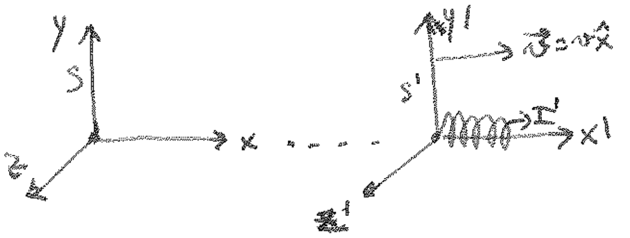
$$\vec{E}_2'' = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\hat{y} = \frac{1}{\gamma}\vec{E}_2 \quad ; \quad \vec{F}_2'' = \frac{q\lambda}{\gamma 2\pi\varepsilon_0 h}\hat{y}$$

Comprobación con transformación de campos:

$$\vec{E}_2'' = \gamma\left(\vec{E}_2 + \vec{v}_2\times\vec{B}_2\right) - 0$$

$$= \gamma\left(\vec{E}_2 + v_2\frac{\mu_0\lambda}{2\pi h}(-\hat{y})\right) = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)\hat{y} = \frac{\lambda}{\gamma 2\pi\varepsilon_0 h}\hat{y}$$

(2.17) Tenemos un solenoide muy largo con N' espiras por unidad de longitud, por el que circula una corriente continua I_{DC}'. El solenoide se mueve a velocidad v con su eje paralelo a la dirección de movimiento. Calcular los campos en el sistema propio y en el sistema laboratorio.



$\boxed{S'}$ $\rho' = 0 \rightarrow \vec{E}' = 0$

$$\vec{B}' = \vec{B}_{solen} = \mu_0 n' I'\hat{x} \quad ; \quad n' = \frac{N'}{L'}$$

$\boxed{S}$

$$\vec{E} = \gamma\left(\vec{E}' - \vec{v}\times\vec{B}'\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{E}'\right)^{0} = -\gamma\overbrace{\vec{v}\times\vec{B}'}^{\parallel\text{ paralelos}} = 0$$

$$\vec{B} = \gamma\left(\vec{B}' + \frac{\vec{\beta}}{c}\times\vec{E}'\right) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{B}'\right)$$

$$= \gamma\vec{B}' - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^2}{c^2}\vec{B}' = \gamma\vec{B}'\left(1 - \frac{\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)}{1+\gamma}\right) = \gamma\vec{B}'\left(\frac{1+\gamma-\gamma+1/\gamma}{1+\gamma}\right)$$

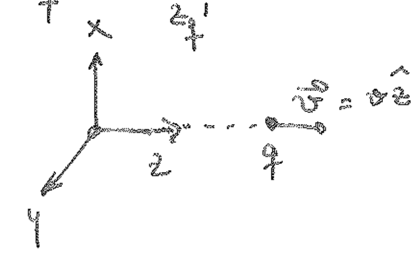
$$= \vec{B}'\left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma}\right) = \vec{B}' \quad \rightarrow \vec{B} = \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}' = \vec{B}' \text{ (ver 2.12)}$$

o bien: $\vec{B} = \mu_0 n I\hat{x} = \mu_0\frac{N'}{L}\frac{dq}{dt} = \mu_0\frac{N'}{L'/\gamma}\frac{dq}{\gamma dt'} = \mu_0 n' I'$

(3.1)

Una carga puntual q se mueve en movimiento rectilíneo uniforme con velocidad v constante en el eje z. Calcular los potenciales ϕ y A $\forall \vec r, t$.

$$\vec r_q{}' = \underbrace{v\cdot t'}_{z_q'}\,\hat z$$



$$\vec r = (x, y, z)$$
$$\vec R_q = \vec r - \vec r_q{}' = (x, y, z - vt')$$
$$R_q^2 = x^2 + y^2 + (z - vt')^2$$
$$\vec n \cdot \vec \beta = \frac{\vec R_q}{R_q} \cdot \frac{v\hat z}{c} = \frac{1}{R_q c}(z - vt')\cdot v$$

