

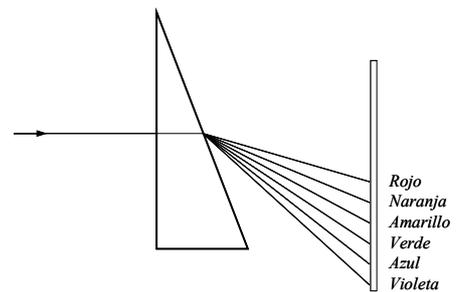
## CUESTIONES PARA LAS EVALUACIONES INDIVIDUALES (TEMA 5)

36.- Demostrad que  $n^2 = 1 + \chi$  utilizando la ecuación de ondas. Demostrad también que la anterior expresión se obtiene a partir de la ecuación de Clausius-Mosotti-Lorenz-Lorentz cuando  $\chi$  es pequeña.

37.- Obtened la solución del modelo de Lorentz que incluye disipación. Describid razonadamente las principales características de las soluciones homogénea y particular y argüid porqué a largo plazo se puede ignorar la solución homogénea.

38.- Razonad cómo se percibe el color del cielo y la polarización de la luz del cielo, en las diferentes direcciones (esto es, mirando hacia el Sol y mirando en direcciones distintas de la del Sol), cuando a) es mediodía y b) amanece o atardece.

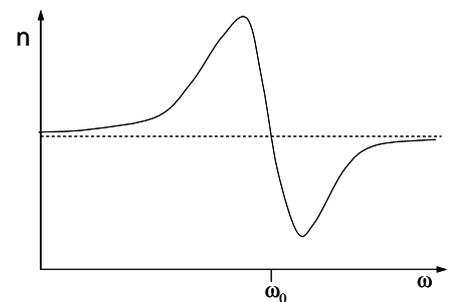
39.- La figura adjunta muestra la dispersión que se produce cuando se ilumina un prisma de vidrio óptico con un haz paralelo de luz blanca. Describid, justificando la respuesta, el orden y la desviación de las diferentes longitudes de onda (colores) que forman el espectro cuando el material con el que está hecho el prisma se sustituye por un medio transparente dispersivo (considérese diluido) con una frecuencia de resonancia en el visible, que se corresponde con la longitud de onda de 500 nm (verde). Considérese que la banda de absorción es muy estrecha y solo afecta al verde.



40.- Sobre la superficie plana que separa el vacío de un medio dieléctrico, homogéneo e isotrópico, inciden con un ángulo  $\epsilon$ , dos ondas planas monocromáticas de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  con  $\omega_1 < \omega_2$ . Los ángulos de refracción,  $\epsilon_1'$  y  $\epsilon_2'$ , de las ondas transmitidas, correspondientes respectivamente a  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , satisfacen la relación  $\epsilon_1' < \epsilon_2'$ . Suponiendo que el medio dieléctrico posee una única frecuencia de resonancia,  $\omega_0$ , alejada de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , determinad con ayuda de la gráfica adjunta, cuál de las tres relaciones siguientes se verifica:

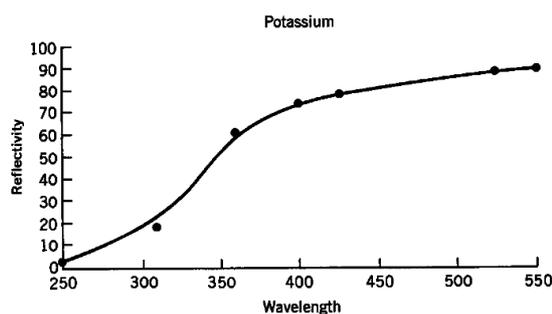
- a)  $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$
- b)  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$
- c)  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$

Justificad la respuesta.



41.- Basándose en la difusión Rayleigh, razonad de qué color se vería el cielo en un planeta a) sin atmósfera; b) con una atmósfera más tenue que la de la Tierra; c) con una atmósfera más densa que la de la Tierra.

42.- La figura muestra el factor de reflexión experimental del potasio en función de la longitud de onda. ¿Cuál es el valor aproximado de la frecuencia de plasma?



43.- El factor de reflexión en incidencia normal de un metal es de un 80% y el coeficiente de absorción por centímetro vale  $50.000 \text{ cm}^{-1}$ . Determinad las partes real e imaginaria del índice de refracción para la longitud de onda de 500 nm. (Sugerencias: (i) sustituid en la ecuación de una onda electromagnética plana monocromática  $n = n_{\text{re}} - in_{\text{im}}$ ; (ii) el factor de reflexión para incidencia normal vale  $R = |(n - 1)/(n + 1)|^2$ ).

44.- Considerad el modelo generalizado de Lorentz para un medio no centrosimétrico y suponed que sobre este medio inciden dos ondas monocromáticas de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Resolved perturbativamente la ecuación y obtened una expresión para el momento dipolar de una molécula. Interpretad físicamente el significado de los diferentes términos de la solución.

36

Questões Óptica

Fernando Hveso Bourdeaz

$$n^2 = 1 + \chi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ec. ondas} \quad a) \\ \text{Clausius } \chi \ll 1 \quad b) \end{array} \right.$$

$$a) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \partial_t \vec{D}; \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \partial_t \partial_t \vec{D} = -\mu_0 \partial_t^2 \vec{D} = -\mu_0 \partial_t^2 (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = -\mu_0 \partial_t^2 \vec{P}$$

Suponhamos  $\vec{E} = \hat{e} E_w e^{-i(\omega t - kz)} + c.c.$  polar. plane real  
 induce  $\vec{P} \propto \vec{E} / P_w = E_w \epsilon_0 \chi(\omega)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \dots = k^2 \hat{e} \quad \left| \begin{array}{l} i \quad k \\ \dots \end{array} \right| \checkmark \quad \hat{e} = (\cos k, \sin k, 0)$$

