1er Sem

Asignatura / Assignatura | Curso / Curs | Grupo / Grup | Nº Pg.

Grupo / Esp. Vect / Grupo
Sub / Sub / Anillo

Grupo:

$G, * \to$ l.c.i. — Asociativa; $\exists$ n; $\exists$ s

Sub $x * y^{-1} \in G$

Complejos: $zz^* = |z|^2$

Anillo:

$\underbrace{A, \perp}_{\text{G. Ab}}, \underbrace{*}_{\text{Asoc, distr} \perp}$ → si $\exists$ e.n(*) → Unitario

(*) conmut. → C.

Permut.
ciclo p
↓
sig: $(-1)^{p-1}$

Cuerpo:

$\underbrace{K, \perp}_{\text{Grupo Ab.}}, *$

$*$ distr. $\perp$

$\underbrace{K(\text{en} \perp), *}_{\text{Grupo ab}}$

Espacio vectorial:

$\{ (E, +), (K, +, \circ), (\circ) \}$

$(E,+)$ ↓ Gr. Ab. $(K,+,\circ)$ ↓ Cuerpo

→ l.c.e ($\alpha, |u\rangle \to \alpha \cdot |u\rangle$; $K, E \to E$)
- Distrib (+) $|u\rangle$
- Distrib (+) α
- Asoc. $\alpha \cdot \beta \cdot |u\rangle$
- $\exists 1 \in K / 1|u\rangle = |u\rangle$

Sub → subgrupo + parte estable

$\Rightarrow \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle \in F$

Nº | Apellidos y nombre / Cognoms i nom | Firma / Signatura | Fecha / Data

MATRICES Y D.

Def: matriz $n\times m$ → elementos de un cuerpo $\mathbb{K}$ ordenados en N filas y M columnas

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} = [a_{ij}]$

× Suma, multiplica escalar $\in \mathbb{K}$

× espacio vectorial en $\mathbb{K}$ ($M_{n\times m}$)

× $\alpha\cdot(\beta A)$ × $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ × $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

- Producto:

$A\cdot B = \left(\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{ij} \right)$ ≡ convenc. índices repetidos

- asociativo
- no conmutativo
- distributiva respecto a +

$0 = [0_{ij}]$ en ⊕

- Anillo unitario no conmutativo ⊕ ⊙
- $\exists A \neq 0$ y $B \neq 0 / A\cdot B = 0$ ⇓ $M_{n\times n}$
- $M_{n\times m}$ no l.c.i

$\mathbb{I} = [\delta_{ij}]$

- Traspuesta:

$A^T = [a_{ij}^T] = [a_{ji}]$ → $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ → $(A_1 \dots A_n)^T = A_n^T \dots A_1^T$

→ $(A^T)^T = A$ → $(A+B)^T = A^T + B^T$

- Adjunta:

$A^{+} = [((a_{ij})^T)^*]$ → $\langle w | v \rangle = \sum w_i^* v_i = (w_1^* \; w_n^*) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_n \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix}$

≡ $\langle w|$

Determinante ($M_{n\times n}$)

Menor de un elem $_{ij}$: determinante de la matriz sin la fila i, j → M_{ij}

Cofactor " " ": $(-1)^{ij} M_{ij}$

$\det A = \sum_K a_{ik} C_{ik}$ → desarrollo de Laplace por elem de una fila

$= \sum_k a_{ik} (-1)^{ik} M_{ik}$

det $1\times 1_{ij}$ = elemento

Regla de Sarrus

Símbolo de Levi-Civita: $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = \begin{cases} 0 & \text{si hay índices repetidos} \\ \text{sig} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ i_1 & i_2 & \dots & i_N \end{pmatrix} \end{cases}$

Dem. Ejs.

$\det A = \sum_{i_1, i_2, \dots i_N = 1} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_N N}$

PROPIEDADES

→ det = aplicación sobre A de n argumentos (vectores fila)

1) $\det A = \det A^T$

2) Intercambio filas columnas → cambio signo $\det A_\sigma = (-1)^{P} \cdot \det A$ (P: permutaciones, sig(σ))

3) $\alpha \cdot \det A = \det |\alpha \cdot 1 \text{fila}|$

4) Si 2 filas = o una múltiplo de otra ⇒ $\det A = 0$

5) Sumando filas o columnas → $\det(A)$ cte.

3+5) Sustituyendo fila k por c. l. de filas → det · factor fila k en c.l.

6) $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$

7) $a_{k i_k} = a'_{k i_k} + a''_{k i_k}$ $i_k = 1, \dots N$

⇒ $\det A = \det A' + \det A''$

$\det(A+B)$?

8) $\det(|a_1\rangle, |a_2\rangle, \sum \alpha_k |b_k\rangle, \dots) = \sum \alpha_k \det(|a_1\rangle, \dots, |b_k\rangle, \dots)$

$\det \lambda = \alpha \cdot |B|$?