Instante retardado:

$$c(t-t') = R_q(t') \Rightarrow c^2(t-t')^2 = x^2+y^2+(z-vt')^2$$
$$c^2(t^2 - 2tt' + t'^2) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2t'^2 - 2zvt'$$
$$t'^2(c^2-v^2) + t'(2zv - 2c^2t) + c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) = 0$$
$$t' = \frac{-(2zv - 2c^2t) \pm \sqrt{(2zv-2c^2t)^2 - 4(c^2-v^2)(c^2t^2-(x^2+y^2+z^2))}}{2(c^2-v^2)}$$
$$= \frac{c^2t - zv \pm \sqrt{(zv-c^2t)^2 - (c^2-v^2)(c^2t^2-(x^2+y^2+z^2))}}{c^2-v^2}$$

$t_r' = t \pm \frac{r}{c}$ → Te quedas con signo menos, típico de tiempo retardado

$$R_q(1-\vec n\cdot\vec\beta)\Big|_{t'=t_r'} = R_q\left(1 - \frac{\vec R_q}{R_q}\cdot\frac{v\hat z}{c}\right) = \underbrace{R_q(t')}_{c(t-t')} - \frac{v}{c}(z-vt')\Big|_{''}$$
$$= c(t-t') - \frac{v}{c}(z-vt')\Big|_{''} = \frac{1}{c}(c^2t - c^2t' - vz + v^2t')\Big|_{''}$$
$$= \frac{1}{c}(t'(v^2-c^2) + c^2t - vz) = \frac{1}{c}((c^2t - vz) - t'(c^2-v^2))\Big|_{t'=t_r'}$$
$$= \frac{1}{c}\left((c^2t-vz) - \frac{(c^2-v^2)}{c^2-v^2}\cdot(c^2t - zv - \sqrt{\cdots})\right) = +\frac{1}{c}\sqrt{(zv-c^2t)^2 - (c^2-v^2)(c^2t^2-x^2-y^2-z^2)}$$

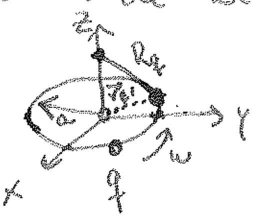
Potenciales de Lienard y Wiechert:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_q(1-\vec n\cdot\vec\beta)}\right]_{t'=t_r'} = \frac{qc}{4\pi\varepsilon_0}\left((zv-c^2t)^2 + (c^2-v^2)(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)\right)^{-1/2}$$

$$\vec A = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec v_q{}'}{R_q(1-\vec n\cdot\vec\beta)}\Big|_{t'=t_r'} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} v\hat z\cdot c\cdot\left((zv-c^2t)^2 + (c^2-v^2)(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)\right)^{-1/2}$$

⇝ Coincide con el calculable con transformaciones de Lorentz

(3.2) Una carga puntual q se mueve en una circunferencia de radio a a $\omega = cte$ (velocidad angular). Calcular los potenciales de Liénard y Wiechert en los puntos del eje z.



$$\vec{r} = z\hat{z}$$

$$\vec{r}_q'(t') = (\cos\omega t', \sin\omega t', 0)\cdot a \to \vec{v}_q' = \omega a(-\sin\omega t', \cos\omega t', 0)$$

$$\vec{R}_q = (-a\cos\omega t', -a\sin\omega t', z)$$

$$R_q^2 = a^2 + z^2$$

$c(t - t') = R_q = (z^2 + a^2)^{1/2} \to R_q$ no cambia con t ($\vec{R}_q$ sí)

$$\to t_r' = t - \frac{(z^2+a^2)^{1/2}}{c}$$

(son ortogonales)

$$1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta} = 1 - \frac{\vec{R}_q}{R_q}\cdot\vec{v}_q' = 1 - \frac{\omega a^2}{R_q}\cancel{(\sin\omega t'\cos\omega t' - \sin\omega t'\cos\omega t')} = 0$$

$$= 1$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_q}\cdot\frac{1}{1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{1/2}} \quad //$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot q\cdot\frac{\vec{v}_q'}{R_q}\Big|_{t'=t_r'}\cdot\frac{1}{1} = \frac{\mu_0 q\omega a}{4\pi(z^2+a^2)^{1/2}}\cdot(-\sin\omega t_r', \cos\omega t_r', 0)$$

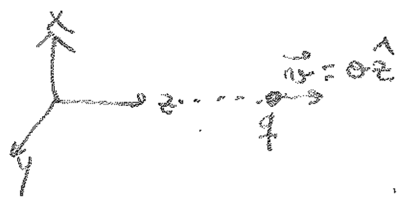
con $t_r' = t - \frac{(z^2+a^2)^{1/2}}{c}$ //

(3.3)

Calcular los campos eléctrico y magnético de una carga puntual q que se mueve en movimiento rectilíneo uniforme (con velocidad constante v).

