Div
Stok
Grad
Helmholtz
$\vec{\nabla}$ $\vec{B}$

+ Límites

J
K
Continuos
dQ
dI
Cargas estáticas
$\vec{E}$
ϕ

$\vec{E}(\sigma)$
$\phi(E)$
T. Gauss
Ley Ampère
[illegible]

$\vec{F}cc' \longrightarrow \vec{A}, \vec{B}(\vec{A})$
Tma Ampère
Ley Biot-Savart
$\vec{F}(B, I)$
Ley Ohm
$\mathcal{E}$
Ley Faraday
$\mathcal{E}(v, B)$
M_{21}
$\mathcal{E}(M, I)$
L
Maxwell + J_D
E. O. A
Forma integral
con $\vec{D}$ $\vec{H}$
P
w_e
w_m
Tma. Poynting
$\vec{\Pi}$
$\frac{dJ}{dt}$
Π

Vacío
$\to \partial\rho/dt$
$-\frac{\partial W}{\partial t}$

$\frac{1}{R}$
ϕ
E
P
Q, J
$Q = 0$
$Q \neq 0$
$\vec{p}'$
$\vec{F}(E \ldots \vec{p})$
$\vec{M}$
U
$\vec{P}$
$d\vec{p}$
$d\phi \to \phi$
$\left.\begin{array}{l}\sigma_p\\ \rho_p\end{array}\right\} \to \phi$

$\vec{A}$
$M_P \to \vec{A}$
$\vec{B}$
$\vec{m}$

$d\vec{m}, \vec{M} \longrightarrow \vec{A}$ $\vec{B}$
$\vec{J}_M, \vec{K}_M \longrightarrow \vec{A}$
dip perm: ϕ_m, ρ_m, σ_m
$\vec{B}(\phi_m)$
$\vec{F}(\vec{B}$ en $\vec{m}) =$
$\vec{M}(\vec{r}) =$
U

$\rho(x)$
$\vec{J}$ ...
$\frac{\partial\rho}{\partial t}$
Gauss ... $\Delta\phi$
$T(\vec{E})$
$\vec{p}(x)$ ...
$\to$ dieléctrico $\vec{J}(\vec{p})$

C
$\frac{1}{r}$ ...
$\vec{m}$
$\vec{M}$
J_M
K_M
$\vec{H}, \vec{B}/\vec{M}$
$M(\vec{H})$
$\vec{\nabla}\times H$
$\vec{\nabla}\times\vec{B}$
E Maxwell
C contorno
C ideales

hip
Verificas
$\nabla\times\vec{D}$
Verificas
$\vec{\nabla}\cdot\vec{H}$
imán perm

Se pueden usar hojas operaciones

Ejemplo

0. Vectores

- Campo escalar ϕ
  - → Equipotenciales
  - → $\vec{\nabla}\phi$ → pendiente → campo vectorial

- Campo vectorial $\vec{E}$
  - → líneas de campo tangentes en cada punto
  - → $\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}$ · perpendicular a superficie; superficie cerrada: dentro a fuera
  - → $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V}\int \vec{E}\cdot d\vec{S}$ → Flujo neto $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$
  - ⇒ Tma de la divergencia:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\cdot dV = \oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Gradiente:

$$\int d\phi = \int_a^b \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = \phi(b) - \phi(a)$$

  - ⇒ Tma de Stokes:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ → circulación puntual

- Campo eléctrico
  - $Q_{enc} \to \exists\,\Phi,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$
  - $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \to \oint \cdot d\vec{l} = 0$

- Campo magnético
  - $\Phi = 0$
  - Circulación $\neq 0$ $\quad I = \int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot dS \neq 0$ en general

Teorema de Helmoltz

$\vec{F}$, $\lim_{r\to\infty} 0 \gg \frac{1}{r}$, $\vec{\nabla}\vec{F}, \vec{\nabla}\times\vec{F} \to 0 \gg \frac{1}{r^2}$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla}\times\vec{W}$$

$$\to \vec{W}(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\times\vec{F}}{r}\cdot dV$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{F}}{r}\cdot dV$$

Campo irrotacional $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0,\ \vec{\nabla}\vec{E} \neq 0 \Leftrightarrow V = 0,\ \vec{E} = -\vec{\nabla}U$ ⇒ Circulación $\vec{E}$ independiente del camino!!! & campos centrales

sin divergencia $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,\ \vec{\nabla}\times\vec{B} \neq 0,\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{W}$

en general ambas contribuciones

$\vec{E} \sim \vec{\nabla} \sim \int dV =$ magn.

