Mecánica lagrangiana.

1. Coordenadas generalizadas. Conjunto de n informaciones independientes, q_1, q_2,..., q_n, que describen completamente la configuración de un sistema mecánico. Las coordenadas de cualquier punto del sistema deben obtenerse de forma unívoca a partir de las coordenadas generalizadas: $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(\vec{q},t)$.

Se cumple la relación: $\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$

Espacio de configuración: Es el espacio formado por el conjunto de posibles posiciones de un sistema mecánico, es decir, es el conjunto de posibles valores de $\vec{q}$.

2. Fuerza generalizada. Trabajos virtuales

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)\,\delta q_i$$

$A_i = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \dfrac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$

$\delta W = \sum_i A_i \delta q_i$

Campo gravitatorio constante.

$$Q_i(\vec{q},t) = -Mg\frac{\partial h}{\partial q_i}$$

Equilibrio: Principio de d'Alambert

$$Q_i = 0$$

3. Ecuación de Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_i} = Q_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) \qquad i = 1,\dots,n$$

Ligaduras diferenciables.

$$\sum_i \Lambda_i(\vec{q},t)\,\delta q_i = 0$$

Ligaduras holónomas.

$$\sum_i \Lambda_i(\vec{q},t)\,\delta q_i = d\phi(\vec{q},t) = 0$$

Ecuación de Lagrange con ligaduras.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_i} = Q_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \lambda\Lambda_i(\vec{q},t) \qquad i = 1,\dots,n \\[2ex] \sum_i \Lambda_i(\vec{q},t)\,\dot{q}_i = 0 \end{cases}$$

Grados de libertad. Es el número de coordenadas generalizadas menos el número de ligaduras holónomas.

4. Función de Lagrange.

Potencial (fuerzas no dependientes de la velocidad)

$$Q_i(\vec{q},t) = -\frac{\partial V(\vec{q},t)}{\partial q_i}$$

Potencial (fuerzas dependientes de la velocidad)

$$Q_i(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = -\frac{\partial V(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

Lagrangiana

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = T(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) - V(\vec{q},t)$$

Ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

5. Partícula en campo electromagnético. La interacción electromagnética es una de las interacciones básicas de la naturaleza. La fuerza y el potencial dependen de la velocidad.

Fuerza de Lorentz. $\vec{F} = q\left[\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\mathcal{B}}\right]$

Potenciales electromagnéticos escalar y vector.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

Campos eléctrico y magnético constantes.

$$\phi(\vec{r}) = -\vec{r}.\vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\tfrac{1}{2}\left(\vec{r}\times\vec{\mathcal{B}}\right)$$

$$V(\vec{r}) = -q\vec{r}.\left(\vec{\mathcal{E}} + \tfrac{1}{2c}\left(\vec{v}\times\vec{\mathcal{B}}\right)\right)$$

6. Fuerzas de fricción. Son fuerzas proporcionales a la velocidad $\vec{F} = -k\vec{v}$

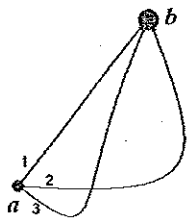
Función de Rayleigh $\vec{F} = -\vec{\nabla}_v\mathcal{F}$.

Ecuación de Lagrange con fuerzas de fricción

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{\vec{q}},t)}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

7. El principio de Hamilton. La trayectoria descrita por el sistema para ir de q_a en t_a a q_b en t_b, es aquel camino para el cual la integral de acción tiene un valor estacionario frente a variaciones infinitesimales del camino de integración:

$$\delta S = \delta\int_{t_a}^{t_b} L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)\,dt = 0$$



Ligaduras holónomas (bis) Un sistema descrito por $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ con una ligadura holónoma $\phi(\vec{q}) = cte$, puedo describirlo mediante $L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \lambda\phi(\vec{q})$ junto con la condición de ligadura.

8. Integrales primeras. Decimos que la cantidad $F(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ es una integral primera si se cumple que $F(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = cte$ donde el valor de cte sólo depende de la trayectoria escogida.

También decimos que $F(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ es una cantidad conservada.

