

Problemas de Física Atómica y de las Radiaciones. Curso 2010-2011.
Bol. 1.

- ✧ 1.- Calcular la constante de Rydberg R_∞ a partir de los valores de las constantes fundamentales m_e , e , h , c , ϵ_0 mediante la fórmula predicha por la teoría de Bohr. Repetir los cálculos reemplazando m_e por la masa reducida del electrón y el protón. Comparar con el valor experimental de R_H . ✓
- ✧ 2.- Calcular las constantes de Rydberg para el deuterio y el tritio y compararlas con la del hidrógeno encontrada en el apartado anterior. Comparar la longitud de onda de las primeras transiciones de Lyman y Balmer para el deuterio y tritio con las transiciones correspondientes para el hidrógeno. Discutir la precisión requerida para resolverlas. ✓
- ✧ 3.- Utilizando el modelo de Bohr obtener las longitudes de onda de las primeras 4 líneas de las series de Lyman, Balmer y Paschen para los átomos monoeléctricos H, He⁺, Li²⁺ y C⁵⁺, suponiendo la masa del núcleo infinita y tomando su valor real (aproximarla como un número entero de una). ✓
- ✧ 4.- Considérese la dispersión de una partícula α de 5 MeV de energía por un electrón atómico, supuesto en reposo por simplicidad. ¿Cuál es el máximo momento que puede ser transferido al electrón atómico? ¿Cuál es el máximo ángulo de deflexión de la partícula α ? ✓
- ✧ 5.- Considérese el experimento de Rutherford en el que una partícula α de 10 MeV energía en el laboratorio incide sobre un núcleo de oro ($Z=79$).
- a) Calcular la distancia de máxima aproximación en colisiones frontales. ✓
- b) Encontrar el ángulo de dispersión en CM si la partícula α incide con un parámetro de impacto de $b = 8 \times 10^{-14}$ m. ✓
- ✧ 6.- Encontrar la energía incidente de una partícula α sobre un núcleo de cobre ($M=63$ u, $Z=29$) cuyo radio es $R \approx 5 \times 10^{-15}$ m, para el cual la sección eficaz de dispersión comienza a desviarse de la de Rutherford en colisiones frontales ($\theta = 180^\circ$). ✓
- ✧ 7.- Calcular el radio en el estado fundamental y la energía de ionización del positronio y el muonio. Compararlos con los valores correspondientes del átomo de hidrógeno. ✓
- ✧ 8.- Calcular el radio y las primeras transiciones de Lyman y Balmer del positronio y el muonio. ✓
- ✧ 9.- Calcular el radio de Bohr y la energía y longitud de onda de las primeras transiciones de Lyman y Balmer para un átomo de Rydberg de ^{12}C . Discutir con qué tipo de aparatos se pueden medir. ✓

con $n = 350$

× 10.- Comparar el radio de Bohr las orbitas $n = 3, 6$ del ^{208}Pb piónico con el radio nuclear ✓

× 11.- Calcular la transición de más baja energía de la serie de Paschen de un átomo kaónico de ^{208}Pb . ✓

× 12.- Calcular la transición de más baja energía de la serie de Lyman del hidrógeno y tritio antiprotónicos. ✓

× 13.- Calcular la energía en el estado fundamental ($3s$) y de los cuatro primeros estados excitados ($3p, 4s, 4p, 4d$) del sodio, utilizando los defectos cuánticos. Calcular la energía y longitud de onda de las transiciones correspondientes. posibles entre estos niveles ✓

× 14.- Explicar los símbolos de la transición $3^2D \rightarrow 3^2P$ en sodio. ¿A cuantas líneas del espectro corresponde? ✓

× 15.- Calcular el radio de separación medio de los dos electrones del He a partir de su energía en el estado fundamental (-79 eV). ✓

× 16.- Calcular las energías y longitudes de onda de las primeras transiciones del He suponiendo que el electrón excitado está completamente apantallado por el electrón en el estado fundamental.

× 17.- Discutir mediante las reglas de Hund el estado fundamental del los siguientes átomos: S, Ca, Fe, Br. ✓

× 18.- Discutir mediante las reglas de Hund el estado fundamental del los siguientes átomos: Au, Pb, I, Cs. ✓

× 19.- Tomando la ley de Moseley con $\sigma = 1$ para las líneas K y $\sigma = 7,4$ para las líneas L
a) Calcular las dos longitudes de onda más largas de la serie K para el Cu ($Z=29$). ✓
b) Calcular las dos longitudes de onda más largas de la serie L del Au ($Z=79$). ✓
c) Encontrar el elemento cuya línea K_α tiene una longitud de onda 0.723 Å. ✓

× 20.- Calcular la energía de las transiciones K y L de rayos X para U^{91+} . Calcular estas transiciones para el uranio natural utilizando la ley de Moseley. ✓

× 21.- En la siguiente tabla se dan frecuencias de rayos X para algunos elementos. Ajustar los datos por la ley de Moseley y determinar a que capa pertenecen a partir del coeficiente de apantallamiento. ✓

Elemento	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Mo	Ag	Au
Z	23	24	25	26	27	28	29	30	42	47	79
frec./ 10^{18}Hz	1.199	1.310	1.427	1.550	1.667	1.810	1.947	2.090	4.021	5.363	16.650

PROBLEMAS (Física Atómica)

① $z=1 \rightarrow$ carga del núcleo

$$R_{\infty} = z^2 \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 109737 \text{ cm}^{-1} \quad R_{\text{exp}} = 109677,5810 \text{ cm}^{-1}$$

\hookrightarrow Precisión 0,05% (3^{ra} cifra significativa)

$$R_{\mu} = \frac{m_{\text{emp}}}{m_{\text{e}} + m_{\text{p}}} \cdot \frac{e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = \frac{1}{1 + \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{p}}}} \cdot R_{\infty} = 109677,5839 \text{ cm}^{-1}$$

\hookrightarrow Precisión 0,000002% (9^{ta} cifra significativa)

La precisión es buena suponiendo la masa del núcleo infinita, pero la verdadera concordancia hasta la 3^{ra} cifra significativa se da para la sustitución de m_{e} por la masa reducida.

② $z=1$ (carga del núcleo) $m_{\text{p}} \approx m_{\text{n}}$

$$R_{\text{deut}} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{p}} + m_{\text{n}}}} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_{\text{e}}}{2m_{\text{p}}}} = 109707, \text{ cm}^{-1}$$

14,15

$$R_{\text{trit}} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_{\text{e}}}{m_{\text{p}} + 2m_{\text{n}}}} \approx \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_{\text{e}}}{3m_{\text{p}}}} = 109717, \text{ cm}^{-1}$$

3322

$$h\nu = R_H h c \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right); \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$\sqrt{c = \lambda \nu}$ $n < m$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \Rightarrow \lambda = R_H^{-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1}$$

Serie de Lyman: $n=1, m > n$

m	λ_H (nm)	λ_0 (nm)	λ_T (nm)	
2	121,5684	121,5354	121,5243	\rightarrow Ultravioleta
3	102,5734	102,5455	102,5362	
4	97,2548	97,2283	97,2195	
5	94,9753	94,9495	94,9409	

Serie de Balmer: $n=2, m > n$

m	λ_H (nm)	λ_0 (nm)	λ_T (nm)	
3	656,4696	656,2909	656,2314	\rightarrow Visible
4	486,2138	486,1444	486,0573	
5	434,1730	434,0549	434,0155	
6	410,2035	410,1818	410,1446	

Para resolver las líneas, se requiere una precisión de 0,02nm para ~~las~~ diferenciar todas.

③ $R = \frac{Z^2 R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{m_{\text{núcleo}}}}$ ↗ carga del núcleo • $R_H (m_N = \infty) = R_{\infty} \cdot Z^2$
↳ para los 4 núcleos salvo por Z^2 .

$\lambda = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1}$

$m_N (H) \approx 1 \text{ uma}$
 $m_N (He^+) \approx 4 \text{ uma}$
 $m_N (Li^{2+}) \approx 7 \text{ uma}$
 $m_N (C^{3+}) \approx 12 \text{ uma}$
→ todos hidrogenoides (1 solo e⁻)

Serie de Lyman: $n=1, m > n$

m	λ_{∞} (nm)	λ_H (nm)	λ_{He} (nm)	λ_{Li} (nm)	$\lambda_{C^{3+}}$ (nm)
2	121,502	121,569	121,586	121,595	121,601
3	102,518	102,574	102,588	102,596	102,601
4	97,202	97,255	97,268	97,276	97,281
5	94,924	94,976	94,989	94,996	95,001

Serie de Balmer: $n=2, m > n$

3	656,112	656,472	656,562	656,614	656,644
4	486,003	486,276	486,342	486,381	486,403
5	434,937	434,175	434,234	434,268	434,288
6	410,170	410,295	410,351	410,384	410,402

Serie de Paschen: $n=3, m > n$

4	1874,607	1875,635	1875,892	1876,039	1876,125
5	1281,469	1282,142	1282,348	1282,449	1282,507
6	1093,520	1094,120	1094,270	1094,356	1094,406
7	1004,672	1005,223	1005,361	1005,440	1005,486

④

↓
 Hoja .KYP (pág. siguiente)

41



$T_{\alpha} = 5 \text{ MeV}$
 $T_e = 0$

Caso no relativista ($5 \text{ MeV} \ll m_{\alpha} c^2$):

$T_{\alpha} = 5 \text{ MeV} = T_{\alpha'} + T_{e'}$ $\rightarrow \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} = \frac{(p_{\alpha}')^2}{2m_{\alpha}} + \frac{(p_{e'})^2}{2m_e}$; $p_{\alpha} = \sqrt{2m_{\alpha}T_{\alpha}}$

$\vec{p}_{\alpha} = (p_{\alpha}, 0) = \vec{p}_{\alpha'} + \vec{p}_{e'} = (p_{\alpha'} \cos \theta + p_{e'} \cos \varphi, p_{\alpha'} \sin \theta - p_{e'} \sin \varphi)$

$\vec{p}_{\alpha'} = \vec{p}_{\alpha} - \vec{p}_{e'}$ $\downarrow (\)^2$

$p_{\alpha'}^2 = p_{\alpha}^2 + p_{e'}^2 - 2 p_{\alpha} p_{e'} \cos \varphi =$

$\hookrightarrow p_{e'}^2 + p_{e'}^2 \frac{m_{\alpha}}{m_e} = 2 p_{\alpha} p_{e'} \cos \varphi$ ($p_{e'} \neq 0$)

$p_{e'} = \frac{2 p_{\alpha} \cos \varphi}{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_e}}$

$p_{e'}(\varphi), \varphi \in [0, \pi/2]$

$p_{e' \text{ MAX}} = p_{e'}(\varphi=0) = \frac{2 p_{\alpha}}{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_e}} = \frac{2 \sqrt{2 m_{\alpha} T_{\alpha}}}{m_e + m_{\alpha}} = 0,053 \text{ MeV}/c$

Porcentaje bajo porque $m_e \ll m_{\alpha}$

$\hookrightarrow p_{\alpha' \text{ MAX}} \sin \theta = p_{e' \text{ MAX}} \sin \varphi = 0 \rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \pi$

$\hookrightarrow p_{\alpha' \text{ MAX}} \cos \theta = - p_{e' \text{ MAX}} \cos \varphi = - p_{e' \text{ MAX}} \rightarrow \theta = \pi$ necesariamente

\rightarrow Lógico, corresponde a una colisión frontal, lo que



\hookrightarrow Por tanto, el máximo ángulo de deflexión de la partícula α es $\theta = \pi$.