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{R})$$

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)$$

T 1

$\vec{J} = \rho\cdot\vec{v}$, $\vec{K} = \sigma\cdot\vec{v}$ → $I_{enc} = \int \vec{K}\cdot d\vec{l}\cdot \hat{u}$ $\vec{J}$ densid. corriente ejemplos

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ Ec. de continuid $\int \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_V \rho\, dV + \int_S \sigma\, dS\right\}$

$\frac{dQ}{dt} = -\int \vec{J}\cdot d\vec{S}$ Corrientes estacionarias → $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

Ley de Coulomb: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')\cdot\vec{R}}{R^3}\, dV$ $\vec{F} = q\cdot\vec{E}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + (\vec{\nabla}\times\vec{A})$ $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{R}\, dV + C$

$\phi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r} + cte$

$\phi_A - \phi_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ → $\phi_A = \int + \phi_B$ → $\phi_B \xrightarrow[r_B\to\infty]{} 0$ → or. potenc

$A \rightarrow B$ $\phi_A = \dots$ ó $r_B = r_0 \to \phi_B = 0$

si distr. cargas ∞ → no origen en ∞!

Teorema Gauss: $\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$

Ley de Ampère: $\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_2\oint_1 \frac{d\vec{l}_2\times(d\vec{l}_1\times\vec{R}_{12})}{R_{12}^2}$ sobre CM. del circuito

$\vec{F}_{c'c} = I\oint d\vec{l}\times\vec{B}(\vec{r}) \to \vec{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint \frac{d\vec{l}'\times\vec{R}}{R^3}$ T $I d\vec{l} = \vec{J} dV$, $\vec{K}\cdot dS$

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\cdot dV' \to F_{c'c} = \int \vec{J}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\cdot dV$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ → líneas cerradas

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\cdot dV' + \vec{\nabla}\chi$ → puedes obtener a ojo si conoces $\vec{A}$ antes $\frac{\partial A_r}{\partial z} - \dots = B_\varphi$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}(\vec{r})$

Teorema Ampère: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\cdot I_{enc}$

Ley de Biot y Savart: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{u}_\varphi$

$\vec{E}, \vec{B}, q, \vec{v}$ → corriente instantánea, no estacionaria

↳ $\vec{F} = q\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ si $\vec{E} = 0 \to \vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = \vec{J}\times\vec{B}$

$\vec{J} = \sigma\cdot\vec{E}$ → Ley de Ohm, $\sigma = n\frac{q^2}{m}\tau$, $R = \frac{1\cdot L}{S\sigma}$

$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_m d\vec{l} = \int \frac{\vec{J}}{\sigma} = R\cdot I \neq 0$ → campo electromotor ↔ estático $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

$\vec{E}_m = \vec{F}/q$

$\mathcal{E} = \oint(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ → $\vec{\nabla}\times\vec{E}_m = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}_{est} = 0$ → ley de Faraday

Ley de Lenz → I_i genera ϕ compensador

Inducción

$\Phi_2 = M_{21}\cdot I_1 \longrightarrow M_{21} = M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_2\oint_1 \frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{R}$ → difícil

$\vec{B}$, de sacar $\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} \to M\cdot I$

$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(M_{21}I_1)$ lo coef. inducción

$M_{11} = L$ → coef. autoinducción $L = \frac{d\phi}{dI}$

Corriente de desplazamiento

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{J}_D})$$

$$= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J}+\vec{J}_D) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array}$$

T2

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ → vector desplazamiento

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\vec{D} = \rho & \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$ T. Gauss

