$v_\varphi = \frac{w}{K}$

$v_g = \frac{\partial w}{\partial K} < c$

$\hbar = 6{,}58 \cdot 10^{-22}$ MeVs

1 erg $= 0{,}624 \cdot 10^{6}$ MeV

r. e. m : $w = cK$

Ondas planas $\psi = A \cdot e^{i(Kx - wt)}$ < lineales / ec. schr.

$E = \hbar w = p^2/2m$
$p = \hbar K$

963 166 110

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t)\cdot\Psi \qquad 3D: \nabla^2\psi$$

$p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\, \phi(K)\cdot e^{iKx} \longleftrightarrow \phi(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x,0) e^{-iKx}$$

w no lineal $\to v(K) \to$ distorsión

$$w = w(K_0) + \underbrace{\frac{dw}{dK}}_{v_g}(K-K_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2w}{dK^2}\right)_{K=K_0}(K-K_0)^2$$

$I = |\psi(x,0)|^2$

w lineal $\to f(x \pm ct) \to$ onda viajera

$P(x,t)_{dx} = |\psi(x,t)|^2 dx$ — $P_{ab} = \int_a^b dx\, |\psi(x,t)|^2$ $\quad P \propto \psi$

$\psi(x,t) \to$ amplitud de probabilidad de presencia de materia

$P(t) < \infty \to$ Soluc. $\in L^2(-\infty, +\infty) \to$ onda plana no

$\Rightarrow x \to \infty, \quad \psi(x) \sim x^{-1/2 - \varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$

$\Psi(x,t) \to$ toda la info

Antes medir < Realista / Ortodoxa / Agnóstica

procesos físicos < ordinarios, ψ, ensanchar... / medida $\to$ colapso ...

$j \sim x^{-2}$

$$\boxed{j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0}$$

$j = \rho\frac{\hbar K}{m} = \rho v \to \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$ $\quad 3D: \frac{\partial P(\vec r,t)}{\partial t} + \vec\nabla\vec j(\vec r,t) = 0 \to \int dV\frac{\partial P(\vec r,t)}{\partial t} = -\int d\vec S\cdot\vec j(\vec r,t)$

Separa si V no dep. de t: $\Psi = \varphi(x)\cdot\phi(t) \to E = $ cte $\to$ estados estacionarios < E cte, mide siempre E (flujo probabilidad) / ρ no $f(x)$

$\to \phi(t) = A\cdot e^{i\frac{Et}{\hbar}}$

$|\psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2\cdot|A|^2|e^{-i/\hbar\, Et}|^2 = |A|^2|\psi(x)|^2$

$\Rightarrow$ energía definida, estado E (puede no ser estado físico)

Parte espacial: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_E(x)}{dx^2} + V(x)\psi_E = E\cdot\psi_E(x) \to$ Ec. Schröd. independiente del tiempo

Mec. clásica $\to H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \to$ E total sistema

Operadores $p \to \hat p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$H \to \hat H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad \Rightarrow \hat H\psi_E = E\cdot\psi_E$ ecuac. de valores propios dim ∞

Autovalores: valores posibles E

" vectores: funciones de onda $\quad E = (\psi_E, \hat H\psi)$

Propiedades $\hat{H}$

a) Si $V(x)$ es real → autovalores reales → E real $E = (\psi_E, H\psi_E)$

b) " " " " → autofunciones $\hat{H}$ son ortonormales $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$

i) $E_n \neq E_m \to \delta_{nm}$

ii) $E_n = E_m$, con $n \neq m$, 2 ó + soluciones con misma E

valores prop. degenerados

↳ subesp. vectorial de dim > 1 → eliges b.o.n.

$L^2(-\infty, +\infty)$ → espacio de Hilbert

↳ espacio vectorial, prod. escalar: $(\phi, \psi) = \langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi^*(x)\psi(x) \quad \forall \phi, \psi \in L^2(-\infty, +\infty)$

Ɇ. Schwarz: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}| \to \langle \phi | \psi \rangle \leq \sqrt{\int \phi^2 dx \int \psi^2 dx} < \infty$ ✓

Propied.