Inversa: A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} A$

1) Matriz de cofactores C
2) Traspuesta C^T
3) Dividir entre $\det A$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det A}$$

Fórmula de los cofactores:

$$\sum_k a_{kj} c_{ki} = \det A \cdot \delta_{ij} \longrightarrow A^{-1} \cdot A = I$$

sii $\det A \neq 0 \longrightarrow$ matriz (cuadrada) regular

Propieds

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

iii) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

iv) $(A_1 \dots A_N) = A_N^{-1} \dots A_1^{-1}$

Rango de una matriz

→ Nº vectores fila/columna linealmente independientes

→ Dimensión de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo

$rg(A) = rg(A^T)$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + \dots & x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 & \\ \vdots & \\ a_{m1} x_1 & a_{mn} x_n = b_m \end{matrix} \Longrightarrow A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\equiv x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \dots = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \left[A \,\middle|\, \begin{matrix} b_1 \\ b_m \end{matrix} \right]$$

↳ notación vectorial

$A|x\rangle = |b\rangle$ si $(N = M)$, $\det A \neq 0$, tantas incógn. como ecuac. $|x\rangle = A^{-1} |b\rangle$

Regla de Cramer

$|x\rangle$ y $|b\rangle$ = dim. → Sistemas de ecuacs cuadrados, N incógn, N ecuacs l.i.

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \Delta_i$$

Δ_i = det. de la matriz de coeficientes con la columna x_i sustituida por la de términos independientes

→ Si sistema Cramer homogéneo → SCD → $\{x_i\} = 0$ (sol. trivial)

S.e.l.
- I ≡ no tiene solución
- C ≡ al - 1 solución
  - → Determinado: única solución
  - → Indeterminado: + de una

— Homogéneo si $|b\rangle = |0\rangle$

Teorema de Rouché - Fröbenius

S. ecs lineales $\underbrace{}_{A\cdot|x\rangle = |B\rangle}$, A matriz de coeficientes $A = [a_{ij}]$
A' " ampliada con t. ind. $A' = (A|B)$

- $rg\, A = rg\, A' \Leftrightarrow$ SC $\quad (rg\, A \neq rg\, A' \Rightarrow$ SI$)$
- $rg\, A = rg\, A' = N \Leftrightarrow$ SCD
- $rg\, A = rg\, A' < N \Leftrightarrow$ SCI ... cos? recta? plano? ¿cuándo? ¿

Transformas elementales (det(A))

- permutar filas $(-)$
- $\alpha \cdot$ det (α)
- $\sum$ c. l. orig. $(=)$

$\Big\} \rightarrow$ fila de ceros + Laplace

↳ rg(A) invariante con estas transformas

Método de Gauss (S. ec. ls) pa encontrar soluciones (x. ej. si no es de Cramer)

→ cambiar orden
→ multiplicar por α una ecua
→ sumar a una c. l. restantes

$\Big\} \rightarrow$ sistema transformado tiene soluciones equivalentes, → sistema escalonado

Matrices cuadradas

o) regular → $\det A \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

i) diagonal → $A = [a_{ij}] \rightarrow a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

ii) simétrica → $A^T = A$
antisimétrica → $A^T = -A$

↳ Toda matriz cuadrada se puede descomponer de forma única como suma de una simétrica y una antisimétrica. $M = \underset{(S)}{\frac{1}{2}(M+M^T)} + \underset{(A)}{\frac{1}{2}(M-M^T)}$

iii) ortogonal
$A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}$ ó $A^T = A^{-1}$ $\quad \det(A) = \pm 1$

iv) hermítica (autoadjunta) → $A^+ = A$
antihermítica → $A^+ = -A$

$\Big\} M = \underbrace{\frac{1}{2}(M+M^+)}_{H} + \underbrace{\frac{1}{2}(M-M^+)}_{AH}$

v) unitaria
$A \cdot A^+ = A^+ A = \mathbb{I}$ ó $A^+ = A^{-1}$

vi) normal
$A \cdot A^+ = A^+ A$ (hermíticas y unitarias lo son) conmut?
~~ortogonales~~, simétricas, diagonales,

OPERADORES LINEALES

$\mathcal{A}: E_n \to E_m$

$\mathcal{A}(\alpha_1|v_1\rangle+\alpha_2|v_2\rangle) = \alpha_1\mathcal{A}|v_1\rangle + \alpha_2\mathcal{A}|v_2\rangle$ } operador lineal (homomorfismo)

linealidad

$\mathbb{I}, \Theta$

$x^2 + 6$

$D(\mathcal{A}) \subset E_n \to \mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset E_n \to Im(\mathcal{A}) \subset E_m$