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ L. F-L

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ líneas cerradas

$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{cil}$ T. Ampère

Teoremas de conservación → Tma. de Poynting $\Rightarrow -\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \oint \vec{N}\, d\vec{S} + \int \vec{J}\cdot\vec{E}\, dV$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \Leftrightarrow \vec{F} = \int(\rho\cdot\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B})\, dV$

$P = \int \vec{J}\cdot\vec{E}\cdot dV$ → Magnéticas no desarrollan W

$w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$, $w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$ → densid de energía de campo → $E = W_{em} = \int (w_e + w_m)\, dV$

$P = -\int(\underbrace{\vec{E}\times\vec{H}}_{\vec{N}})\, d\vec{S} - \frac{\partial W_{em}}{\partial t}$ → ef. Joule

Vector de Poynting: $\vec{N} = \vec{E}\times\vec{H}$

Conservac del mom

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \underbrace{\frac{\vec{N}}{c^2}}_{\rho_p} dV + \int \underbrace{\pi\cdot d\vec{S}}_{\text{flujo } P/st}$$

T_{ij} ≡ Tensor de Maxwell $= D_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{D}\cdot\vec{E}) + (B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{B}\cdot\vec{H}))$

T3

Vacío

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \nabla^2\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{array}$$

$\frac{W}{t} = \int \vec{N}\cdot d\vec{S} = P$

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int \pi\cdot d\vec{S}$

↳ sólo subconjunto soluciones cumplen EM.

<u>Ondas planas</u>

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2 f}{dt^2} \rightarrow \underbrace{f(t - \tfrac{z}{v})}_{+\hat{u}\rightarrow} + \underbrace{f(t + \tfrac{z}{v})}_{-\hat{u}\leftarrow}$$

$s = t \pm \frac{z}{v}$

¿ejemplo?

→ luz onda transversal

$|\vec{E}| = v\,|\vec{B}|$

$w_e = w_B$ → $W_{em} = \varepsilon_0 \cdot E^2$ → $\vec{N} = c\cdot W_{em}\,\vec{u}$

$\vec{p} = \frac{\vec{N}}{c^2} = \frac{W_{em}}{c}\vec{u}$ ← $\frac{d\vec{p}}{dt} \ldots = \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{N}{c^2}\, dV + \int \pi\, d\vec{S}$

$p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}$

T4

$$\frac{1}{R} = f|_{x'=y'=z'=0} + \frac{\partial f}{\partial x'}\Big|_{x'=0} + \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{y'=0} + \frac{\partial f}{\partial z'}\Big|_{z'=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\Big|_{x'=0} + \dots$$

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2r'}{r}\cos\theta}} = \frac{1}{r\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2-\frac{5}{16}\varepsilon^3+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{r}\sum_0^\infty P_n(\cos\theta)\cdot\left(\frac{r'}{r}\right)^n \qquad P_0 = 1,\ P_1 = x,\ P_2 = \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int \rho(\vec r')P_n(\cos\theta)(r')^n\,dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\underbrace{\frac{Q}{r}}_{\varphi_0} + \underbrace{\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}}_{\varphi_1} + \frac{1}{2}\sum\frac{x_i x_j Q_{ij}}{r^5} + \dots\right\}$$

c. tot. $Q = \int \rho(\vec r')\,dV = \sum q_i$

Mom dip. $\vec p = \int \vec r'\rho'\,dV = \sum q_i\cdot\vec r_i'$

Mom cuadrup. $Q_{ij} = \iiint \rho\,(3x_i x_j - \delta_{ij}(r')^2)\,dV'$
$= \sum q_k(3x_{ik}'x_{jk}' - \delta_{ij}(r_k')^2)$

$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q\cdot\vec r}{r^3} + \frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r - r^2\vec p}{r^5} + \dots\right\}$$

$Q\neq 0 \to \vec R_{cq} = \frac{\sum \vec r_n q_n}{\sum q_n} = \frac{\int \vec r\rho\,dV}{\int\rho\,dV} = \frac{\vec p}{Q} \to \vec p = Q\cdot\vec R_{cq}$ (depende de O) $\to$ si $\vec R_{cq} = 0$ $\to \vec p = 0$, $\cancel{\phi_0}$ ✓

$Q = 0 \to \Phi_0 = 0$, $\vec p_+ = Q_+\vec R_{cq+}$, $\vec p_- = Q_-\cdot\vec R_{cq-} \Rightarrow \vec p = Q_+\underbrace{(\vec R_{cq+} - \vec R_{cq-})}_{\vec d} \to$ no depende de O.