$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)^*$

$(\phi_1 + \phi_2, \psi) = (\ ) + (\ )$ linealid.

$(\phi, \lambda\psi) = \lambda(\phi, \psi)$

$(\lambda\phi, \psi) = \lambda^*(\phi, \psi)$

$(\phi, \phi) \geq 0 \quad (\phi \neq 0)$

Si $(\phi, \psi) = 0 \to \phi$ y ψ ortogonales

Superposición de estados estacionarios

$\psi_{E}(x)$ → base L^2 → solución general (si numerable): $\psi(x,t) = \sum_n \alpha_n \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \cdot \psi_n(x)$

$\hat{\Psi}$ ya no estacionaria: $|\ |^2 = f(t) = \sum \alpha_m^* \alpha_n \psi_m^* \psi_n\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t}$

Normalización!

$\int |\ |^2 dx = 1 = \sum |\alpha_n|^2$

En $t=0$

$\psi(x,0) = \sum \alpha_n \psi_n(x)$

→ cada estado estacionario depende como $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

$\alpha_m = (\psi_m, \Psi(x,0))$ ~ análogo c.l. ondas planas

$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \hat{H}(V=0)$ α_n, $\frac{p^2}{2m} + V$ → valores discretos, permitidos $\sum$ pasa a $\int$ continuo

$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \phi(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_p t}\, \psi_p(x)$ f. propias de $\hat{H}_0$

c.l. → $\sum$ est. estacion. ψ_n; → $\int$ ond. planas ψ_p

‖> cambio base

$E_p = \frac{p^2}{2m}$

$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ en realid. da = a q t

$\phi(p) = (\psi_p, \Psi(t=0)) \longrightarrow (\psi_p, \psi_{p'}) = \delta(p-p')$

- $\psi(x,t)$ como c.l. de ψ_n o ψ_p $\quad \vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$
- $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm} \quad (\psi_p, \psi_{p'}) = \delta(p-p')$
- $\psi_n(x)/\psi_p(x)$ propias de $\hat{H}/\hat{H}_0$ → desarrollo ctte (V=0)

ψ_p → no son soluciones físicas (ondas planas)

1 partícula libre no puede estar en un estado estacionario

↳ ∄ p. libre con E definida

T2

- Discretas

$p(j) = \frac{N(j)}{\sum_j N(j)}$ $\qquad \langle j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(j) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} P(j) = 1$

- Continuas

$\rho(x) \cdot dx \rightarrow P_{x, x+dx}$, ρ: densidad de probabilidad

$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho(x) \cdot x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho(x) = 1$ $\qquad \rho = |\psi(x,t)|^2 \rightarrow$ densid probabilid de presencia de materia

Posición x: $\langle x \rangle_{\psi(x,t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot |\psi(x,t)|^2 x$ → medir muchas partículas en my estado ψ

$\langle f(x) \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, |\psi(x,t)|^2 = \int_{-\infty} dx\, \psi^* \underset{\text{si } f \text{ operador no c.}}{f(x)} \psi$

↳ puede depender de t aunq $f(x)$ no xq $\psi(t)$

$x \rightarrow \hat{x} = x$

$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad = -i\hbar \vec{\nabla}$

$H \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ $\qquad \Rightarrow$ medir = actuar $\hat{Q}\psi$ y valor medio $\langle Q \rangle = \langle \psi | \hat{Q} \psi(t) \rangle$

$Q(x,p) \rightarrow \hat{Q}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$

$\langle Q(x,p) \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^* \hat{Q}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x})\, \psi(x,t) = (\psi(t), \hat{Q}\psi(t))$

Tras. Ehrenfest → escala medida >> Δx

$\langle \hat{p} \rangle = m \frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt}$

$\frac{d\langle \hat{p} \rangle_\psi}{dt} = \langle -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \rangle_\psi = -\frac{\partial V(\langle x \rangle_\psi, t)}{\partial \langle x \rangle_\psi} + (\Delta x)^3$ si V cuadrático x

---

Conmutador $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

$[x, p] = +i\hbar I$

$\langle \hat{H} \rangle = \sum |\alpha_n|^2 \cdot E_n$, $\alpha_n = (\psi_n, \psi(t=0))$

$|\phi(p)|^2 \rightarrow$ " " mom

$|\alpha_n|^2 \rightarrow$ distr. prob. energías

$|\psi|^2 \rightarrow$ " " posición

$|\alpha_n|^2 \rightarrow$ prob. medir E de ψ sea E_n

no sólo se miden valores propios de $\hat{H}$

$\sum |\alpha_n|^2 = 1$ (puede ser ∞ o discreto) $\qquad$ ¿separado? ¿c.l.?