$Im(\mathcal{A}) \subset E_m \to \mathcal{A}(D(\mathcal{A}))$ ⇒ subespacios vectoriales $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in E)$

$\mathcal{N}(\mathcal{A}) \subset E_n \doteq \{|v\rangle \in E_n / \mathcal{A}|v\rangle = |0\rangle \in E_m\}$

Sobreyectividad

$Im(\mathcal{A}) = E_m$ ~~+~~ $(\dim Im(\mathcal{A}) = \dim E_m)$

Inyectividad

$\Leftrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{|0\rangle\}$

SUMA

$(A+B)|v\rangle = A|v\rangle + B|v\rangle$

PPE

$(\lambda A)|v\rangle = \lambda(A|v\rangle)$

PO

$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})|v\rangle = \mathcal{A}(\mathcal{B}|v\rangle) \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$

$\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathbb{I}$

Inverso de $\mathcal{A}$

Cambios de base

$|\tilde{e}_j\rangle = \sum_k b_{kj}|e_k\rangle \to \begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix} = \mathbb{B}\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$ componentes $\quad v_k = \sum_j b_{kj}\tilde{v}_j$

$b_{kj} = e_k \cdot \tilde{e}_j$

$( ) = ( )( )$

$|v\rangle =$

proy

$\mathbb{B}^{-1}$

Representación matricial de un operador

$\mathcal{A}|v\rangle = |v'\rangle$

$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_n \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\mathbb{A}$

$\mathcal{A}(\{\mathbb{B}\})$ + columnas

$\mathcal{A}|e_j\rangle = \sum_i^m a_{ij}|e_i'\rangle$

P. 7, 8

4 4 X

+ Cuestiones
+ 11 - 13
+ exos

Si $\mathbb{R}^2$ no canónica

Cambio de base en la matriz de un operador

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathbb{A}"] \arrow[d, "\mathbb{B}"'] & B' \arrow[d, "\mathbb{B}'"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "\hat{\mathbb{A}}"] & \tilde{B}' \end{tikzcd}$$

$$\hat{\mathbb{A}} = (\mathbb{B}')^{-1} \mathbb{A} \mathbb{B}$$

?

IH q.

Repr. matricial en b.o.n

$A_{ij} = \langle e_i | \mathbb{A} e_j \rangle$

Identidad de Parseval

$$I = \sum_i \Big(e_i \Big) \cdot (\; e_i \;)^* = \sum_{i=1}^{n} \underset{\text{kets}}{|e_i\rangle} \underset{\text{bra}}{\langle e_i|}$$

$(v) = I(v)$ → componentes e_i, v_i base canónica

Operador adjunto

$\langle v | \mathbb{A}^+ w \rangle = \langle \mathbb{A} v | w \rangle$

$A^+_{ij} = A_{ji}^*$

cómo si no ...

cuidado si no p. estándar

Operador normal

$\mathbb{A}^+ \mathbb{A} = \mathbb{A} \mathbb{A}^+$

→ Hermítico / Autoadjunto

$\mathbb{A}^+ = \mathbb{A} \iff a_{ij} = a_{ji}^*$

↳ Si $\mathbb{A}$ real, $\mathbb{A}^* = A \Rightarrow$ Hermítico si $A^T = A$ $\Rightarrow$ Simétrico

→ Unitario

$\mathbb{A}^+ \mathbb{A} = \mathbb{A} \mathbb{A}^+ = I$

↳ $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^+$ (regular) $\Rightarrow$ biyectivo (cond. necesaria no suficiente)

Si $\mathbb{A} \in \mathbb{R}$ → $\mathbb{A}^T \mathbb{A} = \mathbb{A} \mathbb{A}^T = I$ → operador ortogonal

Caracteriz.

Autoadjunto: $\langle v | \mathbb{A} v \rangle \in \mathbb{R}$ (valor esperado)

Unitarios: $\langle \mathbb{A} v | \mathbb{A} v \rangle = \langle v | v \rangle$

$\iff \exists \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^+$

$\iff$ vectores fila de A son ortonormales (matriz unitaria)

Cambios de base entre b.o.n

$b_{ij} = \langle e_i | \tilde{e}_j \rangle$

$B \xrightarrow[\mathbb{B} \text{ unitaria!}]{} B'$ $\qquad \mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}^{+}$

$$\begin{array}{lccc} E_n & B & \xrightarrow{B} & \tilde{B} \\ & \Big\downarrow \mathbb{A} & & \Big\downarrow \tilde{\mathbb{A}} \\ E_n & B' & \xrightarrow[\text{unit}]{B'} & \tilde{B}' \end{array} \; T$$

$$\begin{array}{ccc} E_n & & E_m \\ B & \xrightarrow{\mathbb{A}} & B' \\ \mathbb{B} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mathbb{B}' \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{\mathbb{A}}} & \tilde{\mathbb{B}}' \end{array} \longrightarrow \tilde{\mathbb{A}} = (\mathbb{B}')^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$$

$\rightarrow \mathbb{B}' = \mathbb{B}$

Endomorfismos: $E_n = E_m$

$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{B}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{B} = \mathbb{B}^{+} \mathbb{A} \mathbb{B}$ (b.o.n unitaria)

$E_i \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}^{+} = B^{T}$

$\tilde{\mathbb{A}} = B^{T} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$

Det. y Traza de un operador bajo un cambio de base no cambian!

