Exámenes de teoría - MT

$\boxed{\text{FEB 01}}$ - C, B

(1)

$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$

a) Las independientes son q y $\dot{q}$. $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ puede depender de q.
↳ Falso. En $H(q, p, t)$ sí son independientes

b) Correcto. Extremos fijos en espacio de configuraciones.

c) Falso. No necesariamente. Para que sea invariante, la transformación debe ser una simetría. Por ejemplo, el lagrangiano EM no es invariante bajo transformaciones de Galileo.

d) q y $\dot{q}$ son variables independientes en $\mathcal{L}$. → Correcto?

$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$

(2)

$$Q = \log\left(\frac{1}{q}\sin p\right) \quad ; \quad P = \frac{q}{\tan p}$$

Una transformación de las coordenadas $[q, p]$ a $[Q, P]$ con $Q, P(q, p, t)$ es canónica si $\{Q, P\} = 1$

... corchete de Poisson.

↳ (Los hamiltonianos deben diferir en una derivada total a lo sumo.)

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{q}{\sin p} \cdot (-) \frac{\sin p}{q^2} = -\frac{1}{q} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{q}{\sin p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \cos p = \frac{1}{\tan p}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{\tan p} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{\tan^2 p} \cdot \frac{1}{\cos^2 p} = -\frac{q}{\sin^2 p}$$

$$\{Q, P\} = \frac{1}{\sin^2 p} - \frac{1}{\tan^2 p} = \frac{1 - \cos^2 p}{\sin^2 p} = 1 \quad \checkmark \rightarrow \text{Es canónica}$$

$\{Q,P\} = \{q, p\}$ (corchetes fundamentales)

③ $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$

$\phi = \phi(y,z)$
$A_i = A_i(y,z)$
$\vec{v} = (\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

↳ x es coordenada cíclica $\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \rightarrow$ p_x se conserva (momento lineal, componente x)

$p_x = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x$ → campo y partícula intercambian momento.

④

a) Falso.
b) El sistema es integrable si ∃ n ctes de moviϕ funcionalmente independientes en involución. → Correcto
c) ? Falso?
d) No siempre.

⑤ $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 - v^2(\partial_x\phi)^2\right] - \Omega^2(1-\cos\phi)$; v, Ω ctes

a) $\sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_t\phi - v^2\partial_x\phi$

$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\Omega^2 \sin\phi$

$\partial^\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial^2_t\phi - v^2\partial^x\partial_x\phi + \Omega^2\sin\phi = 0$

↳ $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = -\Omega^2\sin\phi$

b) $H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\cdot\dot{\phi} - \mathcal{L} = +\frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 + v^2(\partial_x\phi)^2\right] + \Omega^2(1-\cos\phi)$

JUN 01 - C

① $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r)$

ϕ: coordenada cíclica → se conserva el momento angular p_ϕ.

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \dot{\phi} = cte$$

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, también se conserva la energía. (sistema conservativo)

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\cdot \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) = E = T + V$$

$$\leftarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} = p_r$$

$$E = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

② Sea un sistema descrito por $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, con $\vec{q} = \{q_i\}_{i=1}^{N}$ (N grados de libertad). Sea la transformación de coordenadas $\vec{q} \to \vec{Q}^s(\vec{q})$, donde $s \in \mathbb{R}$, continuo, y que cumple $\vec{Q}_{s=0} = \vec{q}$ (transf. identidad). Entonces, $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{ds}\left(Q_i^s(\vec{q})\right)\right)_{s=0} = cte$ a lo largo de cualquier trayectoria física se conserva.

③

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 + \epsilon q^4 = H(q,p)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2 q - 4\epsilon q^3 = m\ddot{q}$$

$$\hookrightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q + \frac{4\epsilon}{m}q^3 = 0 = \ddot{q} + q\left(\omega_0^2 + \frac{4\epsilon}{m}q^2\right) = 0$$

Si $\epsilon = 0$

$\hookrightarrow q = q(0)\cdot\cos(\omega_0 t)$

$\hookrightarrow \ddot{q} + q\ \omega_0^2 + \frac{4\epsilon}{m}q^3(0)\cdot\cos^3\omega_0 t$

?

(4) $\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}\psi^* \vec{\nabla}\psi - V(r)\psi^*\psi$

$= \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial^0 \psi - \partial^0 \psi^* \cdot \psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \psi^* \partial^i \psi - V(r)\psi^*\psi$

↳ $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{i\hbar}{2} \partial_0 \psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial^i \psi^* + V(r)\psi^* = 0$ //

↳ Para ψ^+, idem: $= -\frac{i\hbar}{2} \partial_0 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial^i \psi + V(r)\psi = 0$ //

$\boxed{\text{ENE 02}}$ – C

(1) $Q = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}$; $P = \frac{im\omega q + p}{\sqrt{2m\omega}}$

$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial Q}{\partial q} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} ; & \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{i}{\sqrt{2m\omega}} \\ \frac{\partial P}{\partial q} = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} ; & \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \end{array}\right\} \Rightarrow \{Q, P\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ✓

↳ Es canónica

$F_1(q, Q)$

↳ $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$; $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$

$p = \frac{\sqrt{2m\omega}\, Q - m\omega q}{i} = i(m\omega q - \sqrt{2m\omega}\, Q) = \frac{\partial F_1}{\partial q}$

↳ $F_1(q, Q) = i(m\omega \frac{q^2}{2} - \sqrt{2m\omega}\, Q q) + f(Q)$

$P = \frac{im\omega q + (\sqrt{2m\omega}\, Q - m\omega q)/i}{\sqrt{2m\omega}} = \frac{2im\omega q - i\sqrt{2m\omega}\, Q}{\sqrt{2m\omega}}$

$= i\sqrt{2m\omega}\, q - iQ \overset{-\frac{\partial F_1}{\partial Q}}{=} -f'(Q) + i\sqrt{2m\omega}\, q$

↳ $f(Q) = i\, Q^2/2$

$\Rightarrow F_1(q, Q) = i(m\omega q^2/2 - \sqrt{2m\omega Q} + \frac{Q^2}{2})$ //

(2) → ver jun 01, 2

Un sistema descr. por $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, $i = 1 \ldots N$, $\vec{Q}^s = \vec{Q}^s(\vec{q}) \,/\, \vec{Q}^{s=0} = \vec{q}$, SGIR

tray física → $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds}(Q^s{}_i)\Big|_{s=0} = \text{cte}$

(3) $f(q_i, p_i, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Por ecs. de Hamilton, $H(q,p,t)$

$\hookrightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

(4)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 - v^2(\partial_x\phi)^2 - \Omega^2\phi^2\right]$$

a) $$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_t^2\phi - v^2\partial_x^2\phi + 2\Omega^2\phi = 0$$

b) $$H = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 + v^2(\partial_x\phi)^2 + \Omega^2\phi^2\right]$$

$\boxed{\text{FEB 02}}$ - B

(1) Ver jun 01, 2

Sup. $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$; $\vec{Q}^s(\vec{q})$, $s\in\mathbb{R}$ / $\vec{Q}^{s=0} = \vec{q}$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{d}{ds}Q_i^s\Big|_{s=0} = \text{cte } \forall \text{ tray}$

. Para traslaciones: ... vector unitario adimensional

$\vec{Q}^s = \vec{q} + s\hat{a}$ $\rightarrow \frac{d}{ds}Q_i^s = \frac{d}{ds}(q_i + s a_i) = a_i \quad \forall s$

$\hookrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\cdot a_i = p_i\cdot a_i = \vec{p}\cdot\hat{a} \rightarrow$ se conserva la proyección del momento en esa dirección. Si válido $\forall a$, entonces $\vec{p}$ se conserva.