α_n → independientes de t (típico de $\hat{H}$)

$\langle \vec{p} \rangle = (\psi, -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}) = (\phi, \phi p)$ $\qquad \hat{p}\,\varphi_p = p\,\varphi_p$

$|\phi(p,t)|^2 dp \rightarrow$ Prob. $p, p+dp$, $\phi(p,t) \rightarrow$ f. ondas espacio momentos

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 dp = 1$ (Parseval)

	Caso discreto	Caso libre continuo
H	$\hat{H}\psi(x,t) = E_n \psi(x,t)$	$H_0 \varphi_p(x) = E_p \varphi_p(x)$
ψ	$\psi(x,t) = \sum a_n(t) \psi_n(x)$	$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(p,t) \varphi_p(x)\, dp$
Autofunc.	$\psi_n(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$	$\varphi_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$
ortonorm.	$(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \delta_{nm}$	$(\varphi_p(x), \varphi_{p'}(x)) = \delta(p' - p)$
Coeficientes	$a_n(t) = a_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} = (\psi_n(x), \psi(x,t))$	$\phi(p,t) = (\varphi_p(x), \psi(x,t))$

$O(x,p) \to \hat{O}(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x})$ → cualquier observable: interpretación estadística generalizada

mides $\hat{Q}$ → solo puede obtener autovalor

$\hat{Q}\psi_\lambda = \lambda\cdot\psi_\lambda(x)$

$\hat{O}\psi_\lambda = \lambda\cdot\psi_\lambda$

$P_\psi(\lambda) = |(\psi_\lambda, \psi(t))|^2$

$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_\lambda^*(x)\, \Psi(x,t)\right|^2$

Conjunto de λ de operador: espectro del operador < discreto $|c_n|^2$, $c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi(x,t)\, dx = (\psi_n, \psi(t))$; continuo $c(\lambda)$

+ fácil $t=0$, $c_n = t$, $\forall$ estacionario

$\psi(x,t) = \sum_n c_n(t)\cdot\psi_n(x)$ → conjunto completo formado x f. propias → base E.H.

F. propias $\hat{X}$?

↳ $\hat{X} f_{x_0}(x) = x\, f_{x_0}(x) = x_0 f_{x_0}(x) \Rightarrow f_{x_0} = \delta(x-x_0)$ → $(f_{x_0}, f_{x_1}) = \delta(x_0 - x_1)$ o.n.

↳ $\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\, \delta(x-x_0)\, \psi(x_0,t)$ c.l. f. prop.

Operadores hermíticos

$\hat{O}: L^2(-\infty,+\infty) \to L^2(-\infty,+\infty)$

lineales!

↳ e.v. dim n: op. lineales ≡ matrices cuadradas, $\hat{A}_{ij} = (\vec{e}_i, \hat{A}\vec{e}_j)$

L^2 → elem$_{\phi\psi}$ matriz $\hat{A}$:

$(\phi, \hat{A}\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi^*(x)\,[\hat{A}\cdot\psi(x)]$

Conjugado hermítico de $\hat{A} \equiv \hat{A}^+$ = adjunto

1) $(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}^+\phi, \psi)$ → $\hat{A}^+ = (\hat{A}^T)^*$

2) Si $\hat{A}^+ = \hat{A}$ → $(\phi, \hat{A}\psi) = (\hat{A}\phi, \psi)$ ≡ autoadj ≡ hermítico