$\vec{E} = \vec{E}_{lig} + \vec{E}_{rad}$; $\vec{E}_{rad} \propto \dot{\vec{v}} = 0 \to \vec{E}_{rad} = 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_{lig} = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\Big|_{t'=t_r'}$$



$\vec{v} = v\hat{z}$; $\vec{\beta} = \frac{v}{c}\hat{z}$; $\beta = v/c$

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}_q'(t') = vt'\hat{z}$; $\vec{v}_q(t') = cte = v\hat{z}$

$\vec{R}_q = \vec{r} - \vec{r}_q' = (x, y, z - vt')$; $R_q^2 = x^2 + y^2 + (z - vt')^2$

$$\vec{n}\cdot\vec{\beta} = \frac{\vec{R}_q}{R_q}\cdot\frac{\vec{v}}{c} = \frac{v}{cR_q}(z - vt')$$

Instante retardado:

$$c(t-t') = R_q = (x^2+y^2+(z-vt')^2)^{1/2} \longrightarrow \text{ver 3.1} \quad t_r' = \ldots$$

$$\vec{E} = \left. \frac{q\,(1-v^2/c^2)\left(\frac{(x,y,z-vt')}{(x^2+y^2+(z-vt')^2)^{1/2}} - \frac{v}{c}\hat{z}\right)}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+(z-vt')^2)\left(1-\frac{v}{cR_q}(z-vt')\right)^3} \right|_{t'=t_r'}$$

$$\longrightarrow t - t_r' = \frac{R_q}{c}$$

$$= \frac{q\,(1-\beta^2)\cdot\left(x, y, z - v(t_r' + \frac{R_q}{c})\right)}{4\pi\varepsilon_0 \, (x^2+y^2+(z-vt_r')^2)^{3/2}\left(1-\frac{v}{cR_q}(z-vt_r')\right)^3}$$

$$= \frac{q\,(1-\beta^2)\cdot(x,y,z-vt)}{4\pi\varepsilon_0 \left[(\underbrace{x^2+y^2+z^2-2zvt_r'+v^2t_r'^2}_{R_q^2})\cdot\left(1+\frac{v^2}{c^2R_q^2}(z-vt_r')^2 - \frac{2v}{cR_q}(z-vt_r')\right)\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{q\,(1-\beta^2)\,(x,y,z-vt)}{4\pi\varepsilon_0 \left[R_q^2 + \frac{v^2}{c^2}(z-vt_r')^2 - \frac{2v}{c}R_q(z-vt_r')\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{q\,(1-\beta^2)\,(x,y,z-vt)}{4\pi\varepsilon_0 \left[\left(R_q - \frac{v}{c}(z-vt_r')\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$R_q - \frac{v}{c}(z-vt_r') = c(t-t_r') - \frac{vz}{c} + \frac{v^2}{c}t_r' = \frac{1}{c}(c^2t - v) - \frac{t_r'}{c}(c^2-v^2)$$

$$= \frac{1}{c}\left((c^2t-v) - t_r'(c^2-v^2)\right) = \frac{1}{c}\left((c^2t-v) - \overset{\text{ver 3.1}}{\ldots}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{(zv-c^2t)^2-(c^2-v^2)(c^2t^2-x^2-y^2-z^2)}$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = \frac{q\,c^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-\beta^2)\cdot(x,y,z-vt)}{\left((zv-c^2t)^2-(c^2-v^2)(c^2t^2-x^2-y^2-z^2)\right)^{3/2}}$$

→ Se demuestra que el resultado es el mismo que con las transformaciones de Lorentz (ver 2.5)

$$\vec{B} = \vec{B}_{liq} = \frac{1}{c}\,\vec{v}\times\vec{E}\Big|_{t'=t_r'} = \frac{\mu_0 q v c^3(1-\beta^2)}{4\pi}\,(\underbrace{y,-x}_{-r\cdot u_\varphi},0)$$

→ campo hilo de corriente

→ Otra manera de hacerlo es calculando $\phi, \vec{A}$ (L-W) $\xleftarrow{}$ ver 3.1 y derivar... $\vec{B}(\vec{A}), \vec{E}(\phi,\vec{A})$ → sale lo mismo

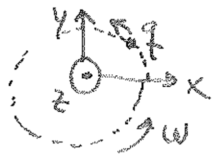
3.4 → Ver hoja aparte (resolución en)

3.5

Tenemos una carga puntual q que se mueve en una circunferencia de radio a con velocidad angular ω cte. Calcular los campos eléctrico y magnético en el centro de la circunferencia.