Caso relativista: $E_e = T_e + m_e$ (convencido $c=1$)

$$(E_e, \vec{p}_e) + (m_e, \vec{0}) = (E_{e'}, \vec{p}_{e'}) + (E_{e'}, \vec{p}_{e'}) \quad (1)^2$$

$$m_e^2 + m_e^2 + 2E_e m_e = m_e^2 + m_e^2 + 2E_{e'} E_{e'} - 2\vec{p}_{e'} \cdot \vec{p}_{e'}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow 2E_e m_e &= 2E_{e'} (E_e + m_e - E_{e'}) - 2\vec{p}_{e'} (\vec{p}_{e'} - \vec{p}_{e'}) \\ &= 2E_{e'} (E_e + m_e) - 2E_{e'}^2 + \underbrace{2\vec{p}_{e'}^2}_{= 2m_e^2} - 2\vec{p}_{e'} \cdot \vec{p}_{e'} \end{aligned}$$

$$2m_e (E_e + m_e) = 2E_{e'} (E_e + m_e) - 2\vec{p}_{e'} \cdot \vec{p}_{e'}$$

$$\hookrightarrow \vec{p}_{e'} \cdot \vec{p}_{e'} = (E_e + m_e) (E_{e'} - m_e)$$

$$|\vec{p}_{e'}| \cdot |\vec{p}_{e'}| \cdot \cos \varphi = (E_e + m_e) (E_{e'} - m_e)$$

$$\frac{|\vec{p}_{e'}| \cos \varphi}{E_e + m_e} = \frac{E_{e'} - m_e}{\sqrt{(E_{e'})^2 - m_e^2}}$$

$$X \equiv \frac{|\vec{p}_{e'}|^2 \cos^2 \varphi}{(E_e + m_e)^2} = \frac{(E_{e'} - m_e)^2}{(E_{e'} - m_e)(E_{e'} + m_e)} \quad ; \quad X < 1 \text{ siempre porque } p_{e'} < E_{e'} \text{ } \cos^2 \varphi < 1$$

$$X = \frac{E_{e'} - m_e}{E_{e'} + m_e} \rightarrow E_{e'} X + m_e X = E_{e'} - m_e$$

$$\rightarrow E_{e'} = m_e \left(\frac{X + 1}{1 - X} \right) = m_e \left(1 + \frac{2X}{1 - X} \right) = m_e \left(1 + \frac{2}{\frac{1}{X} - 1} \right)$$

$$T_{e'} = E_{e'} - m_e = \frac{2m_e}{\frac{1}{X} - 1}$$

$$T_{e'}^{\max} = T_{e'}(X \rightarrow 1) = T_{e'}(X_{\max})$$

$X_{\max}(\varphi) \rightarrow$ se da cuando $\varphi = 0$ (= 0 en caso no relativista)

$$(\vec{p}_{e'}^{\max})^2 = E_{e'}^{\max 2} - m_e^2 = m_e^2 \left(\left(1 + \frac{2}{\frac{(E_e + m_e)^2}{|\vec{p}_e|^2} - 1} \right)^2 - 1 \right)$$

$$p_{e'}^{\max} = m_e \left(\left(1 + \frac{2}{\frac{(T_e + m_e + m_e)^2}{(T_e + m_e)^2 - m_e^2} - 1} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} = 0,053 \text{ MeV}$$

$\theta = \pi$ por idéntico razonamiento al caso NR.

5) $M_{\alpha} = 3727 \text{ MeV}$

$T_{\alpha} = 10 \text{ MeV} \rightarrow Q = 2q_e = Zq_e ; q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$Z_{\text{Au}} = 79$

Potencial coulombiano $\phi = \frac{Zq_e}{4\pi\epsilon_0 r}$

a) Colisión frontal

Punto de retroceso $\rightarrow v_{\alpha} = 0 \rightarrow \hat{=}$ altura máxima de aproximación

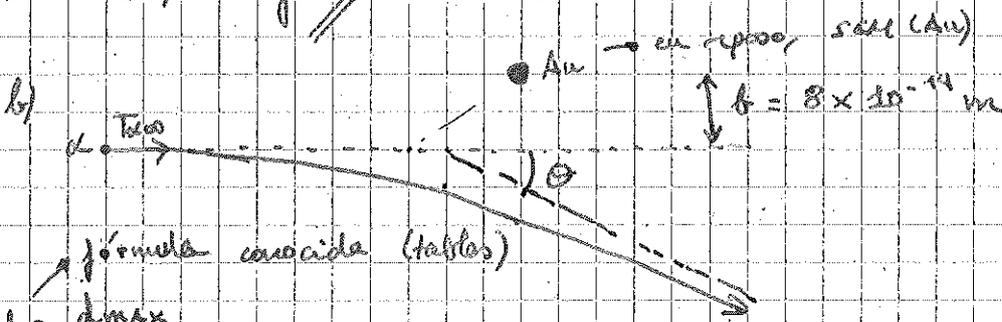
Por conservación de energía

$E(r) = T_{\alpha}(r) + Q \cdot \phi(r) = E(\infty) = \text{cte} = T_{\alpha\infty} = 10 \text{ MeV}$

$E(d_{\text{max}}) = T_{\alpha}(d_{\text{max}}) + Q \cdot \phi(d_{\text{max}}) = T_{\alpha\infty}$

$\hookrightarrow 10 \text{ MeV} = \frac{2 \cdot 79 q_e^2}{4\pi\epsilon_0 d_{\text{min}}} \Rightarrow d_{\text{min}} = \frac{Z Z q_e^2}{4\pi\epsilon_0 T_{\alpha\infty}}$

$= Z Z \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{cte}} \cdot \frac{\text{cte}}{T_{\alpha\infty}} = 79 \cdot 79 \cdot \frac{1}{137,036} \cdot \frac{197,33 \text{ MeV fm}}{10 \text{ MeV}}$
 $= 22,752 \text{ fm} //$



fórmula conocida (tablas)

$b = \frac{d_{\text{max}}}{2 \tan(\frac{\theta}{2})}$

$\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{d_{\text{max}}}{2b} \rightarrow \theta = 2 \arctg\left(\frac{d_{\text{max}}}{2b}\right) = 2 \arctg\left(\frac{22,75 \text{ fm}}{2 \times 80 \text{ fm}}\right) = 16,13^{\circ} //$

⑥ $Z_{Au} = 29, M = 63u, R = 5 \text{ fm}$

$\theta = 180^\circ$

↳ Difiere cuando choca con el núcleo (ya lo ve puntual)

$L_{\text{MAX}} \sim R = \frac{Zz e^2}{4\pi\epsilon_0 T_{\text{ALFA}}}$

↳ $T_{\text{ALFA}} = Zz \alpha \cdot \frac{(\hbar c)}{R} = \frac{29 \cdot 2}{171,036} \frac{1971,33 \text{ MeV fm}}{5 \text{ fm}} = 16,704 \text{ MeV}$

⑦ $r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{Z e^2 \mu} = \frac{\hbar c}{\alpha \mu c^2} n^2$ (fórmulas de teoría) $Z=1$

$E_n = - \frac{\alpha^2 \mu c^2}{2 n^2} \rightarrow I = E_1$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

	μ	r_1 (Å) ^{fundamental}	I (eV)
Hidrógeno: $p e^-$	$me / (1 + \frac{me}{mp})$	0,53	-13,60
Positronio: $e^+ e^-$	$me/2$	1,058	-6,803
Muonio: $\mu^+ e^-$	$me / (1 + \frac{me}{m\mu})$	0,532	-13,574

$M_\mu = 105,66 \text{ MeV}$
 → Muonio se parece más al hidrógeno porque M_μ más cerca de m_p .

⑧ $r_n = \frac{\hbar c}{\alpha \mu c^2} \cdot n^2$; $R_\mu = \frac{R_{\text{H}}}{1 + \frac{me}{m\mu}}$; $\lambda = \frac{1}{R_\mu} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1}$

n	m	Positronio	Muonio		
		r_n (Å)	λ (nm)		
		r_n (Å)	λ (nm)		
1	2	1,058	243,005	0,532	122,09
	3		205,04		163,01
	4		194,40		97,167
	5		185,85		55,38
2	3	4,233	1342,24	2,128	653,29
	4		972,02		488,86
	5		867,8		436,04
	6		820,14		412,05
3		9,525		4,788	
4		16,93		8,512	

9

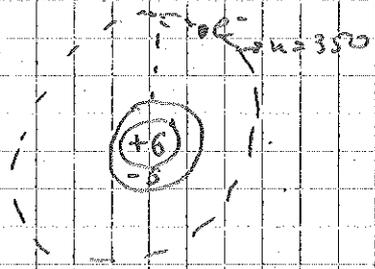


error en enunciado

$E_n, r_n \quad (n = 350)$

$Z_{\text{eff}} = 1$

$m_N \sim 12 \text{ u}$



$r_n = \frac{\hbar c n^2}{\alpha \mu c^2} = \frac{n^2 a_B}{2}$

$c^2 \mu = \frac{m_e c^2}{1 + \frac{m_e}{m_N}} = \frac{0,511 \text{ MeV}}{1 + \frac{0,511 \text{ MeV}}{12 \text{ u} \cdot 931,494 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}}}$

$E_n = -\frac{\alpha^2 \mu c^2}{2 n^2} \sim -13,6 \text{ eV} / 350^2$

$= 0,51038 \text{ MeV}$

$r_{350} = \frac{197,33 \text{ MeV fm}}{137,036 \cdot 350^2} = 6,48 \mu\text{m}$

↳ tamaño de una bacteria

$E_{350} = -\frac{\mu c^2 (\text{eV})}{2 \cdot (137,036)^2 \cdot 350^2} = -0,111 \text{ meV} = -1,1 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

Se puede medir con espectrómetros el espectro de desexcitación que está en el rango de las microondas (GHz).

$\nu = \frac{|E_{350} - E_{349}|}{h} \sim 0,2 \text{ GHz}$ o con fórmula de Rydberg $R = R_H$ porque $Z_{\text{eff}} = 1$
 $\lambda \sim 1,5 \text{ cm}; \quad \bar{\nu} = 0,03 \text{ cm}^{-1}$

10

$m_{\pi} = 139,6 \text{ MeV}; \quad m_N (^{208}\text{Pb}) \sim 208 \text{ u}; \quad Z = 82$

$\mu c^2 = \frac{m_{\pi}}{1 + \frac{m_{\pi}}{m_N}} = 139,5 \text{ MeV}$

$r_n = \frac{\hbar c n^2}{\alpha \mu c^2} = 2,3 \text{ fm} \cdot n^2 \approx \frac{200 \text{ u}^2}{2} \text{ fm}$



$R_{\text{nucl}} \approx 1,2 A^{1/3} \text{ fm}; \quad A = 208$
 $\approx 7,13 \text{ fm}$

$a_{\pi} = \frac{\hbar^2 \epsilon_0^2}{\mu \pi c^2} = \frac{20 \text{ fm}^2}{2 \mu \pi}$

$r_3 = 21,3 \text{ fm} \sim 3 R_{\text{nucl}}$

→ f. onda penetra en interior aunque r lejano

$r_6 = 85,3 \text{ fm} \gg R_{\text{nucl}}$

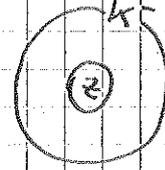
↳ límite, $n=2$ ya se absorbe

(11)

$$m_K = 493,677 \text{ MeV} ; m_N \approx 208 u$$

$$\hookrightarrow Z = 82$$

$$\mu c^2 = \frac{m_K}{1 + \frac{m_K}{m_N}} = 492,4 \text{ MeV}$$



$$E_n = - \frac{\alpha^2 \mu c^2}{2n^2} \cdot Z^2$$

$$h\nu_{nm} = - \frac{\alpha^2 \mu c^2}{2} \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda_{nm} = \frac{2 \cdot 2\pi (hc)}{\alpha^2 \mu c^2 Z^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1} = 14 \text{ fm} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1}$$

Paschen: $n=3, m>2$

Menor $E \rightarrow$ Mayor $\lambda \rightarrow$ Menor m

$$\lambda = 289 \text{ fm} //$$

$$\hookrightarrow \nu = 1,04 \cdot 10^{21} \text{ Hz} \quad (8)$$

$$E_{\gamma} = 4,3 \text{ MeV} //$$

(12)

Antihidrógeno



\hookrightarrow Igual a hidrógeno

$$R_H = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{m_p}} = 109678 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda_H = R_H^{-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)^{-1}$$

$$\lambda_H = 121,6 \text{ nm} //$$

Antitritio



\hookrightarrow Igual a tritio

$$R_T \approx \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{3m_p}} = 109737 \text{ cm}^{-1}$$

Serie Lyman: $n=1$

Transición más baja: $m=2$

$$\lambda_T = 121,5 \text{ nm} //$$

13

$1e^- \rightarrow (3s)$

Quantum defects $\Delta(n, l)$ of the Na atom

	$n=3$	$n=4$
s	1,373	1,357
p	0,883	0,867
d	0,050	0,011

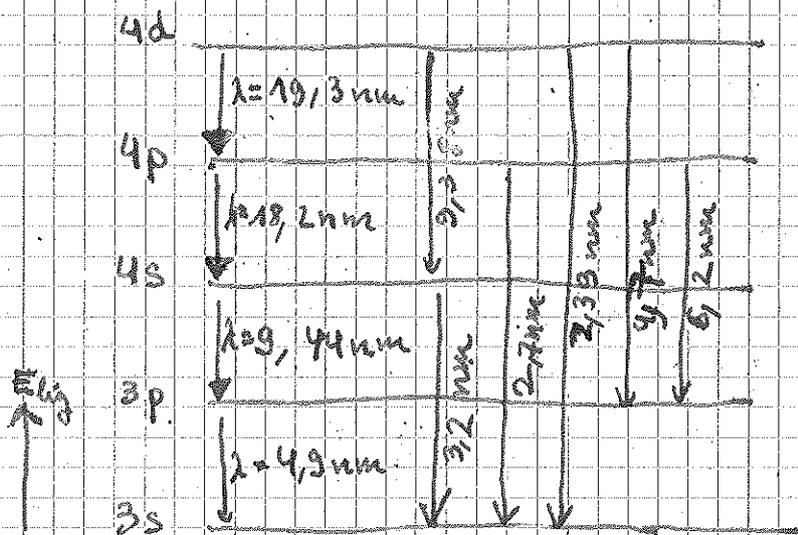
Z : carga del núcleo

$Z_{Na} = 11$

$$E_{lig}(eV) = \frac{R_H hc}{(n - \Delta(n, l))^2} = \frac{-13,6 eV \cdot Z^2}{(n - \Delta(n, l))^2}$$

nl	3s	3p	4s	4p	4d
$-E_{lig}(eV)$	622,7	367,2	235,6	167,6	103,4

$\Delta E = h\nu \rightarrow \nu = \frac{\Delta E}{h}, \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{2\pi(hc)}{\Delta E}$