3) $\hat{A} = \hat{B}\hat{C}$ → $\hat{A}^+ = \hat{C}^+\hat{B}^+$

5) $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$

Valor esp $\hat{A}$

$\langle\hat{A}\rangle_\psi = (\psi, \hat{A}\psi) \Rightarrow$ real $\Rightarrow \langle\hat{A}\rangle_\psi = \langle\hat{A}\rangle_\psi^* = (\hat{A}\psi, \psi) = (\psi, \hat{A}\psi)$

↳ Observables físicos representados por operadores hermíticos

$\hat{P}\hat{X}, \hat{X}\hat{P}$ no es hermítico, $\frac{1}{2}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})$ sí

$\hat{X}, \hat{P}$ hermíticos

Propieds op. hermítico = autoadjunto $\hat{A} = \hat{A}^+$

1) Autovalores reales

2) Autovectores ortonormales < $(\psi_a, \psi_b) = \delta_{ab}$ si esp. numerable (discreto) → f. propias normalizables ; $= \delta(a-b)$ si esp. continuo, f. propias no normalizables → s. ... sol. físicas

3) funciones propias forman base del espacio de Hilbert $L^2(-\infty,+\infty)$

↳ conjunto completo

$\mathcal{F}(f'_x) = k\,\mathcal{F}(f)$

$\int_{(0)}^{+\infty} dx\, x^\alpha e^{-x^2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$

$L = T - V$

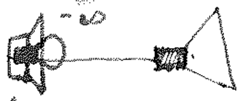
$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$

T3

$\sigma^2 = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2 \geq 0 = \sum (j - \langle j \rangle)^2 P(j)$

$\langle j^2 \rangle \geq \langle j \rangle^2$

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)(x - \langle x \rangle)^2 dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ Incertidumbre cuántica:



$\psi(x,t), \hat{A} \rightarrow \sigma_A^2 = (\Delta\psi \hat{A}) = \langle \hat{A}^2 \rangle_\psi - \langle \hat{A} \rangle_\psi^2 \geq 0$

$= (\psi, [\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi I]\psi) = \langle (A - \langle \hat{A} \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi$

$\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n(x) \rightsquigarrow (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi I)^2 \rightarrow$ f. propias: ψ_n
$\lambda : (a_n - \langle \hat{A} \rangle_\psi)^2$

Si $\hat{A}$ hermítico $\rightarrow \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi I$ tb $\rightarrow$ valores propios reales

$(\Delta\psi \hat{A})^2 = \sum (a_n - \langle \hat{A} \rangle_\psi)^2 P_\psi(a_n) \rightarrow P_\psi(a_n) = |\psi_n, \psi(t)|^2$

Si $\Delta\psi \hat{A} = 0 \Rightarrow \langle \hat{A} \rangle_{\psi_n} = a_n$, $\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n \rightarrow$ tener estado propio del operador (estados de A definida)

RIH : $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

$\psi, \hat{A}, \hat{B}$

$\sigma_A^2 = (f, f) \rightarrow f = (A - \langle \hat{A} \rangle_\psi)\psi \Rightarrow \sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi|$

$\sigma_B^2 = (g, g)$ $\quad \sigma_A \cdot \sigma_B = (\Delta\psi \hat{A})(\Delta\psi \hat{B})$

$\rightarrow$ 1 principio de incertidumbre xa cada par operadores que no conmuten (= incompatibles)

$\rightarrow \nexists$ conjunto completo funciones propias de 2 oper. incomp. simultáneamente

t no es operador, parámetro evolución sistema

$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \rightarrow \Delta t$: tiempo característico de evolución del sistema (apreciable

$\hookrightarrow$ anchura de la distribución de $E \sim \frac{\hbar}{2\tau_{ev}}$

Estado estacionario $\rightarrow \Delta E = 0$, $\tau_{ev} \rightarrow \infty$ (no pasa nada)

c. l. 2 est. est. $\rightarrow \tau_{osc} = \frac{2\pi\hbar}{E_1 - E_2}$ $\rightarrow$ sist. inestable, no puede tener E definida sino espectro de anchura $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\tau_{ev}}$

$\Delta E = E_1 - E_2$

Anchura natural niveles E

$\rightarrow$ x encima fundamental $\rightarrow$ anchura natural x ser inestables $\rightarrow$ no E definida