Momento canónico $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Coordenada cíclica Decimos que una coordenada q es cíclica si el lagrangiano no depende de ella, pero sí de $\dot{q}$.

El momento canónico conjugado de una coordenada cíclica es conservado

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cte$$

9. Energía.

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

Si $\vec{r}_a = \vec{r}_a(\vec{q})$ entonces $E = T + V$

Conservación de la energía Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo entonces la energía es una cantidad conservada.

La conservación de la energía está asociada a la invariancia bajo traslaciones temporales.

10. Simetrías. Decimos que una transformación $\vec{q} \to \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q})$ es una simetría si $L\left(\vec{Q}(\vec{q}), \dot{\vec{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}), t\right) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

En este caso decimos que el lagrangiano es invariante bajo la simetría.

Teorema de Noether

Consideremos un sistema descrito por la lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ tal que es invariante bajo una transformación $\vec{q} \to \vec{Q}^s(\vec{q})$ donde s es un parámetro real, continuo y tal que cuando tomamos s=0 la transformación es la identidad, es decir $\vec{Q}^{s=0}(\vec{q}) = \vec{q}$, entonces la cantidad

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{ds} Q_i^s(\vec{q})\right)_{s=0}$$

es constante a lo largo de una trayectoria. Es, por lo tanto, una cantidad conservada o, también, una integral primera.

11. Traslaciones. Consideramos dos sistemas de referencia, $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, con los ejes paralelos pero desplazado uno del otro una distancia $-s$ según una dirección $\hat{n}$. Si $\mathcal{O}$ describe un punto de nuestro sistema físico por $\vec{r}$, para $\mathcal{O}'$ este punto está en:

$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + s\hat{n}$

Decimos que $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ están conectados por una traslación.

Conservación del momento cinemático.

Si un sistema es invariante bajo traslaciones a lo largo de un eje $\hat{n}$: $\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha' = \vec{r}_\alpha + s\hat{n} \qquad \alpha = 1, \ldots, N$

entonces la proyección del momento cinemático total según la dirección $\hat{n}$ es una cantidad conservada a lo largo de la trayectoria:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{ds} Q_i^s(\vec{q})\right)_{s=0} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha . \hat{n} = \vec{P}.\hat{n} = cte$$

12. Rotaciones, Consideramos dos sistemas de referencia, $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, con el mismo origen de referencia pero con sus ejes rotados un ángulo θ según un eje $\hat{n}$. Si $\mathcal{O}$ describe un punto de nuestro sistema físico por $\vec{r}$, para $\mathcal{O}'$ este punto estará en:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r}\cos\theta - \hat{n} \times \vec{r} \sin\theta + (1 - \cos\theta)(\hat{n}.\vec{r})\hat{n}$$

Si la rotación es infinitesimal, $\theta = \varepsilon$, entonces tengo

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} - \varepsilon \hat{n} \times \vec{r} \quad \to \quad r_i' = \left(\delta_{ij} + \varepsilon \epsilon_{ijk} \hat{n}_k\right) r_j$$

Conservación del momento angular.

Si un sistema es invariante bajo rotaciones a lo largo de un eje $\hat{n}$: $\vec{r}_\alpha \to \vec{r}_\alpha' = \vec{r}_\alpha - \varepsilon \hat{n} \times \vec{r}_\alpha \qquad \alpha = 1, \ldots, N$

entonces la proyección del momento angular total según la dirección $\hat{n}$ es una cantidad conservada a lo largo de la trayectoria:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{ds} Q_i^s(\vec{q})\right)_{s=0} = \sum_\alpha (m_\alpha \vec{v}_\alpha \times \vec{r}_\alpha).\hat{n} = -\vec{L}.\hat{n} = cte$$

13. Potencial central

Consideramos dos partículas que interaccionan a través de un potencial central

$$L\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2\right)=\tfrac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}+\tfrac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}-V\left(\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|\right)$$

Coordenadas de centro de masas

$$\vec{R}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \vec{r}_1=\vec{R}-\frac{m_2}{M}\vec{r}$$

$$\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1 \qquad \vec{r}_2=\vec{R}+\frac{m_1}{M}\vec{r}$$

$$M=m_1+m_2$$

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

Lagrangiano en coordenadas centro de masas

$$L\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2\right)=L_R\left(\vec{R},\dot{\vec{R}}\right)+L_r\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)$$

$$L_R\left(\vec{R},\dot{\vec{R}}\right)=\tfrac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$$

$$L_r\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)=\tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-V\left(\left|\vec{r}\right|\right)$$