Solo contribuye  $\partial_z^2$   
 $1 \cdot \vec{E} / \|\vec{E}\|$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \chi(\omega) (-\omega^2)$$

$$\hookrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi) \quad \omega = v_{ph} = \frac{c}{n} k$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi) \Rightarrow \underline{n^2 = 1 + \chi}$$

b) Clausius-Mosotti-Lorentz  $\chi \ll 1$

$$\frac{\chi(\omega)}{3} = \frac{n^2(\omega) - 1}{n^2(\omega) + 2} = 1 - \frac{3}{n^2 + 2}$$

$$\hookrightarrow \frac{3}{n^2 + 2} = 1 - \chi/3 \rightarrow n^2 + 2 = \frac{3}{1 - \chi/3} \rightarrow n^2 = \frac{3}{1 - \chi/3} - 2$$

$$\frac{\chi}{3} \ll 1 \rightarrow \frac{1}{1 - \chi} \approx 1 + \chi$$

$$\hookrightarrow \underline{n^2 \approx 3(1 + \chi/3) - 2 = 1 + \chi}$$

(37)  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\hat{e} \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t} + c.c.$

Homogénea:

Quitamos notación vectorial para simplificar

$\ddot{r} + 2\gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = 0$

Ensayamos  $r = A \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-\beta t} + c.c.$  para cada componente x, y, z de r.

$e^{i\omega t} [(i\omega - \beta)^2 + 2\gamma(i\omega - \beta) + \omega_0^2] + e^{-i\omega t} [(-i\omega - \beta)^2 + 2\gamma(-i\omega - \beta) + \omega_0^2] = 0$

$= e^{i\omega t} [-\omega^2 + \beta^2 - 2\beta i\omega + 2\gamma i\omega - 2\gamma\beta + \omega_0^2] + e^{-i\omega t} [-\omega^2 + \beta^2 + 2\beta i\omega - 2\gamma i\omega + 2\gamma\beta + \omega_0^2] = 0$

$\rightarrow (\beta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\beta - \omega^2)(e^+ + e^-) + i\omega(2\gamma - 2\beta)(e^+ - e^-) = 0$

$\downarrow \gamma = \beta$

$\hookrightarrow \gamma = \beta$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}$

$r_h = 2A \cos(\omega t + \delta) \cdot e^{-\gamma t}$

cuando  $t \gg \frac{1}{\gamma} \rightarrow r_h \approx 0$  para  $r_p \approx cte$

Particular:

$r_p = F \cdot e^{i\omega t} + E e^{-i\omega t}$

para la componente  $\vec{r} \cdot \hat{e}$   
 $\omega$  fija,  $E$  será  $F^*$  porque término inhomogéneo es real

$e^{i\omega t} F(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) + E(-\omega^2 - 2\gamma i\omega + \omega_0^2) e^{-i\omega t} = -\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t} + c.c.$

$\hookrightarrow E = -\frac{e \frac{E_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma i\omega} = F^*, F = -\frac{e \frac{E_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}$

$r_p = \frac{-\frac{e E_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega} + c.c.$

Solución homogénea

• Normal  $\rightarrow r_h \sim e^{-\gamma t}$   $\zeta = \frac{1}{2\gamma}$

• Amortiguamiento crítico  $\rightarrow \gamma = \omega_0$  } no oscila  $\omega = \omega_0 \rightarrow$  rapidez a 0

• Sobreamortiguamiento  $\rightarrow \gamma > \omega_0$  }  $\omega \neq \omega_0 \rightarrow$  atenua  $e^{-\kappa t}$  exp. real

• si  $E_0 = 0 \rightarrow$  sólo radial en el transitorio

$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{r} \approx \vec{r}_p$

x  $\vec{r}_p(\omega = \omega_0)$  no diverge si  $\gamma \neq 0$

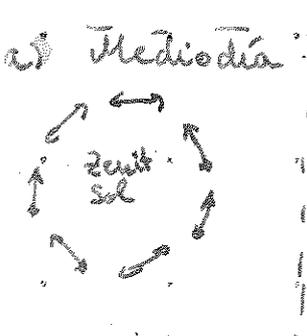
x  $\vec{p} = -e \cdot \vec{r}_p$

2. factores que contribuyen en mismo sentido:

- efecto prisma
- difusión Rayleigh  $\sigma(\omega) \sim \omega^4$

→ la luz que necesite una mayor difusión para llegar a nuestro ojo será de  $\omega$  mayor, pues  $\sigma$  (secc. eficaz) es mayor.

Mirando:

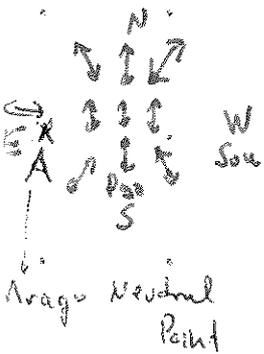


Al sol  $\hookrightarrow$  vemos lo menos dispersado  
 Sol  $\rightarrow$  blanca / amarillo (todas  $\lambda$ ) (pico sensibilidad ojo)  
 $\hookrightarrow$  sin difusión, luz natural  
 Cerca Sol  $\rightarrow$  enseguida azul  
 sin polariza apenas.

lejos del sol  $\rightarrow$  vemos lo más dispersado

Azul ( $> \omega$ )  
 Parcialmente polarizado  
 $P \sim 90$   
 // horizonte

b) Amanece / Atardece



Sol  $\rightarrow$  Rojo, + capa atmósfera + espesor  
 $\hookrightarrow$  el  $\phi$  - se dispersa (menor  $\omega$ )  
 Anaranjado

Azul oscuro - Violeta (... Negro)

$> \omega, > \sigma$   
 Parcialmente polarizado  
 $P \sim 90$

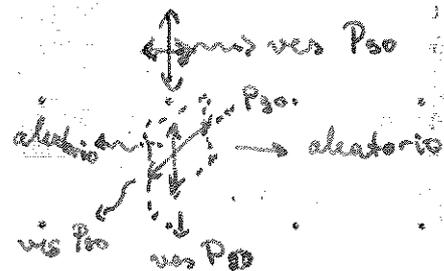
También puede influir temperatura directamente  $\rightarrow$  sin polariza (luz natural)