$\vec p_0' = \vec p_0 + \vec d\,Q$

→ Dipolo puntual $q_+\cdot d = cte$ $\quad \begin{smallmatrix} q\to\infty \\ d\to 0\end{smallmatrix}$, $\Phi = \phi_1$, $\vec E = \vec E_1$

$\vec E$ sobre $\vec p \to \vec F = (\vec p\,\vec\nabla)\vec E$
si $\vec E = cte \to \vec F = 0 \to \vec M = \vec p\times\vec E = \vec d\times q\cdot\vec E$

$W \to U = -\vec p\cdot\vec E$

Distribución de carga $\quad \rho = n q_i = \frac{dN}{dV}q_i = \frac{dq}{dV}$

$\vec{\mathbb P}$ ≡ densid de mom dipolar $\quad \vec{\mathbb P} = \frac{d\vec p}{dV} = n\vec p_i = \frac{dN}{dV}\vec p_i$

$d\vec p = \vec{\mathbb P}\cdot dV \to d\phi = \dots d\vec p\cdot\vec R$

$$\phi(\vec r) = \int_V d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{\mathbb P}\cdot\vec R}{R^3}dV, \quad \vec E = -\vec\nabla\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{\mathbb P}\cdot d\vec S}{R} + \int -\frac{\vec\nabla'\vec{\mathbb P}}{R}dV$$

Distribución de dipolos $\longrightarrow$ $\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\frac{\sigma_p\cdot dS}{R} + \int\frac{\rho_P}{R}dV\right)$

$\sigma_p = \vec{\mathbb P}\cdot\vec n$, $\rho_p = -\vec\nabla\vec{\mathbb P}$

$\vec p = q\cdot a\cdot\hat u_y$

$d\vec p^{\,l} = \underbrace{dq}_{\lambda dz'}\cdot a\cdot\hat u_y$

$$\phi^l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d\vec p\cdot\vec R}{R^3}$$

Potencial vector

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{R}\,dV \to \vec{A_0} = 0 \to$ $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}}$ $\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V(\vec{r}'\times\vec{J})\,dV$

Momento dipolar magnético

Circuito plano
↳ $\vec{m} = I\cdot\vec{S} = I\oint \vec{n}\cdot dS$

$\vec{m}$ puntual

$\vec{m} = I\cdot\vec{S}$, $\begin{matrix} I \to \infty \\ S \to 0 \end{matrix}$ / $I\cdot S = cte$

Circuito

⟶ se cancelan, mallado imaginario
$\vec{m}$ independiente del origen de coordenadas ! ⟶ pensar el + fácil xa simplificar $\int$

$d\vec{m} = \vec{M}\cdot dV$
densid de m°, $\vec{M} = n\,\vec{m}$

$\boxed{\vec{J_M} = \vec{\nabla}'\times\vec{M} \quad \vec{K_m}' = \vec{M}\times\vec{n}}$

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}\times\vec{R}}{R^3}dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}}{R}dV + \int\frac{\vec{M}\times\vec{n}}{R}dS\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int\frac{\vec{J_m}}{R}dV + \int\frac{\vec{K_m}}{R}dS\right)$

---

distribución de polos ... sólo aquí xq dipolo puntual $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$

$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{r^3} \Longleftrightarrow \vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\phi_m$

P externo a V

$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{M}\cdot\vec{R}}{R^3}dV = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_m}{R}dV + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\sigma_m}{R}dS$ $\quad \rho_m = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$, $\sigma_m = \vec{M}\cdot\vec{n}$

