Trabajos Tutelados de Física Cuántica 2009-2010

Boletín 4: Problemas Unidimensionales

Cuestión 4. 1

Sea una partícula descrita por la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} .$$

a) Normalizar esta función de onda.

b) Calcular la probabilidad de que la partícula tenga un momento comprendido entre p y $p+dp$.

c) Calcular el valor esperado de los operadores $\widehat{\mathrm{X}}$, $\widehat{\mathrm{P}}$ y $\widehat{\mathrm{X}}^2$.

Cuestión 4. 2

Dada la función de onda

$$\psi(x) = \frac{N}{x^2 + a^2} .$$

a) Normalizarla.

b) Calcular $\phi(p)$.

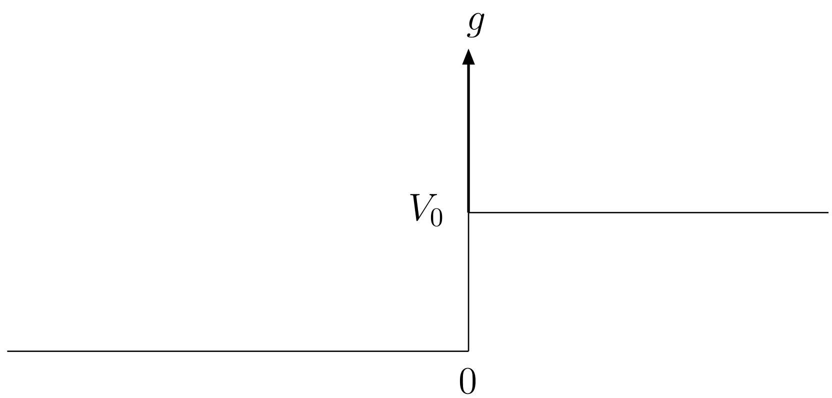
c) Calcular $\langle x^n \rangle$. ¿ Qué valores de n son convergentes ?

d) Calcular $\langle p \rangle$ y $\langle p^2 \rangle$.

e) Calcular Δx y Δp; comprobad así mismo que $\Delta x\ \Delta p \geq \hbar/2$.

Cuestión 4. 3

Considerar una barrera formada por un escalón y un potencial del tipo delta de Dirac $V(x) = g\,\delta(x)(g > 0)$ representado en la figura:



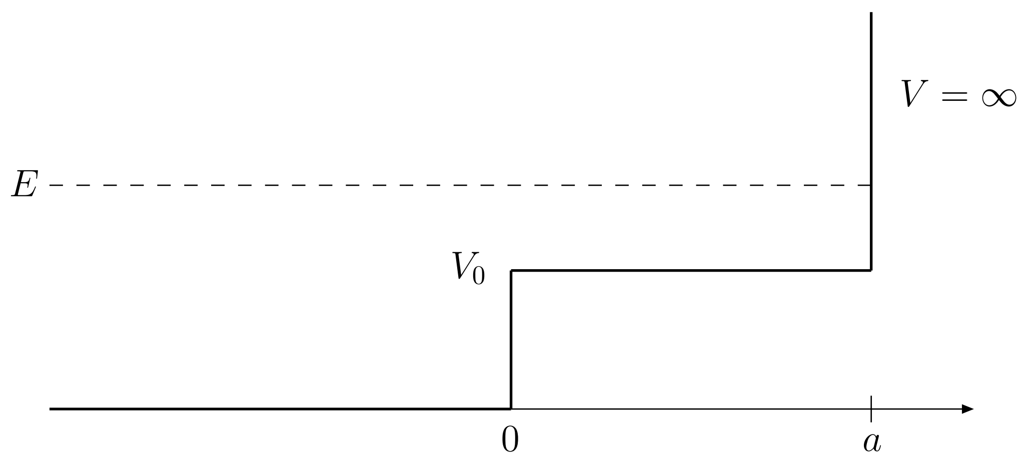
a) Escribir la forma general de la función de onda en las diferentes zonas y las condiciones de continuidad/discontinuidad.

b) Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión.

c) ¿ Cómo serán los coeficientes de reflexión y transmisión si quitamos la delta ?

Cuestión 4. 4

Considerar el potencial representado en la figura formado por un escalón en $x = 0$ de altura V_0 y una barrera infinita en $x = a > 0$:



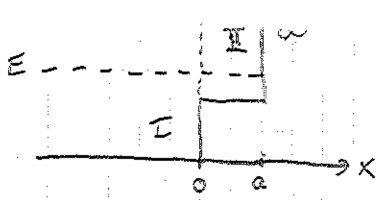
a) Escribir la forma general de las soluciones estacionarias con $E > V_0$ que describen un flujo constante de partículas lanzadas desde $-\infty$ hacia la derecha.

b) Imponer las condiciones de continuidad.

c) Definir el coeficiente de transmisión de la zona $x < 0$ a la zona $0 \le x < a$.

d) Encontrar este coeficiente de transmisión en los casos siguientes: $2p_2\,a = \frac{\pi}{2}\,\hbar$ y $2p_2\,a = \pi\,\hbar$, donde $p_2 = \sqrt{2m\,(\,E - V_0\,)}$ y E es la energía de las partículas incidentes.