$E_0 = E_e - E_p = \hbar\omega_0 \rightarrow E_e + \Delta E_e \rightarrow \omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$

$I(t) = I(t=0) \cdot e^{-t/\tau}$, $I(t) \propto$ átomos en E_e, $t=0 \rightarrow N_0$

τ : vida media $\quad I(t) \propto$ Prob. permanecer

$|\Phi(t)|^2 \propto I(t)$, $\Phi(t) = A \cdot e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} \cdot e^{-t/2\tau}$ $\quad$ A complejo $\quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$

$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE' \, \alpha(E') \frac{e^{-i\frac{E' t}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ $\quad \alpha(E') \rightarrow$ amplitud de prob. medir E'

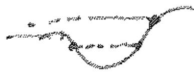
$\alpha(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot \frac{e^{\frac{iEt}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \Phi(t)$ $\quad |\alpha|^2 = \frac{|A|^2 \hbar}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + (\frac{\hbar}{2\tau})^2}$

distribución de Breit-Wigner

$= \frac{|\alpha(E_0)|^2 \left(\frac{\hbar^2}{2\tau^2}\right)}{(E - E_0)^2 + \frac{\hbar^2}{(2\tau)^2}}$

$\tau_A = \frac{\hbar}{\Delta M} \rightarrow$ quarks

$\lim_{x \to \infty} x R(x) = 0$



$E - V(x) = E_{cin}$

colisión /scattering : en $+$ ó $-\infty$ → puede seguir con $v>0$, $E > V_{\pm\infty}$, $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{\pm\infty})}$ ó... si límite es suficiente.

estado ligado : puntos retorno, acotada $E = V(a)$ → $v=0$

$\psi_E(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\,\varphi_E(x)$, $\psi = \sum c_E\,\psi_E(x,t)$ → normalizable

$E>0$ → interacción asintótica
$E<0$ → pot. atractivo

1) ψ_E acotadas
2) ψ_E continuas
3) ψ'_E continua si potencial no divergente (+ suave)

a) si $V=\infty$ región → $\psi_{E(\text{región})} = 0$
b) punto singular: $V(x) = g\,\delta(x-a)$ → ψ_E continua, ψ_E' no
↳ $\boxed{\psi_E'(a+\varepsilon) - \psi_E'(a-\varepsilon) = \frac{2m}{\hbar^2}\,g\,\psi_E(x=a)}$

$V(x) = V \quad x\in(a,b)$ → $\boxed{\text{Pot. constante}}$, si $E>V$, $p_1 = [2m(E-V)]^{1/2}$
↳ Sol. general $\psi = A\cdot e^{ip_1 x/\hbar} + B\cdot e^{-ip_1 x/\hbar}$ ↳ 2 ondas viajeras planas
$\psi(x,t)_E = \psi\cdot e^{-iEt/\hbar}$

→ $\rho_A = |A|^2$ → $j_A = \frac{p_1}{m}|A|^2$ $\xrightarrow{v}$ p/m $\qquad j = \rho\cdot v$
$\rho_B = |B|^2$ → $j_B = -\frac{p_1}{m}|B|^2$ $\xleftarrow{v}$ $-\frac{p}{m}$

$\psi_{E(x,t)}$ no propia del momento, ψ_A, ψ_B sí
sí propia de E ó p^2

Pot escalón

sol. ↑ en 2 zonas, cond. inicial (tiro desde $-\infty$) + cond. contorno → quitas ←
↳ onda incidente

$E>V$ $\qquad p_1 = \sqrt{2mE}$ $\quad p_2 = \sqrt{2m(E-V)}$

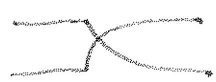
$$\psi_E(x) = A_{inc}\cdot\begin{cases} e^{ip_1x/\hbar} + \underbrace{\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}}_{\rho(E)}\,e^{-ip_1x/\hbar} \\ \underbrace{\frac{2p_1}{p_1+p_2}}_{\tau(E)}\,e^{ip_2x/\hbar} \end{cases}$$