$\vec r = 0$

$\vec r_q{}'(t') = a\,(\cos\omega t', \sin\omega t', 0) = a\hat u_r{}'$



$\vec R_q = \vec r - \vec r_q{}' = -\vec r_q{}' = -a\,(\cos\omega t', \sin\omega t', 0) = -a\hat u_r{}'$; $R_q = a$

$\vec v_q{}' = \frac{d}{dt'}\vec r_q{}' = \underbrace{\omega a}_{v}\,(-\sin\omega t', \cos\omega t', 0) \to \vec\beta = \frac{\vec v_q{}'}{c}$, $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega a}{c}$

$\vec a_q{}' = \frac{d}{dt'}\vec v_q{}' = -\omega^2\vec r_q{}'$ $\qquad \dot{\vec\beta} = \frac{\vec a_q{}'}{c} = -\frac{\omega^2\vec r_q{}'}{c}$

$t_r' = t - \frac{a}{c}$

$\to$ ver 3.2 con $z=0$

$$\vec n - \vec\beta = -\frac{\vec r_q{}'}{a} - \frac{\omega a}{c}(-\sin\omega t', \cos\omega t', 0) = \left(\frac{\omega a}{c}\sin\omega t' - \cos\omega t',\ -\left(\frac{\omega a}{c}\cos\omega t' + \sin\omega t'\right),\ 0\right)$$

$$\vec\beta\cdot\vec n = \frac{\omega a}{c}\hat u_\varphi{}'\cdot\hat u_r{}' = 0$$

$$(\vec n - \vec\beta)\times\dot{\vec\beta} = \left(-\hat u_r{}' - \frac{\omega a}{c}\hat u_\varphi{}'\right)\times\left(-\frac{\omega^2}{c}a\,\hat u_r{}'\right) = \frac{\omega^3 a^2}{c^2}(-\hat z) = -\frac{\omega^3a^2}{c^2}\hat z$$

$$\vec n\times[(\vec n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}] = -\hat u_r{}'\times\hat z\left(-\frac{\omega^3a^2}{c^2}\right) = -\frac{\omega^3a^2}{c^2}\hat u_\varphi$$

$$\vec E(\vec 0,t) = \left.\frac{q\,(1-\beta^2)(\vec n-\vec\beta)}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2(1-\underbrace{\vec\beta\cdot\vec n}_{0})}\right|_{t'=t_r'} + \left.\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c R_q}\cdot\frac{\vec n\times[(\vec n-\vec\beta)\times\dot{\vec\beta}]}{(1-\underbrace{\vec\beta\cdot\vec n}_{0})}\right|_{t'=t_r'}$$

$$= \frac{q\left(1-\frac{\omega^2a^2}{c^2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{\omega a}{c}\sin\omega t_r' - \cos\omega t_r',\ -\left(\frac{\omega a}{c}\cos\omega t_r' + \sin\omega t_r'\right),\ 0\right) \quad \Big\}\ t_r' = t - \frac{a}{c}$$

$$+ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c a}\cdot\left(+\frac{\omega^3a^2}{c^2}\right)\left(\sin\omega t_r',\ -\cos\omega t_r',\ 0\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(1-\frac{\omega^2a^2}{c^2}\right)\hat u_r - \frac{\omega a}{c}\hat u_\varphi\right]$$

$$\vec B = \frac{1}{c}\vec n\times\vec E = \frac{1}{c}(-\hat u_r{}')\times\left(\frac{q\left(1-\frac{\omega^2a^2}{c^2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{\omega a}{c}(-\hat u_\varphi{}') - \underbrace{\hat u_r{}'}_{\parallel\ \text{paralelos}}\right) + \frac{q\omega^3 a}{4\pi\varepsilon_0 c^3}(-\hat u_\varphi{}')\right)$$