De estas transiciones, están prohibidas las que $|\Delta l| \neq 1$

s \nrightarrow s

p \nrightarrow p

d \nrightarrow s

14

$n = 2s + 1$
 $L = 2$

$3^2 D$

$n = 3$

$s = \frac{1}{2}$

$L = 2$



$3^2 P$

$n = 3$

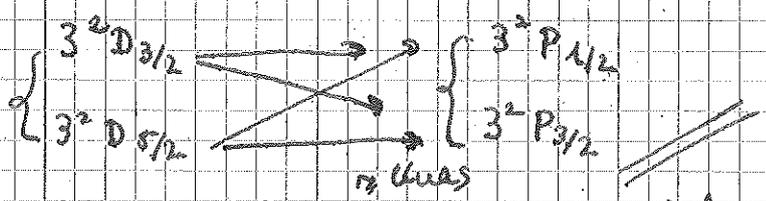
$s = \frac{1}{2}$

$L = 1$

$|L - S| \leq J \leq L + S$

$\frac{3}{2} \leq J \leq \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} \leq J \leq \frac{3}{2}$



4 transiciones distintas posibles (en caso de que no haya alguna prohibida por una regla de selección) ($\Delta s = 0$ o compl.), $\Delta L = 1$, $\Delta J = 0, \pm 1$

15

$E_0 = -79 \text{ eV}$

Si no hubiese repulsión $Z = 2$, no es hidrogenoide

$E_0 = (-13,6 \text{ eV}) \cdot Z^2 \cdot \frac{1}{2} = -8 \cdot 13,6 \text{ eV} = -108,8 \text{ eV}$

$E_{\text{repulsión}} = E_0 - E_0' = 29,8 \text{ eV} = \langle q \cdot V_{\text{rep}} \rangle$

$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r_{12}^2 \rangle} \rightarrow r_{12} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot E_{\text{rep}}} = 48,4 \text{ pm} \approx 0,5 \text{ \AA}$

16

He \rightarrow apantallado $\rightarrow Z_{\text{eff}} = 1$?

$R_{\text{He}} = \frac{Z^2 R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} = R_{\text{hidr}} \rightarrow \text{ver 2)}$

(17)



\hookrightarrow 2 huecos en la capa p

$$L S = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{espín máximo})$$

$$2s + 1 = 3 \quad (\text{multiplicidad})$$

\hookrightarrow Buscamos en la tabla 4.2 (permitted LS terms)

la fila $p^4 \rightarrow$ ^{escogemos} L máximo compatible con Pauli y con multiplicidad 3.

$$\rightarrow \text{}^3P \downarrow \\ L = 1 \rightarrow P$$

Al ser huecos, $J = L + S = 2$

Estado fundamental: $3P_{L=2}$ (notación $2s+1 L_J$)



\rightarrow Capa cerrada, $S = 0$

$$2s + 1 = 1$$

$s^2 \rightarrow$ en tabla \rightarrow 1S $\rightarrow L = 0$

$$J = L + S = 0$$

Estado fundamental: 1S_0



\rightarrow 4 huecos $\rightarrow S = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$$2s + 1 = 4 + 1 = 5$$

d^6 con mult = 5 $\xrightarrow{\text{tabla}}$ $5D \rightarrow L = 2$

huecos $\rightarrow J = L + S = 4$

\Rightarrow $5D_4$

• Br



$$1 \text{ hueco} \rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$2s + 1 = 2$$

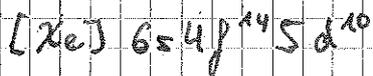
$$p^5 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 2P \rightarrow L = 1$$

$$J = L + S = 3/2$$



(18)

• Au



↳ 1 e^- en capa s (o hueco)

$$s = \frac{1}{2} \rightarrow 2s + 1 = 2$$

$$s \rightarrow s \rightarrow L = 0$$

$$J = |L \pm S| = 1/2 \rightarrow 2S_{1/2}$$

• Pb



$$\rightarrow 2e^- \rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$2s + 1 = 3$$

$$p^2 \rightarrow 3P \rightarrow L = 1$$

$$J = L - S = 0$$



• I



$$1 \text{ hueco} \rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$2s + 1 = 2$$

$$p^5 \rightarrow 2P \rightarrow L = 1$$

$$J = L + S = 3/2$$



• Cs

[K α] Cs

$\rightarrow \Delta z / h\nu_{K\alpha} \rightarrow S = \frac{1}{2}$

$2S + 1 = 2$

$S \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow L = 0$

$\delta = |0 \pm S| = \frac{1}{2} \rightarrow 2S_{1/2}$

(19)

$\lambda_{nm} = R \cdot c (z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), n > m$

a)

línea K $\rightarrow m = 1, \sigma = 1$

Cs $\rightarrow z = 29$

$\lambda_{nm} = R_{\infty} \cdot c \cdot (29 - 1)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

$\lambda_{nm} = \frac{c}{\nu_{nm}} = \frac{1}{R_{\infty} \cdot 28^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)}$

$\lambda_{max_1} = \lambda (n = 2 \dots)$

$\lambda_{max_2} = \lambda (n = 3 \dots)$

$R_{\infty} \approx 109737 \text{ cm}^{-1}$

$\lambda_{nm} = \frac{0,116 \text{ nm}}{\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)} = \begin{cases} 155 \text{ pm} // (n=2) \\ 130 \text{ pm} // (n=3) \end{cases}$

b)

línea L $\rightarrow m = 2, \sigma = 7,4 \quad z = 79 \text{ (Au)}$

$\lambda_{nm} = \frac{1}{R_{\infty} \cdot (79,6)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{157,8 \text{ pm}}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)} = \begin{cases} 2283 \text{ pm} // (n=3) L_{\alpha} \\ 947,8 \text{ pm} // (n=4) \end{cases}$

c) $K_{\alpha} \rightarrow \lambda$ más grande $\rightarrow \lambda = 0,723 \text{ \AA} ; \sigma = 1$

$(z - \sigma)^2 = \frac{1}{R_{\infty} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \lambda_{K\alpha}} = 1680,5 \rightarrow z - \sigma = 40,99$

$\rightarrow z = 42 \rightarrow \text{Mo}$

20) $r_{nm} = R_0 (Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$; $U^{91+} \rightarrow$ hidrogenoide: $Z = 92$

$n = 1 \rightarrow K$
 $n = 2 \rightarrow L$

$Z = 92$

$E_{nm} = -13,6 \text{ eV} \cdot Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$

Uranio natural

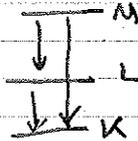
$\sigma_K = 1$

$\sigma_L = 2,4$

$E_{22} = 86,3328 \text{ KeV} \quad (L \rightarrow K)$

$E_{13} = 402,3204 \text{ KeV} \quad (M \rightarrow K)$

$E_{23} = 15,988 \text{ KeV} \quad (M \rightarrow L)$



$E_{nm} = h\nu_{nm} = hcR_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \cdot (Z - \sigma)^2 = 13,6 \text{ eV} (Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$

$L \rightarrow K: E_{22} = 13,6 \cdot (92)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 84,466 \text{ KeV}$

$M \rightarrow K: E_{13} = " (92 - 2,4)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 86,522 \text{ KeV}$

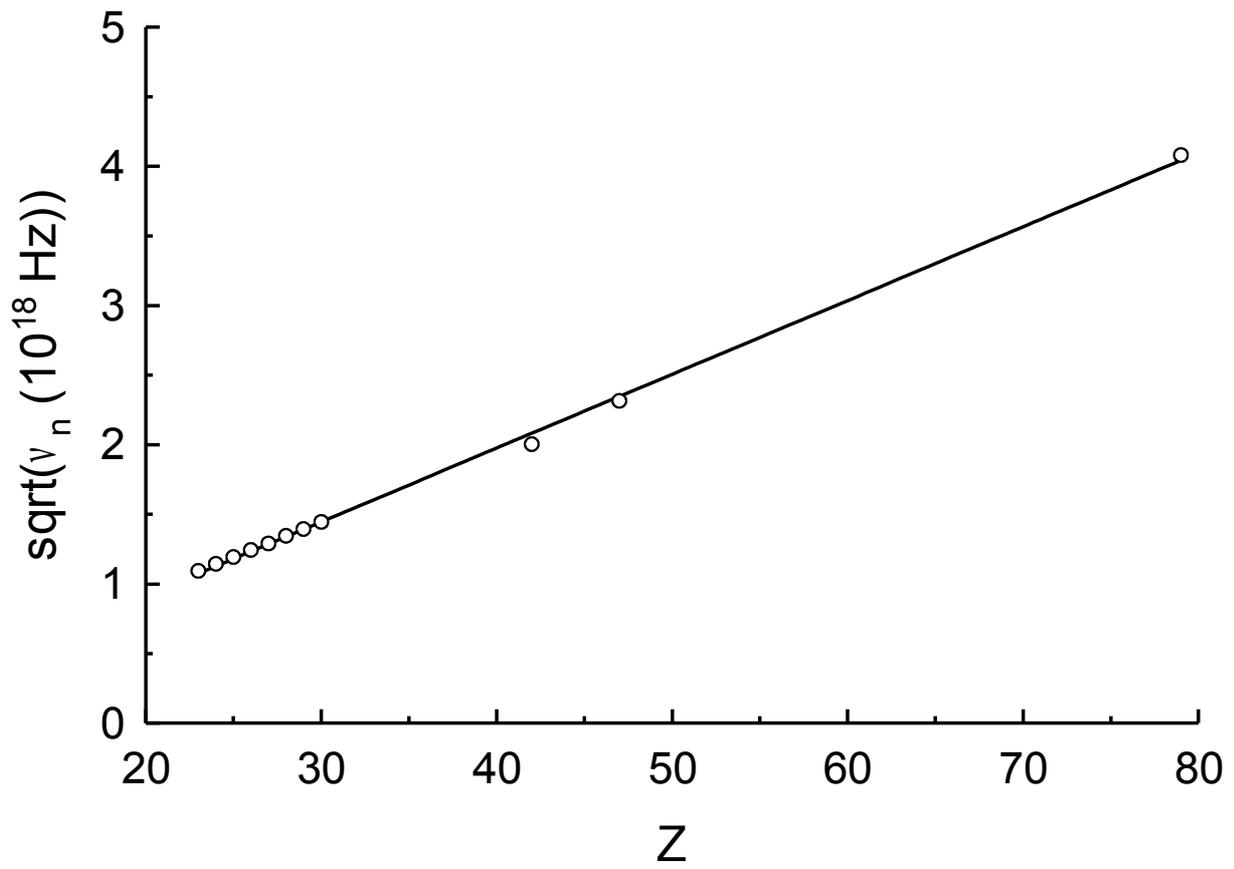
$M \rightarrow L: E_{23} = " " \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 13,519 \text{ KeV}$

21)

\rightarrow Ajuste em ordenador

$\sigma = 2,7 \pm 0,4$

$L_0 \approx \text{Capa K} ?$



ejc) 21

Archivos Kyplot en mural.uv.es/ferhue

**Problemas de
Física atómica y de las radiaciones.**

Facultad de Física. Curso 2010/2011. 2^{er} cuatrimestre

EL ÁTOMO, EL NÚCLEO Y LAS RADIACIONES

1. Estímese la densidad superficial de una hoja de aluminio de 1 mm de espesor (átomos/cm²).
James E. Turner Capítulo 2 Problema 5
2. ¿Cuál es el momento de un fotón ultravioleta de 1000 Amstrong?
James E. Turner Capítulo 2 Problema 33
3. ¿Cuál es la energía de un protón que tiene la misma cantidad de movimiento que un fotón de 1 MeV?
James E. Turner Capítulo 2 Problema 36
4. Un microscopio puede resolver como distintos dos objetos separados por una distancia igual o mayor que a la longitud de onda de la luz o de los electrones usados para la observación. (a) Con un microscopio electrónico, ¿qué energía se necesita para tener una resolución de 0.4 Amstrong? (b) ¿Qué energía se requiere para un microscopio óptico de la misma resolución?
James E. Turner Capítulo 2 Problema 41

PASO DE LA RADIACIÓN A TRAVÉS DE LA MATERIA

Interacción de partículas cargadas pesadas

5. De acuerdo con la ecuación (5.7), ¿cuál debe ser la relación entre la energía cinética T_p y T_d de un protón y un deuterón que pueden transferir idéntica energía máxima a un electrón atómico?
James E. Turner Capítulo 5 Problema 5, página 133
6. Calcule la máxima energía que un muón de 10-MeV puede transmitir a un electrón en una colisión.
James E. Turner Capítulo 5 Problema 7, página 133
7. ¿Cuál es el rango de un ${}^3\text{He}^{2+}$ de 15 MeV en agua?
James E. Turner Capítulo 5 Problema 26, página 135
8. El Pu-239 emite partículas alfa de 5.16 MeV. ¿Cuál es su rango en cm en (a) agua? (b) en hueso de densidad 1.9 g/cm³? (c) en aire a 22°C y 750 MM Hg?
James E. Turner Capítulo 5 Problema 33, página 135
9. Calcúlese el tiempo que tarda en detenerse un proton de 10 MeV en agua
James E. Turner Capítulo 5 Problema 35, página 135
10. Halle la energía a la que una partícula alfa comienza a capturar y perder electrones cuando se frena en un medio

Interacción de fotones

11. Un fotón de 662-keV sufre una dispersión Compton y es dispersado bajo un ángulo de 120° con respecto a su dirección incidente

- (a) ¿Cuál es la energía del electrón Compton?
- (b) ¿Qué ángulo forman las direcciones del fotón y el electrón?