Movimiento del centro de masas

La cantidad conservada es el momento total

$$\vec{P}=m_1\dot{\vec{r}}_1+m_2\dot{\vec{r}}_2=M\dot{\vec{R}}$$

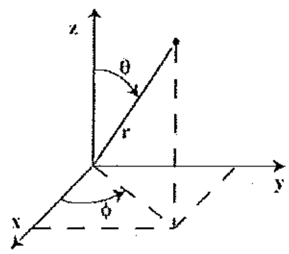
El movimiento del cm es libre.

Coordenadas esféricas

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad x=r\sin\theta\cos\phi$$

$$\phi=\arctan\frac{y}{x} \qquad y=r\sin\theta\sin\phi$$

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad z=r\cos\theta$$



Lagrangiano en coordenadas esféricas

$$L_r\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)=T\left(\vec{r},\dot{\vec{r}}\right)-V(r)=\tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)-V(r)$$

Movimiento relativo

Las cantidades conservadas son el momento angular y la energía.

Como $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}=\overrightarrow{cte}$ el movimiento debe ser en un plano. Escogemos el plano OXY (θ=π/2). Nos quedan, como cantidades conservadas:

$$\vec{l}=(0,0,l)=\left(0,0,\mu r^2\dot{\phi}\right)$$

$$E=\tfrac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2+\frac{l^2}{\mu^2r^2}\right)+V(r)$$

Ecuaciones de las trayectorias

$$t-t_0=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{l^2}{2\mu r^2}-V(r)\right)}}$$

$$\phi-\phi_0=\int_{t_0}^{t}dt\frac{l}{\mu r^2}$$

Relatividad especial.

1. Principio de relatividad. Las leyes físicas y las constantes físicas fundamentales son las mismas para todos los sistemas de referencia no acelerados.

Consecuencia No se puede determinar el movimiento absoluto.

Principio de relatividad de Einstein La velocidad de la luz es una constante física fundamental que corresponde a la velocidad máxima de transmisión de información, por lo tanto, es la misma para todos los observadores.

***c* es un factor de conversión entre tiempo y distancia** Un tiempo de 1.m es aproximadamente 3.3 ns.
c=299 792 458 m s^{-1}.
Un segundo es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del ^{133}Cs (patrón establecido en el año 1967). El metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299792458 s (patrón establecido en el año 1983).

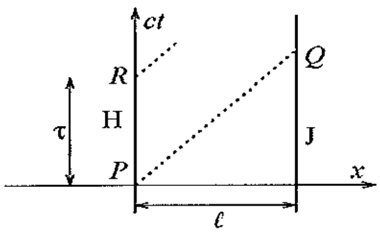
Velocidad adimensional y factor de Lorentz

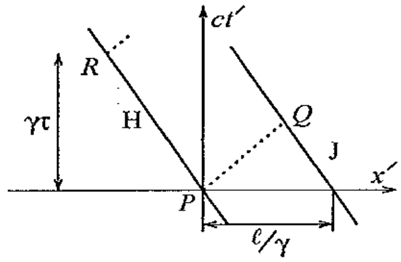
$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad 0 \le \beta \le 1 \qquad 1 \le \gamma$$

Diagrama de espacio-tiempo Es un gráfico con ct de ordenada y x de abcisa.
Un suceso es un punto del diagrama de espacio-tiempo.
La trayectoria de un objeto en el diagrama de espacio-tiempo recibe el nombre de línea del universo.

Dilatación temporal Dos sucesos que en el sistema de referencia S ocurren en el mismo lugar, en un intervalo de tiempo de Δt, en el sistema de referencia S', que se mueve a una velocidad v respecto de S, se observan con un intervalo de tiempo $\Delta t' = \gamma \Delta t$.