Absorción  $\rightarrow$  también contribuye  
 $I_m(\omega) = N \epsilon^2 \gamma$

incidente natural  $\rightarrow$  difundida =  $\phi$  aleatoria  
 $\hookrightarrow$  recto .. elatorio  
 $\hookrightarrow \perp x$   
 $\hookrightarrow \perp y$   
 Indirecta  $\rightarrow$  no contribuye si

$$I(\omega) \propto \frac{1}{\omega^4} \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega} \right)^2 \gamma^2$$

luz difundida en todo  $\hookrightarrow$  aleatorio  
 en  $90^\circ \rightarrow$  polarizada



Además, efecto RANDOM, 3D, múltiples choques;

Sol Zenit  $\rightarrow$  en horizonte pol. horizontal

Sunset West  $\rightarrow$  máx. polariza meridiano

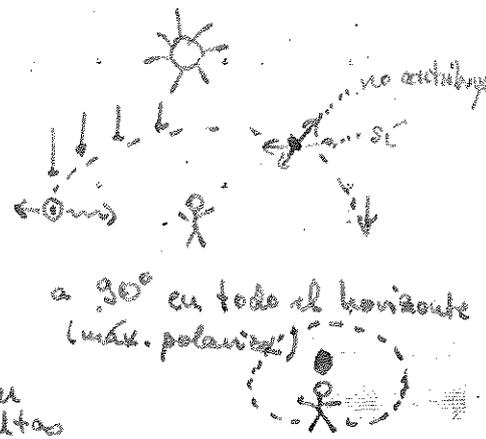
20-30%  $\rightarrow$  en horizonte vertical norte-sur  
 $\rightarrow$  en Zenit máximo 75%

Ventilador, luz sol  $\times$  luz difundida  
 Polariza pasa de vertical a horizontal desde horizonte a zenit  $\rightarrow$  Arago Neutral Point

$$\vec{E} \propto (\hat{i} \cdot \hat{u}_R) \hat{u}_R - \hat{i} \rightarrow \text{Polariza luz direccional}$$

$\hat{i} \rightarrow$  oscila plano campo

Absorción  $\rightarrow$  se absorben + las altas



a  $90^\circ$  en todo el horizonte (máx. polariza)

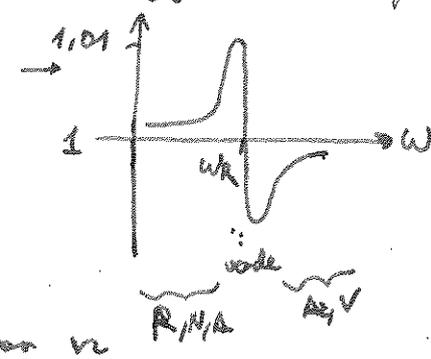
39

Si  $n$  es mayor que 1, a  $n > 1$ ,  $\rightarrow$  ángulo de incidencia  
Si  $n$  es menor que 1, a  $n < 1$ ,  $\rightarrow$  ángulo de refracción

$\lambda_{\text{verde}} = 500 \text{ nm}$  (verde)

dispersión anómala

↓  
El verde coincide con banda de absorción  
lo no se transmite

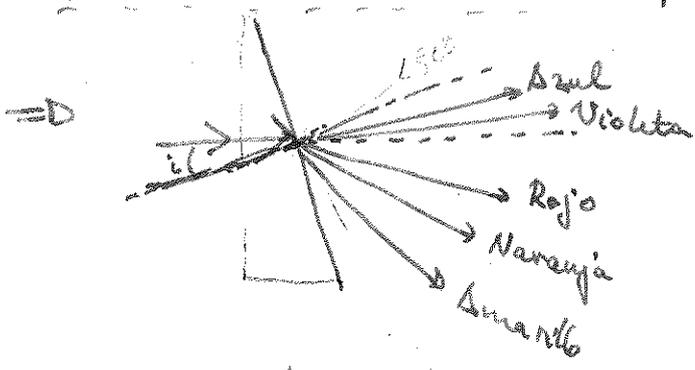


ordenamos colores por  $n$

$1 < n(\text{rojo}) < n(\text{naranja}) < n(\text{amarillo})$ , pues  $\omega < \omega_0$  y  $a > \omega$ ,  $\rightarrow n$

Si banda estrecha...  $\rightarrow$

$n(\text{azul}) < n(\text{viol}) < 1$ , pues  $\omega > \omega_0$  (pasada la banda),  $a > \omega$ ,  $\rightarrow n$



$n_2 \sin i = n_1 \sin r$

si  $n > 1 \rightarrow r > i \rightarrow n_1 > n_2$   
si  $n < 1 \rightarrow r < i, r > 0 \rightarrow n_1 < n_2$

Verde  $\rightarrow$

¿ límite ?

40

b)  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$

$n(\omega_1) > n(\omega_0) > n(\omega_2)$

$n(\omega_1) > n(\omega_2)$

$\sin \epsilon = n \sin \epsilon_i' \rightarrow n > 1, \epsilon_i' <$

Lo  $\epsilon_i' < \epsilon_i'$  ✓

41

$\sigma(\omega) \propto \omega^4$  si hay átomos suficientes

a) Negro (no hay átomos en los que se difunda)

b) Violeta

c) Más verde... incluso blanco (todas  $\lambda$ s difundidas con múltiples "rebotes")

why  $\omega_0$

42)  $\omega_p \rightarrow$  ponto de inflexão  
 $\lambda_p \sim 350 \text{ nm}$

$$\omega_p = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

43)  $R(\epsilon=0) = 0,8$ ,  $\beta = 50.000 \text{ cm}^{-1}$

$\text{Re}(u)$ ,  $\text{Im}(u)$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$

i)  $n = n_r - i k$

$$\vec{E} = \hat{e} E_0 e^{+i(\omega t - k z)} = \hat{e} E_0 e^{+i(\omega t - \frac{\omega}{c} z)}$$

$$= \hat{e} E_0 e^{+i(\omega t)} \cdot e^{-i \frac{\omega}{c} \text{Re}(u) z} e^{+i(i) \frac{\omega}{c} z \cdot \text{Im}(u)}$$

$$= \hat{e} E_0 e^{-i(\omega t - \frac{\omega}{c} \text{Re}(u) z)} \cdot e^{-\frac{\omega}{c} \text{Im}(u) z}$$