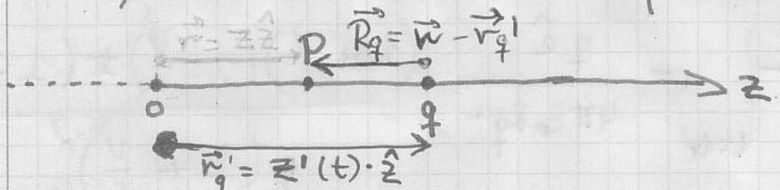
$$= -\frac{1}{c}\left[\hat u_r{}'\times(-\hat u_\varphi{}')\right]\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\omega}{ac} - \frac{\omega^3 a}{c^3} + \frac{\omega^3 a}{c^3}\right) = -\frac{1}{c}(-\hat z)\cdot\frac{q\omega}{4\pi\varepsilon_0 a c}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\omega}{a}\hat z$$ $\to$ no depende de t en el origen, equivale a campo espira en origen $\to \rho_{ej} = q/2\pi a$, $I_{ef} = \rho_e\cdot\omega a = \frac{q\omega}{2\pi}$

$$\vec B_{ej} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\cdot d\vec l\times\vec R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\omega}{a}\hat z$$

Fernando Illueso González $4^{\underline{o}}$ - B
Electrodinámica clásica

Tenemos una carga puntual q que se mueve en una dimensión (eje z) de manera arbitraria. Calcular $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en P, tanto si está a la izquierda como a la derecha de q.



Posición de la carga: $\vec{r}_q{}'(t) = z'(t)\hat{z}$

del Punto P de cálculo: $\vec{r} = z\hat{z}$

$\vec{R}_q(t) = \vec{r} - \vec{r}_q{}'(t) = (z - z')\hat{z}$

Adopto la siguiente notación:

→ Si P a la derecha de q, $z - z' > 0$ → signo + ≡ arriba ó dcha

→ " " " " izquierda " ", $z - z' < 0$ → " − ≡ abajo ó izqda

$$\Rightarrow \|\vec{R}_q{}^{\text{derecha}}_{\text{izqda}}\| \equiv R_q = \pm(z - z') \quad ; \quad R_q{}^2 = (z - z')^2$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}_q}{R_q} = \frac{(z - z')\hat{z}}{\pm(z - z')} = \pm\hat{z}$$

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c}\frac{d\vec{r}_q{}'}{dt} \equiv \frac{1}{c}\cdot v\hat{z} \; , \quad v = \frac{dz'}{dt}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{\beta} = \pm\frac{1}{c}\cdot v = \pm\frac{v}{c} \qquad \vec{n} - \vec{\beta} = \left(\pm 1 - \frac{v}{c}\right)\hat{z}$$

Campos de una carga en movimiento: (ver teoría) en $(0,0,z)$:

$\vec{B} = \vec{B}_{lig} + \vec{B}_{rad}$

$\vec{E} = \vec{E}_{lig} + \vec{E}_{rad}$

paralelos

$$\vec{E}_{rad} \propto (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\Big|_{t=t_r'} = \left(\pm 1 - \frac{v}{c}\right)\hat{z} \times \frac{\dot{v}}{c}\hat{z}\Big|_{t=t_r'} = 0$$

$$\vec{B}_{rad} = \frac{1}{c}\cdot\vec{n}\times\underset{0}{\vec{E}_{rad}} = 0$$

mismo razonamiento; serán paralelos en P.

$$\vec{B}_{lig} \propto \vec{n} \times (\vec{n} - \vec{\beta})\Big|_{t=t_r'} = 0$$

$\hookrightarrow \vec{B}(0,0,z) = \vec{0}$

$\vec{E}(0,0,z) = \vec{E}_{lig}$

$$E(0,0,z) = E_{izq} = \frac{q(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\,\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\Bigg|_{t=t_r'} =$$

$$= \frac{q\,\hat{z}\,(1-\frac{v^2}{c^2})(\pm 1 - \frac{v}{c})}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2\,(1\mp\frac{v}{c})^3}\Bigg|_{t=t_r'} = \frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\,\frac{(1+\frac{v}{c})(1-\frac{v}{c})\pm(1\mp\frac{v}{c})}{(1\mp\frac{v}{c})^3}\Bigg|_{t=t_r'}$$

$$=\pm\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\,\frac{(1+v/c)(1-v/c)}{(1\mp\frac{v}{c})(1\mp v/c)}\Bigg|_{t=t_r'}\cdot\frac{c\cdot c}{c\cdot c} = \pm\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\,\frac{(c+v)(c-v)}{(c\mp v)(c\mp v)}\Bigg|_{t=t_r'}$$

$$=\pm\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\pm 1}\Bigg|_{t=t_r'}$$