Contracción espacial Una distancia que en el sistema de referencia S mide $\Delta\ell$, en el sistema de referencia S', que se mueve a una velocidad v respecto de S, mide $\Delta\ell' = \Delta\ell/\gamma$. Debemos hacer notar que aquí el concepto de distancia implica medir en puntos simultáneos tanto para S como para S'.



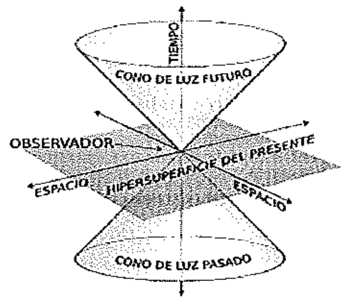


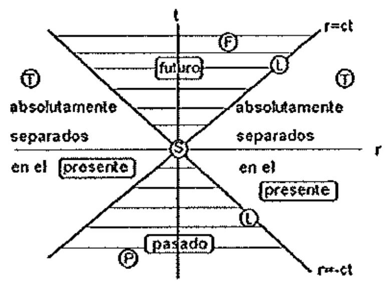
Intervalo invariante $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta\vec{r}^{\,2}$

$\Delta s^2>0$ intervalo de género tiempo. Tiempo propio: $\Delta\tau = \sqrt{\Delta s^2}$

$\Delta s^2<0$ intervalo de género espacio. Distancia propia: $\Delta\lambda = \sqrt{-\Delta s^2}$

$\Delta s^2=0$ intervalo de género luz o nulo.





2. Espacio de Minkowski

Espacio de 3+1 dimensiones definido por la **métrica**:

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad g^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}$$

El **producto escalar** es $a\cdot b=a^{\mu}g_{\mu\nu}b^{\nu}=a_{\mu}b^{\mu}=a^0b^0-a^1b^1-a^2b^2-a^3b^3$ Llamamos vector **contravariante** a $a^{\mu}=\left(a^0,\vec{a}\right)$ y vector **covariante** a $a_{\mu}=g_{\mu\nu}a^{\nu}=\left(a^0,-\vec{a}\right)$.

4-vector posición

$$x^{\mu}=\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)=\left(ct,x^1,x^2,x^3\right)$$

Transformación de Lorentz

$$x'^{\mu}=\Lambda(\beta)^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \qquad\qquad x_{\mu}'=\Lambda(-\beta)^{\nu}{}_{\mu}x_{\nu}$$

$$\Lambda(\beta)^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta & 0 & 0\\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4-velocidad

$$u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=\left(\gamma c,\gamma\vec{v}\right) \qquad\qquad u^{\mu}u_{\mu}=c^2$$

4-momento

$$p^{\mu}=mu^{\mu}=\left(\gamma mc,\gamma m\vec{v}\right) \qquad\qquad p^{\mu}p_{\mu}=m^2c^2$$

Energía y velocidad

$$p^{\mu}=\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right) \qquad\qquad E=\sqrt{m^2c^4+\vec{p}^{\,2}c^2} \qquad\qquad \vec{v}=\frac{\vec{p}c^2}{E}$$

Suma de velocidades

$$w=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

3. Conservación del cuadrimomento.

En todo proceso físico de un sistema aislado, la suma de todos los 4-momentos del estado inicial es igual a la suma de todos los 4-momentos del estado final. Esta ley incluye la conservación de la energía y del momento.

Colisiones producción y desintegración de partículas

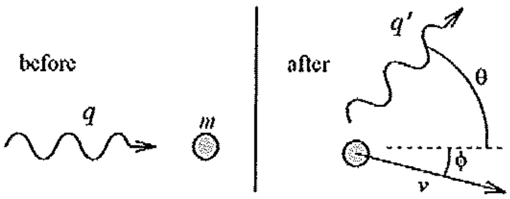
$$\sum_i p_i^{\mu}=\sum_f p_f^{\mu}$$

Proceso $A\rightarrow 1+2$ con tri-momentos $p_A=0,\ p_1=p_2=p$

$$p=\frac{\lambda^{1/2}\left(M^2,m_1^2,m_2^2\right)}{2M} \quad ; \quad \lambda\left(M^2,m_1^2,m_2^2\right)=M^4+m_1^4+m_2^4-2M^2m_1^2-2M^2m_2^2-2m_2^2m_1^2$$