$\beta$

$$\text{Im}(u) = \frac{\beta c}{\omega} = \frac{\beta \lambda_0}{2\pi} \approx 0,398$$

ii)  $R = 0,8 = \left| \frac{u-1}{u+1} \right|^2 = \frac{(\text{Re}(u)-1)^2 + \text{Im}^2(u)}{[(\text{Re}(u)+1)^2 + \text{Im}^2(u)]} = 1 - \frac{4 \text{Re}(u)}{(\dots)}$

$$\frac{0,2}{4} = \frac{\text{Re}(u)}{(\dots)} \Leftrightarrow 20 \text{Re}(u) = \text{Re}(u)^2 + 2 \text{Re}(u) + 1 + \text{Im}^2 u$$

$\text{Re}(u) \equiv x$

$$x^2 - 18x + (1 + \text{Im}^2 u) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4(1 + \text{Im}^2 u)}}{2} = \frac{18 \pm 17,87}{2}$$

$\text{Re}(u) \approx 18$  (des cântamos, sem sentido físico)  
 $\text{Re}(u) \approx 0,65$  em experiências com laser

$$n = 0,65 - 0,398i$$

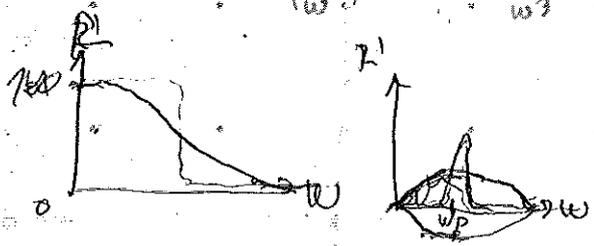
$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 + i 2\gamma \frac{\omega_p^2}{\omega^3}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2} \omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2 + z}$$

$$z^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)^2 + \left(2\gamma \frac{\omega_p^2}{\omega}\right)^2$$

$$k_{im} = \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega^3 \text{Re}(u)}$$

caso  $\omega \gg \omega_p \rightarrow R \rightarrow 1$



$$R(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2 + \omega \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + (2\gamma \frac{\omega_p^2}{\omega})^2}}{\omega^2 + \omega \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 + (2\gamma \frac{\omega_p^2}{\omega})^2}}$$

$$u_{nc} = \frac{1}{2!} k_0 r^2 + \frac{1}{3!} k_2 r^3$$

$$\ddot{r} + 2\gamma \dot{r} + \omega_0^2 r + \epsilon a_1 r^2 = -\frac{e}{m} E \omega e^{i\omega t} + c.c.$$

$$r(t, c) = r_0(t) + \epsilon r_1(t)$$

$$r_0 \text{ conocida} = -\frac{e}{m} \left[ \frac{E \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \underbrace{D(\omega)}_{F\omega} e^{-i\omega t} + c.c. \right]$$

No se trata aquí la solución homogénea, por anularse para un tiempo grande ( $\gamma \neq 0$ )!

$$\ddot{r}_0 + 2\gamma \dot{r}_0 + \omega_0^2 r_0 \neq \epsilon (\ddot{r}_1 + 2\gamma \dot{r}_1 + \omega_0^2 r_1)$$

$$\epsilon a_1 (r_0^2 + \epsilon^2 r_1^2 + 2\epsilon r_0 r_1) = F\omega + c.c.$$

a orden  $\epsilon^0 \rightarrow$  solución conocida

a orden  $\epsilon$ :

$$\ddot{r}_1 + 2\gamma \dot{r}_1 + \omega_0^2 r_1 = -a_1 r_0^2 = -\underbrace{a_1 \frac{e^2}{m^2} E \omega^2}_{K} \left[ \frac{e^{-2i\omega t}}{D^2} + \frac{e^{2i\omega t}}{D^{*2}} + \frac{2}{|D|^2} \right]$$

$$r_{1h} \hat{=} r_{0h}$$

$$r_{1p} = \frac{K}{D^2} \left( \frac{e^{-2i\omega t}}{D(2\omega)} \right) + \frac{K}{D^{*2}} \left( \frac{e^{2i\omega t}}{D^*(2\omega)} \right) + \frac{2K}{|D|^2} \frac{1}{\omega^2}$$

- $\rightarrow$  oscilación a frecuencias  $\omega, 2\omega$ ,  $\rightarrow$  genera segundo armónico  $\rightarrow$  relevante
- $\rightarrow$  no simultáneamente resonantes  $\rightarrow$  rectificad óptica  $\rightarrow$  poco "
- $\rightarrow$  proceso modifica  $\omega$
- $\rightarrow$  Efecto Kerr óptico en medios no centrosimétricos,  $\chi^{(2)}(\omega)$  no lineal  $\propto |E\omega|^2$

Si ahora hacemos incidir dos ondas monocromáticas de frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (ondas  $\alpha, \beta$ ):

$$\ddot{r} + 2\gamma \dot{r} + \omega_0^2 r + \epsilon a_1 r^2 = -\frac{e}{m} (E\omega_1 e^{i\omega_1 t} + E\omega_2 e^{i\omega_2 t} + c.c.)$$

$$r(t, c) = r_0(t) + \epsilon r_1(t)$$

Cuando  $\epsilon = 0$ , la ec. dif. es lineal y  $r_0 = r_{0\alpha} + r_{0\beta}$ ,

donde  $r_{0i}$  es la solución conocida  $-\frac{e}{m} \frac{E\omega_i e^{-i\omega_i t}}{D(\omega_i)}$