James E. Turner Capítulo 8 Problema 16, página 201

12. (a) ¿Cuál es la máxima energía de retroceso que un electrón puede adquirir de un fotón de 8-MeV en una colisión Compton?

- (b) ¿A qué ángulo de dispersión perderá el 95% de su energía un fotón de 8-MeV en una colisión Compton?
- (c) Trace un gráfico que muestre la fracción de energía perdida por un fotón de 8-MeV en función de su ángulo de dispersión.

James E. Turner Capítulo 8 Problema 18, página 201

13. La sección eficaz Klein-Nishina para la colisión de fotones de 1-MeV con un electrón es $2.11 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$. Calcule para la dispersión Compton en aluminio,

- (a) la sección eficaz de transferencia de energía (por electrón cm^{-2})
- (b) la sección eficaz de dispersión (por electrón cm^{-2})
- (c) la sección eficaz atómica
- (d) el coeficiente de atenuación lineal.

James E. Turner Capítulo 8 Problema 25, página 202

14. Un fotón de 4-MeV crea un par electrón-positrón en el campo de un núcleo. ¿Cuál es la energía cinética total del par?

James E. Turner Capítulo 8 Problema 29, página 203

15. Un absorbente de bronce (densidad = 8.79 g cm^{-3}), hecho de 9 partes en peso de Cu y 1 parte de Sn, se expone a rayos x de 200-keV (véase Problema 38). Calcule los coeficientes de atenuación lineal y másico del bronce para fotones de esta energía.

James E. Turner Capítulo 8 Problema 40, página 204

16. La sección eficaz atómica para interacciones de fotones de 1-MeV con carbono e hidrogeno son, respectivamente, 1.27 barn y 0.209 barn.

- (a) Calcule el coeficiente de atenuación lineal para la parafina (Asuma la composición CH_2 y densidad 0.89 g cm^{-3} .)
- (b) Calcule el coeficiente de atenuación másico.

James E. Turner Capítulo 8 Problema 41, página 204

17. Un haz estrecho de fotones de 500 keV incide perpendicularmente sobre una lámina de estaño de 1.08 cm de espesor.

- (a) ¿Qué fracción de fotones interacciona con la lámina?
- (b) Si inciden sobre la lamina 200 fotones por minuto, ¿cuál es la tasa de transmisión de energía a su través de ella?
- (c) ¿Qué fracción de la energía transmitida la transmiten los fotones que no han interaccionado?

James E. Turner Capítulo 8 Problema 45, página 204

18. Un haz amplio, uniforme y paralelo de rayos gamma de 0.5-MeV incide perpendicularmente sobre una lámina de aluminio de 8.9 g cm^2 de espesor. La intensidad del haz es de $8.24 \times 10^{-28} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

(a) Calcule la fracción de los fotones transmitidos sin interactuar.

(b) ¿Cuál es la intensidad total transmitida del haz?

(c) ¿Cuál es la tasa de absorción de energía por unidad de masa de aluminio?

James E. Turner Capítulo 8 Problema 50, página 205

19. Un haz paralelo de fotones de 500-keV incide perpendicularmente sobre una hoja de plomo de 8 mm de espesor. La tasa de transmisión de energía es $4 \times 10^4 \text{ MeV s}^{-1}$,

(a) ¿Qué fracción de la energía de los fotones incidentes se absorbe en la hoja?

(b) ¿Cuántos fotones por segundo inciden en la hoja?

(c) ¿Qué fracción de la energía transmitida se debe a fotones que no han colisionado?

James E. Turner Capítulo 8 Problema 54, página 206

DOSIMETRÍA

20. (a) ¿Cuál es la dosis absorbida media en un volumen de 40 cm^3 de un órgano del cuerpo de densidad 0.93 g cm^3 que absorbe $3 \times 10^5 \text{ MeV}$ de un campo de radiación?

(b) Si la energía la depositan partículas ionizantes con un LET de $10 \text{ keV micra}^{-1}$ en agua, ¿cuál es la dosis equivalente de acuerdo con la tabla 12.1?

(c) Exprese el resultado de (a) en rad y Gy, y el de (b) rem y Sv

James E. Turner Capítulo 12 Problema 1, página 377

21. Un haz de rayos x produce 4 esu de carga por segundo en 0.08 g de aire. ¿Cuál es la tasa de exposición en (a) mR/s y (b) unidades del SI?

James E. Turner Capítulo 12 Problema 3, página 377

22. Se plantea un experimento en el que se coloca raíces de guisantes en un tanque de agua a una profundidad de 2.2 cm y se irradian con un haz de electrones de 10 MeV que inciden perpendicularmente a la superficie del tanque. ¿Qué tasa de fluencia se necesitará para exponer a las raíces a una tasa de dosis de 10 Gy/min ?

James E. Turner Capítulo 12 Problema 35, página 381

23. Inadvertidamente, un trabajador pone su mano en ángulo recto bajo un haz uniforme y paralelo de protones de 50 MeV con una tasa de fluencia de 4.6×10^{10} protones $/(\text{cm}^2 \text{ s})$. Se estima que el tiempo de exposición fue de 0.5 s.

(a) Estime la tasa de dosis que el trabajador ha recibido en la piel de las manos.

(b) Si el haz cubre un área de 2.7 cm^2 , ¿cuál era la corriente del haz?

James E. Turner Capítulo 12 Problema 36, página 381

24. ¿Cuál es la tasa de exposición a una distancia de 1 pie de una fuente puntual de Co-60 sin blindar?

James E. Turner Capítulo 12 Problema 39, página 381

25. Un trabajador entra inadvertidamente en una habitación en la que un pequeño vial, que contiene 23 Ci de I-131, está siendo utilizado para irradiar una muestra. Permanece en su interior durante 10 minutos a una distancia de 5 metros de la fuente. Estímese la dosis recibida por el trabajador.

James E. Turner Capítulo 12 Problema 41, página 381

26. Un haz paralelo de fotones monoenergéticos emerge de una fuente cuando se quita el blindaje durante un corto intervalo de tiempo. La energía del fotón y la fluencia total son conocidas. (a) Escriba una fórmula a partir de la cual pueda calcularse la dosis absorbida en aire en rad a partir de la energía del fotón expresada en MeV y la fluencia total en cm^{-2} . (b) Deduzca la fórmula para calcular la exposición en R.

James E. Turner Capítulo 12 Problema 43, página 382

RADIOBIOLOGÍA

27. According to the BEIR-V Report, as cited in the third paragraph of Section 13.9, an acute, whole-body, gamma-ray dose of 0.1 Gy to 100000 persons would be expected to cause about 800 extra cancer deaths in addition to the 20000 expected naturally.
- (a) if an experiment could be carried out to test this risk estimate for a dose of 0.1 Gy, would a population of 10000 individuals be sufficiently large to obtain statistically significant results?
- (b) A population of 100000?
- (c) What kind of statistical distribution describes this problem?

James E. Turner Capítulo 13 Problema 24, página 426

28. Survival of a certain cell line exposed to a beam of helium ions described by a single-target, single-hit model and Eq. (13.16). If 25% of the cells survive a fluence of $4.2 \times 10^7 \text{cm}^{-2}$, what is the single-target area?

James E. Turner Capítulo 13 Problema 26, página 426

29. Cell survival in a certain set of experiments is described by the function $S/S_0 = e^{-3.1 D}$, where D is the dose in Gy.
- (a) What is the mean lethal dose?
- (b) What is the LD50?
- (c) What is the difference between LD50 and mean lethal dose?

James E. Turner Capítulo 13 Problema 29, página 426

30. Cell survival is described in a certain experiment by the single-target, single-hit response function $S/S_0 = e^{-1.6 D}$, where D is in Gy. At a dose of 1 Gy, what is the probability of there being:
- (a) no hits
- (b) exactly two hits in a given target?

James E. Turner Capítulo 13 Problema 40, página 427

PROTECCION RADIOLOGICA

31. Un trabajador utiliza un guante protector de plástico de densidad 1.2 g/cm^3 y espesor 3 mm en contacto con su piel para manipular ^{22}Na , un emisor de positrones de energía máxima 1.82 MeV. Para materiales de bajo número atómico, el alcance R (g/cm^2) de un positrón (o electrón) de energía inicial T (MeV) viene dada por:

$$R = 0.412 \times T^{(1.27 - 0.0954 \times \ln T)}$$

expresión que es equivalente a

$$\ln T = 6.63 - 3.24 \times (3.29 - \ln R)^{1/2}$$

Supóngase que los positrones de una fuente de ^{22}Na en contacto con el guante inciden normalmente y viajan en línea recta.

Calcular:

- ¿A qué profundidad de la piel se parará un positrón de la máxima energía?
- Estimar la dosis equivalente superficial para un trabajador que utiliza tal guante y está expuesto a 10^6 positrones por cm^2 , suponiendo que todos ellos inciden normalmente y tienen la máxima energía.
- Un trabajador en el laboratorio, del que Ud. es el responsable de protección radiológica, lleva inadvertidamente una fuente, en forma de disco blindado por una de sus caras, en un bolsillo próxima a su piel durante un tiempo estimado de 3 horas. Las condiciones de exposición y de protección de la ropa son equivalentes a las del enunciado. Se encuentra que la fuente emite 2×10^7 positrones por cm^2 por minuto de su superficie. El director del laboratorio le pide que evalúe la situación, determine si la exposición es “seria” y que recomiende las medidas administrativas o acciones médicas que son necesarias. ¿Qué le informaría?

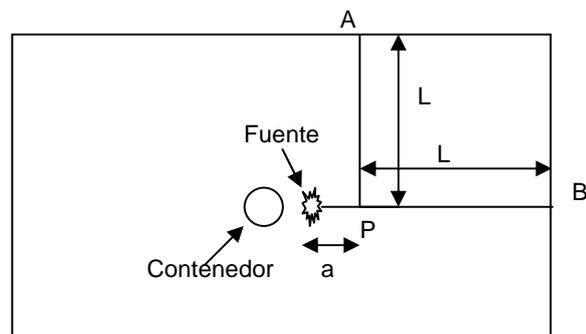
32. Se desea transferir residuos de ^{60}Co de un tanque a otro para recuperar una pequeña fuente encapsulada de 5 Ci de ^{60}Co . Desgraciadamente, hay una tubería de 10 metros de longitud sin blindaje que se utilizará en el transvase. Existe una válvula A situada en el centro de la tubería y se supone que la fuente podría quedar atascada en la válvula durante el transvase. Supóngase que:

- densidad lineal estimada de ^{60}Co a la tasa de flujo utilizada: 0.5 Ci/metro.
- tiempo estimado de transvase: 1 hora.
- constante gamma estimada: $\Gamma(^{60}\text{Co})=1.3$ R/h por Ci a 1 metro
- despréciase la atenuación o el “buildup” en la tubería o en la válvula.

Se pide:

- ¿Cuáles serán las tasas de exposición en los puntos B y C situados a 2 metros de la válvula central y a dos metros del extremo de la tubería no blindada, respectivamente, cuando la fuente está todavía en el tanque de residuos original?
- ¿Cuál será la tasa de exposición esperada en el punto B cuando la fuente quede atascada en la válvula A?
- ¿Cuánto tiempo puede permanecer un trabajador en el punto B hasta alcanzar el límite derivado de dosis semanal?
- ¿Qué error se cometería en el punto B si se supusiera que toda la actividad estuviera concentrada en el centro de la tubería (fuente puntual) en lugar de considerar que se trata de una fuente lineal? Considérese el caso de que la cápsula esté todavía en el tanque original.

33. Se tiene que transferir una fuente puntual desde el punto P a un contenedor cercano utilizando una pértiga de longitud $a = 1$ m. (véase figura adjunta). La fuente está en una sala a la que se puede acceder desde dos puertas A y B, de modo que las longitudes de los caminos AP y BP son iguales, $L = 7$ m. La velocidad media de una persona que recorra esta distancia es $v = 2$ m.s⁻¹. ¿Qué camino de acceso



debe seleccionarse para que la exposición a la radiación sea mínima?. ¿En qué factor difieren las exposiciones a lo largo de ambos recorridos?