(endom. xo no b.o.n) $\qquad \det A = \det \tilde{A} \qquad Tr(A) = Tr(\tilde{A})$

$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$

$Tr(AB) = Tr(BA)$

Proyectores (op. lineal)

$L \oplus L^{\perp} \rightarrow L + L',\ L \cap L' = \{0\}$

$|v\rangle = |v_L\rangle + |v_{L^\perp}\rangle$

Proyector en subesp. $L \rightarrow P|v\rangle = |v_L\rangle$

- $P \Longleftrightarrow P = P^2$ (idempotente) y $P = P^{+}$ (autoadjunto)
- $P_1 P_2 = 0 \Longleftrightarrow L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow$ sii proyectores ortogonales
- $P_1 + P_2$ (hermítico) no es proyector en general
  sólo si los proyectores son ortogonales

$\underbrace{(P_1 + P_2)}_{\text{ort.}}$ asociado a $L_1 \oplus L_2$

$P|v_L\rangle = |v\rangle \qquad P|e_i\rangle = |e_i\rangle$

$P|v_{L^\perp}\rangle = 0 \qquad P_{\perp}|\varepsilon_i\rangle = |\varepsilon_i\rangle$

Repr. matricial de P en b.o.n

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\dim L \\ \}\dim L^{\perp} \end{array}$$

$Tr(P) =$ invariante $= \dim L$
xa cualquier base

$$P = \sum_{i=1}^{\dim L} |e_i\rangle\langle e_i|$$

TEORÍA ESPECTRAL

$\mathcal{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle$ ($|v\rangle$ autovector, λ autovalor) $\quad |0\rangle \to$ trivial

$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \Rightarrow$ Espectro $\quad \{|v\rangle\}_{\lambda} \to V_{\lambda_i}$ (subespacio vectorial)

$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 = (\lambda - x_1)^{n_1}(\lambda - x_2)^{n_2}\dots(\lambda - x_p)^{n_p}$ (n_1: multiplicidad) $\quad \sum n \leq N$ si ∄ sí

↳ Indep. de la base de representación!

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \to V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{|0\rangle\}, \quad V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = E_{\dots}$ no ort.

2×2

$\lambda^2 - \mathrm{Tr}A\,\lambda + \det A = 0$

n. ort normales conj.

---

1) Escoger base de representación $\mathcal{A} \to A$
2) $\det(A - \lambda I) = 0 \to \lambda$
3) $(A - \lambda_i I)|v_i\rangle = |0\rangle$ (sist. hom. comp. indet.)
   e.l.i ≟ ligadores
   $r = \mathrm{rg}(\;\;) < n$
   $n - r = \dim(V_{\lambda_i})$

<u>Op. normal</u> (pre-Hilbert)

endom. normal $\to |v\rangle$ propio $\quad \mathcal{A} \to \lambda$, $\quad \mathcal{A}^{+} \to \lambda^{*}$

<u>T2</u>

endom. normal, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \to V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$

<u>T4</u>

endom. hermítico $\to \lambda \in \mathbb{R}$

<u>T3</u>

endom. unitario $\to |\lambda|^2 = 1$

Dim $V\lambda_i$, mult. m,

T_1 $1 \leq d \leq m$

en $\mathbb{C}$ $\sum m_i = n$

[si normal $d = m$, $\sum m_i = n$]

T_2 $\exists$ base de vectores propios

1) $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$

2) $d_i = m_i$

$\mathbb{C}$ norm.

n λ diferentes $E_n = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$

Operador diagonalizable si $\exists$ Base de E_n formada x v. propios

T_3 (caracteriza)

1) $\sum m_i = n$
2) $d_i = m_i$

$$\longrightarrow A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}(B_{vp})$ $\underbrace{\quad}_{m_1}$ $\underbrace{\quad}_{m_p}$

ec. lin. se desacoplan

$\mathcal{A}$

$B_0 \xrightarrow{\mathbb{B}} \mathbb{B}_{vp}$ $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{A} & B_0 \\ \mathbb{B}\downarrow & & \downarrow\mathbb{B} \\ B_{vp} & \xrightarrow{A_D} & B_{vp} \end{array}$$

$A_D = \mathbb{B}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{B}$

si B_{vp} ON

$A_D = \mathbb{B}^{t} \mathbb{A} \mathbb{B}$

$\mathbb{B} \Rightarrow |e_i\rangle_{vp} = \sum b_{km} |e_k\rangle \rightarrow$ columnas

TEOREMA ESPECTRAL

$\mathcal{A}$ endom. normal en e.v. complejo E_n

$\hookrightarrow$ ortogonalmente diagonalizable ⟶ unidad con multiplicidad

$\exists$ una b.o.n. de vectores propios de $\mathcal{A}$

$\mathcal{L}_{\lambda_i} \perp \mathcal{L}_{\lambda_j}$, $\oplus$, $\mathcal{S}_0 O$.