A_{inc} → normalizar
↳ desfasaje, $\rho = |\rho|\cdot e^{i\delta}$

Coef. de reflexión : $R(E) = \frac{|j_{ref}|}{|j_{inc}|} = \frac{(p_1-p_2)^2}{(p_1+p_2)^2}$ $= 1$ sii $p_2 = 0$, $E=V$

Coef. de transmisión: $T(E) = \frac{|j_{tr}|}{|j_{inc}|} = \frac{4p_1p_2}{(p_1+p_2)^2}$

$\Big\}\ R + T = 1$



$E<V$ → $q_3 = \sqrt{2m(V-E)}$
↳ $\psi_3 = A\cdot e^{-q_3 x/\hbar}$ → $j_{tr} = 0$ → (no hay v definida) → onda evanescente

$A = \frac{2p_1}{p_1+iq_3}B_{in}$, $C = \frac{p_1-iq_3}{p_1+iq_3}$ → $R(E) = 1$, $T(E) = 0$ ∴ efecto túnel

---

∃ soluciones con $E<0$?
↳ $A = B = 0$ → no ∃ estados ligados

otros potenciales → scattering + ...

Evolución temporal... $\xrightarrow{\text{paquete}}_{\text{c.c. sol. física}}$ $\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1\,\phi(p_1)\,\psi_{E(p_1)}(x,t) = \begin{cases} \psi_{in}(x,t) + \psi_r(x,t) & x<0 \\ \psi_{tr}(x,t) & x>0 \end{cases}$ $\quad t=0$ → colisión

T5

pocas 2 soluciones · en todas zonas → finitas si alguna diverge (ha acotar) + otra de c. inicial + cond. contorno

Barrera: $E<V_0$ $\quad T(E)=\left\{1+\frac{V^2}{4E(V-E)}\sinh^2\frac{q_3 a}{\hbar}\right\}^{-1}$ → ef. túnel microscopio

Partículas α → $Z+2$ → $\hat{Z}+\hat{\alpha}$

↳ ef. túnel $T(E)\propto e^{-2q_3 a/\hbar}$ $\quad R, b$ / $\sqrt{\ }$ real $E=V(b)$

Aproximación WKB: $q_3 a=\int_0^a\sqrt{2m(V(x)-E)}\,dx$ ó $=\int_R^b dx\sqrt{2m(V(x)-E)}$

$T(E)\propto\exp\left[-\frac{2\sqrt{2m}\,Ze^2}{\hbar\sqrt{E}}\pi\right]$

$\frac{1}{\tau}\propto T=A\cdot e\ldots$ → $\log_{10}T(E)=C_1-\frac{1{,}73\,Z}{E(MeV)}=\log\frac{1}{\tau}$

Corriente de e^- en metales

W: arrancar e^- menos ligado, $E=0$, ε_{fermi}

→ $V(x)=-eEx$ ⇒ WKB: $T(E)\propto -\frac{2}{\hbar}\int_0^b dx\sqrt{2m(V(x)-E)}$

→ ley de Fowler-Norheim → $\ln T(E=W)=-\frac{1}{3\hbar}\sqrt{2mW}\,b$

sí ocupar capa correspondiente a su E

Barrera: $E>V_0$ $\quad T(E)=\left\{1+\frac{V^2}{4E(E-V)}\sin^2\left(\frac{p_2 a}{\hbar}\right)\right\}^{-1}$ $n=0$ ~~trivial~~: $E=V$ → no $\lim\to\left(1+\frac{mVa^2}{\hbar}\right)^{-1}\neq 1$

↳ $T(E)=1$ si $\frac{p_2 a}{\hbar}=n\pi$, $n=1,2,\ldots$

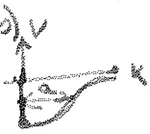
$\Rightarrow a=n\frac{\lambda}{2}$, $\lambda=\frac{h}{p_2}$, $E_n=\frac{n^2h^2}{8ma^2}+V$ →

Pozos

$E>0$ → $T(E)=\left\{1+\frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\left[\frac{a}{\hbar}(E+V_0)\right]\right\}^{-1}$

transparE, resonancia de transmisión → $\sin=0$ → $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}-V_0$ $\quad n=1,2,\ldots$

Efecto Ramsauer-Townsend (dispersión e^- gases nobles) $\quad n=0$ ¿no $\not\exists$ $E>0$?