Si sustituimos ahora  $r_0 + \epsilon r_1 = r_{0\alpha} + r_{0\beta} + \epsilon r_1$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_{0\alpha} + 2\gamma \dot{r}_{0\alpha} + \omega_0^2 r_{0\alpha} \\ + \ddot{r}_{0\beta} + 2\gamma \dot{r}_{0\beta} + \omega_0^2 r_{0\beta} \end{aligned} \right\} \text{soluciones} = \begin{cases} -\frac{e}{m} E\omega_1 e^{-i\omega_1 t} + c.c. \\ -\frac{e}{m} E\omega_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c. \end{cases}$$

$$+ \epsilon (\ddot{r}_1 + 2\gamma \dot{r}_1 + \omega_0^2 r_1)$$

$$+ a_1 \epsilon (r_0^2 + 2r_0 \epsilon r_1 + r_1^2 \epsilon^2)$$

desprecias

Por tanto, para sacar  $r$ , necesitamos  $r_1$ , que surge de resolver:

(orden  $\epsilon$ ):

$$\ddot{r}_1 + 2\delta \dot{r}_1 + \omega_0^2 r_1 = -a_1 r_0^2 = -a_1 (r_{0\alpha}^2 + r_{0\beta}^2 + 2r_{0\alpha} r_{0\beta})$$

$$= \frac{a_1 \epsilon^2}{m^2} \left( \frac{E_1 e^{-i\omega_1 t}}{D(\omega_1)} + \frac{E_2 e^{-i\omega_2 t}}{D(\omega_2)} + c.c. \right)^2$$

$$E_2 = E_{\omega_2} \in \mathbb{R}$$

$$E_1 = E_{\omega_1} \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{a_1 \epsilon^2}{m^2} \left( \underbrace{\alpha + \beta}_2 + \underbrace{\alpha^* + \beta^*}_{2^*} \right)^2$$

$$\vdots D_1 = D(\omega_1)$$

$$\vdots D_2 = D(\omega_2)$$

$$\hookrightarrow (z + z^*)^2 = z^2 + z^{*2} + 2zz^* = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^{*2} + \beta^{*2} + 2\alpha^*\beta^* + 2\alpha\alpha^* + 2\beta\beta^* + 2\alpha\beta^* + 2\alpha^*\beta$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + c.c.) + 2\alpha\alpha^* + 2\beta\beta^*$$

$$= \frac{a_1 \epsilon^2}{m^2} \left( \frac{E_1^2 e^{-2i\omega_1 t}}{D_1^2} + \frac{E_2^2 e^{-2i\omega_2 t}}{D_2^2} + \frac{2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}}{D_1 D_2} + \frac{2E_1 E_2 e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}}{D_1^* D_2} + c.c. \right)$$

$$+ \frac{2a_1 \epsilon^2}{m^2} \left( \frac{E_1^2}{|D_1|^2} + \frac{E_2^2}{|D_2|^2} \right) f(\omega)$$

$\rightarrow r_p$  será las suma de soluciones para cada uno de los términos inhomogéneos, siguiendo la estructura del de una sola onda  $\omega$ .

Para un término inhomogéneo  $K(\omega) \cdot e^{-i\omega t} + c.c.$ , la solución sería  $r_p = \frac{K(\omega) \cdot e^{-i\omega t}}{D(\omega)} + c.c.$

El término constante inhomogéneo  $C(\omega)$  se puede considerar como  $\frac{C(\omega) \cdot e^{-i0t} + c.c.}{2} = \text{solución } r_p = \frac{C(\omega) \cdot 1}{2 \cdot D(0)} + c.c.$

Por tanto, la solución será  $r = r_{0\alpha} + r_{0\beta} + \frac{\epsilon a_1 \epsilon^2}{m^2} \tilde{r}_1 = \frac{C(\omega) \epsilon^{1/2}}{\omega_0^2}$

$$\tilde{r}_1 = \frac{E_1^2}{D_1^2} \frac{e^{-2i\omega_1 t}}{D(2\omega_1)} + \frac{E_2^2}{D_2^2} \frac{e^{-2i\omega_2 t}}{D(2\omega_2)} + \frac{2E_1 E_2}{D_1 D_2} \frac{e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}}{D(\omega_1 + \omega_2)} + \frac{2E_1 E_2}{D_1^* D_2} \frac{e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}}{D(\omega_2 - \omega_1)}$$

$$+ \left( \frac{E_1^2}{|D_1|^2} + \frac{E_2^2}{|D_2|^2} \right) \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{D(0)} + c.c.$$

- $\rightarrow$  oscilación a  $\frac{2\omega_1, \omega_0^2}{2\omega_2} \rightarrow$  genera 2º armónico !!
- $\rightarrow$  " a  $(\omega_1 + \omega_2), (\omega_1 - \omega_2) \rightarrow$  frecuencias suma y resta } no simultáneamente resonantes
- $\rightarrow$  " a  $0 \rightarrow$  rectificación óptica
- $\rightarrow$  + solución no perturbada  $\omega_1, \omega_2$  } oscilador óptico paramétrico  
 $\hookrightarrow$  luz coherente

Polariza inducida:

$$P_w = -Ne\gamma(\epsilon) = \epsilon_0 K_{ef} E_w$$

Hay efectos interesantes para valores particulares de  $w_1$  y  $w_2$ .

$$\text{Para } w_1 = \frac{w_2}{2} \quad \text{y} \quad E_{w_1} = E_{w_2} = E_w$$

↳ dependencia: del índice de refracción efectivo con la intensidad del campo incidente, análogo al efecto Kerr óptico, pero con una potencia menos al estar en medios no centrosimétricos (nos quedamos a orden 3).

$$\text{↳ en } U_{nc} = \dots + \frac{1}{3!} K_2 r^3 \leftrightarrow U_c = \dots + \frac{1}{4!} K_3 r^4$$

## CUESTIONES PARA LAS EVALUACIONES INDIVIDUALES (TEMA 6)

45.- Consideremos un dispositivo de Young en el que la separación entre las rendijas es de 1 mm. La pantalla de observación está situada a 1 m de distancia y el plano de la fuente a 0'5 m del plano de las rendijas respectivamente. Se iluminan las rendijas con una fuente puntual monocromática (de longitud de onda  $\lambda=500\text{nm}$ ), que se encuentra: a) en eje; b) a 0'25 mm por encima del eje; c) a 0'375 mm por debajo del eje. ¿Cuál es la posición de la franja de orden cero en cada caso? Obténgase una expresión para el patrón interferencial resultante y calcular su visibilidad.