② Ppo. hamiltoniano: trayectoria descrita por stma. para ir de $q_a(t_a) \to q_b(t_b)$ es aquella cuya integral de acción tiene un valor estacionario frente a variaciones infinitesimales del camino de integración.

$$\delta S = \delta \int L \cdot dt = 0$$

$$H = p\cdot\dot q - L \quad\to\quad L = p\cdot\dot q - H$$

$$\delta L = \delta(p\cdot\dot q) - \delta H$$

$$\hookrightarrow -\delta H = \delta L - \dot q\,\delta p - p\cdot\delta\dot q = \delta L - \frac{d}{dt}(q)\cdot\delta p - p\,\frac{d}{dt}(\delta q)$$

$$= \delta L - \frac{d}{dt}(q)\cdot\delta p - \frac{d}{dt}(p\cdot\delta q) + \frac{d}{dt}(p)\cdot\delta q$$

Para trayectorias físicas $\delta L = 0$ salvo derivadas totales en L; idem para H:

$$\delta(p\cdot\dot q) - \delta H = 0 \overset{\text{salvo d. totales}}{=} -\dot p\,\delta q + \dot q\,\delta p - \left(\frac{\partial H}{\partial q}\cdot\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\delta p\right) = 0$$

⇒ Conduce a ecs. de Hamilton:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \quad //$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad //$$

③

$$H = \frac{p^2}{2m} + aq$$

$+\frac{\partial S}{\partial t}$ ... no aparece porque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

$$\hookrightarrow p = \frac{\partial S}{\partial q} \to \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2}{2m} + aq = 0 + cte \to \text{ver al final}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{-2maq} \Rightarrow \dot p = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q} = -a \to p = -a(t-t_0) \quad //$$

$$\hookrightarrow \mp\sqrt{\frac{-2ma}{q}}\,\frac{1}{2}\dot q = -a \to \sqrt{\frac{ma}{2q}}\,dq = -a\,dt \to \sqrt{\frac{-ma}{2}}\cdot 2\cdot\sqrt{q} = -a(t-t_0)$$

→ Más fácil directamente:

$$p = -a(t-t_0) = \sqrt{-2ma}\cdot\sqrt{q} \to q(t) = \frac{a^2(t-t_0)^2}{-2ma} \quad // \quad = \frac{a(t-t_0)}{-2m}$$

→ He mezclado métodos. Mejor:

$H' = 0$ tras cambio a $Q, P \to S = S(q,\alpha,\alpha',t)$; $P = \alpha$

$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = B$ (ya que $\dot Q = \dot P = 0$), $P = \alpha$

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + aq}_{=\alpha} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{=-\alpha} = 0 \to S = -\alpha t + f(q), \quad \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{(\alpha - aq)2m} \;\Big\}\; S = -\alpha t \mp \sqrt{2m}\,(\alpha - aq)^{3/2}\cdot\frac{2}{3a}$$

$$B = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t \mp \frac{\sqrt{2m}}{a} \cdot \sqrt{\alpha - aq}$$

$$(B+t)^2 = \frac{2m}{a^2}(\alpha - aq) \rightarrow q = \frac{\alpha}{a} - \frac{a}{2m}(B+t)^2$$ solución análoga con $q(t=-B)=q_0$.

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m} \pm \sqrt{(\alpha - aq)} = \sqrt{2m} \pm \sqrt{\frac{a^2(B+t)^2}{2m}} = \pm a(B+t) = m \cdot \dot{q} \checkmark$$

(4) Teorema de KAM:

El conjunto de toros invariantes que no son destruidos es de medida finita, es decir, ocupan un área finita de la sección de Poincaré. Para perturbaciones pequeñas, trayectorias confinadas en toros, movimiento regular, no caótico. Los toros se organizan entorno a los puntos elípticos. El movimiento caótico o desordenado aparece en torno de los puntos hiperbólicos. (caso local o suave)

Elípticos → anclan estructura de toros

Hiperbólicos → rompen " " "

KAM → no destruidos → área finita.

> perturbación → toros se deforman, pero no se rompen, y aparecen islas de estabilidad.

Ω racional → perturbación acumulativa.

$\boxed{\text{JUL 02}}$

(1) $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \alpha q$

$Q(s) = q + s \quad , \quad s = cte$

$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}\dot{Q}(s)^2 - \alpha Q(s) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \alpha q - \alpha s = \mathcal{L} - \overset{\text{cte}}{\alpha s}$ → semi-invariante → no afecta a las ecuas del movimiento.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d}{ds}(Q(s)) = m\dot{q} = p \neq cte$$

$$\frac{d}{ds} L(Q_s, \dot{Q}_s, t) = \frac{\partial L}{\partial Q_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s} \cdot \frac{\partial \dot{Q}_s}{\partial s} + \overset{\frac{\partial t}{\partial s}=0}{0} = \overset{E-L}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s}\right)} \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s} \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_s}{\partial s}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s} \cdot \frac{\partial Q_s}{\partial s}\right) = -\alpha = \frac{L - L(s=0)}{s} \quad \Big/ \text{ en } s=0$$

$$\frac{d}{dt}(p \cdot 1) = \dot{p} = -\alpha \rightarrow \dot{p} = cte \longrightarrow$$ Se conserva la fuerza (que deriva del potencial) ?

$p = -\alpha(t - t_0) \rightarrow \nexists$ simetría en la dirección q !

(2) $\mathcal{L}(q,\dot{q})$

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})$$

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)}_{LE-L \rightarrow = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot \dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \ddot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \qquad \rightarrow H = cte = E$$

(3) $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}_i)^2 - q\,\phi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\,\dot{r}_i A_i(\vec{r},t)$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + \frac{q}{c}A_i(\vec{r},t) \rightarrow \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$H = p_i \dot{r}_i - \mathcal{L} = \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} - \mathcal{L} = m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} - \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\phi - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\phi(\vec{r},t)$$

→ Términos lineales en derivadas no contribuyen en H. Campo magnético no realiza trabajo ($W_{mag} = 0$). (ó eléctrico si es de corriente de desplazaϕ)

(4)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \phi\, \partial^\alpha \phi - m^2\phi^2\right) - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

$\alpha \Leftrightarrow \mu$: mudos, puedo intercambiar

↓

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial^\mu\partial_\mu\phi + m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0$$

Delta de Kronecker

$$\text{ya que } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi)} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{(\partial^\nu\phi)}\left(g_{\alpha\beta}\partial^\beta\partial^\alpha\phi\right) = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta}\cdot\delta_\nu^{\ \beta}\cdot\partial^\alpha\phi + g_{\alpha\beta}\partial^\beta\delta^\alpha_{\ \nu}\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_\nu^{\ \beta}\partial_\beta + \delta^\alpha_{\ \nu}\partial_\alpha\right)\phi = \frac{1}{2}(\partial_\nu + \partial_\nu)\phi = \partial_\nu\phi$$

$$\hookrightarrow \partial^\nu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\phi)}\right) = \partial^\nu\partial_\nu\phi$$

Ec. Klein-Gordon inhomogénea

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu\phi + m^2\phi\right) = (\Box + m^2)\phi = -\lambda\phi^3$$

$\boxed{\text{ENE 03}}$ - B

1) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

$x, y \to$ cíclicas $\to$ se conserva p_x, p_y

Bajo traslaciones: $\vec{r}\,' = \vec{r} + s \cdot \hat{n}$ ... unitario, adimensional

$\dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}$

$z' = z + s n_z$

$\hookrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - mgsn_z$

$\frac{dL'}{ds} = -mgn_z$ → Lagrangiano invariante si $n_z = 0$; " semiinvariante → difiere en una cte, no afecta a ecuac. de movim.