Fuerza $\vec{B}$ sobre $\vec{m}$

Momento $(\vec{F}) = \vec{M} = \oint \vec{r}'\times(I\,d\vec{r}\times\vec{B}) = \frac{1}{2}\oint(\vec{r}'\times d\vec{r}')\times\vec{B} = \underline{\vec{m}\times\vec{B}}$

$S \to 0$

$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = (\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$ – ($\vec{m}$ fuera de las corrientes generadoras de $\vec{B}$)

$U = \int_0^{90°} M\cdot d\theta = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

$U_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

---

distribución dipolos

si $\vec{m}$ no en origen $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R} - R^2\vec{m}}{R^5}}$

$d\vec{m} \to d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(d\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R} - R^2 d\vec{m}}{R^5}$

↳ $\vec{B} = \int\ldots$

$\vec{B}(0,0,z)$, $\vec{E}$ ⟶ puntos próximos $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ ... fuera región ⟶ $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r e_r) = -\frac{\partial e_z}{\partial z}$
$+ \oint(e_r = 0, e_\theta = 0)$

ó $e_z = e_z|_{r=0} + \frac{\partial e_z}{\partial r}\Big|_{r=0} r + \ldots$
$e_r = e_r|_{r=0} + \frac{\partial e_r}{\partial r}\Big|_{r=0}\cdot r + \ldots$

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, conductor : $\sigma = \infty$ $\sigma \to 0 \Rightarrow$ electrostática

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma \rho}{\varepsilon_0} \to \rho = \rho_0 \cdot e^{-t/\tau}$ (ec. continuid) $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$

$t \to \infty \to$ equilibrio $\rho = 0 \to \sigma_c \to \vec{E}int = 0$, $\vec{E}ext \perp$ Sup. $= \vec{n} \cdot E$

Dentro del conductor $\Delta \phi = 0$: $\phi = cte \to S$ equipotencial

$E = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0}$ en S'

Carga de un conductor

$C = \frac{Q}{V}$ (F) $\to Q = 4\pi\varepsilon_0 aV$ si esférico

Fuerza de $\vec{E}$ sobre un conductor

$\vec{B} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \to \vec{N} = 0$

$\vec{F} = \oint \pi \cdot d\vec{S} \to = \int T_{33}\, dS \cdot \vec{n} = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 dS \cdot \vec{n} = \int \frac{\sigma_c^2}{2\varepsilon_0} \cdot d\vec{S}$

Dieléctricos

$\to$ cargas ligadas $\to$ se deforma $\rho \to \vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$ polarizabilid (át) Gauss $\to \alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$

Medios materiales $\to$ valor promedio $\to \vec{E}$promedio

exterior $\to$ distancias grandes $\vec{P} \to \rho_p$ y σ_p $+ \rho$ $\}\ \vec{E}, \phi$ $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$

interior $\to \gg$ átomos $\to$ te. válido

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \to \vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 (1 + \chi_e)}_{\varepsilon} \vec{E}$, $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$ susceptibilid dieléctrica

$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$

Condensadores: 2 conductores $\to +Q, -Q$

$V = \phi_2 - \phi_1$, $C = \frac{Q}{V}$ plano: $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ cilindr: $\varepsilon_0 \frac{2\pi h}{\ln \frac{b}{a}}$

Si $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ (sistema ∞, homogéneo, sin cambios)

$\hookrightarrow C = \varepsilon_r \cdot C_0$

$\parallel$ $C_{eq} = \sum C_i$

serie $\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$

5.2. $\vec{B}$

magnetizar : $\vec{m}$ → distribución de dipolos

$\vec{M}$ → densidad mag vector magnetización $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$, $K_m = \vec{M}\times\vec{u}$

$\vec{B} \neq \vec{B}(t)$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{M}}_{J_M}) \rightarrow \vec{\nabla}\times(\underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}_{\vec{H}}) = \vec{J} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \end{matrix}$