34. Un contenedor de residuos de altura $H = 60$ cm y radio $R = 25$ cm contiene un líquido radiactivo que emite radiación gamma de una energía media $E_\gamma = 1$ MeV. El contenedor se puede aproximar por una fuente homogénea de intensidad $SV = 10^9$ Bq.m⁻³. ¿Cuál es la tasa de dosis a la que está expuesta una persona al manipularlo a una distancia $h = 40$ cm por encima del contenedor? Se pueden despreciar la atenuación y la dispersión de la radiación gamma en la pared del contenedor y en el aire.

① $Al \rightarrow \begin{cases} \rho_{Al} = 26,98 \text{ g/mol} \\ \rho_{Al} = 2,7 \text{ g/cm}^3 \\ e = 1 \text{ mm} \end{cases}$



\rightarrow N átomos en este diferencial de volumen

$$\sigma_{Al} = \frac{N}{S} = \frac{N \cdot e}{S \cdot e} = \frac{N \cdot e}{V} = n \cdot e = \frac{\rho_{Al} \cdot N_A}{\rho_{Al} \cdot e} \cdot e$$

n = número de átomos / unidad de volumen
 ρ_{Al} = densidad \rightarrow peso atómico

$\hookrightarrow \sigma_{Al} = 6,027 \cdot 10^{23} \text{ átomos/cm}^2$

② $\lambda = 1000 \text{ \AA} = 1000 \cdot 10^{-10} \text{ m}$; $c = \lambda \nu \rightarrow h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$

$p_r = \frac{E_r}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h c}{c \cdot \lambda} = \frac{h}{\lambda} = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ kg m/s}$

o bien: $f = 4,602 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
 $p_r = \frac{h \nu \cdot q}{\lambda f / c} = 12,4 \frac{\text{eV}}{c}$

o bien

$p_r = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2\pi(hc)}{\lambda} = \frac{1}{c} \cdot 2\pi \cdot \frac{197,33 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1000 \cdot 10^5 \text{ fm}} = 12,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{MeV}}{c} = 12,4 \text{ eV/c}$

③

$E_r = 1 \text{ MeV}$

$p_r = \frac{E_r}{c} = 1 \text{ MeV/c}$

$E_p = \sqrt{m_p^2 c^4 + p_r^2 c^2} = \sqrt{\left(\frac{938 \text{ MeV}}{c^2}\right)^2 \cdot c^4 + \left(\frac{1 \text{ MeV}}{c}\right)^2 \cdot c^2} = 938,2725 \text{ MeV}$

$T_p = E_p - m_p = 533 \text{ eV}$ (energía cinética)

④ $\lambda_{res} = 0,4 \text{ \AA}$

$\rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi(hc)}{\lambda c}$

a) Microscopio electrónico:

$E_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} = \sqrt{(0,511 \text{ MeV})^2 + \left(\frac{2\pi(hc)}{\lambda}\right)^2}$
 $= \left[(0,511 \text{ MeV})^2 + \left(\frac{2\pi \cdot 197,33 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0,4 \cdot 10^5 \text{ fm}}\right)^2 \right]^{1/2} = \left[(511 \text{ keV})^2 + (31 \text{ keV})^2 \right]^{1/2}$
 $= 511,9 \text{ keV} \rightarrow T_e = E_e - m_e = 0,939 \text{ keV} = 939 \text{ eV}$
 b en. cinética

b) Microscopio óptico

$E_f = h\nu = pc = \frac{2\pi(hc)}{\lambda} = 31 \text{ keV} \gg T_e$

⑤ Ecuación 5.7 → consultar Turner (p. 133); o ver mi operación extra resuelto

• Caso no relativista: $T_{e^{-}} = T_M \cdot \frac{4M \cdot m_e}{(M + m_e)^2}$
partícula incidente: M

• Caso relativista: $Q_{e^{-}} = \frac{2\gamma^2 m_e v^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}$ ($c=1$)

↳ $T_{e^{-}} (M \equiv M_p) = T_{e^{-}} (M \equiv M_d)$; $M_d \approx 2M_p$

• Caso no relativista: $\frac{T_p \cdot 4M_p \cdot m_e}{(M_p + m_e)^2} = \frac{T_d \cdot 4M_d \cdot m_e}{(M_d + m_e)^2}$

↳ $\frac{T_p}{T_d} = \frac{M_d}{M_p} \left(\frac{M_p + m_e}{M_d + m_e} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{939 + 0,511 \text{ MeV}}{2 \cdot 939 + 0,511 \text{ MeV}} \right)^2 \approx \frac{1}{2}$

↳ $\frac{M_d}{M_p} \left(\frac{M_p}{M_d} \right)^2 = \frac{M_p}{M_d} \approx \frac{1}{2}$
 $m_e \ll M$

⑥ $T_\mu = 10 \text{ MeV}$; $M_\mu = 105,658 \text{ MeV}$

• Caso no relativista: (legítima pues $T_\mu \ll M_\mu$)

$T_{e^{-}} = T_\mu \cdot \frac{4M_\mu \cdot m_e}{(M_\mu + m_e)^2} = 10 \text{ MeV} \cdot \frac{4 \cdot 105,658 \cdot 0,511}{(105,658 + 0,511)^2} \frac{\text{MeV}^2}{\text{MeV}^2}$
 $= 0,19 \text{ MeV}$

• Caso relativista:

$E_\mu = T_\mu + M_\mu = \gamma M_\mu \rightarrow \gamma = 1 + \frac{T_\mu}{M_\mu} = 1,0946$
 $v = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

↳ $Q_{e^{-}} = 0,20 \text{ MeV} \approx T_{e^{-}}$

⑦ $T_{He} = 15 \text{ MeV}$
 ${}^3\text{He}^{2+}$

Sabemos que: $\frac{R_1(\beta)}{R_2(\beta)} = \frac{Z_1^2 M_1}{Z_2^2 M_2} \rightarrow$ partimos de valores de referencia para protones (PSTAR) ↳ Web

↳ $R_{He}(\beta) = R_p(\beta) \cdot \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{M({}^3\text{He})}{M_p} \approx R_p(\beta) \cdot \frac{3}{4}$
 $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$

$T_{He} = (\gamma^2 - 1) M_{He} \rightarrow T_p = (\gamma^2 - 1) M_p = T_{He} \cdot \frac{M_p}{M_{He}} \approx \frac{T_{He}}{3} = 5 \text{ MeV}$

$R_{\text{OSDA}} (p, 5 \text{ MeV, water}) = 3,623 \cdot 10^{-2} \text{ g/cm}^2$ (tabulado en PSTAR) -2-

$R_{\text{OSDA}} ({}^3\text{He}^{2+}, 15 \text{ MeV}) = 2,71725 \cdot 10^{-2} \text{ g/cm}^2 //$

⑧ Pu-239

$T_{\alpha} = 5,16 \text{ MeV}$

$R_{\alpha}(\beta) = R_p(\beta) \cdot \frac{M_{\alpha}}{M_p} \left(\frac{z_p}{z_{\alpha}} \right)^2 \approx R_p(\beta) \cdot \frac{4}{4} = R_p(\beta)$
ver 7)

$T_p = T_{\alpha} \cdot \frac{M_p}{M_{\alpha}} \approx \frac{T_{\alpha}}{4} = 1,29 \text{ MeV}$

a) $R_p(T_p)_{\text{water}}^{\text{PSTAR}} = 3,680 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$

$R_{\alpha}(\text{ASTAR}) = 3,942 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$

$R_{\alpha} \approx R_p = 3,680 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2 \rightarrow \frac{R}{\rho_w} = L \approx \frac{R}{1 \text{ g/cm}^3} = 3,680 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$

b) $R_p(T_p, \text{bone}) \approx R_p(T_p, \text{water})$

|| \rightarrow PSTAR, Compact bone (ICRU)
 $4,065 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$

$R_{\alpha}(T_{\alpha}, \text{ASTAR}) = 4,327 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$

↳ lo que cambia el alcance es ρ :

$L = \frac{R}{\rho_{\text{hueso}}} = \frac{R}{1,9 \text{ g/cm}^3} = 2,142 \times 10^{-3} \text{ cm}$

hueso \approx agua en muchos contextos

↳ Ca, N, P, etc \rightarrow + problemática la aproximación a bajas energías (\sim keV), donde aparece el efecto fotoeléctrico $\left(\frac{F_{\text{st}}}{\text{Com.}} \rightarrow E \right)$

c) $p \cdot V = NRT$ (aprox. gas ideal)

$p_0 = 760 \text{ mm Hg}$
 $T_0 = 273 \text{ K}$ } $\rho_{\text{aire}} = 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ (referencia)

$\rho = \frac{NA}{A} \frac{p}{RT} = \rho \frac{k_B}{A} \cdot T \rightarrow \rho = k \cdot \frac{p}{T}$

$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{p_0}{p} \cdot \frac{T_0}{T} \rightarrow \rho = \frac{760}{750} \cdot \frac{273}{295} \cdot 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3 = 1,181 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$

\rightarrow Modifica notable de ρ con T y p

$R_p(T_p, \text{dry air near sea level}) \stackrel{\text{PSTAR}}{\approx} 4,294 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$

$R_{\alpha}(\text{ASTAR}) = 4,581 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$

$L = \frac{R}{\rho_g} = 3,64 \text{ cm} //$ $\rightarrow 30 \mu\text{m}$ en material duro \rightarrow debilito sobre todo a $\rho_{\text{aire}} \ll \rho_{\text{water}}$

\Rightarrow Las α se frenan en la piel sin apenas penetrar ($< 1 \text{ mm}$).
 ↳ El problema es si respiras radón, el y sus hijos (emiten α s) se fijan a alveolos y de ahí que emiten dentro tejido directamente al no haber ya protección de la piel.

9

$$T_p = 10 \text{ MeV}$$

$$T_p = (\gamma - 1) M_p \rightarrow \gamma = 1 + \frac{T_p}{M_p} \quad ; \quad M_p = 938 \text{ MeV}$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 2,1\%$$

$$R_p(\beta) = 0,123 \text{ g/cm}^2 \rightarrow L = 0,123 \text{ cm}$$

PSTAR, water

$$\frac{dT}{dx} = 45,64 \text{ MeV cm}^2/\text{g} \rightarrow \left| \frac{dT}{dx} \right| = 45,64 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}}$$

Suponemos β etc hasta que se detiene (aproximación grande, para obtener orden de magnitud)

$$10 \text{ MeV} = 45,64 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \cdot \beta c \tau$$

$$\tau = \frac{T_p}{v \left| \frac{dT}{dx} \right|} = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ s} \rightarrow \text{orden de magnitud}$$

lo instantáneo frente a procesos atómicos

Otra manera:

$$\tau = \frac{R_p}{\beta c} \approx 1,95 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

↙ mismo orden

10

?

11

$E_\gamma = 662 \text{ KeV}$
 $\theta = 120^\circ$



a) $p_\gamma + p_e = p_{\gamma'} + p_{e'}$
 $p_\gamma - p_{\gamma'} = p_{e'} - p_e \rightarrow -2E_\gamma E_{\gamma'} + 2E_\gamma E_{\gamma'} \cos \theta = 2m_e c^2 - 2E_{e'} m_e$
 $\hookrightarrow 2E_{e'} m_e = 2m_e c^2 + 2E_\gamma E_{\gamma'} (1 - \cos \theta) = 2m_e c^2 + 2E_\gamma (E_\gamma + m_e - E_{\gamma'}) (1 - \cos \theta)$

$E_{e'} (m_e + E_\gamma (1 - \cos \theta)) = m_e c^2 + E_\gamma (E_\gamma + m_e) (1 - \cos \theta)$

$E_{e'} = \frac{m_e c^2 + (E_\gamma^2 + m_e E_\gamma) (1 - \cos \theta)}{m_e + E_\gamma (1 - \cos \theta)} = \frac{m_e (m_e + E_\gamma (1 - \cos \theta)) + E_\gamma^2 (1 - \cos \theta)}{m_e + E_\gamma (1 - \cos \theta)}$

$= m_e + \frac{1}{\frac{1}{E_\gamma} + \frac{m_e}{E_\gamma^2 (1 - \cos \theta)}} \rightarrow T_{e'} = E_{e'} - m_e =$

$T_{e'} = \frac{1}{\frac{1}{E_\gamma} + \frac{m_e}{E_\gamma^2 (1 - \cos \theta)}} = E_\gamma - \frac{1}{\frac{1}{E_\gamma} + \frac{1}{m_e} (1 - \cos \theta)}$

$T_{e'} (\theta = 120^\circ) \xrightarrow{\cos 120^\circ = -1/2} = E_\gamma - \left(\frac{1}{E_\gamma} + \frac{3}{2m_e} \right)^{-1} = \frac{308,08 \text{ KeV}}{437,08} //$

b)