◎ op. norm (hermit, unit, proyect) son ortog. diagonalizables siempre?

real $\rightarrow \mathcal{A}^* = \mathcal{A}$
simétrico $\rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ $\Big\}$ ⟶ hermit → $\lambda \in \mathbb{R}$

normal → b.o.n de v. prop.

$\hookrightarrow A_D \in \mathbb{R}$ → v. prop $\in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \mathbb{B}$ ortogonal (comp. (reales) ortog)

conmut.

ej.

Descomposición espectral (de un op. normal)

T/ $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot P_i \rightarrow$ descr. esp. de A $\qquad \{|e_j^{(i)}\rangle\}_{j=1}^{d_i} \equiv$ b.o.n. de S_{λ_i}

$$P^{(i)} = \sum_{j=1}^{d_i} |e_j^{(i)}\rangle\langle e_j^{(i)}|$$

Función de un operador

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cdot x^m$$

$$\downarrow$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \cdot A^m$$

$$A_D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \qquad \lambda_i^{-1} = \frac{1}{\lambda_i}$$

si A normal $\rightarrow$ se simplifica diagonaliz.

a partir de A_D, si S ort.
$\hookrightarrow$ A normal

$$A_D = S^+ A S \rightarrow \cancel{A_D^m} = S A$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{A = S A_D S^+ \longrightarrow A^m = S A_D^m S^+}$$

f(A) repres. en una base

$$\boxed{\underbrace{f(A)}_{\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m A^m} = S \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_p) \end{pmatrix} S^+}$$

i) $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$

ii) $\sum_{i=1}^{p} P_i = I$ (Parseval)

$$\hookrightarrow \boxed{f(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) \cdot P_i}$$ (dim. finita)

$$S \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} S^+$$

ESPACIO AFÍN

Def.: $E = \{A, B, \ldots\}$, $E_n(\in\mathbb{R})$

$f: E\times E \to E_n$

$(A,B) \mapsto f(A,B) = |v\rangle \in E_n$

i) $\forall A \in E \;\exists!\, B \in E \;/\; |v\rangle = f(A,B)$ — BIYECTIVA
$v \in E_n$

ii) $f(A,B) = |0\rangle$ sii $A = B$ — IGUALDAD

iii) $f(A,B) + f(B,C) = f(A,C)$ — LEY DEL PARALELOGRAMO

$S(O; \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}) \to$ sistema de referencia cartesiano
$O \in E$, $\{|e_i\rangle\}$ base de E_n

Si E_n es pre-Hilbert + b.o.n $\to$ s. de referencia ortonormal o rectangular
$\to$ espacio afín euclídeo

$f(O,X) = \overline{OX} = \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle$ (def. verifica...)

$X(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $x_i \equiv$ coordenadas de X en S (componentes $|v\rangle$ cambian con la base)

... + 3D, s. ref. obl., puntos $\to$ matrices, polinomios, ...

$\overline{XY} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$

Cambio de sistema de referencia

$S(O; \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}) \to S'(O'; \{|e_i'\rangle\}_{i=1}^{n})$

$\overline{OX} = \underbrace{\overline{OO'}}_{(a_1, a_2, \ldots)} + \overline{O'X}$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i |e_i\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle + \sum_j x_j' |e_j'\rangle$

$x_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j'$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix} + \mathbb{B} \begin{pmatrix} x_1' \\ \\ x_n' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ \\ x_n' \end{pmatrix} = \mathbb{B}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{B}$ bien def si $\exists\, \mathbb{B}^{-1}$ $\to$ Biyect!

$U^t \leftrightarrow U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}$

$\alpha + \beta = 0, \pi$

S.R.R.

Traslación:

$\mathbb{B} = \mathbb{I}$ $\quad X_i' = X_i - a_i$

Rotación:

$O = O'$ $\quad a_i = 0$

b.o.ns de $E_n \to \mathbb{B}$ unitaria, $\mathbb{B}\mathbb{B}^\dagger = \mathbb{I}$ (en $E_n \subset \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ ortogonal)

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_1' \\ X_n' \end{pmatrix} = \mathbb{B}^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_n \end{pmatrix} = \mathbb{B}^T\begin{pmatrix} X_1 \\ X_n \end{pmatrix}}$$

$\mathcal{R}: E_n \to E_n$

↳ endomorfismo ortogonal que asigna vectores rotados a cada vector de E_n.