$\downarrow$

$\frac{dL'}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \frac{d}{ds}(r_i^{\prime\,o}) \right) = \frac{d}{dt}(p_i \cdot n_i) \overset{!}{=} \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{n}) = -mg n_z$

Si $n_z = 0 \to \frac{d}{dt}(p_x + p_y) = 0$

$\hookrightarrow$ Elijo $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$\hookrightarrow p_x$ y p_y se conservan independientemente. $\nearrow \vec{n} = (1,0,0)$; $\searrow \vec{n} = (0,1,0)$

$\frac{d}{dt} p_z n_z = -mgn_z \longrightarrow p_z = -mg \quad (t - t_0)$

$\hookrightarrow$ aceleración uniforme en z (campo gravitatorio).

2)

Sea $f(q_i, p_i, t)$

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \overset{\text{ecs. de Hamilton } H(q,p)}{=} \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$

$= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

Sea $K(q_i, p_i, t)$ constante de movimiento $\to \frac{dK}{dt} = 0 = \{K, H\} + \frac{\partial K}{\partial t}$

$\hookrightarrow \frac{\partial K}{\partial t} = \{H, K\}$

Defino $C = \{K_1, K_2\}$

$\frac{dC}{dt} = \{C, H\} + \frac{\partial C}{\partial t}$

Usamos propiedad:

$\{\{A, B\}, D\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}, D \right\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}, D \right\} - \left\{ \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}, D \right\}$

Y que $\{EF, D\} = \frac{\partial(EF)}{\partial q}\frac{\partial D}{\partial p} - \frac{\partial(EF)}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q} = F \cdot \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial D}{\partial p} + E\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial D}{\partial p} - E\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q}$

$- F\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q} = F\{E, D\} + E\{F, D\}$ $\hat{=}$ (regla cadena)

$\to \{\{A,B\},D\} = \frac{\partial A}{\partial q}\left\{\frac{\partial B}{\partial p},D\right\} + \frac{\partial B}{\partial p}\left\{\frac{\partial A}{\partial q},D\right\} - \frac{\partial A}{\partial p}\left\{\frac{\partial B}{\partial q},D\right\} - \frac{\partial B}{\partial q}\left\{\frac{\partial A}{\partial p},D\right\}$

$= \partial_q A\, \partial_{qp} B\, \partial_p D - \partial_q A\, \partial_{pp} B\, \partial_q D + \partial_p B\, \partial_{qq} A\, \partial_p D - \partial_p B\, \partial_{qp} A\, \partial_q D - \partial_p A\, \partial_{qq} B\, \partial_p D + \partial_p A\, \partial_{qp} B\, \partial_q D$

$- \partial_q B\, \partial_{qp} A\, \partial_p D + \partial_q B\, \partial_{pp} A\, \partial_q D$ ↘ Más fácil: usar identidad de Jacobi

$\{\{A,B\},D\}$

$\{u,\{v,w\}\} + \{v,\{w,u\}\} + \{w,\{u,v\}\} = 0$

Notación: (ver Goldstein) – p. 391 — lo demuestro por completitud:

$\{u,v\} = u_i v_j \epsilon_{ij}$ $\quad (j = q, p) \quad u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial i}$

$\{u,\{v,w\}\} = \{u, \epsilon_{ij} v_i w_j\} = \epsilon_{ij}[v_i\{u,w_j\} + w_j\{u,v_i\}]$

$= \epsilon_{ij}[v_i\{u,w_j\} \overset{\text{permuto}}{-} w_i\{u,v_j\}] = \epsilon_{ij}\epsilon_{kl}[v_i u_k w_{jl} - w_i u_k v_{jl}]$ ambas sobran! No hacían falta, se cancelan entre sí

$= \epsilon_{kl} u_k \epsilon_{ij}[v_i w_{jl} - w_i v_{jl}] = \epsilon_{kl} u_k \epsilon_{ij}[v_i w_{jl} \overset{\text{permuto}}{+} v_{il} w_j]$

$= \epsilon_{kl}\epsilon_{ij} u_k [v_i w_j]_l$

$\{v,\{w,u\}\} = \epsilon_{kl} v_k \epsilon_{ij}[w_i u_{jl} + w_{il} u_j]$

$\{w,\{u,v\}\} = \epsilon_{kl} w_k \epsilon_{ij}[u_i v_{jl} + u_{il} v_j]$

↳ sumo las tres:

$\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}[u_k w_{jl} v_i + v_k w_{il} u_j + v_{il} w_{jl} u_k + v_{jl} u_i w_k + u_{jl} w_i v_k + u_{il} v_j w_k]$

Cambio $i \leftrightarrow j$ ↳ Permuta → signo −

$= \epsilon_{kl}\epsilon_{ij}[w_{jl}(u_k v_i - v_k u_i) + v_{il}(u_k w_j - u_j w_k) + u_{jl}(w_i v_k - v_i w_k)]$

↳ Tres términos con estructura similar. Analicemos el 1º

$\epsilon_{kl}\epsilon_{ij} w_{jl} u_k v_i - \epsilon_{k'l'}\epsilon_{i'j'} v_{k'} u_{i'} w_{j'l'} \Rightarrow$ cambio $k' \to i$, $i' \to k$

$= \quad '' \quad - \epsilon_{il'}\epsilon_{kj'} v_i u_k w_{j'l'} \Rightarrow l' \to j$, $j' \to l$

$= \quad '' \quad - \epsilon_{ij}\epsilon_{kl} v_i u_k w_{lj} = \epsilon_{ij}\epsilon_{kl} v_i u_k (w_{jl} - w_{lj})$

→ Por igualdad de derivadas cruzadas → $w_{jl} = w_{lj}$

→ Por tanto, todos los términos se anulan y se cumple la identidad de Jacobi.