$\varphi?$

Conservación de p: $|\vec{p}_{\gamma}| \cdot \sin \theta = |\vec{p}_{e'}| \sin \varphi$

$\hookrightarrow E_{\gamma'}^2 \sin^2 \theta = |\vec{p}_{e'}|^2 \sin^2 \varphi \quad \leftarrow \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \theta \cdot (E_\gamma - T_{e'})^2}{(T_{e'} + m_e)^2 - m_e^2} = \frac{\sin^2 \theta (E_\gamma - T_{e'})^2}{T_{e'} (T_{e'} + 2m_e)} = 0,24059$

$\sin \varphi = 0,4899 \rightarrow \varphi = 29,12^\circ //$

12

a) Viendo 11, $T_{e'}$ es máximo cuando $\theta = \pi$. (retrodispersión)

$T_{e'} = E_\gamma - \frac{1}{\frac{1}{E_\gamma} + \frac{m_e}{E_\gamma^2 (1 - \cos \theta)}} = E_\gamma - \frac{m_e E_\gamma}{m_e + 2E_\gamma} = E_\gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2E_\gamma}{m_e}} \right)$
 $= E_\gamma \cdot \frac{2E_\gamma/m_e}{1 + 2E_\gamma/m_e} \quad \leftarrow E_\gamma = 8 \text{ MeV} \right.$
 $= 7,75 \text{ MeV} //$

b) $\frac{E_\gamma - E_{\gamma'}}{E_\gamma} = \frac{T_{e'}}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{m_e}{E_\gamma (1 - \cos \theta)}} = 95\% = \chi$

$1 + \frac{m_e}{E_\gamma (1 - \cos \theta)} = \chi^{-1} \rightarrow \frac{m_e}{E_\gamma (1 - \cos \theta)} = \chi^{-1} - 1 \rightarrow (1 - \cos \theta) = \frac{m_e}{E_\gamma (\chi^{-1} - 1)}$
 $\hookrightarrow \cos \theta = 1 - \frac{m_e}{E_\gamma (\chi^{-1} - 1)} //$

$$\cos \theta (x = 95\%) = -0,214 \rightarrow \theta = 102,33^\circ //$$

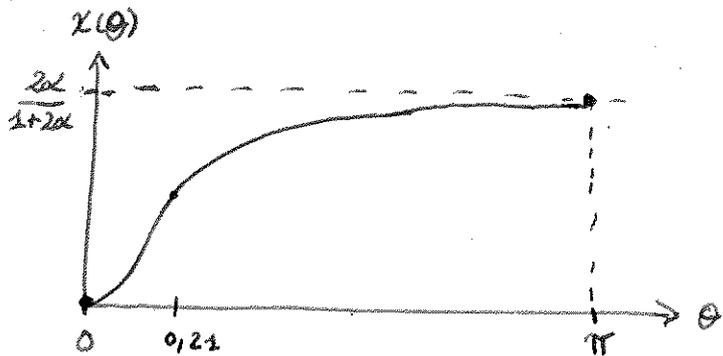
$$\chi_{\max} = \frac{2E_r/m_e}{1 + 2E_r/m_e} = 96,9\% \rightarrow \cos \theta (\chi_{\max}) = -1 \rightarrow \theta = \pi \checkmark$$

$$c) \chi(\theta) = \frac{1}{1 + \frac{m_e}{E_r} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta}}$$

$$\chi(0) = 0$$

$$\chi(\pi) = \chi_{\max} = \frac{2E_r/m_e}{1 + 2E_r/m_e} = \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$$

$$\hookrightarrow \frac{E_r}{m_e} \equiv \alpha = \frac{8}{0,521} \approx 15,7$$



↳ Plot con Mathematica //

$$\textcircled{13} \sigma_e = 2,11 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

$$E_r = 1 \text{ MeV}$$

... Valor promedio de θ de 0 a π
 $T_{\text{AVG}} (E_r = 1 \text{ MeV}) = 0,44 \text{ MeV}$
 ↳ ver tablas

$$a) \sigma_{\text{tr}} = \sigma_e \cdot \frac{T_{\text{AVG}}}{E_r} = 0,9284 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 //$$

$$b) \sigma_s = \sigma_e \cdot \frac{E_r - T_{\text{AVG}}}{E_r} = \sigma_e \cdot 0,56 = 1,1816 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 //$$

$$c) a\sigma = Z_{\text{Al}} \sigma_e = 13 \cdot \sigma_e = 2,743 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 //$$

$$d) \sigma = N \cdot Z \cdot \sigma_e = N \cdot a\sigma$$

$$N = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{Al}}}{A_{\text{Al}}} = 0,602 \cdot 10^{23} / \text{cm}^3$$

$A_{\text{Al}} = 27 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$; $\rho_{\text{Al}} = 2,698 \text{ g/cm}^3$; $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$$\hookrightarrow \sigma = 0,165 \text{ cm}^{-1} //$$

$\textcircled{14}$

$$E_r = 4 \text{ MeV}$$

Núcleo espectador \rightarrow se lleva el momento del fotón, pero apenas repercute en energía:

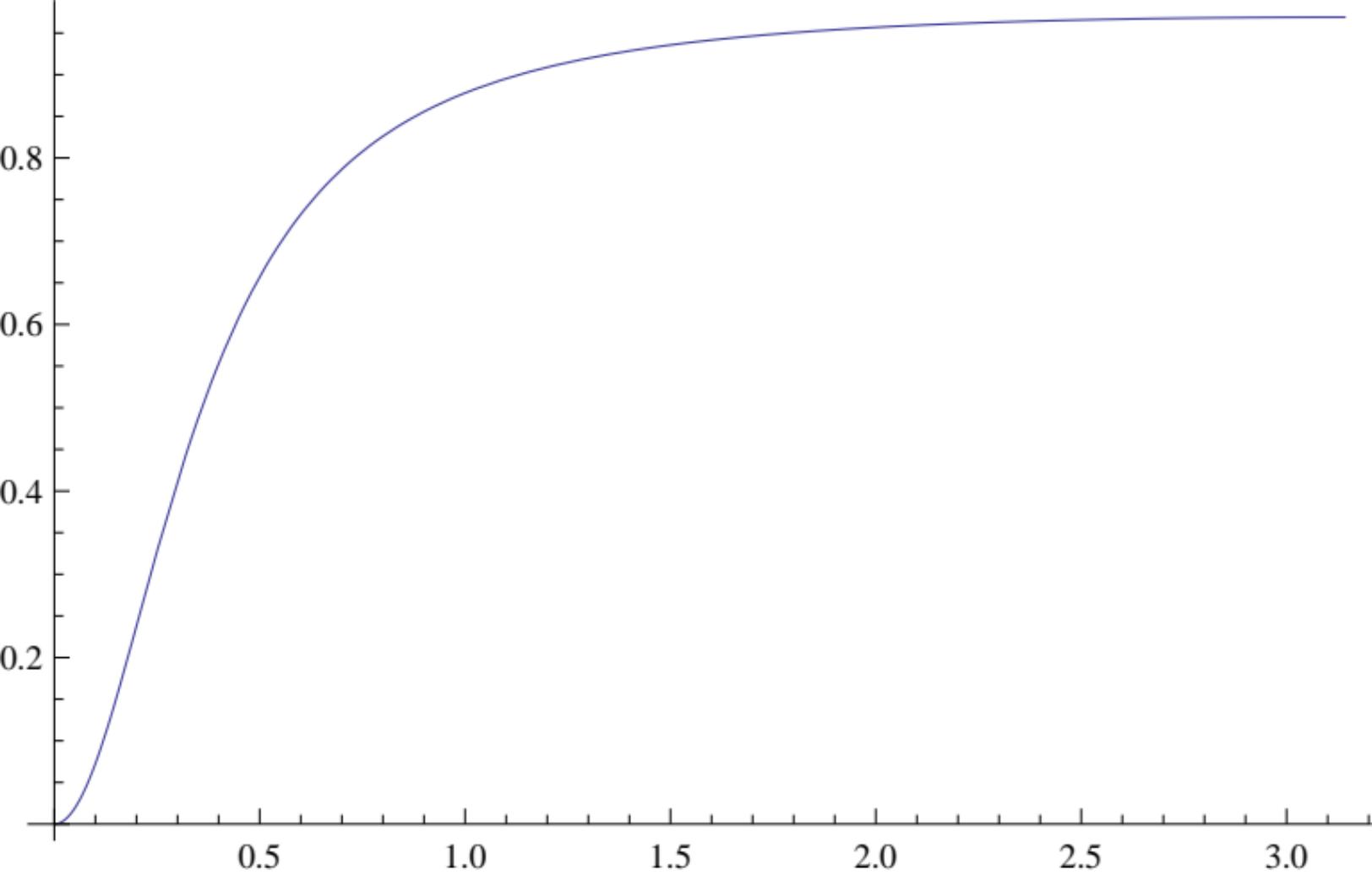
$$\vec{p}_N = \vec{p}_\gamma \quad (\text{inicialmente en reposo})$$

$$E_r + m_N = E_1 + E_2 + E_N$$

$$\hookrightarrow E_1 + E_2 = E_r + m_N - \sqrt{m_N^2 + p_\gamma^2} = E_r + m_N \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{E_r}{m_N} \right)^2} \right)$$

En general, $E_r \sim \text{MeV}$, $m_N \sim \text{GeV}$

$$\hookrightarrow E_1 + E_2 \approx E_r$$



15

$\rho = 8,79 \text{ g/cm}^3$ $\left\{ \begin{array}{l} 9: \text{Cu} \\ 1: \text{Sn} \end{array} \right.$

$E_x = 200 \text{ keV}$

$\frac{\mu}{\rho} = \frac{9}{10} \cdot \frac{\mu}{\rho} |_{\text{Cu}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\mu}{\rho} |_{\text{Sn}} \rightarrow \text{coef. de atenua masic}$

$\frac{\mu}{\rho} |_{\text{Cu}} \xrightarrow{\text{NIST}} = 1,559 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{g}$; $\frac{\mu}{\rho} |_{\text{Sn}} \xrightarrow{\text{NIST}} = 3,26 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{g}$

$\Rightarrow \frac{\mu}{\rho} = 1,7291 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{g}$

$\hookrightarrow \mu = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \cdot \rho = 1,5 \text{ cm}^{-1}$

16

$\sigma_o = 1,27 \text{ barn}$

$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$

$\sigma_H = 0,209 \text{ barn}$

a) CH_2 , $\rho = 0,189 \text{ g/cm}^3$

$\sigma = N \cdot \sigma_o = \frac{N_A \cdot \rho}{P_A} \cdot \sigma_o$

Ley de pesos:

$\sigma_{\text{CH}_2} = \frac{2}{14} \sigma_H + \frac{12}{14} \sigma_C = 1,118 \text{ barn}$

$\sigma = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{CH}_2}}{P_{\text{CH}_2}} \sigma_{\text{CH}_2} = 0,043 \text{ cm}^{-1} = 4,28 \text{ m}^{-1}$

$\frac{\sigma}{\rho} = 0,048 \text{ cm}^2/\text{g}$

17

$E_x = 500 \text{ keV}$

$e = 1,08 \text{ cm}$ (Sn)

a) $I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x}$

$I_{\text{int}}(x) = I_o - I(x) = I_o (1 - e^{-\mu x})$

$\frac{\mu}{\rho} |_{\text{Sn}} \xrightarrow{\text{NIST}} = 9,374 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$

$\rho_{\text{Sn}} = 7,13 \text{ g/cm}^3$

$\frac{I_{\text{int}}}{I_o} = \text{Trans. int} = 1 - e^{-\frac{\mu}{\rho} \cdot \rho \cdot e} = 52,2\%$

b) $\dot{I} = 200 / \text{min}$

$\dot{\Psi}_{\text{inc}} = \dot{I} \cdot E_r = \frac{200}{\text{min}} \cdot 500 \text{ KeV} = 100 \text{ MeV/min}$ (inciden)

$= 1,667 \text{ MeV/s}$

$\dot{\Psi}_{\text{trans}} = \dot{I} \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \cdot \rho \right) \cdot E_r = \dot{\Psi}_{\text{inc}} \cdot e^{-\mu_{\text{en}} \cdot x} = 73,1 \text{ MeV/min} = 1,218 \text{ MeV/s}$

$\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} = 3,98 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$

atraviesa lámina

ya que $\dot{\Psi}_{\text{trans}} = \dot{\Psi}_{\text{uncoll}} + \dot{\Psi}_{\text{scat}}$

$\dot{I}_0 e^{-\mu x}$

c)

$\dot{\Psi}_{\text{trans}} = \dot{\Psi}_{\text{uncoll}} + \dot{\Psi}_{\text{scat}} = 1,218 \text{ MeV/s} = \dot{\Psi}_{\text{inc}} e^{-\mu x} + \dot{\Psi}_{\text{scat}} = \dot{\Psi}_{\text{inc}} e^{-\mu_{\text{en}} x}$

$\frac{\dot{\Psi}_{\text{uncoll}}}{\dot{\Psi}_{\text{trans}}} = \frac{e^{-\mu x}}{e^{-\mu_{\text{en}} x}} = e^{-x(\mu - \mu_{\text{en}})} = 65\%$

El 35% viene de lo que se ha dispersado en la lámina.