Pozo δ Dirac

$V(x)=-g\,\delta(x)$

$T(E)=\frac{2\hbar^2E}{2\hbar^2E+mg^2}$, $R(E)=\frac{mg^2}{2\hbar^2E+mg^2}$

T. 6

Pozo δ

Estados ligados: $E < V_{\pm\infty}$ → origen $V_{\pm\infty} = 0$ → $E < 0$

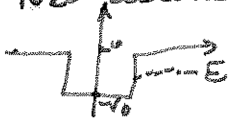
$\psi_E = \left(\frac{q}{\hbar}\right)^{1/2} \cdot e^{-|q|\frac{x}{\hbar}}$ → 1 sólo est. permitido, 1 e. ligado → $E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}$

$A = B$ $\quad q = \frac{mg}{\hbar}$

$|\,| = 0$, normalizar $\quad \Rightarrow j = 0$ → estado ligado ✓

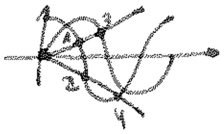
- - - - -

Pozo cuadrado



→ ∃ sol. no trivial

→ cuantización E: $\frac{q_1}{p_2} = tg\left(\frac{p_2 a}{2\hbar} + \frac{n\pi}{2}\right)$ ··· n par $\frac{q_1}{p_2} = tg\left(\frac{p_2 a}{2\hbar}\right)$ ··· n impar $\frac{q_1}{p_2} = -\cot g\left(\frac{p_2 a}{\hbar}\right)$



→ ∃ al. ~ 1 estado ligado

n par → estado fundamental

potenciales débiles atractivos: $q_1 \approx p_2^2 \frac{a}{2\hbar}$ → $2m|E| = \frac{4m^2(V_0 - |E|)^2 a^2}{(\hbar)^2}$

$|E| \approx \frac{m V_0^2 a^2}{2\hbar^2}$

nº E permitidas (V)

- - - - -

Pozo cuadrado infinito

entre 0, a

potencial confinante, $A = -B$

$\frac{pa}{\hbar} = (n+1)\pi$ → espectro ∞ numerable

$E_n = \frac{p_n^2}{2m}$ $\psi_n = C_n \operatorname{sen}\left[\frac{(n+1)\pi x}{a}\right]$, $C_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$ → n nº cuántico → determina comportam. partícula $\psi_n(x)$

$= \frac{(n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ ↳ n = 0

n par: ψ_n simétrica

impar: " asimétrica

$E_0 \neq 0$ $\quad \infty\, \Delta E \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2}$

ψ_n → conjunto completo y b.o.n. (Fourier)

Traslación origen → simetría → Paridad

$V(x) = V(-x)$ → n par: $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left[\frac{(n+1)\pi x}{a}\right]$ sim. $\psi_n^+(-x) = \psi_n^+(x)$

$\psi_n = \quad \operatorname{sen}[\quad]$ asim. $\psi_n^-(-x) = -\psi_n^-(x)$

Operador paridad $\mathbb{P}$ → reflexión specular, cambia signo 3D

$\mathbb{P}(\psi(x)) = \psi(-x)$

$\mathcal{H}$ bajo paridad → si $V(x) = V(-x)$ → $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(-x)$ invariante!

→ estado estacionario (propio de $\hat{H}$)

$\mathcal{H}\psi_{E(-x)} = E\,\psi_E(x)$

$\mathcal{H}(x)\psi_E(-x) = E\,\psi_E(-x)$ → si $H(x) = H(-x)$ → $H(x)\psi_E(-x) = E\psi_E(-x)$

→ Si $\psi_E(x)$ propia de $\mathcal{H}$ con energía E, $\mathbb{P}\psi_E(x) = \psi_E(-x)$ es propia de $\mathcal{H}$ con la misma energía

a) $\psi_E(-x), \psi_E(x)$ linealmente independientes → autovalor degenerado

↳ 2 funciones definen subespacio vectorial dim 2

↳ base: $\psi_E^+ = \psi_E(x) + \psi_E(-x)$ par, $\psi_E^- = \psi_E(x) - \psi_E(-x)$ impar