46.- Supongamos una experiencia de la doble rendija de Young, en la que la rendija fuente está iluminada por una lámpara espectral, que proporciona un patrón interferencial en una pantalla. a) ¿Cómo se modifica este patrón si se elimina la rendija fuente?. b) Si ahora cada una de las dos rendijas se ilumina con una lámpara espectral (idéntica para cada rendija), ¿cómo se modifica el patrón interferencial?

47.- Consideremos una experiencia de Young en la que las rendijas se iluminan con una fuente lineal, de anchura  $h$ , situada a una distancia  $d$  del plano de las rendijas. Razónese la veracidad o no de las siguientes afirmaciones: a) la visibilidad,  $V$ , del patrón interferencial crece al disminuir el tamaño angular de la fuente; b) la interfranja decrece al aumentar el tamaño angular de la fuente; c) la visibilidad  $V$  crece al aumentar la longitud de onda; d) la interfranja decrece al aumentar la longitud de onda.

$$V = \frac{\text{sen}(\pi 2ah / \lambda d)}{(\pi 2ah / \lambda d)}$$

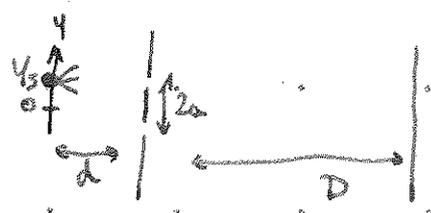
48.- Supongamos un dispositivo de Young en el que las dos rendijas, separadas una distancia  $2a$ , se iluminan simultáneamente con dos fuentes puntuales (de longitud de onda  $\lambda$ ) incoherentes entre sí. La dos fuentes, situadas simétricamente en un plano paralelo al de las dos rendijas, están separadas una distancia  $2x'$ . La pantalla de observación está situada a una distancia  $D$  del plano de las rendijas y la distancia desde este plano al que contiene a las dos fuentes es  $d$ . a) Determinéense qué valores de  $x'$  proporcionan una distribución de intensidad uniforme sobre la pantalla de observación. b) Supuesto que  $d=0'5\text{m}$ ,  $D=1\text{m}$ ,  $\lambda=500\text{nm}$  y  $2a=1\text{mm}$ , ¿cuál es el valor de  $x'$  más pequeño que cumple las condición anterior?

49.- Considérese el experimento de Young con una fuente puntual que ilumina las dos aperturas circulares. Demuéstrese que el grado de coherencia  $g(\tau)$  para luz monocromática de frecuencia  $\omega$  vale la unidad.

50.- Considérese el experimento de Young con una fuente extensa de anchura  $b$ . Calcúlense los valores de la anchura de la fuente para los cuales las franjas interferenciales desaparecen.

53 (L65)

$2a = 1 \text{ mm}$   
 $D = 1 \text{ m}$   
 $d = 0,5 \text{ m}$   
 $\lambda = 500 \text{ nm}$



$$I(y) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left[ \frac{4\pi a}{\lambda D} \left( y + y_0 \frac{D}{a} \right) \right] \right)$$

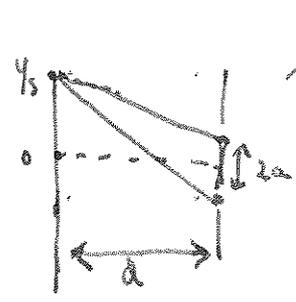
Franja de orden 0:  $y_0 + y_s \frac{D}{a} = 0$   
 (Máximo "central" desplazado)  $\rightarrow y_0 = -y_s \frac{D}{a}$

$V = 1 \rightarrow I_{\text{mín}} = 0$  cuando  $\cos \theta = -1$ ,  $\theta = \pi(2m+1)$ ,  $V = \frac{I_{\text{max}} - 0}{I_{\text{max}} + 0} = 1$

$y_s (\text{mm})$	$V$	$y_0 (\text{mm})$	$I(y)/I_0$
a) 0	1	0	$2(1 + \cos(12,6y)) \times 10^3$
b) 0,25	1	-0,15	$2(1 + \cos(12,6(y - y_0))) \times 10^3 = 4000$
c) 0,375	1	0,75	"

$f(y)$   
 $4000 \pi \frac{1}{4} \cdot 10^3 \rightarrow 2\pi \rightarrow$  complementario  
 $4000 \dots = -3\pi$   
 complementario

Justificación de  $I(y)$ :



Young "inverso"

$$\Delta L = ((y_s + a)^2 + d^2)^{1/2} - ((y_s - a)^2 + d^2)^{1/2}$$

$a, y_s \ll d$   
 $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

$$\approx d \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y_s + a}{d} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{y_s - a}{d} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2d} (y_s^2 + a^2 + 2ay_s - y_s^2 - a^2 - (-2ay_s)) = \frac{2ay_s}{d}$$

Que se añade al desfase clásico de Young  $2a \frac{y}{D} = \Delta L$

$$\rightarrow \frac{I}{I_0} = 2 \left( 1 + \cos \left( k \cdot 2a \left( \frac{y}{D} + \frac{y_s}{a} \right) \right) \right) = 2 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi a}{\lambda D} \left( y + y_0 \frac{D}{a} \right) \right) \right)$$

54 (46)

a) Eliminamos RF

→ disminuye visibilidad, si muy ancha, pierdes simetría  
si lámpara ancha → no hay interferencias.