↳ Aplicamos para $\overset{\{C,H\}=}{\{\{K_1,K_2\},H\}} = -\{H,\{K_1,K_2\}\}$

$= \{K_1,\{K_2,H\}\} + \{K_2,\{H,K_1\}\} = \{K_1, -\frac{\partial K_2}{\partial t}\} + \{K_2, +\frac{\partial K_1}{\partial t}\}$ ver pág. anterior

Aparte, $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\{K_1,K_2\} = \partial_{tq} K_1 \partial_p K_2 + \partial_q K_1 \partial_{tp} K_2 - \partial_{tp} K_1 \partial_q K_2 - \partial_p K_1 \partial_{tq} K_2 = \{\frac{\partial K_1}{\partial t}, K_2\} + \{K_1, \frac{\partial}{\partial t} K_2\}$

Por tanto, $\{K_1,K_2\}$ es constante de movimiento, ya que

$\frac{dC}{dt} = \{C,H\} + \frac{\partial C}{\partial t} = -\{K_1, \partial_t K_2\} + \{K_2, \partial_t K_1\} + \{K_1, \partial_t K_2\} - \{K_2, \partial_t K_1\} = 0$ ✓

b)

$F(q_i, p_i, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \overset{\text{ver a)}}{\{F, H\}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \overset{\text{cte del movim}}{0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\{F, H\} = \{H, F\}$$

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_{0} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d\{H, F\}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0$$ ya que $\{H, F\} = 0$ es cte. de movimiento por lo visto en a), con $H = K_1$, $F = K_2$ o viceversa.

(3)

Acción $\rightarrow I$
Ángulo $\rightarrow \varphi$
↳ Son las coordenadas resultantes de una transformación canónica. tipo $F_2(\varphi, I)$

$\{q, p\} \rightarrow [I, \varphi]$
↳ $q \cdot p \rightarrow$ dimensiones de acción. $I \rightarrow$ dim. de acción
$\varphi \rightarrow$ adimensional

Son útiles en movimientos oscilatorios acotados, en sistemas conservativos $\left(\frac{\partial H}{\partial t} = 0\right)$, donde la energía es fija. $I(E)$ es cte en la trayectoria, ↳ $H = H(I)$
y $\varphi \in [0, 2\pi]$

Por el tma. Liouville $\rightarrow I = \frac{1}{2\pi} \oint p \cdot dq$

Por la transformación tipo F_2,

$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) = $ cte por ser I cte en la trayectoria, no puede depender de t, ...no tiene depend. en t, porque ni I ni H la tienen. ↳ $\frac{\partial}{\partial t} f(I) = 0$

$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow I = $ cte $\rightarrow$

También se puede ver como función característica de Hamilton:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_2}{\partial q}\right)^2 + U(q) = E(I)$$

↳ $W_2(q, I) \longrightarrow \varphi = \frac{\partial W_2(q, I)}{\partial I}$ //

(4) → Ver Teoría Cuántica de campos para el b)
El a): jun 01 - C, nº 4.

$\boxed{\text{FEB 03}}$

1) Sea $H(q_i\, p_i, t)$. Sea una cantidad física $f(q_i, p_i, t)$

↳ $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{dt} =$ → por ecs. de Hamilton:

$$= \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

2) $Q = q + \epsilon q^3$ $\quad \{Q, P\} = \begin{vmatrix} 1+3\epsilon q^2 & 0 \\ 6\epsilon q p & 1-3\epsilon q^2 \end{vmatrix} = 1 - 9\epsilon^2 q^4 \approx 1$

$P = p - \epsilon 3 q^2 p$

Función generativa infinitesimal: $F_2 = q\cdot P + \epsilon\cdot G + \theta(\epsilon^2) = F_2(q, P)$

$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{P}{1-3\epsilon q^2} \simeq P(1+3\epsilon q^2) \rightarrow F_2 = qP(1+\epsilon q^2)$ ✓

$Q = +\frac{\partial F_2}{\partial P} = q(1+\epsilon q^2) \rightarrow F_2 = qP(1+\epsilon q^2)$ ✓

↳ $G = q^3 P$

$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P + \epsilon\frac{\partial G}{\partial p} \rightarrow \delta p = p - P$

idem con $q \simeq Q$ a orden ϵ.

$\delta_G f(q, p) = f(Q, P) - f(q, p) = f(q, p) + \frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\delta p_i - f(q, p)$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_i}\cdot\epsilon\cdot\frac{\partial G}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\left(-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = \epsilon\{f, G\}$$

Tomo $f = H$:

$\delta_G H = \epsilon\{H, G\}$ → Para que sea una simetría, H no debe cambiar.
↳ $\delta_G H = 0$

$\{H, G\} = 0$ → H debe de ser de la forma de G:
$H \propto G = f(G)$ → ver ejercicio 40

3)

Atractor → zona del espacio de fases a la que convergen las trayectorias.
extraño → se pliega sobre sí mismo, tiene dimensión fraccionaria (tipo fractal). Se presenta en sistemas caóticos, un ejemplo es el atractor de Lorentz (alas de mariposa).
↳ disipativos.
↳ como puede ser el oscilador forzado amortiguado.

$\boxed{\text{JUL 03}}$

① $\mathcal{L}(q,\dot q,\cancel{t}) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

$$H = p\cdot\dot q - L \Rightarrow dH = dp\cdot\dot q + p\cdot d\dot q - dL = dp\cdot\dot q + p\,d\dot q - \overset{p}{\overset{\parallel}{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}}\,d\dot q - \frac{\partial L}{\partial q}\cdot dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$= dp\cdot\dot q - \frac{\partial L}{\partial q}\cdot dq - \frac{\partial L}{\partial t} \overset{E-L}{=} dp\cdot\dot q - \left(\frac{d}{dt}p\right)\cdot dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$= \frac{\partial H}{\partial q}\cdot dq + \frac{\partial H}{\partial p}\cdot dp + \frac{\partial H}{\partial t}\cdot dt \;\leftrightarrow\; \left.\begin{array}{l}\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \checkmark \\ \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \checkmark\end{array}\right\}\text{ecs. de Hamilton}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Aparte,

$$\frac{dH}{dt} = \overset{0}{\overset{\parallel}{\{H,H\}}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow H \text{ es cte de movimiento si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \;//$$

②
$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = E$$

$$\hookrightarrow p = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2\right)} \quad\bullet\quad q_{ret} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} = \pm\alpha$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\cdot dq \overset{\text{simetría recorrido}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{q_{ret+}}\sqrt{\quad}\,dq \overset{\text{ver tablas}}{=} \frac{2}{\pi}m\omega_0\int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - q^2}\,dq$$

$$= \frac{2}{\pi}m\omega_0\int_0^{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - q^2}\,dq = \frac{2}{\pi}m\omega_0\left[\frac{q}{2}\sqrt{\alpha^2-q^2} + \frac{\alpha^2}{2}\,\text{asin}\left(\frac{q}{\alpha}\right)\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{2m\omega_0}{\pi}\cdot\left[0 + \frac{\alpha^2}{2}\underbrace{\text{asin}(1)}_{\pi/2} - 0\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\underbrace{\text{asin}(0)}_{0}\right]$$

$$= m\omega_0\frac{\alpha^2}{2} = \frac{m\omega_0}{2}\cdot\frac{2E}{m\omega_0^2} = \frac{E}{\omega_0} \longrightarrow E = \omega_0\cdot I$$

$$\dot\psi = \frac{\partial E}{\partial I} = \omega_0 \longrightarrow \psi = \omega_0\cdot(t - t_0) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{2I}{m\omega_0}}$$

$$W_2 = W_2(q,I) = \left[\frac{q}{2}\cdot\sqrt{\alpha^2-q^2} + \frac{\alpha^2}{2}\,\text{asin}\left(\frac{q}{\alpha}\right)\right]\cdot\frac{2m\omega_0}{\pi}$$

$$p = \frac{\partial W_2}{\partial q} \qquad \psi = \frac{\partial W_2}{\partial I} = \underbrace{\frac{q}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{2\alpha\cdot\alpha/2I}{\sqrt{\alpha^2-q^2}} + \frac{\alpha^2\cdot\left(-\frac{q}{\alpha^2}\right)\cdot\alpha/2I}{2\sqrt{1-q^2/\alpha^2}}}_{0} + \alpha\cdot\frac{\alpha}{2I}\,\text{asin}\left(\frac{q}{\alpha}\right)$$

sin 2π ni simetrías $m\omega_0$

$$\hookrightarrow \text{asin}\left(\frac{q}{\alpha}\right) = \frac{2I}{\alpha^2}\cdot\frac{\psi}{m\omega_0} = \frac{m\omega_0}{m\omega_0}\psi \longrightarrow q = \alpha\sin\psi = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cdot\sin(\omega_0(t-t_0))$$

$$p = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega_0^2\cdot\frac{2E}{m\omega_0^2}\sin^2(\psi)} = \pm\sqrt{2mE}\cos\psi = m\cdot\dot q \checkmark$$

↳ solución +.