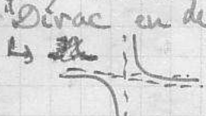
$$\vec{E}^{\,derecha}_{(0,0,z)} = \frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\,\frac{c+v}{c-v}\Bigg|_{t=t_r'} \qquad \vec{B}^{\,derecha}_{(0,0,z)} = \vec{0}$$

$$\vec{E}^{(0,0,z)}_{izquierda} = -\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 R_q^2}\,\frac{c-v}{c+v}\Bigg|_{t=t_r'} \qquad \vec{B}^{(0,0,z)}_{izquierda} = \vec{0}$$

El tiempo retardado t_r' cumple:

$$c(t-t_r') = \pm(z - z'(t_r))$$

En $z'(t_r)=z$ hay una singularidad en los campos, como es lógico dado que estamos sobre la carga (δ de Dirac en densidad).



Para el caso particular $z'(t) = vt$, con $v=$ cte,

$$\to c(t-t_r') = \pm(z - vt_r')$$

$$t_r' = t \mp \frac{1}{c}(z - vt_r') = t \mp \frac{z}{c} \pm \frac{v}{c}t_r'$$

$$\to t_r'(1\mp v/c) = (t\mp z/c)$$

$$\Rightarrow t_r' = \frac{(t\mp z/c)}{(1\mp v/c)} \to R_q(t_r') = \pm\left(z - v\frac{(t\mp z/c)}{(1\mp v/c)}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{z \mp zv/c - vt \pm vz/c}{1\mp v/c}\right) = \pm\frac{z-vt}{1\mp v/c}$$

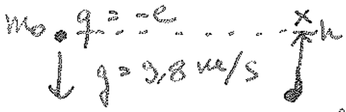
$$\vec{E}_{(0,0,z,t)} = \pm\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\pm1}\cdot\frac{(1\mp\frac{v}{c})^2}{(z\mp z\frac{v}{c} - vt \pm \frac{vz}{c})^2}$$

$$= \pm\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\pm1}\cdot\frac{(c\mp v)^2}{c^2(z-vt)^2} = \pm\frac{q\,\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(c+v)(c-v)}{c^2}\,\frac{1}{(z-vt)^2}$$

$$\vec{E}(0,0,z,t) = \pm\frac{q\,\hat{z}}{}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{(z-vt)^2}$$ $\to$

3.6

Estudiar la ecuación de movimiento de un electrón que cae bajo la acción de la gravedad.



No se puede aplicar la fuerza de Abraham-Lorentz porque $u_0 \neq u_e$ pero sí aplicable conservación de energía

$$m g h = m g x + \frac{1}{2} m_0 u^2 + W_{rad}$$

$$\frac{d}{dt}(m_0 g h) = 0 = m_0 g \frac{dx}{dt} + m_0 u \frac{du}{dt} + \frac{dW_{rad}}{dt} \; P'$$

$$P' \text{ (Larmor)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2$$

$$\frac{q^2 \mu_0}{6\pi c}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + m_0 g \frac{dx}{dt} + m_0 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

suponemos caída libre, sin P'; $a = g$

Estimamos para $\Delta x = 1$ cm $\rightarrow \Delta t \simeq \left(\frac{2\Delta x}{g}\right)^{1/2} \simeq 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ s

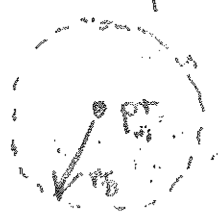
$$\frac{\text{Energía radiada}}{\Delta E_{potencial}} = \frac{P' \Delta t}{m_0 g \Delta x} = \frac{\frac{q^2 \mu_0}{6\pi c} \cdot g^2 \Delta t}{m_0 g \Delta x} = 2{,}77 \cdot 10^{-22}$$

↳ Variación insignificante en el 1^er^ cm

↳ Sólo será importante en situaciones ultrarrelativistas, donde llegaría a una velocidad límite, si no compensas la energía perdida en forma de radiación.