$\mathbb{B} \equiv$ matriz ortogonal de $\mathcal{R}$

$|e_j'\rangle = \sum R_{ij}|e_i\rangle$

Rotaciones de E_n $\Theta(E_n)$ forman un grupo.

$RR^T = I$

$\det(\ ) = \det I = 1 = \det^2 R \to \det R = \pm 1$

disjuntos $\begin{cases} \Theta^+(E_n) \text{ subgrupo abeliano} & \to \text{Rotación propia} \\ \Theta^-(E_n) \times & \to \text{Rotación impropia} \end{cases}$

Rot. propias $\quad$ 2D, real

$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal $\to$ $\boxed{R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1}$

2i 1l $\to$ 1p

$\to$ dependen de un único parámetro $\theta \equiv$ ángulo de rotación $\alpha, \beta, \ldots$

$R(\alpha + \beta) = R(\beta) \cdot R(\alpha)$

$R(-\alpha) = R^{-1}(\alpha)$

$R(0) = \mathbb{I}$

$R_{ij} = \langle e_i | e_j' \rangle$

$\cos\alpha = \langle e_1|e_1'\rangle = \langle e_2|e_2'\rangle$

$\operatorname{sen}\alpha = \langle e_2|e_1'\rangle = -\langle e_1|e_2'\rangle$

$\to \boxed{R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}$ $\quad (e') = (e)R$

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = R^T\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} X_1' &= \cos\alpha X_1 + \operatorname{sen}\alpha X_2 \\ X_2' &= -\sin\alpha X_1 + \cos\alpha X_2 \end{aligned}}$$

$R(\pi) = -I$

$R(2\pi) = R(\pi) \circ R(\pi) = I = R(0)$

$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ↳ $\pi/2$ $\quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ↳ $-\pi/2$

$R_1 \circ R_1 = R_2 \circ R_2 = -I$

$R(\alpha) = \tilde{R}(\alpha)$

$R(-\alpha) = R^{-1}(\alpha) = (R^*(\alpha))^T$ $\to \sin(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\to \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$R_{3D}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} & \\ & 1 \end{bmatrix}_\phi \begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix}_\theta \begin{bmatrix} & \\ & 1 \end{bmatrix}_\psi$

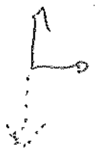
Rotaciones impropias:

$\det R = -1$ $\qquad R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

$R = \tilde{R}_\alpha \cdot I_R$, $I_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det \tilde{R}_\alpha = +1 \rightarrow$ R propia

$\tilde{r}_{11} = r_{11}$ $\quad \tilde{r}_{12} = -r_{12}$ → reflexión del eje x_1

$\tilde{r}_{21} = r_{21}$ $\quad \tilde{r}_{22} = -r_{22}$



Ángulo de vectores

$R(\alpha)$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ $\qquad \langle e_1 | e_1 \rangle$ $\qquad \|u\| = +\sqrt{\langle u | u \rangle}$

$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = 1$ $\qquad$ → si l.d. $|\cos\alpha| = 1$

$\cos\alpha = \pm 1 \rightarrow \alpha = 0, \pi$ ✓

Distancia entre puntos

$d(A,B) = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (\ -\ )^2 \ldots}$

→ $d(A,B) = d(B,A)$ $\qquad$ → $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

→ $d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$

Sistemas de coordenadas

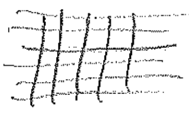
$Q_1 / \overline{OQ_1} \propto |e_1\rangle$ → eje x_1 (coordenadas)

$(x_1, x_2) : \overline{OP} = x_1 |e_1\rangle + x_2 |e_2\rangle = \langle e_1 | OP \rangle |e_1\rangle + \langle e_2 | OP \rangle |e_2\rangle$

$\begin{cases} x_1 = \langle e_1 | \overline{OP} \rangle = d(O,P) \cdot \cos(e_1, \overline{OP}) \\ x_2 = d(O,P) \cdot \cos(e_2, \overline{OP}) \end{cases}$

$P'(x_1', x_2' = x_2)$ → línea coordenada $x_2 = cte$

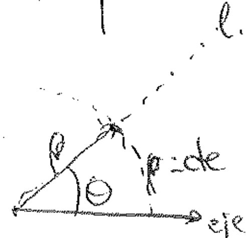
$P''(x_1' = x_1, x_2)$ → " $\qquad$ " $\qquad x_1 = cte$



Polares 2D

$\begin{cases} \rho = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} \end{cases}$ $\quad (J = r)$