③ → ver jun 01

JUN 02

1) $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

T. Galileo: (eje x)
$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$
→ Transformación que depende de t

o en general:
$$\vec{r}' = \vec{r} + v \cdot t$$

$$\to T' = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{v} + \dot{\vec{r}}_\alpha)^2 = T + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha}_{\vec{P} = M\dot{\vec{R}}} \cdot \vec{v} + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}^2$$
$$= T + M\dot{\vec{R}}\vec{v} + \frac{M}{2}\vec{v}^2$$

Para lagrangiano libre:
$$\mathcal{L}_0' = T' = T + M\dot{\vec{R}}\vec{v} + \frac{M}{2}\vec{v}^2$$
Término cte, sin relevancia

Para variación infinitesimal: $\vec{v} = \epsilon\hat{n}$
$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}(MR\hat{n}) \cdot \epsilon \quad ; \quad s \equiv \epsilon$$

$$\frac{\delta L}{\delta s} \neq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(MR\hat{n}) = \frac{\mathcal{L}' - \mathcal{L}}{\epsilon}$$ → cuasiinvariante

↳ derivada total, por Tma de Noether:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{ds} q_i'(s)\right) = \frac{\delta L}{ds} = \frac{d}{dt}(MR\hat{n})$$

$$\to \frac{d}{dt}\left(p_i \cdot n_i \cdot t - MR\hat{n}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \hat{n} \cdot t - MR\hat{n}) = 0$$

↳ $\vec{p} \cdot \hat{n} \cdot t - MR\hat{n}$ se conserva $=$ cte $= -\vec{R}_0 \cdot M$

↳ $\vec{R} = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M} \cdot t$ → se conserva $\vec{R}_0$, relacionado con condiciones iniciales.

↳ Esta simetría nos da la ecuación del movimiento horaria, pero sólo funciona en un sistema libre.

2) Dada una región R en el espacio de fases $(\vec{q}, \vec{p})$ que se transforma en la región S en el espacio de fases $(\vec{Q}, \vec{P})$, los volúmenes de R y S calculados en cada representación son iguales sii la transformación es canónica.

$$d\rho = \left|\det\left(\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}\right)\right| \cdot d\rho' = \{q,p\}\, d\rho' \overset{\text{canónica}}{=} d\rho'$$

↳ $\rho_R = \int_R \prod dq_i \cdot dp_i = \rho_S$

③

$Q = \sqrt{q} \cdot e^{bt} \cos p$

$P = a\sqrt{q}\, e^{-bt} \sin p$

$\{Q, P\} \stackrel{?}{=} 1$

$\dfrac{\partial Q}{\partial q} = \dfrac{e^{bt}\cos p}{2\sqrt{q}}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial p} = -\sqrt{q}\, e^{bt} \sin p$

$\dfrac{\partial P}{\partial q} = \dfrac{a}{2\sqrt{q}} e^{-bt} \sin p$; $\dfrac{\partial P}{\partial p} = a\sqrt{q}\, e^{-bt} \cos p$

$\{Q, P\} = \dfrac{a}{2}\cos^2 p + \dfrac{a}{2}\sin^2 p = \dfrac{a}{2} \stackrel{?}{=} 1$

↳ Para $a = 2$, $\forall b$, la transformación es canónica

④ La sección de Poincaré es una representación "selectiva" del espacio de fases que ayuda a comprender la dinámica caótica o no de un sistema. Se define para un espacio de fases de 4D $(l_\alpha, \alpha, l_\beta, \beta)$. Se toma el espacio $l_\beta(\beta)$. ~~Para~~ l_α fijado, se dibujan los valores del par l_β, β cuando $\alpha = 0$ con $\frac{d\alpha}{dt} > 0$ (iterativamente) ... (energía, cond. inicial) ~~hasta~~ "llenar" toda la curva. Variando l_α se obtienen nuevas "líneas de contorno". Si el sistema tiene frecuencia única, la sección de Poincaré es un punto.

Ejemplo → el péndulo doble.

$\boxed{\text{FEB 04}}$

①

$S = \int \mathcal{L}\, dt = \int (H - p\cdot\dot{q})\, dt \Rightarrow \delta S = 0$

$H(q,p,t)$ — No, es a t fijo.

$\hookrightarrow \delta S = \int \delta\mathcal{L} \cdot dt = \int dt \left[\delta H - \delta p \cdot \dot{q} - p \cdot \delta\dot{q} \right] = \int dt \left[\frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \cancel{\frac{\partial H}{\partial t}\delta t} \right.$

$\left. - \delta p \cdot \dot{q} - p \frac{d}{dt}\delta q \right] = \int dt \left[\frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \delta p \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{q} \right) - \frac{d}{dt}(p \cdot \delta q) + \dot{p}\,\delta q \right]$

$= \underbrace{p \cdot \cancel{\delta q} \Big|_A^B}_{0 \text{ porque extremos fijos}} + \int dt \left[\delta q \left(\frac{\partial H}{\partial q} + \dot{p} \right) + \delta p \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{q} \right) \right] = 0$

Como δq y δp independientes, debe cumplirse:

$\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$

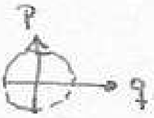
$\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$

(Ecuaciones de Hamilton) → sin usar ecs. movim. del Lagrangiano.