Colisión Compton

$$\frac{1}{q'}-\frac{1}{q}=\frac{1}{mc}\left(1-\cos\theta\right)$$



4. Efecto Doppler

$$1+z=\frac{\lambda}{\lambda_0}=\gamma\left(1+\beta\cos\theta\right)$$

Para objetos alejándose radialmente: corrimiento al rojo. $1+z=\dfrac{\lambda}{\lambda_0}=\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

Para objetos acercándose radialmente: corrimiento al azul. $1+z=\dfrac{\lambda}{\lambda_0}=\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$

Ley de Hubble

$$v=H\,d\ ; \quad H=2.4\pm0.2\times10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$$

Dinámica relativista.

1. Mecánica lagrangiana relativista libre.

Acción y lagrangiano libre

$$dS = -mc^2 d\tau = L_0\, dt \qquad L_0 = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Momento conjugado

$$p^i = \frac{\partial L_0}{\partial v^i} = m\gamma v^i$$

Energía

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L_0 = m\gamma c^2 = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

2. Lagrangiano con interacción

$$dS = -mc^2 d\tau - V d\tau = \left(L_0 - \mathcal{V}\right)dt = L dt \qquad \mathcal{V} = V\frac{d\tau}{dt}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\frac{d\pi^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x^i} \qquad \vec{\pi} = m\gamma\vec{v}$$

3. Partícula en campo electromagnético.

$$dS = -mc^2 d\tau - \frac{q}{c}u_\mu A^\mu d\tau \qquad \text{con} \qquad A^\mu = \left(\phi, \vec{A}\right)$$

$$L\left(\vec{x},\vec{v},t\right) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - q\left[\phi\left(\vec{x},t\right) - \frac{\vec{v}}{c}.\vec{A}\left(\vec{x},t\right)\right]$$

Ecuación de movimiento

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = q\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{v}{c}\times\vec{\mathcal{B}}\right)$$

Energía

$$E = mc^2\gamma + q\phi\left(\vec{x},t\right)$$

4. Campo eléctrico constante

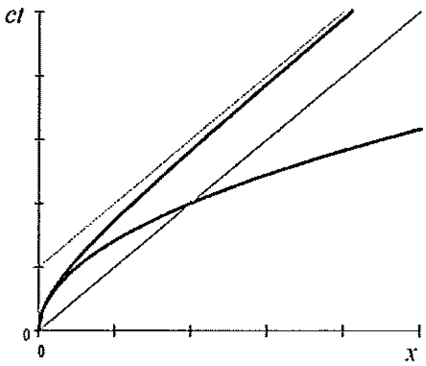
$$\vec{\mathcal{E}} = \left(\mathcal{E},0,0\right)$$

Límite no relativista.
Movimiento uniformemente acelerado.
Tiempos pequeños o campos débiles:

$$t < \frac{mc}{q\mathcal{E}} \qquad x \simeq \frac{q\mathcal{E}t^2}{2m}$$

Límite ultra-relativista.
Tiende al movimiento uniforme.
Tiempos grandes o campos fuertes:

$$t > \frac{mc}{q\mathcal{E}} \qquad x \to ct$$



5. Campo magnético constante
y frecuencia de sincrotón.

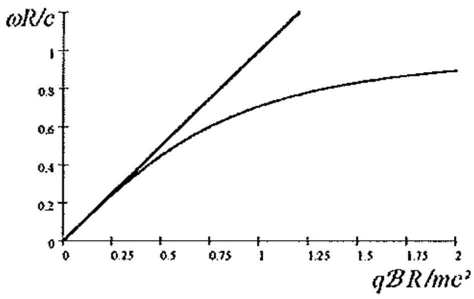
$$\vec{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{B},0,0\right)$$

Movimiento circular:
$\vec{r} = R\left(\cos\omega t, \sin\omega t, 0\right)$

Límite no relativista:

$$\omega \simeq \frac{q\mathcal{B}}{mc}$$

Límite ultra-relativista:
$\omega R \to c$



Mecánica hamiltoniana.