$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \\ x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$



l. coord $\theta = cte$

$\rho = cte$

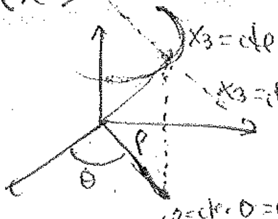
eje polar

punto singular $\rho = 0$ → SISTEMA LOCAL ¿

3D Cilíndricas

$\begin{cases} \rho = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$ $\quad (J = r)$

$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\theta \\ x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases}$



$x_3 = cte, \rho = cte$

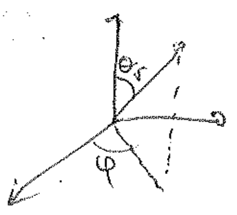
$x_3 = cte, \theta = cte$

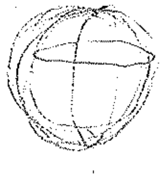
$\rho = cte, \theta = cte$

Esféricas

$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \phi = \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} \\ \theta = \arccos \dfrac{x_3}{r} \end{cases}$ $\quad (J = r^2 \sin\theta)$

$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\phi \\ x_2 = r \sin\theta \operatorname{sen}\phi \\ x_3 = r \cos\theta \end{cases}$





GEOMETRIA ANALÍTICA

E esp. afín asociado a V (esp. vect.)

Variedad lineal que pasa por $A \in E$ y tiene por dirección al subesp. vect. $W \subset V$, al subconjunto:

$F \subset E$ / $F = \{P \in E / \overline{AP} \in W\}$ (indep. de A) p. paso $\in W$

Su dimensión es dim W.

RECTAS

$A \in E_3$, $|v\rangle \in \mathbb{R}^3$: vector director de la recta

Recta que pasa por A con dirección $|v\rangle$ al conjunto de puntos $P \in E_3$ / $\overline{AP} = \lambda |v\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\triangleq$ $\overline{OP} = \overline{OA} + \lambda |v\rangle$

↳ varied lineal de dim 1 de E_3

---

dim = 0 $\Longleftrightarrow$ $W = \langle\{|0\rangle\}\rangle$ (un sólo punto)

dim = 1 $\longrightarrow$ Rectas P, $|w\rangle$

2 $\longrightarrow$ Planos P, $|w_1\rangle, |w_2\rangle$ l.i.

$(2 \Leftrightarrow n-1)$ m $\longrightarrow$ Varieds de dim m P, $\{|w_i\rangle\}_{i=1}^{m}$

$n-1$ $\longrightarrow$ Hiperplano P, w_i $i = 1, \ldots n-1$

$n = \dim E_n$

Paralelismo:

¡Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son proporcionales!

2 varieds lineales son paralelas si los v. dir. de una son combinación lineal de los de la otra. ($W \subset U$ ó $U \subset W$)

↳ su intersección es nula $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
o una está incluida en la otra $V_1 \subsetneq V_2$

Ecua de var. lineal finita:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1m} \\ \vdots & & \\ w_{n1} & \cdots & w_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

$n = \dim E_n$
$m = \dim VL$
w_i = comp. $|w\rangle$ en S.R. B.ON.

RECTA

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Vectorial/ Paramétricas}$$

$$\frac{x_1 - a_1}{r_1} = \frac{x_2 - a_2}{r_2} = \frac{x_3 - a_3}{r_3} \longrightarrow \text{Continuas}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} A_i x_i + A_4 = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} B_i x_i + B_4 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Implícitas (lineales)}$$

en 2D: 1 ecua.
$\downarrow$
$y = mx + n$

PLANO

$\pi = \{X \in E_3 \,/\, \overline{OX} = OP + \lambda|u\rangle + \mu|v\rangle\} \longrightarrow$ Vectorial

$x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i \longrightarrow$ Paramétricas
$i = 1, \ldots 3$

Plano que pasa por $A \in \mathbb{E}_3$ y es $\perp$ a $\vec{n}$
al cjto de puntos /

$\langle \vec{n} \,|\, \overrightarrow{AP} \rangle = 0 \longrightarrow$ Euclídea / Normal

$\downarrow$

$(b.o.n.)\ \sum (n_i x_i - n_i a_i) = 0 \longrightarrow$ Cartesiana / Implícita

$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0$ $\quad \| \quad \left| |u\rangle\ |v\rangle\ \overrightarrow{AP} \right| = 0 \cdots \langle p \times q | AP \rangle$ si ligado $\Rightarrow$ P. coplanarios

$\vec{n} = (A_1, A_2, A_3)$ $\quad$ ó $\quad |u \times v\rangle = |n\rangle$

Rectas intersección de planos:

$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i + a_4 = 0 \qquad \sum b_i x_i + b_4$