18

$E_r = 0,5 \text{ MeV}$

$\rho x = 8,9 \text{ g/cm}^2$

$\dot{\Phi}_0 = 8,24 \cdot 10^{-28} \text{ f/m}^2\text{s}$

$\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} = 2,868 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$

$\frac{\mu}{\rho} \text{ Al } 500 \text{ KeV} = 8,445 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$

a) $\frac{\dot{\Psi}_{\text{uncoll}}}{\dot{\Psi}_0} = e^{-\frac{\mu}{\rho} \cdot \rho x} = 47,2\%$

b) $\dot{\Phi}_{\text{trans}} = \dot{\Phi}_0 \cdot e^{-\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \cdot \rho x} = 77\% \cdot \dot{\Phi}_0 = 6,38 \cdot 10^{-28} \text{ f/m}^2\text{s}$

c) $\dot{\Phi}_{\text{abs}} = 23\% \dot{\Phi}_0 = 1,86 \text{ f/m}^2\text{s} = \frac{E}{s \cdot t}$

$\frac{E}{m \cdot t} = \frac{E}{\rho \cdot s \cdot t} = \frac{\dot{\Phi}_{\text{abs}}}{\rho x} = 2,09 \cdot 10^{-20} \text{ f/kg} \cdot \text{s}$
densidad superficial = ρx

19) $d = 8 \text{ mm}$

$\dot{\Psi}_{\text{trans}} = 40 \text{ GeV/s} = \dot{\Phi}_0 \cdot e^{-\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \cdot \rho d}$

$\left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \right)_{\text{Pb } 500 \text{ KeV}} = 9,128 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g}$

a) $\frac{\dot{\Phi}_{\text{scat}}}{\dot{\Phi}_0} = 1 - \frac{\dot{\Phi}_{\text{trans}}}{\dot{\Phi}_0} = 1 - e^{-\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \cdot \rho d} = 56\%$

$\rho_{\text{Pb}} = 11,34 \text{ g/cm}^3$

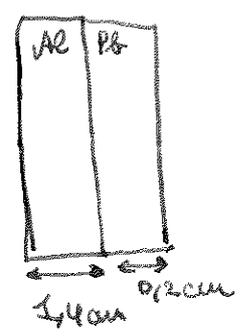
$\left(\frac{\mu}{\rho} \right)_{\text{Pb}} = 4,614 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2/\text{g}$

b) $\dot{I} = \frac{\dot{\Phi}_0}{h\nu} = \frac{\dot{\Phi}_0}{500 \text{ KeV}} = 80000 \text{ /s}$

c) $\frac{\dot{\Psi}_{\text{uncoll}}}{\dot{\Psi}_0} = e^{-\frac{\mu}{\rho} \cdot \rho x} = 23\% \Rightarrow \frac{\dot{\Phi}_{\text{uncoll}}}{\dot{\Phi}_{\text{trans}}} = \frac{23\%}{1-56\%} = \frac{e^{-\mu x}}{e^{-\mu_{\text{en}} x}} = 53\%$

Ejercicios de examen (extra)

$E_x = 200 \text{ KeV}$



Al: $\frac{\mu}{\rho} = 1,223 \cdot 10^{-1} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$
 $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$
 $\frac{\mu_{\text{Al}}}{\rho} = 2,745 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$
 $\rho = 11,34 \text{ g/cm}^3$
 Pb: $\frac{\mu}{\rho} = 9,985 \cdot 10^{-1} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$
 $\frac{\mu_{\text{Pb}}}{\rho} = 5,870 \cdot 10^{-1} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$

a) ¿Qué fracción de ψ es capaz de atravesar sin interactuar?

$\psi_{\text{trav}} = e^{-\mu x} \rightarrow$ En este caso, 2 láminas: $\frac{\psi_{\text{trav}}}{\psi_0} = e^{-\frac{\mu_1}{\rho_1} \rho_1 d_1} \cdot e^{-\frac{\mu_2}{\rho_2} \rho_2 d_2}$
 $= 62\% \cdot 10\% = 6,5\%$

b) Y si colocas las placas al revés?

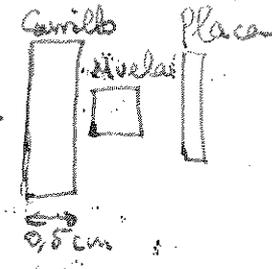
Lo No afecta a los que no interactúan, pero sí a los transmitidos por dispersión.

Ejerc. examen (extra 2)

Dentista, rayos X, cuánto irradiais carrillo?

a) $E_x = 20 \text{ KeV}$, $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$

$\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} |_{\text{tejido humano}} = 0,65 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$



$\frac{\psi_{\text{trav}}}{\psi_0} = e^{-\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \rho x} \rightarrow$ Lo que se absorbe en carrillo es:
 $\frac{\psi_{\text{abs}}}{\psi_0} = 1 - \frac{\psi_{\text{trav}}}{\psi_0} = 1 - e^{-\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \rho x}$

Lo $\frac{\psi_{\text{abs}}}{\psi_0} = 27,7\%$ // \rightarrow a freno en carrillo \rightarrow queremos evitar este efecto indeseado.

b) Igual pero $E_x = 100 \text{ KeV}$

$\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} = 0,026 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \rightarrow \frac{\psi_{\text{abs}}}{\psi_0} = 1,3\% \rightarrow$ efecto despreciable

A mayor E, menor daño en carrillo, por eso se "endurece" el espectro (ν alta), pero cuidado de no subir demasiado para no llegar al otro carrillo o a otros órganos.

OK entre 40 y 70 KeV

\rightarrow Mejor blindajes. Eliminar con Al los γ de 20 KeV en a un 10%

$X_{\text{Al}} = \frac{\ln 10}{\rho_{\text{Al}} (\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho})_{\text{Al}}} = 0,3 \text{ cm}$

\rightarrow bloqueen un 20% de 20 KeV, solo un 3% de 100 KeV



20

$$V = 40 \text{ cm}^3$$

$$\rho = 0,93 \text{ g/cm}^3$$

$$E_{\text{abs}} = 3 \times 10^5 \text{ MeV}$$

$$a) D_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{m} = \frac{E_{\text{abs}}}{\rho \cdot V} = 1,29 \cdot 10^{-6} \text{ Gy}$$

$$b) L = 104 \text{ eV}/\mu\text{m} \rightarrow Q(L) = 1$$

$$H_{\text{abs}} = Q \times D_{\text{abs}} = D_{\text{abs}} = 1,29 \cdot 10^{-6} \text{ Sv}$$

$$c) D_{\text{abs}} \rightarrow 1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}$$

$$D_{\text{abs}} = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,129 \text{ mrad}$$

$$H_{\text{abs}} = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ rem} = 0,129 \text{ mrem}$$

1 Sv = 100 rem

21

$$\frac{dQ}{dm dt} = \dot{X} = \frac{4 \text{ esu}}{0,08 \text{ g} \cdot 1 \text{ s}}$$

$$= 64,7 \text{ MR/s} = 16,7 \frac{\mu\text{C}}{\text{kg}}$$

a) b)

$$1R = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$$

$$1 \text{ C/kg} = 3876 R$$

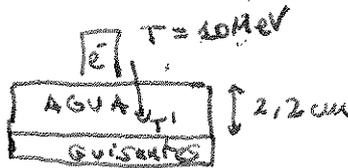
1R → genera 1 esu en 1 cm³ de aire a TIP estándar

$$1 \text{ esu} = 3,34 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

22

$$h = 2,2 \text{ cm}$$

$$T = 10 \text{ MeV}$$



$$T' = T = E_{\text{abs}}(agua)$$

$$\bullet \text{ opción a) } E_{\text{abs}} = \int_0^h \frac{dT}{\rho dx} \cdot dx$$

$$\bullet \text{ opción b) Rango } R_{e^-} |_{10 \text{ MeV}} \text{ agua} = 4,975 \text{ g/cm}^2 \text{ (método aproximado)}$$

$$\text{Rango residual} = 4,975 - 2,2 = 2,775 \text{ cm}$$

$$\text{buscamos que } E \text{ da ese rango} \rightarrow T' \approx 5,45 \text{ MeV}$$

$$\dot{D} = \frac{10 \text{ Gy}}{\text{min}} = \dot{\Phi} \left(\frac{dT}{\rho dx} \right) \rightarrow \frac{dT}{\rho dx} \Big|_{T'} = 4,9276 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$$

$$L \dot{\Phi} = 5,4 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{cm}^2 \text{ s}}$$

23) T = 50 MeV

$\dot{\Phi} = 4,6 \times 10^{10} \frac{\text{protones}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$

t = 0,5 s

a) $\bar{\Phi} = t \cdot \dot{\Phi} = 2,3 \times 10^{10} \frac{\text{protones}}{\text{cm}^2}$

$E_{inc} = \bar{\Phi} \cdot T = 115 \times 10^{10} \frac{\text{MeV}}{\text{cm}^2} = 0,18423 \text{ J/cm}^2 = 1842,3 \text{ J/cm}^2$

$\frac{dT}{\rho dx} = 12,4 \text{ MeV cm}^2 / \text{g}$

$L_D = \frac{dT}{\rho dx} \cdot \bar{\Phi} = 91,4 \text{ Gy/s}$

$L_D = 45,7 \text{ Gy}$

Protones: $Q \sim 30$

$H = Q \cdot D = 1371 \text{ Sv}$

b) $\dot{\Phi} \cdot A = \dot{\Phi} \cdot 2,7 \text{ cm}^2 = 1,242 \cdot 10^{11} \text{ protones/s}$

24)

d = 1 pic

$C_0 = 60$

$A = 20 \text{ mA}$

$\dot{X} = \rho \cdot \frac{A}{d^2}$

$\gamma_1: E_1 = 2,505 \text{ MeV}$

$f_1 = 99,85\%$

$\gamma_2: E_2 = 1,332 \text{ MeV}$

$f_2 = 99,9826\%$

$E_{\gamma 2} = E_1 f_1 + E_2 f_2$

$\dot{X} = (f_1 \rho_1 + f_2 \rho_2) \cdot \frac{A}{d^2} = 2,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}$

$\rho_1 = 194,5 \cdot 2,505 \frac{\text{MeV}(\mu\text{en})}{\text{J}_{\text{aire}}} [\text{m}^2/\text{kg}] \dots \text{ fórmula de teoria}$

$= 1,048 \frac{\text{Rm}^2}{\text{hCi}}$

$\rho_2 = \dots \cdot 1,332 \cdot \dots = 0,557 \frac{\text{Rm}^2}{\text{hCi}}$

$\rho = \rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_1 = 1,603 \frac{\text{Rm}^2}{\text{hCi}}$

$\dot{X} = \rho \cdot \frac{20 \text{ mA}}{(1 \text{ pic})^2} = 0,345 \frac{\text{R}}{\text{h}}$

25

$$A = 23 \text{ Ci}$$

$$I = 131$$

$$t = 10 \text{ min}$$

$$d = 5 \text{ m}$$

$$D = \dot{D} \cdot t = \dot{X} \cdot \left(\frac{W}{e} \right)_{\text{aire}} = \dot{X} \cdot 33,97 \frac{\text{f}}{\text{C}}$$

$$\dot{X} = \rho \cdot \frac{A}{d^2}$$

$$\rho = 194,5 \cdot \frac{\text{Wp}[\text{MeV}]}{\left(\frac{\mu\text{cm}^2}{\text{g}} \right)_{\text{aire}}}$$

← Buscar datos para I-131

26 ... zzzz ...