$\text{sinc } \Omega$

b) Lámparas independientes  $I = I_1 + I_2 = 2I_0$

sin int.

↳ desfases sin relación, aleatorios  $\delta$   
↳ No se observan interfe

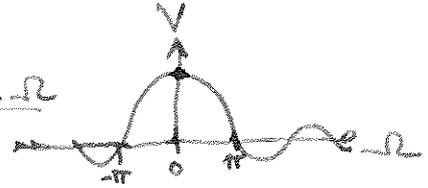
ppo. incoherente

↳ no es división de un frente de ondas coherente

55 (47)

$$V = \frac{\text{sen } 2\pi \frac{ah}{\lambda d}}{2\pi \frac{ah}{\lambda d}}$$

$$\frac{2\pi ah}{\lambda d} = \Omega \rightarrow V = \text{sinc } \Omega$$



- $\Omega \propto a$
- $\Omega \propto h$
- $\Omega \propto \frac{1}{d}$
- $\Omega \propto \frac{1}{\lambda}$

Tamaño angular fuente:  $\alpha \propto \frac{h}{d}$

↓  
 $a \propto \alpha$

Interfranja:  $i = \frac{\lambda D}{2a}$ ,  $i \propto \lambda$

a)  $\alpha < \rightarrow \Omega < \rightarrow V > \text{ ó } <$  dependiendo de la zona

NO

b) si  $\frac{h}{d} \sim \alpha$  cambia  $\rightarrow i$  constante

NO

c)  $\lambda > \rightarrow \Omega < \rightarrow V > \text{ ó } <$  dependiendo " " "

NO

d)  $\lambda > \rightarrow i > \rightarrow$  al contrario

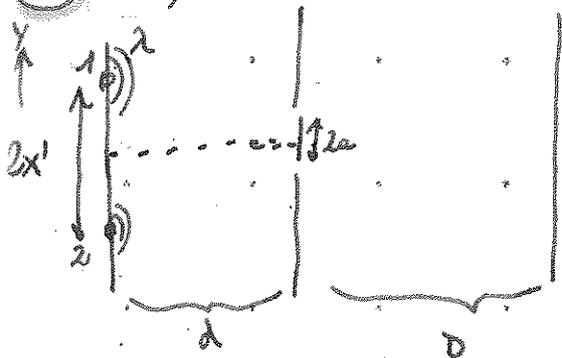
NO

En condiciones deseadas  $\Omega \sim 0, \ll 1$

↳  $\alpha < \rightarrow \Omega < \rightarrow V >$  a) ✓

↳  $\lambda > \rightarrow \Omega < \rightarrow V >$  c) ✓

56 (48)



$$I_{10} \approx I_{20}$$

Incoherentes

↓  
 $\delta$  aleatorio

$$\langle \cos \delta \rangle = 0$$

↓  
 suma incoherente

↳ suma de intensidades (superposición)

↳ exp. Young con 2 fuente desplazada

$$I(y) = I_1(y) + I_2(y)$$

$$\frac{I}{I_0}(y) = 2 \left( 1 + \cos \left[ \frac{4\pi a}{\lambda D} \left( y + \frac{x'D}{a} \right) \right] \right) + 2 \left( 1 + \cos \left[ \frac{4\pi a}{\lambda D} \left( y - \frac{x'D}{a} \right) \right] \right)$$

$$\rightarrow \frac{4\pi a y}{\lambda D} = \theta, \quad \frac{4\pi a}{\lambda D} \cdot \frac{x'D}{a} = \alpha$$

$$= 2 \left( 2 + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha) \right)$$

$$= 2 \left( 2 + \cos \theta \cos \alpha + \cos \theta \cos(-\alpha) - \sin \theta \sin \alpha - \sin \theta \sin(-\alpha) \right)$$

$$= 2 \left( 2 + 2 \cos \theta \cos \alpha \right) = 4 \left( 1 + \cos \theta \cos \alpha \right)$$

$$= 4 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi a}{\lambda D} y \right) \cos \left( \frac{4\pi a x'}{\lambda a} \right) \right)$$

a)  $x' / I = \text{cte}$

b)  $\cos \frac{4\pi a x'}{\lambda a} = 0 \rightarrow \frac{I}{I_0} = 4 \checkmark$

↳  $\frac{4\pi a x'}{\lambda D} = (2m+1) \frac{\pi}{2} \rightarrow x' = \frac{\lambda d}{8a} (2m+1)$

b)  $m=0 \rightarrow$  valor menor de  $x'$

$$x' = \frac{\lambda d}{8a} = 62,5 \mu\text{m}$$

$$d = 0,5 \text{ m}$$

$$D = 1 \text{ m}$$

$$\lambda = 500 \text{ nm}$$

$$2a = 1 \text{ mm}$$

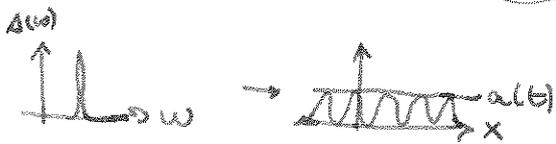
(57) (49)

$$g(z) = \frac{G(z_p)}{G(0)}$$

$$z_p = \frac{r_1 - r_2}{c}$$

$$G(z_p) = \langle a(t) \cdot a^*(t + z_p) \rangle \rightarrow \text{auto correla}$$