$\vec{B}(t) \rightarrow \vec{J} + \vec{J}_m + \vec{J}_P$

$d\vec{p} = \vec{P}\cdot dV$, densid mag dipolar

$\vec{J}_P = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_m + \vec{J}_P + \vec{J}_D) = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_M) + \mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{P} + \varepsilon_0\vec{E})$

↳ $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} + \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{cases} + \begin{cases} (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = \sigma & (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\times\vec{n} = 0 \\ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{n} = 0 & (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\times\vec{n} = \vec{K} \end{cases}$$

+ si m. lineales , $\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Medios permeables: $\vec{M} = \chi_m\cdot\vec{H}$ (susceptibilidad magnética) $\rightarrow \vec{B} = \mu_0\underbrace{(1+\chi_m)}_{\mu}\vec{H}$ $\quad \mu_r = 1 + \chi_m$

- Diamagnéticos $\chi_m < 0$ $\quad \approx 10^{-4} \rightarrow \mu \simeq \mu_0$
- Paramagnéticos $\chi_m > 0$

$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}$

Medios no permeables

- Ferromagnéticos → $\vec{M} \not\propto \vec{H}$ / histéresis , $\vec{M}(\vec{H} = 0) \neq 0$

Condiciones de contorno

$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\cdot dV = \int \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$ $\quad$ Gauss $\quad h \to 0 \Rightarrow D_{n2} - D_{n1} = \sigma$ $\quad$ si lineales $\rightarrow \varepsilon_2 E_{n2} - \varepsilon_1 E_{n1} = \sigma$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow B_{n2} - B_{n1} = 0 \quad \rightarrow \mu_2 H_{n2} - \mu_1 H_{n1} = 0$

T: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_m \xrightarrow[S\to 0]{h\to 0,\ \Phi_m \to 0} \begin{matrix}\delta l_1 = \delta l_2 \\ \delta l_3 = \delta l_4 = 0\end{matrix} \Rightarrow E_{t2} - E_{t1} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \rightarrow \int \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enc}$, $\Phi = 0$ $h \to 0$ $\longrightarrow H_{t2} - H_{t1} = I_{enc\,libre} = (\vec{K}_l \times \vec{n})\cdot d\vec{l}$

$I_{enc} = \int K_n\cdot dl = \int \vec{K}\cdot\vec{n}_e\cdot dl = \int \vec{K}(\vec{n}\times\vec{t})dl = \int (\vec{K}\times\vec{n})\vec{t}\cdot \underbrace{dl}_{d\vec{l}}$

$\vec{n}_e = \vec{t}$

Conductores ideales

$D_n = \sigma \quad \sigma(\vec{E}, \vec{D})$

$\vec{E}_t = 0$

T. 6

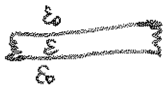
C. eléctrico

conocemos ρ, no $\vec{P}(\vec{E})$

para determinar $\vec{D}$: $\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}$, $\vec{\nabla}\times\vec{D} = \varepsilon_0 \cancel{\vec{\nabla}\times\vec{E}} + \ldots = \vec{\nabla}\times\vec{P}$

$\Rightarrow$ hipótesis dirección/sentido campo si simetría + Gauss $\rightarrow \vec{D} \rightarrow \vec{E}$ + verificar

$\rightarrow$ no solución $\rightarrow$ numérico



$\rightarrow$ Gauss $\rightarrow \vec{E}_i = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_i}$

Verificaciones:

1) $\vec{P} \rightarrow \rho_p, \sigma_p \Rightarrow \Sigma = 0$ $\quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

2) Vacío con $\rho + \rho_p + \sigma_p \rightarrow \vec{E} \stackrel{?}{=}$

3) Ec. Maxwell (1º esto)

4) Contorno

C. magnético

σ_m, ρ_m

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{libre} \rightarrow (\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}) \rightarrow$ no se conoce

$\Rightarrow$ hipótesis simetría $\rightarrow$ Ampère $\rightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{B}$ + verificar
- E.M
- Cont.
- Vacío
- $\Sigma = 0$
- (histéresis)

Imanes permanentes

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \ \forall P$, $\rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_m \ \forall P$