(4.4.)

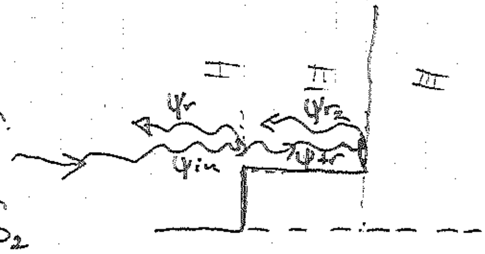


Fernando Hueso González

10

a) Lanzando desde $-\infty$

I) $\psi_{in} \underset{p_1}{\rightsquigarrow}$ ⊕ $\psi_{ref} \underset{-p_1}{\leftsquigarrow}$



II) $\psi_{in_2} = \psi_{tr} \underset{p_2}{\rightsquigarrow}$ ⊕ $\psi_{ref_2} \underset{-p_2}{\leftsquigarrow}$

III) $\psi = 0$

$\Rightarrow p_1 = \sqrt{2mE}$

$p_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}$

$\Rightarrow$ I) $\psi_E = \underbrace{A \cdot e^{ip_1 x/\hbar}}_{\psi_{in}} + \underbrace{B \cdot e^{-ip_1 x/\hbar}}_{\psi_{r_1}}$

II) $\psi_E = \underbrace{C \cdot e^{ip_2 x/\hbar}}_{\psi_{tr}} + \underbrace{D \cdot e^{-ip_2 x/\hbar}}_{\psi_{r_2}}$

III) $\psi_E = 0$

b) $\begin{cases} \psi_{E_I}(0) = \psi_{E_{II}}(0) \longrightarrow A + B = C + D \\ \psi_{E_{II}}(a) = \psi_{E_{III}}(a) \rightarrow C \cdot e^{ip_2 a/\hbar} + D \cdot e^{-ip_2 a/\hbar} = 0 \rightarrow C = -D e^{-2ip_2 a/\hbar} \\ \psi_{E_I}'(0) = \psi_{E_{II}}'(0) \longrightarrow ip_1(A - B) = ip_2(C - D) \rightarrow (A - B) = \frac{p_2}{p_1}(C - D) \end{cases}$

$$2A = \frac{p_2}{p_1}(C - D) + C + D = \left(\frac{p_2}{p_1} + 1\right) C - D\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{p_2}{p_1} + 1\right) C + e^{2ip_2 a/\hbar}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) C = \left[\left(\frac{p_2}{p_1} + 1\right) \cdot e^{-ip_2 \frac{a}{\hbar}} + \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \cdot e^{ip_2 \frac{a}{\hbar}}\right] C e^{ip_2 \frac{a}{\hbar}}$$

$$A = \frac{e^{ip_2 a/\hbar}}{2} C \left[\frac{p_2}{p_1}\left(e^{+ip_2 a/\hbar} + e^{-ip_2 a/\hbar}\right) - \left(e^{ip_2 a/\hbar} - e^{-ip_2 a/\hbar}\right)\right]$$

$\theta = p_2 a/\hbar$

$$= C \cdot e^{ip_2 a/\hbar}\left[\frac{p_2}{p_1} \cos\theta - i \,\mathrm{sen}\,\theta\right]$$

$$\boxed{C = \frac{A \cdot e^{-i\theta}}{\frac{p_2}{p_1}\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

$$D = -C \cdot e^{2i\theta} \Rightarrow \boxed{-\frac{A \cdot e^{i\theta}}{\frac{p_2}{p_1}\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta} = D}$$

$$B = C + D - A = C(1 - e^{2i\theta}) - A \Rightarrow \boxed{B = A \cdot \left(\frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{\frac{p_2}{p_1}\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta} - 1\right)}$$

$$T_{I\to II} = \frac{\text{[illegible]}}{|j_{in}|^2} = \frac{\text{[illegible]}}{\frac{p_1}{m}|A|^2} = \frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$T = \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}\cos^2\theta + \frac{p_1}{p_2}\operatorname{sen}^2\theta}$$

a) $$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\sqrt{2mE}} = \sqrt{1-\frac{V_0}{E}}$$

- $\theta = \pi/4$

$$T = \frac{\sqrt{1-V_0/E}}{\left(1-\frac{V_0}{E}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1-V_0/E}}{1-\frac{V_0}{2E}} \leq 1$$

$= 0$ si $V_0 = E$

$= 1$ si $E\to\infty$

- $\theta = \pi/2$

$(V_0, E > 0;\ V_0 < E)$

$$T = \frac{\sqrt{1-V_0/E}}{0+1} = \sqrt{1-\frac{V_0}{E}} \leq 1$$