1. Transformaciones de Legendre.

La transformada de Legendre de $f(x)$, al menos C^2 y tal que $d^2f(x)/dx^2 \neq 0$, se define como: $\left(\mathcal{L} f(x)\right) = x\dfrac{df}{dx} - f(x) = xu - f = g(u) = \mathcal{L} f(u)$ donde $u = \dfrac{df}{dx}$

Propiedades

- $\left(\mathcal{L} f(x)\right) = g(u) \rightarrow \left(\mathcal{L} g(u)\right) = f(x)$
- $\dfrac{d^2 f}{dx^2}\dfrac{d^2 g}{du^2} = 1$

2. Hamiltoniana

$$H(\vec{q},\vec{p},t) = \left(\mathcal{L} L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)\right) = \dot{q}_i p_i - L\left(\vec{q},\dot{\vec{q}},t\right)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Potencial central

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right) = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r) = H_{cm} + H_{rel}$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad \vec{p} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{p}_2 - m_2\vec{p}_1\right)$$

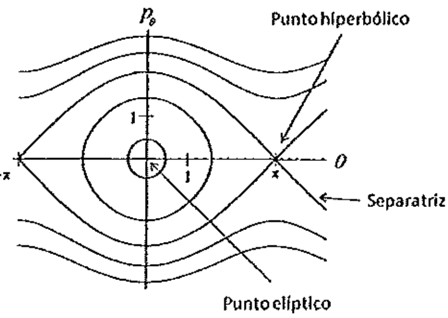
Potencial central, coordenadas esféricas

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \mu\dot{r} \\ p_\theta &= \mu r^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \mu r^2\dot{\phi}\sin^2\theta \end{aligned}\right\} \qquad H_{rel} = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\phi}\right) + V(r)$$

Diagrama de fases péndulo

$$H = \frac{p_\theta^2}{2} + \left(1 - \cos\theta\right)$$

- $E < 0$ prohibido
- $E = 0 \rightarrow \theta = 0$, $p_\theta = 0$
- $0 < E < 2 \rightarrow$ Movimiento oscilatorio
  $\left|\theta\right| \leq \theta_{\max} \quad \theta_{\max} = \arccos(1 - E)$
- $E = 2 \rightarrow \left|\theta\right| \leq \theta_{\max} \quad \theta_{\max} = \pi$
- $E > 2 \rightarrow$ Movimiento de rotación



3. Transformaciones canónicas.

4 posibles funciones generatrices de una transformación canónica

$$F_1(q,Q,t) \qquad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad ; \quad F_3(p,Q,t) \qquad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$$

$$F_2(q,P,t) \qquad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad ; \quad F_4(p,P,t) \qquad q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} \quad Q = +\frac{\partial F_4}{\partial P}$$

Ejemplos

Cambio de q's por p's $\quad F_1\left(\vec{Q},\vec{q}\right) = q_k Q_k \quad \rightarrow \quad P_i = -q_i, \; Q_i = p_i$

Transformación identidad $\quad F_2\left(\vec{P},\vec{q}\right) = q_k P_k \quad \rightarrow \quad P_i = p_i, \; Q_i = q_i$

4. Corchetes de Poisson.
$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Propiedades

El corchete de Poisson es un invariante canónico.

$$\{f,g\}=-\{g,f\}$$
$$\{\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2,g\}=\lambda_1\{f_1,g\}+\lambda_2\{f_2,g\}$$
$$\text{Si}\{f,g\}=0 \text{ para todo} f \text{ entonces } g \text{ es constante}$$
$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}$$

Corchetes de Poisson fundamentales
$$\{q_i,p_j\}=-\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}\ ,\qquad \{q_i,q_j\}=0\ ,\qquad \{p_i,p_j\}=0$$

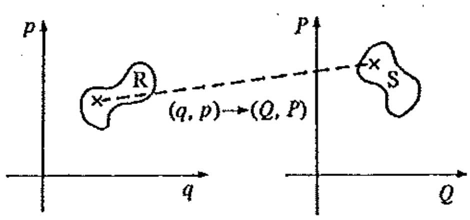
Evolución temporal
$$\frac{df}{dt}=\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Corchete con una q o p
$$\{q_i,f\}=\frac{\partial f}{\partial p_i}\qquad\qquad \{p_i,f\}=-\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