Espacio de configuraciones → $\{q_i\}$ → varías camino

la Trayectoria

Espacio de fases → $\{q_i, p_i\}$ → varías ambos



②
$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{P}{2}}\sin Q \\ p = \sqrt{\frac{P}{2}}\cos Q \end{cases}$$

$\{q,p\} \overset{?}{=} 1$ → $\frac{\partial q}{\partial Q} = +\sqrt{\frac{P}{2}}\cos Q$; $\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{1\cdot \sin Q}{2\sqrt{2P}}$

$\frac{\partial p}{\partial Q} = -\sqrt{\frac{P}{2}}\cdot\sin Q$; $\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\cos Q}{2\sqrt{2P}}$

$\{q,p\} = \frac{1}{4}\cos^2 Q + \frac{1}{4}\sin^2 Q = \frac{1}{4}$ //

$d\rho = \det\left(\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}\right)d\rho' = \{q,p\}\cdot d\rho' = \frac{1}{4}d\rho'$ } No es canónica //

③ Ver ene 03,B – nº3
jul 03 – nº2

$I = \frac{1}{2\pi}\int p\cdot dq \quad \ldots$

JUN 03

① $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot q^2 - \frac{1}{4}\dot q^4 + q\dot q - 2q^2$

$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}\cdot\dot q - \mathcal{L} = \dot q^2 - \dot q^4 + q\dot q - \frac{1}{2}\dot q^2 + \frac{1}{4}\dot q^4 - q\dot q + 2q^2$

$= \frac{\dot q^2}{2} - \frac{3}{4}\dot q^4 + 2q^2$ // $= \frac{\dot q^2}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\dot q^2\right) + 2q^2$

$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ ya que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

→ Por tanto $E(\vec q, \dot{\vec q}) \underset{= cte}{\text{es}}$ integral primera a lo largo de una trayectoria física, fijada por las condiciones iniciales $q(0)$, $\dot q(0)$.

②

$H(q,p,t)$

$Q = g(q,t)$

$\hookrightarrow \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial g}{\partial q}(q,t) \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = 0$

$$\rightarrow \{Q, P\} = \frac{\partial g(q,t)}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} = 1 \quad \text{tr. canónica}$$

$\frac{\partial P}{\partial q} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial p}$

$$\hookrightarrow P = p \cdot \frac{\partial g}{\partial q} + \underbrace{f(q,t)}_{\text{arbitraria}}$$

③ La frecuencia del movimiento, $w_i(I) = \frac{\partial E}{\partial I}$

$E \overset{\text{potencias}}{=} \sum_n c_n (I_r + I_\theta + I_\varphi)^n$

$\hookrightarrow w_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} = \sum_n c_n \cdot n \, (I_r + I_\theta + I_\varphi)^{n-1} \cdot 1 = g(I_r + I_\theta + I_\varphi)$

$\hookrightarrow w_r = w_\theta = w_\varphi \equiv w \rightarrow$ Trayectoria cerrada en una vuelta $T = \frac{2\pi}{w}$

$\hookrightarrow$ Periodo único

$E = E(I_r, I_\theta + I_\varphi)$

$\hookrightarrow w_\theta = w_\varphi \neq w_r \quad \rightarrow$ Trayectoria no se cierra, pero se repiten θ y φ para distinto r.

?

④ El oscilador forzado amortiguado es un sistema cuya solución inhomogénea es de frecuencia fija (única) $\rightarrow$ 1 punto en secc. de Poincaré. $\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + w_0^2\theta = F(t)$ $\rightarrow$ ecuación lineal.
Sin embargo, para el caso del péndulo, $\theta \rightarrow \sin\theta$ el sistema ya no es lineal. Esta no linealidad da lugar a una ruta al caos por duplicación del periodo. Para F grande, θ es grande $\sin\theta \neq \theta$ $\rightarrow$ Van apareciendo progresivamente nuevas trayectorias en el espacio de fases (con F creciente, se va duplicando el periodo como 2^n). Para n alto, $w \rightarrow \infty$, el sistema se vuelve caótico.

FEB 2005

① Stma. describe trayectoria entre $q_A(t_A) \rightsquigarrow q_B(t_B)$ cuya integral de acción tiene un valor estacionario frente a variaciones infinitesimales del camino de integración. (extremos fijos)

$$S = \int_A^B dt \cdot L$$

$$\delta S = \int_A^B dt\, \delta L = 0 = \int_A^B dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t} \delta t} \right]$$

$L(q_i, \dot{q}_i, t)$ — δL es a t fijo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

$$= \int_A^B dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \delta q_i \right]$$

$$= \int_A^B dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \cdot \delta q_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_A^B} \to 0$$

por $\delta q_i(A, B) = 0$ al estar extremos fijos

$\hookrightarrow = 0 \ \forall \delta q_i$ → Por tanto $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$ E-L //

Si $L' = L + \dfrac{dF}{dt}$ (difiere en derivada total, no afecta a E-L :)

$$\delta S' = \delta S + \delta \int_A^B dt \frac{dF}{dt} = \delta S + \delta\left[F(B) - F(A) \right]$$

$\hookrightarrow$ valor fijo $q_B, t_B, \dots$ → $\delta(\text{cte}) = 0$ // porque extremos fijos.

$\delta S' = \delta S = 0$ con $F = F(q_i, t)$

④ Ver jun 03, nº4.

JUN 05

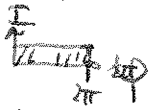
① Ver ENE 02-C, nº 3

② Ver JUN 02, nº 2

③ ψ → ángulo
I → acción

→ Para stmas. conservativos ($H = E = $ cte)
$\hookrightarrow$ movimientos acotados
$\hookrightarrow$ trayectoria $I_{(E)}$ cte, $\psi \in (0, 2\pi)$

q, p
↓ transf tipo $F_2 = W_2) = W_2(q, I)$
ψ, I $\int I \cdot d\varphi = 2\pi I$



Por Liouville → $I = \dfrac{1}{2\pi} \oint p\, dq$

$\dot{\varphi} = \omega(I) = $ cte $= \dfrac{\partial E}{\partial I}$ → $\varphi = \omega(t - t_0)$; $\dot{I} = 0$ ↗ $\nu_i = \dfrac{\omega_i}{2\pi}$

$\varphi = \dfrac{\partial W_2}{\partial I} = f(q, I)$ → $H = E = (I_1 + I_1^2) I_2$ → $\omega_1 = \dfrac{\partial E}{\partial I_1} = (1 + 2I_1) I_2$ //

$p = \dfrac{\partial W_2}{\partial q}$ $\qquad \omega_2 = \dfrac{\partial E}{\partial I_2} = I_1(1 + I_1)$ //

FEB 07

① $H = p^2 + q^2$

$A = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{q}{p}\right)$

$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \cancel{\frac{\partial A}{\partial t}}^{0} = \{A, H\}$

$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+q^2/p^2} \cdot \frac{1}{p}$; $\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+q^2/p^2} \cdot \left(-\frac{q}{p^2}\right)$

$\frac{\partial H}{\partial q} = 2q$; $\frac{\partial H}{\partial p} = 2p$

$\{A, H\} = \frac{1}{1+q^2/p^2} + \frac{q^2/p^2}{1+q^2/p^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 1 \rightarrow A(t) = t + A_0$

② $F_2(P, q) = q^2 e^P$

$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2q\, e^P \rightarrow P = \ln(p/2q)$

$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q^2 e^P \longrightarrow Q = q^2 \cdot \frac{p}{2q} = \frac{qp}{2}$

③ Ver jun 05, nº 3.

$H = I_1 I_2^3 = E$

$\omega_1 = I_2^3$

$\omega_2 = 3 I_1 I_2^2$

④ Sensibilid a condiciones iniciales → 2 trayectorias vecinas pueden divergir exponencialmente si se deja pasar tiempo suficientemente largo (por muy pequeño que sea el error en las cond. iniciales) → Da lugar a la impredecibilidad de las medidas. → sistema caótico.

Los exponentes de Lyapunov dan cuenta de la divergencia.

$\sim e^{\lambda_i t}$ → Con un sólo $\lambda_i > 0$, $\in \mathbb{R}$, ya hay caos. → caos determinista.