$\rightarrow rg \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$ $\qquad$ 3 incóg, 2 ecuds
S. C. I $\longrightarrow$ 1 g. libertad: RECTA

B

POSICIONES RELATIVAS

2 planos

Implíc: $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $M' = \left(M \,\middle|\, \begin{matrix} a_4 \\ b_4 \end{matrix}\right)$

1. $rg\,M = 1$, $rg\,M' = 2$ $\longrightarrow$ $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ $\xrightarrow{SI}$ paralelos $\left\{ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{a_4}{b_4} \right.$
   SCI$_2$ ecs. propdes. $= \frac{a_4}{b_4}$
2. $rg\,M = rg\,M' = 1$ $\longrightarrow$ $\Pi_1 = \Pi_2$
3. $rg\,M = 2$ $\longrightarrow$ Π_1 y Π_2 se cortan en una recta
   SCI$_1$ Lo Cramer; $x_3 = \lambda$

2 rectas

$A = \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \\ u_3 & -v_3 \end{pmatrix}$ $A' = \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{matrix}\right)$
$|u\rangle$ $|v\rangle$

r y S

1. $rg\,A = 2$, $rg\,A' = 3$ $Q \in r$, $P \in S$ $\longrightarrow$ se cruzan SI
2. $rg\,A = 2$, $rg\,A' = 2$ $\longrightarrow$ se cortan en un punto
   Cramer λ + sustituir S.C.D.
3. $rg\,A = 1$, $rg\,A' = 2$ $\longrightarrow$ son paralelas SI
4. $rg\,A = 1$, $rg\,A' = 1$ $\longrightarrow$ coinciden S.C.I

Ejs.

Recta y plano

Implícitas

$M = \begin{matrix} r \\ \\ \pi \end{matrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ $M' = \left(M \,\middle|\, \begin{matrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{matrix}\right)$

1. $rg\,M = 3$ $\longrightarrow$ r y π se cortan S.C.D
2. $rg\,M = 2$, $rg\,M' = 3$ $\longrightarrow$ r y π paralelos SI
3. $rg\,M = 2 = rg\,M'$ $\longrightarrow$ r contenida en π SCI

Producto vectorial E_3

$|u \times v\rangle$

1) $\perp u, v$ $\leftarrow$ 1er c. dir.
2) $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin \hat{\alpha}|$ mód.
3) Regla mano derecha

$$|u \times v\rangle = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} |e_1\rangle & |e_2\rangle & |e_3\rangle \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

BON

Propiedades

1) $|u\times v\rangle = 0 \Leftrightarrow |u\rangle, |v\rangle$ l. d.

2) $|u\times(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)\rangle = \lambda_1 |u\times v_1\rangle + \lambda_2 |u\times v_2\rangle$ Multilinealidad

3) $|u\times v\rangle = -|v\times u\rangle$ (antisimetría)

4) $|u\times(v\times w)\rangle = \langle u|w\rangle |v\rangle - \langle u|v\rangle |w\rangle$ 2x prod. vectorial

5) $\|u\times v\| \equiv$ Área paralelogramo

$|(u\times v)\times w\rangle$?

Producto mixto

$\langle u\times v|w\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$ B.o.n

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

1) Si algún vector es nulo $\rightarrow \langle \ \rangle = 0$

2) Sii los vectores l. d. $\Leftrightarrow \ = 0$

Multil. 3) $\langle u\times(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)|w\rangle = \lambda_1 \langle u\times v_1|w\rangle + \lambda_2 \langle u\times v_2|w\rangle$

Cíclic. 4) $\langle u\times v|w\rangle = v\,w\,u = w\,u\,v = -w\,v\,u = -\langle u\times w|v\rangle$

5) $\langle \ | \ \rangle \equiv$ Volumen paralelepípedo

ÁNGULOS

2 rectas

$$\cos(\widehat{r,s}) = \frac{|\langle r|s\rangle|}{\|r\|\,\|s\|}$$

2 planos

$$\cos(\pi,\pi') = |\cos(\widehat{n,n'})| = \frac{\langle n|n'\rangle}{\|n\|\cdot\|n'\|}$$

Plano y recta

$$\sin(\widehat{r,\pi}) = |\cos(\widehat{|v\rangle,|n\rangle})|$$

$\beta \qquad \alpha$

DISTANCIAS

Punto - recta

$$d = \frac{\|\overline{PQ}\times|v\rangle\|}{\|v\|}$$

Punto - plano

$$d = \left|\frac{\langle PQ|n\rangle}{\|n\|}\right|$$

2 rectas

$$d = \frac{|\langle PQ|r\times s\rangle|}{\|r\times s\|}$$ (cruzan)

Recta - plano

≡ punto - plano si → (paralelos)

$$d = \frac{|\langle PQ|n\rangle|}{\|n\|}$$