5. Teorema de Liouville

Sea una transformación canónica $(\vec{q},\vec{p})\to(\vec{Q},\vec{P})$ que transforma una región $\mathcal{R}$ del espacio de fases en la representación $(\vec{q},\vec{p})$ en una región $\mathcal{S}$ en la representación $(\vec{Q},\vec{P})$, se cumple que:

$$\Gamma_{\mathcal{R}}\equiv\int_{\mathcal{R}}\prod_i dq_i\,dp_i=\Gamma_{\mathcal{S}}\equiv\int_{\mathcal{S}}\prod_i dQ_i\,dP_i$$



Corolario. Dado que la evolución temporal de los sistemas físicos puede entenderse como una transformación canónica, cualquier región del espacio de fases evolucionará conservando su volumen total.

6.Transformaciones canónicas infinitesimales.

La función generatriz de una transformación canónica infinitesimal, $G(\vec{q},\vec{p})$, se define por $F_2=\vec{q}\vec{P}+\varepsilon G(\vec{q},\vec{p})+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Transformación.
$$\delta q_i=\{q_i,G\}\varepsilon$$
$$\delta p_i=\{p_i,G\}\varepsilon$$

7. Cantidades conservadas.

Sea $G(\vec{q},\vec{p})$ la función generatriz de una transformación canónica infinitesimal. Si $\{G,H\}=0$ entonces $G(\vec{q},\vec{p})$ es una cantidad conservada a lo largo de las trayectorias físicas.

Traslación temporal. Evolución temporal.
$$F_2=\vec{q}\vec{P}+H(\vec{q},\vec{p})dt\to\begin{cases}\delta q_i=\{q_i,H\}dt\\ \delta p_i=\{p_i,H\}dt\end{cases}$$
Como $\{H,H\}=0$, la energía se conserva.

Traslación espacial.
$$F_2=\sum\nolimits_\alpha \vec{P}_\alpha\cdot(\vec{x}_\alpha+\vec{a})\simeq\sum\nolimits_\alpha \vec{P}_\alpha.\vec{x}_\alpha+\sum\nolimits_\alpha \vec{p}_\alpha.\hat{n}\,\varepsilon$$
Si $\left\{\sum_\alpha \vec{p}_\alpha,H\right\}=0$ entonces el momento total se conserva.

Rotación
$$F_2=\sum_\alpha \vec{P}_\alpha\mathbf{R}\,\vec{x}_\alpha\simeq\sum\nolimits_\alpha \vec{P}_\alpha.\vec{x}_\alpha+\sum\nolimits_\alpha(\vec{x}_\alpha\times\vec{p}_\alpha).\hat{n}\,\varepsilon$$
Si $\left\{\sum_\alpha(\vec{x}_\alpha\times\vec{p}_\alpha),H\right\}=0$ entonces el momento angular total se conserva

Teoría de Hamilton-Jacobi y variables ángulo-acción.

1. Ec. diferencial de Hamilton-Jacobi. Función principal de Hamilton.

$$H\left(q, p=\frac{\partial S}{\partial q}, t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

Ecuación movimiento

$$\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha}=\beta$$

Momento

$$p=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q}$$

2. Ec. característica de Hamilton. Función característica de Hamilton

$$H\left(q, p=\frac{\partial W}{\partial q}\right)=E$$

Ecuación de movimiento

$$\frac{\partial W(q,E)}{\partial E}=t+cte$$

Momento

$$p=\frac{\partial W(q,E)}{\partial q}$$

Ejemplo

$$H=\frac{p^2}{2m}+U(q) \quad \rightarrow \quad W(q,E)=\int_{q_0}^{q} dq\sqrt{2m(E-U)} \qquad t+cte=\int_{q_0}^{q} dq\frac{m}{\sqrt{2m(E-U)}}$$

3. Variables ángulo-acción.

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$$

Frecuencia del movimiento.