$\boxed{\text{FEB 08}}$

① $H = q \cdot p$

$A(q,t) = q \cdot e^{-t}$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} - q \cdot e^{-t}$$

$$\{A,H\} \to \frac{\partial A}{\partial q} = e^{-t} \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial p} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q} = \cancel{q}p \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial p} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \{A, H\} = q \cdot e^{-t}$$

$\hookrightarrow \dfrac{dA}{dt} = 0$ // $\to$ A es constante de movimiento

$\hookrightarrow q = A \cdot e^{t}$

Alternativamente:

$H(q,p) = qp$

$\hookrightarrow \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = q \to q = A_0 e^{t} \to A = q \cdot e^{-t} = A_0$ // $=$ cte ✓

② $\begin{array}{l} Q = q + \epsilon p \\ P = p - \epsilon q \end{array} \to \{Q, P\} = \begin{vmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{vmatrix} = 1 + \epsilon^2 \simeq 1$ canónica ✓

$F_2(q, P)$

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = P + \epsilon q \to F_2 = Pq + \epsilon q^2/2 + f(P)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q + \epsilon(P + \epsilon q) \simeq q + \epsilon P = P + f'(P)$$

$\hookrightarrow F_2(q,P) = Pq + \frac{\epsilon}{2}(q^2 + P^2)$ // $\to G(q,P) = \frac{1}{2}(q^2 + P^2)$

Si es simetría del sistema, deja invariante el hamiltoniano.

$$\delta_G H = H(Q,P,t) - H(q,p,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial H}{\partial Q}\delta Q + \frac{\partial H}{\partial P}\delta P - H(q,p,t)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial Q} \cdot \epsilon \frac{\partial G}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial P}\epsilon \frac{\partial G}{\partial q} = \epsilon\{H, G\} = 0$$

$\approx \frac{\partial G}{\partial Q}$ a orden ϵ que premultiplica

Por tanto $\to$ $\{H, G\}$ ~~debe~~ anularse. $\to$ implica $\dfrac{dG}{dt} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q} \cdot P = q \cdot \frac{\partial H}{\partial p}$$

$H \sim \sum_{n,m} c_{nm} q^n p^m \to n c_{nm} q^{n-1} p^{m+1} = q^{n+1} m c_{nm} p^{m-1}$

$\hookrightarrow$ NO válido multiplicándose

$H = \sum a_n q^n + \sum a_n p^m$

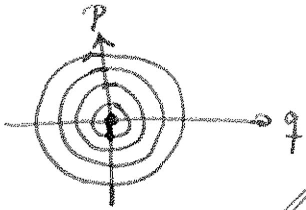
↳ $n a_n q^{n-1} \cdot p = q \cdot n a_n p^{n-1}$ → Solución para $n=2$

$H \propto q^2 + p^2 = f(G)$ → debe tener la forma de G.

$\Downarrow$

Si $H = q^2 + p^2 = E \;\therefore\; p = \pm\sqrt{E - q^2}$

↳ Círculos en el espacio de fases (centrados), de radio $\sqrt{E}$.
↳ Potencial tipo oscilador armónico



$E = q^2(0) + p^2(0)$

$q_{ret} = \pm\sqrt{E}$

(4)

Atractor → zona (curva o punto) a la que tienden (o alrededor del cual giran) las trayectorias en el espacio de fases. (curva → dim = 1, punto → dim = 0)

Los atractores extraños son atractores que se pliegan sobre sí mismos y tienen dimensión fraccionaria (como un fractal). Aparecen en sistemas disipativos como el péndulo amortiguado forzado. Otro ejemplo → atractor de Lorenz.

JUN 08

(1) $E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} \cdot \dot q - \mathcal{L} = E(q, \dot q, t)$ → espacio de configuraciones

$E = e^{\dot q} \cdot \dot q - e^{\dot q} = e^{\dot q}(\dot q - 1)$

$H = (q, p, t)$; con $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = e^{\dot q}$; $H = p\dot q - \mathcal{L}$ → viene en función de q y p, en lugar de q y $\dot q$, pero son equivalentes, sólo cambia el aspecto formal.

$H = p(\ln(p) - 1)$

↳ espacio de fases

(2) Transformación de las coordenadas $q, p \to Q, P$ a través de una función generatriz $\{F_i\}_{i}^{4}$, o bien que cumple $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$$\{q, p\} = \begin{vmatrix} -\beta P^{\alpha} \sin\beta Q & \alpha P^{\alpha-1}\cos\beta Q \\ \beta P^{\alpha}\cos\beta Q & \alpha P^{\alpha-1}\sin\beta Q \end{vmatrix} = -\alpha\beta P^{2\alpha-1}\sin^2\beta Q - \alpha\beta P^{2\alpha-1}\cos^2\beta Q$$

$= -\alpha\beta P^{2\alpha-1} \overset{\text{exijo } \forall P}{=} 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \;\; \beta = -2$

FEB 09

① $f(q_i, p_i, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \overset{\text{ecs. de Hamilton}}{=} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$D = pq/2$; $H = p^2/2 - \frac{1}{2q^2}$

$$\frac{dD}{dt} = \{D, H\} + \cancel{\frac{\partial D}{\partial t}}^{\,0} = \{D, H\}$$

$\frac{\partial D}{\partial q} = p/2$; $\frac{\partial D}{\partial p} = q/2$

$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{1}{q^3}$; $\frac{\partial H}{\partial p} = p$

$\rightarrow \{D, H\} = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2} = H = \frac{dD}{dt} = E$

$D = E \cdot (t - t_0)$

② Dada región R del esp. fases (q, p) y una transformación a (Q, P) que transforma $R \to S$, entonces el volumen de S y R son iguales sii la transformación es canónica.

$$d\rho = \underbrace{\det\left(\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}\right)}_{\text{Jacobiano}} \cdot d\rho' = \overset{=1 \text{ si}}{\{q, p\}}\, d\rho' = d\rho'$$

$\hookrightarrow \int_R p \cdot dq = \int_S P \cdot dQ$ ✓

③ $H = p/q$

$$H' = \frac{\overbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)}^{=\alpha}}{q} + \overbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}^{=-\alpha} = 0$$

ec. dif. Ham-Jacobi $H'(q, \alpha, \alpha', t)$; $\alpha = E = P$

$S = \alpha q^2/2 + f(t)$; $S = \alpha q^2/2 - \alpha t$

$S = -\alpha t + f(q)$

$\frac{\partial H'}{\partial P} = 0 = \dot{Q} \to Q = cte = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = q^2/2 - t$

↓ pasamos a función característica, transf. tipo $F_2(q, P)$; $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$; $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$$H = P/q = \frac{\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)}{q} = E \longrightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = Eq \to W = \frac{Eq^2}{2} + \underset{\text{0 elijo}}{f(P)}$$

$\hookrightarrow E = P \to H' = P = H'(Q, P) \to \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = 1 \longrightarrow Q = t - t_0 = \frac{q^2}{2}$

$\hookrightarrow q = \pm\sqrt{2(t - t_0)}$

$\hookrightarrow p = Eq = \pm E\sqrt{2(t - t_0)}$

Alternativa:

$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{q} \longrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{1}{q} \to q\,dq = dt \to \frac{q^2}{2} = t - t_0 \to q = \sqrt{2(t - t_0)}$

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p/q^2 \to \ln p = \frac{1}{2}\ln(t - t_0) + cte \to$ ¡dem!