27

$D = 0,1 \text{ Gy}$
 $N_0 = 100.000$
 $N_{\text{extra}} = 800$
 $N_{\text{net}} = 20.000$

a) $\frac{N_{\text{extra}}}{N_0} = \frac{800}{100000} = \frac{4}{500} = \frac{1}{125} = P_{\text{ex}}$; $p = \frac{20800}{100000} = 0,208$

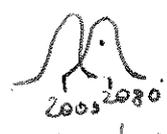
$N'_0 = 10000$
 $N'_{\text{extra}} = p \cdot N'_0 = 80$
 $N'_{\text{net}} = 200$

c) Estudio estadístico \rightarrow distribución binomial

$P_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ $N \equiv$ población total
 $p \equiv$ probabilidad de que ocurra el proceso
 $n \equiv$ nº de afectados
 Media $\mu = N \cdot p$
 $G = \sqrt{Np(1-p)}$... anchura

Para $N'_0 = 10^4 \rightarrow G = 40,6$

$\frac{G'}{N'_{\text{extra}}} \sim \frac{1}{2}$ (muy poco) \rightarrow difícil extraer conclusiones
 $2000 \leftrightarrow 2080$
 \rightarrow dosis pequeña, mucha barra de error



matemáticamente:

$\left| \frac{P_{\text{net}} - P}{a} \right| \gg 1 \rightarrow \frac{N'_{\text{extra}}}{G} \sim 2$ (poco)

b) Para $N_0 = 10^5 \rightarrow \frac{N_{\text{extra}}}{G} \sim 7$ (OK)

28

Modelo 1 blanco/célula - 1 colisión

$P_k = \frac{e^{-k} k^k}{k!}$ Prob. supervivencia: $P_0 = e^{-k} = \frac{S}{S_0} = e^{-D/D_0} = e^{-k}$

ϕ : frecuencia, σ : área del target (blanco) = $4,2 \times 10^7 \text{ cm}^2$
 $P_0 = 25\% \rightarrow \ln P_0 = -\phi \sigma \rightarrow \sigma = -\frac{\ln P_0}{\phi} = 33,0 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$

Tamaño célula $\sim 100 \mu\text{m}$

29

$$\frac{S}{S_0} = e^{-3,4D}$$

a) $D_0 \equiv$ mean actual dose \rightarrow P supervivencia = $\frac{1}{e} = \frac{S}{S_0} (D = D_0)$

$$\hookrightarrow D_0 = \frac{1}{3,4} = 0,294 \text{ Gy}$$

b) $LD50 \rightarrow \frac{S}{S_0} (D = LD50) = \frac{1}{2} \rightarrow D_{LD50} = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{3,4} = \frac{\ln 2}{3,4} = 0,22 \text{ Gy}$

c) $D_0 = LD(\frac{1}{e}) \approx LD37$

30

$$\frac{S}{S_0} = e^{-1,6 \cdot D}$$

$$P_0 = e^{-1,6 \cdot D} = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{0!} \rightarrow \mu = 1,6D \Rightarrow 1,6$$

a) $P_0 = e^{-1,6} = 0,202 = 20,2\%$

b) $P_2 = \frac{e^{-1,6} \cdot (1,6)^2}{2!} = 25,8\%$

31 $\rho = 1,2 \text{ g/cm}^3, d = 3 \text{ mm}$

$$T_{max} = 1,82 \text{ MeV}$$

$$\rho R = 0,412 T(1,127 - 0,0954 \ln T) = 0,852 \text{ g/cm}^2$$

a) $r = \frac{R}{\rho} = 0,71 \text{ cm} \parallel \rightarrow 7,1 \text{ mm}$ \rightarrow Atravesar quante $\rightarrow 0,852 \text{ g/cm}^2 = 3 \text{ mm} \cdot 1,2 \text{ g/cm}^3 + X_{pid} \cdot 1 \text{ g/cm}^2$

b) $\dot{\Psi} = 10^6 / \text{cm}^2 \rightarrow \dot{\Phi} = T_{max} \cdot \dot{\Psi} = 1,82 \cdot 10^6 \text{ MeV/cm}^2$

Factor colid $Q = 1 \rightarrow H = D$

\hookrightarrow Dosis superficial se calcula a $0,07 \text{ mm}$

$$D = \dot{\Psi} \cdot \frac{dt}{\rho dx}$$

$$\hookrightarrow \ln T = 6,03 - 3,24 \sqrt{3,24 - \ln R} \rightarrow \frac{dT}{dR} = \frac{T}{R} \cdot \frac{1,6}{\sqrt{3,29 - \ln R}}$$

$$R_{residual} = 0,4948 - 0,07 = 0,4248 \rightarrow \frac{dT}{dR} = 49143 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$$

$$\hookrightarrow H_p(0,07) = 93067 \text{ mSv}$$

c) $t = 3 \text{ h}$
 $H_p = 1116 \text{ mSv} \rightarrow$ factor branching ratio $0,038\%$ que é atravesar quante
 \rightarrow no siempre \perp
 \rightarrow " " E_{max}

3T

$$\rho = 1,2 \text{ g/cm}^3$$

$$X_G = 0,3 \text{ cm}$$



$$1,17 - 0,0954 \ln \bar{T}$$

$$R = 0,412 \cdot \bar{T} \quad \text{g/cm}^2$$

MAXIMA ENERGIA = 1,82 MeV

$$R = 0,85 \text{ g/cm}^2 \quad \text{si } \rho = 1,2 \text{ g/cm}^3 \rightarrow$$

$\rightarrow R = 0,71 \text{ cm}$ LUEGO ATRAVIESA COMPLETAMENTE EL GUANTE

$$0,8548 = \underbrace{0,3 \cdot 1,2}_{\text{GUANTE}} + X_T \cdot 1 \rightarrow X_T \sim 5 \text{ mm PIEL}$$

b

EL FACTOR DE CALIDAD $Q = 1 \Rightarrow$

$H = D$ LA DOSIS EQUIVALENTE SUPERFICIAL

SE CALCULA A 0,07 mm $H_p(0,07)$

$$D = \int \left(\frac{dT}{dx} \right)$$

$$\ln T = 6,03 - 3,24 \sqrt{3,29 - \ln R}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{3,24}{2\sqrt{3,29 - \ln R}} \frac{dR}{R}$$

$$\frac{dT}{dR} = \frac{T}{R} \cdot \frac{1,62}{\sqrt{3,29 - \ln R}}$$

A UNA DISTANCIA DE 0,07 mm $R_{RESIDUAL} =$

$$= 0,4948 - 0,07 = 0,4878 \text{ g/cm}^2 \quad \text{Y}$$

PARA ESTE RANGO $\rightarrow T = 1,154 \text{ MeV}$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dR} &= \frac{1,154}{0,4878} \cdot \frac{1,62}{\sqrt{3,29 - \ln 0,4878}} \\ &= 1,9143 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}} \end{aligned}$$

Y POR TANTO

$$\begin{aligned} H_p(0,07) &= 10^6 \frac{e^+}{\text{cm}^2} \cdot 1,9143 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}} \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{\text{kg}} \cdot \frac{1,6023 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1 \text{ MeV}} \\ &= 0,3067 \text{ mSv} \end{aligned}$$

③ t = 3h

$$\phi = 2 \cdot 10^7 \frac{e^+}{\text{cm}^2 \cdot \text{min}}$$

TOMANDO EL CASO ANTERIOR

$$H_p(0,07) = 1116 \text{ mSv}$$

MUCHO, PERO

① EN LA DESINTEGRACIÓN DEL ²²Na SE EMITEN

dos e ⁺	E = 1,82 MeV	0,038%
	E = 0,545 MeV	90%

EL SEGUNDO NO ATRAVIESA EL GUANTE,
LUEGO HAY UN FACTOR 0,038%

$$H_p(0,07) = 0,42 \text{ mSv}$$

PERO A DEMÁS EL ESPECTRO β^+ NO EMITE SIEMPRE EN EL MÁXIMO, SINO QUE SU ENERGÍA PROMEDIO $\sim \frac{1}{3} E_{\text{max}}$, ADENAS NO SIEMPRE ES \perp , LUEGO PODEMOS CONSIDERAR UN FACTOR $\frac{1}{2}$ ADICIONAL

$$H_p \approx 0,42 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sim 0,07 \text{ mSv}$$

QUE SI ES ACEPTABLE

por lo tanto solo son necesarias
medidas administrativas.

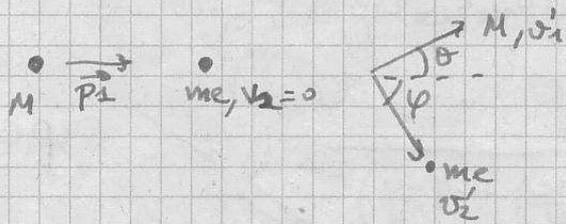
(6)

- REVISIÓN PROCEDIMIENTOS
- RECONOCIMIENTO (COLLEJA) A LOS TRABAJADORES DE LAS MEDIDAS DE SEGURIDAD

Ejercicios a entregar (Física de las radiaciones)

Transferencia de energía en una colisión:

- Demostrar que $T_m' = T_M \cdot \frac{4Mme}{(M+me)^2} \cos^2 \varphi$ (caso no relat)



Supones e⁻ libre en reposo

Conservación de energía: $\frac{p_2^2}{2M} = \frac{p_1'^2}{2M} + \frac{p_2'^2}{2me} \Rightarrow p_1^2 - p_1'^2 = p_2'^2 \cdot \frac{M}{me}$

Conservación de momento: $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \rightarrow \vec{p}_1 - \vec{p}_1' = \vec{p}_2'$

$\rightarrow (\vec{p}_1 - \vec{p}_2')^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2' = p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1 p_2' \cos \varphi = p_1'^2$

$p_2'^2 + (p_1^2 - p_1'^2) - 2p_1 p_2' \cos \varphi = 0$

$p_2'^2 + p_2'^2 \frac{M}{me} - 2p_1 p_2' \cos \varphi = 0$

$p_2' (p_2' (1 + \frac{M}{me}) - 2p_1 \cos \varphi) = 0$ $\nearrow p_2' \neq 0$ (se transfiere E)

$\hookrightarrow p_2' = \frac{2p_1 \cos \varphi}{1 + M/me} = \frac{me}{M+me} \cdot 2p_1 \cos \varphi$

$p_2'^2 = \frac{4me^2 p_1^2 \cos^2 \varphi}{(M+me)^2}$

$T_m' = \frac{p_2'^2}{2me} = \frac{4me}{(M+me)^2} \cdot \frac{p_1^2}{2} \cdot \frac{M}{M} \cos^2 \varphi = \frac{4Mme}{(M+me)^2} \cdot T_M \cdot \cos^2 \varphi$

$\rightarrow T_{m' \text{ MAX}} = T_m'(\varphi=0) = \frac{4Mme}{(M+me)^2} \cdot T_M$

- Demostrar que $Q = \frac{2me\gamma^2 v_1^2 \cos^2 \varphi}{\gamma^2(1-v_1^2 \cos^2 \varphi) + 2\gamma \frac{me}{M} + \left(\frac{me}{M}\right)^2}$ (c=1) (caso relativista)

$(E_1, \vec{p}_1) + (me, 0) = (E_1', \vec{p}_1') + (E_2', \vec{p}_2')$

$M^2 + me^2 + 2E_1 me = M^2 + me^2 + 2E_1' E_2' - 2\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2'$

$E_1 me = E_1' E_2' - \vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' = (E_1 + me - E_2') E_2' - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2') \cdot \vec{p}_2'$

$\hookrightarrow E_1 me = E_1 E_2' + me E_2' - me^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2' \Rightarrow E_2' = me + Q$

$E_1 me = (E_1 + me)(me + Q) - me^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2'$

$E_1 me = E_1 me + me^2 + Q(E_1 + me) - me^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2'$

$\hookrightarrow Q(E_1 + me) = \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2' \cdot (c)^2 = |\vec{p}_2| |\vec{p}_2'| \cos \varphi$

$Q^2 (E_1 + me)^2 = \vec{p}_2^2 \vec{p}_2'^2 \cos^2 \varphi = \gamma^2 M^2 v_1^2 (E_2'^2 - me^2) \cos^2 \varphi$

$Q^2 (E_1 + me)^2 = \gamma^2 M^2 v_1^2 (E_2' + me)(E_2' - me) \cos^2 \varphi$

$Q^2 (E_1 + me)^2 = \gamma^2 M^2 v_1^2 (2me + Q) \cdot Q \cdot \cos^2 \varphi$

$$Q[(E_{\perp} + me)^2 - \gamma^2 M^2 v_1^2 \cos^2 \varphi] = 2 \gamma^2 v_1^2 me \cos^2 \varphi M^2$$

$$Q = \frac{2me \gamma^2 v_1^2 \cos^2 \varphi \cdot M^2}{\gamma^2 M^2 + me^2 + 2\gamma M me - \gamma^2 M^2 v_1^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{2me \gamma^2 v_1^2 \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - v_1^2 \cos^2 \varphi) + 2\gamma \left(\frac{me}{M}\right) + \left(\frac{me}{M}\right)^2} \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Es fácil ver que $Q_{\max} = Q(\varphi=0)$, ya que el numerador es máximo y el denominador mínimo (pero positivo) en dicho caso.

$$Q_{\max} = \frac{2me \gamma^2 v_1^2}{1 + 2\gamma \left(\frac{me}{M}\right) + \left(\frac{me}{M}\right)^2} \quad \begin{array}{l} \text{si } \frac{me}{M} \rightarrow 0 \\ = 2me \gamma^2 v_1^2 \end{array}$$

Límite clásico: $v_1 \rightarrow 0$
 $\gamma \rightarrow 1$

$$Q_{\text{clás}} = \frac{2me (1)^2 v_1^2 \cos^2 \varphi}{(1)^2 (1 - 0) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{me}{M} + \left(\frac{me}{M}\right)^2} = \frac{2me v_1^2 \cos^2 \varphi}{\left(1 + \frac{me}{M}\right)^2}$$

$$= \frac{2me v_1^2 \cos^2 \varphi}{(M + me)^2} \cdot M^2 = \frac{4M me \cos^2 \varphi}{(M + me)^2} \cdot \frac{M^2 v_1^2}{2} = T_M \cdot \frac{4M me \cos^2 \varphi}{(M + me)^2}$$