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial H(I)}{\partial I}$$

Transformación canónica.

$$H\left(q, p=\frac{\partial W_I}{\partial q}\right)=E(I) \qquad \rightarrow \qquad W_I(q,I)=W(q,E(I))$$

Ejemplo.

$$H=\frac{p^2}{2m}+U(q) \quad \rightarrow \quad I=\frac{1}{2}\int_{q_1}^{q_2}\sqrt{2m(E-U(q))}\,dq=I(E) \quad \rightarrow \quad E=E(I);\ \nu=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial E}{\partial I}$$

$$W_I(q,I)=\int\sqrt{2m(E(I)-U(q))}\,dq \qquad \rightarrow \qquad \psi=\frac{\partial W_I}{\partial I}$$

Oscilador armónico

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2 \quad \rightarrow \quad E=\sqrt{\frac{k}{m}}I \ ;\ \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$q=\sqrt{\frac{2I}{\sqrt{km}}}\sin\psi \ ; \qquad p=\sqrt{2I\sqrt{km}}\cos\psi \ ; \qquad \psi=2\pi\nu(t-t_0)$$

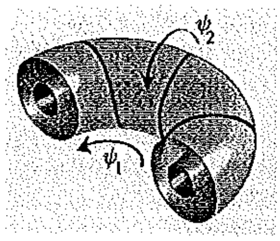
4. Sistemas integrables. Un sistema de n grados de libertad decimos que es integrable (o integrable de Liouville) si existen n constantes del movimiento, $F_i(\vec{q},\vec{p}) = cte\ i=1,...n$, funcionalmente independientes en involución.

Partícula libre. Tenemos tres conjuntos de tres constantes en involución: (i) $\vec{p}$, (ii) E,ℓ^2,ℓ_z, (iii) $E,\vec{\ell}.\hat{n},\vec{p}.\hat{n}$.

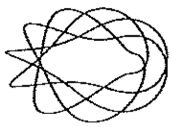
5.Variables ángulo-acción en n grados de libertad. Sean $\mathcal{C}_k\ k=1,...n$ circuitos de integración topológicamente independientes:

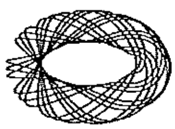
$$\oint_{\mathcal{C}_k} I_1\, d\psi_1 + ... + \oint_{\mathcal{C}_k} I_n\, d\psi_n = \oint_{\mathcal{C}_k} p_1\, dq_1 + ... + \oint_{\mathcal{C}_k} p_n\, dq_n$$

Teorema de Arnold. En un sistema integrable, un movimiento acotado en el espacio de fases está confinado en un subespacio de dimensión n topológicamente equivalente a un toro.



Winding number. Es el cociente entre frecuencias asociadas a distintas variables ángulo: $\Omega = \omega_1/\omega_2$.
Si Ω es racional la trayectoria es periódica.
Si Ω es irracional el movimiento es cuasi-periódico





6. Ecuación característica para potencial central.

$$\text{H}=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\phi^2}{r^2}\right)+\text{V(r)} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2\right)+\text{V(r)=E}$$

$$W(r,\phi,E,\ell) = \phi\ell + \int dr\sqrt{2m\big(E-V(r)\big)-\frac{\ell^2}{r^2}}$$

Momentos.

$$p_\phi = \ell \qquad p_r = \sqrt{2m\big(E-V(r)\big)-\frac{\ell^2}{r^2}}$$

Trayectoria

$$\phi_0 = \phi - \int \frac{\ell\, dr}{r^2\sqrt{2m\big(E-V(r)\big)-\frac{\ell^2}{r^2}}} \qquad t+t_0 = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\big(E-V(r)\big)-\frac{\ell^2}{r^2}}}$$

5. Potencial central en varibles ángulo-acción.

$$I_\phi = \ell \qquad I_r = \frac{1}{2\pi}\oint dr\sqrt{2m\big(E-V(r)\big)-\frac{I_\phi^2}{r^2}}$$

El problema de Kepler $V= - k/r$

$$E = -\frac{mk^2}{2\left(I_r+I_\phi\right)^2} \qquad \nu_r = \nu_\phi = \frac{1}{T} = \frac{mk^2}{2\pi\left(I_r+I_\phi\right)^3} = \frac{1}{\pi k}\sqrt{\frac{-2E^3}{m}}$$