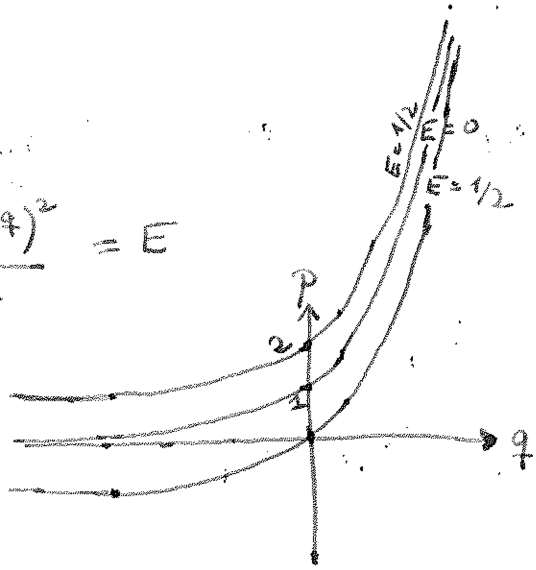
JUN 09

① $\mathcal{L}(\dot q, q, t) = \frac{1}{2}\dot q^2 + \dot q e^q$

$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \dot q + e^q$

$H = p\dot q - \mathcal{L} = \frac{\dot q^2}{2} = \frac{(p - e^q)^2}{2} = E$

$\hookrightarrow p = e^q \pm \sqrt{2E}$



②

$\{Q, P\} = \{q, p\} = 1$

$\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\beta}{\cos\alpha P}$; $\frac{\partial q}{\partial P} = + \frac{\beta Q \alpha}{\cos^2\alpha P}\sin\alpha P$

$\frac{\partial p}{\partial Q} = 0$; $\frac{\partial p}{\partial P} = \alpha\cos\alpha P$

$\to \{q, p\} = \alpha\beta = 1$

$\hookrightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$

O bien:

$Q = \frac{q}{\beta}\cos\alpha P = \frac{q}{\beta}\sqrt{1 - p^2}$; $P = \frac{1}{\alpha}\operatorname{asin} p$

$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{\beta}$; $\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{1}{2}\frac{q}{\beta}\frac{(-2p)}{\sqrt{1-p^2}} = -\frac{q}{\beta}\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$

$\frac{\partial P}{\partial q} = 0$; $\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$

$\{Q, P\} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1 \to \beta = \frac{1}{\alpha}$ ✓

$F_2(q, P)$

$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sin\alpha P \to F_2 = q\sin\alpha P + f(P)$

$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{q}{\beta}\cos(\alpha P) \to F_2 = \frac{q}{\beta\alpha}\sin\alpha P + g(q)$

$\Big\}\ F_2 = q\sin\alpha P$; $\alpha\beta = 1$

$\boxed{\text{ENE 10}}$

① $\mathcal{L} = \dfrac{\dot q^2}{2} + \dot q \sin q$

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \dot q + \sin q \equiv p \Rightarrow \mathcal{H} = p \cdot \dot q - \mathcal{L} = \dfrac{\dot q^2}{2} = \dfrac{(p - \sin q)^2}{2}$

$H(q, p)$

$\hookrightarrow \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p - \sin q$

$\hookrightarrow \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = (p - \sin q) \cdot \cos q$

②

$q, p \rightarrow Q, P \qquad \text{con } \{q, p\} = 1$

$Q = p^{-n} q$

$P = ?$

$\dfrac{\partial Q}{\partial q} = p^{-n} \quad ; \quad \dfrac{\partial Q}{\partial p} = -n\, p^{-n-1} \cdot q$

$\hookrightarrow \{Q, P\} = p^{-n} \dfrac{\partial P}{\partial p} + n p^{-n-1} \cdot q \cdot \dfrac{\partial P}{\partial q} = 1$

Supongo $P = \sum_{m,k} C_{mk}\, q^m p^k$

$\hookrightarrow p^{-n} C_{mk}\, q^m\, k \cdot p^{k-1} + n p^{-n-1} \cdot q \cdot C_{mk} \cdot m\, q^{m-1} p^k = 1$

$C_{mk}\, p^{-n+k-1} \cdot q^m (k + n \cdot m) = 1 \qquad \forall p, q$

Implica $\quad m = 0$

$n + 1 = k$

$C_k (n + 1 + \cancel{m}) = 1 \rightarrow C_k = C_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

$\hookrightarrow P = \cancel{m}\dfrac{p^{n+1}}{n+1}$

③ $H = pq = E \Rightarrow H' = P = E \qquad W_2'(q, P)$

$p = \dfrac{\partial W_2'}{\partial q} \rightarrow \dfrac{\partial W_2}{\partial q} \cdot q = P \rightarrow \dfrac{\partial W_2}{\partial q} = P/q \rightarrow W_2 = P \ln q + f(P)$

$Q = \dfrac{\partial W_2}{\partial P} = \ln q + f'(P) \Rightarrow q = q_0 e^Q \rightarrow$ soponemos $f'(P) = cte = -\ln q_0$

$\hookrightarrow f(P) = -P \ln q_0$

$\hookrightarrow W_2 = P \ln(q/q_0)$

Aparte

$\dot Q = \dfrac{\partial H'}{\partial P} = 1 \rightarrow Q = t - t_0$

$\left.\begin{array}{l} q = q_0 e^{(t-t_0)} \\ p = \dfrac{\partial W_2}{\partial q} = \dfrac{P}{q} = \dfrac{E}{q_0 e^{(t-t_0)}} = \dfrac{E}{q_0} e^{-(t-t_0)} \end{array}\right.$

$\dfrac{E}{q_0} = p_0$

Alternativamente:

$\dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} = q \rightarrow q = e^{t-t_0} \; ; \; \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -p \rightarrow p = p_0 \cdot e^{-(t-t_0)} \; ; \; E = p_0 q_0 \rightarrow p = \dfrac{E}{q_0} e^{-(t-t_0)}$

JUN 10

① Stma. físico describe tray entre $q_A(t_A)$ y $q_B(t_B)$ cuya integr. de acción es estac. frente varias infinit. del camino de integra.

$$S = \int_A^B dt \cdot L$$

$$\delta S = 0 = \int_A^B dt\, \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_A^B dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right\}$$

varías δL a t fijo, $\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}$

$\hookrightarrow \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$

$$= \int_A^B dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d}{dt}(\delta q) \right\} = \int_A^B dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \cdot \delta q \right\}$$

$$= \int_A^B dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \delta q + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \Big|_A^B} \to 0$$ porque extremos fijos

$\downarrow = 0 \quad \forall \delta q$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \qquad E-L$$

//

② Esp. fases $\{q, p\}$, región R

(transf. coord.

$\downarrow$ " " $\{Q, P\}$, " S

Volumen (R) = vol (S) sii transf. canónica.

$\Downarrow$ emp def. de volumen

$$d\rho = \det \left(\frac{\partial (q, p)}{\partial (Q, P)} \right) \cdot d\rho' = \{q, p\} \cdot d\rho' = d\rho'$$

Jacobiano

$\hookrightarrow \int p \cdot dq = \int P \cdot dQ$

//