↳ paridad + $\quad$ ↳ paridad −

b) ~~lineal~~ dependientes

$\psi_E(-x) = c\,\psi_E(x)$ → $c = \pm 1$

1D → estados ligados no degenerados → e. l. de potenciales simétricos tienen paridad definida ± → $\mathbb{P}\psi_E(x) = \psi_E(-x) = +\psi_E(x)$ ⊕

↳ 2 tipos f. propias (±) ó $-\psi_E(x)$ ⊖

Pozo cuadrado finito

→ evitar calcular...

$\boxed{\text{anchura } a \to E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8 m a^2}} \quad \infty V_0$

$\psi_n(-x) = \psi_n(x)$ paridad $\underline{+}$ H invariante

$\psi_n(-x) = -\psi_n(x)$

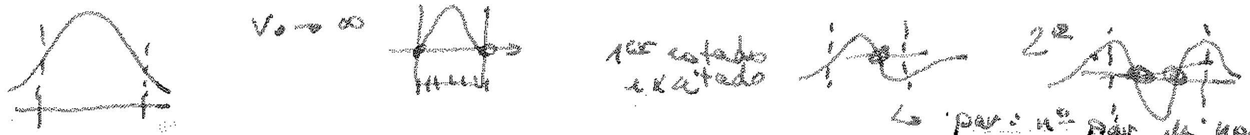
Solución par
$$\psi_{E^+}(x) = \begin{cases} A \cdot e^{-q_1 x/\hbar} \\ B \cos\left(\frac{p_2 x}{\hbar}\right) \\ A \cdot e^{q_1 x/\hbar} & x < -a/2 \end{cases}$$
→ ~~sin~~ impar + C.C. 1 lado (simetría) $x = \frac{a}{2}$

$\hookrightarrow \frac{q_1}{p_2} = tg\left(\frac{p_2 a}{\hbar}\right)$

impar
$$\begin{cases} A e^{-q_1 x/\hbar} \\ B \sin p_2 x/\hbar \\ -A \cdot e^{q_1 x/\hbar} & x < -a/2 \end{cases}$$
→ + C.C. → $\frac{q_1}{p_2} = -\cot g\left(\frac{p_2 a}{2\hbar}\right)$

$p_2 \neq (n+1)$... xq no δ

x a siempre forman conj. completo



↳ par: nº par de nodos
impar: nº impar de "

tipo δ Dirac

$$\sigma(E) = \frac{\hbar p}{\hbar p - i m g} \qquad \rho(E) = \frac{i m g}{\hbar p - i m g}$$

amplitud transmisión   reflexión

$\sigma \to$ polo en $p = \frac{i m g}{\hbar} \to E = \frac{p^2}{2m} = -\frac{m g^2}{2\hbar^2} \to \equiv E$. estado ligado

Para cualquier $V(x)$, $\sigma(E)$ tiene polos en $E<0$ que corresponden a la E de los estados ligados

Pozo potencial

$$\sigma(E) = \frac{e^{-i p_1 a/\hbar}}{\cos \frac{p_2 a}{\hbar}} \left\{ 1 - \frac{i}{2}\left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}\right) tg\left(p_2 \frac{a}{\hbar}\right)\right\}^{-1}$$

$\hookrightarrow$ Polos → $\cot g\left(\frac{p_2 a}{2\hbar}\right) = -\frac{q_1}{p_2}$

→ $tg\left(\frac{p_2 a}{2\hbar}\right) = \frac{q_1}{p_2}$ ✓

$\psi(x, 0)$
↓ normalizar
$\psi(x, t) = \sum c_n \varphi_n(x) \cdot e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}}$

$\hookrightarrow c_n = (\varphi_n, \psi(t=0))$

$\varphi_n \to$ paridad

$$S^2 = \frac{1}{1 + C t^2} \qquad C^2 \quad 1 + C^2$$

$$\cot g\, 2x = \frac{1}{2}\left(\cot g(x) - tg(x)\right)$$

tg ?