3.7

Un modelo clásico del átomo de hidrógeno consiste en un protón y un electrón que gira en una órbita circular de radio $r_{Bohr} = 0{,}0529$ nm. Estimar cuánto tiempo tardaría el átomo en colapsar suponiendo régimen no relativista.



situación Coulomb

$$\left|\frac{m u^2}{r_B}\right| = \left|\frac{q_p \cdot q_e}{4\pi\varepsilon_0 r_B^2}\right| \rightarrow \frac{m_0 u^2}{r_B} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_B^2}$$

$$\rightarrow u^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 r_B}$$

$$T = \frac{1}{2} m_0 u^2 \; ; \; U_{ee} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_B} \rightarrow T + U_e = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_B}$$

Al radiar la carga, $r < r_B$, $\rightarrow \frac{d}{dt}(T + U_e) + P' = 0$ potencia radiada

~~dfa~~ que $T + U_e + W_{rad} = 0 = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + W_{rad}$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2}{3}\,\frac{q^2}{c^2}\left(\frac{u^2}{r}\right)^2=0$$

aceleración centrípeta

Larmor

Aproximamos a r cte = g

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{r}\right)+\frac{4}{3c^3}\,\frac{u^4}{r^2}=0$$

$$\frac{4}{3c^3}u^4+\frac{dr}{dt}=0$$

Aproximamos $u^2\approx\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 r}$ ya que $a_{centr}=\frac{u^2}{r}=\frac{F_{el}}{m_0}=\frac{e^2}{m_0}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

↳ Método perturbativo, suponemos perdidas por radiación pequeñas

$$\underbrace{\frac{4}{3c^3}\cdot\frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m_0^2}}_{\gamma}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{dr}{dt}=0$$

↳ $r^2\,dr=-\gamma\,dt \;\rightarrow\; \frac{r^3}{3}=-\gamma t+K$

En $t=0$, $r=r_B \rightarrow K=\frac{r_B^3}{3}$

↳ $r(t)\approx\left(-3\gamma t+r_B^3\right)^{1/3}$

$$t_{colapso}=[r=0]=\frac{r_B^3}{3\gamma}=\frac{12c^2\pi^2\varepsilon_0^2 m_0^2 r_B^3}{3e^4}=1{,}445\cdot10^{-11}\,s$$

↳ Va perdiendo fotones

$T_{vuelta}\cong 1{,}52\cdot10^{-16}\,s$; Nº giros = 95.000 ; $\beta<0{,}1$

(3.8) Una partícula de carga q y masa m_0 oscila en un campo de fuerzas caracterizado por una constante de recuperación elástica K. Estudiar la ecuación del movimiento considerando la energía radiada:

Sin pérdidas → OAS: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m_0}x=0$; $\omega_0^2=\frac{K}{m_0}$

$x=x_0\cos\omega t$

Con pérdidas

→ Aplicable Abraham-Lorentz pues $u(t)=u(t+T)$; $a(t)=a(t+T)$ (T cte en un periodo / amortiguamiento muy pequeño)

$$m_0\frac{d^2x}{dt^2}+Kx=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 m_0}\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\cdot\frac{da_y}{dt}\;\rightarrow\;\frac{q^2\mu_0}{6\pi c\, m_0^2}\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}-\omega_0^2x=0$$

Si suponemos que la fuerza es constante en un periodo $\left(\frac{d^4x}{dt^4}\simeq0\right)$

↳ $\frac{d}{dt}\left(-\frac{d^2x}{dt^2}-\omega_0^2x\right)\approx0 \;\rightarrow\; \frac{d^3x}{dt^3}=-\omega_0^2\frac{dx}{dt}$

↳ $\frac{d^2x}{dt^2}+\xi\,\omega_0^2\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$ ... con $\xi=\frac{q^2\mu_0}{6\pi c\, m_0^2}\sim10^{-24}$ para un e^-

Movimiento viene representado por un oscilador armónico amortiguado (en primera aproximación):

$$x\cong x_0\,e^{-\frac{\xi\omega_0^2 t}{2}}\cdot\cos(\omega_0 t)$$