Si la luz es monocromática, la transf. Fourier del espacio de frecuencias al de posiciones da la envolvente del pulso. La . J.F de la  $\delta$  de Dirac es una envolvente constante,  $a(t) = K = a(t + z_p) \rightarrow z_c = \infty$  (tiempo de coherencia)



$$\hookrightarrow G(z_p) = \langle a(t) \cdot a^*(t + z_p) \rangle = K \cdot K^* = G(0)$$

$$\hookrightarrow g(z) = \frac{G(z_p)}{G(0)} = 1$$

(58) (50)

anchura  $b$

$$V = \text{sinc } \Omega \rightarrow \Omega = \frac{K \cdot a \cdot b}{d}$$

↓  
franjas desaparecen si  $V=0 \rightarrow \text{sinc } \Omega = 0 \rightarrow \Omega = m\pi; m=1,2,\dots$

$$\hookrightarrow \frac{Kab}{d} = m\pi \rightarrow b = \frac{m \lambda d}{2a}$$

## CUESTIONES PARA LAS EVALUACIONES INDIVIDUALES (TEMA 7)

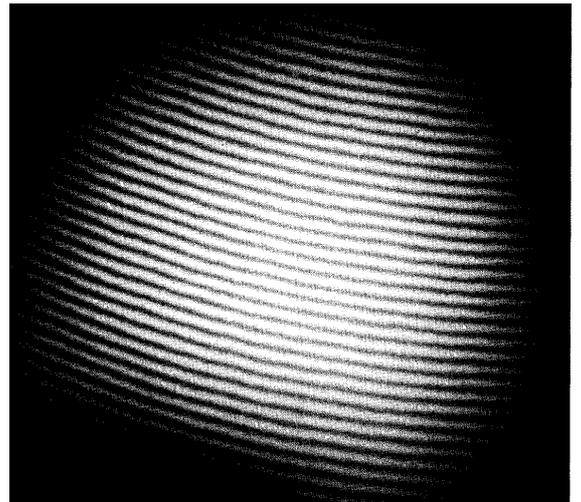
51.- Análogamente a cómo se demostró en clase la forma del patrón interferencial por *reflexión* para las franjas de igual inclinación de una lámina delgada en el caso de interferencia múltiple (fórmula de Airy) demuéstrese la ecuación equivalente para el caso de la *transmisión*.

52.- Sea un interferómetro múltiple tipo Fabry-Perot que proporciona, por transmisión, un sistema de franjas de igual inclinación (anillos de Haidinger) al ser iluminado con luz monocromática. Razónese la veracidad o no de las siguientes afirmaciones:

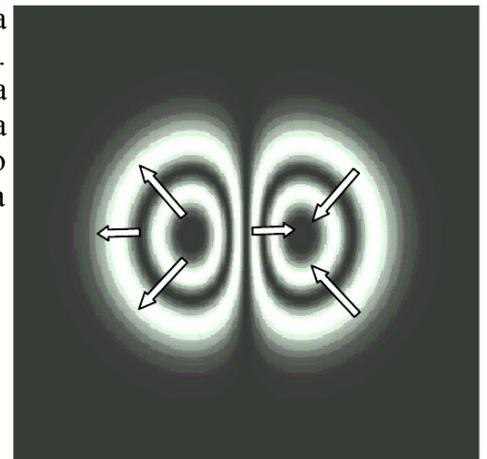
- La intensidad máxima del patrón interferencial crece al aumentar el factor de reflexión  $R$ .
- La visibilidad  $V$  del patrón interferencial ( $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ ) disminuye con el factor de reflexión y crece con la finura  $F = 4R/(1-R)^2$ .
- Supuesto que el espesor del interferómetro puede variar progresivamente, la intensidad en el centro del campo interferencial es una función creciente del espesor.

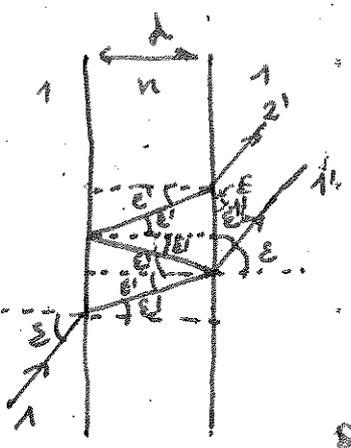
53.- Considérese un interferómetro múltiple, tipo Fabry-Perot, constituido por dos bloques de vidrio que forman entre ellos una lámina planoparalela de aire, perfectamente ajustado para observar anillos en el infinito (anillos de Haidinger). a) ¿Qué ocurre con el sistema de anillos si entre los dos bloques se intercala una lámina opaca que tape la mitad de los bloques? b) ¿Y si la lámina está hecha de vidrio transparente?. Justifíquese la respuesta.

54.- Las franjas mostradas en la figura se han obtenido iluminando con una  $\lambda$  de 589 nm. Las franjas se deben a la cuña de aire formada entre dos placas (láminas planoparalelas) de vidrio cuando en uno de sus extremos hemos situado un retal de tela entre ambas placas. ¿Cuál es el ángulo de esta cuña de aire?. Asuma que la escala de la figura es la escala real.



55.- Las franjas mostradas en la figura se han obtenido iluminando con una  $\lambda$  de 633 nm dos láminas de vidrio con un pequeño espaciado entre ellas. Una de las láminas es una superficie de referencia perfectamente plana mientras que la otra presenta deformaciones. Al reducir ligeramente la separación entre ambas se observa el desplazamiento de las franjas indicado por las flechas. Trace el perfil de la superficie no uniforme a lo largo de la línea central de la imagen.





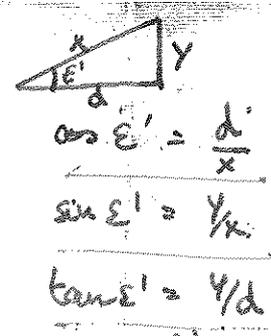
$\Delta L$  en cada rayo:

$\Delta L = 2xn - b)$

$x = \frac{d}{\cos \epsilon'}$

$\sin \epsilon = \frac{dn}{2y}$

$\sin \epsilon = n \sin \epsilon'$



$\rightarrow \Delta L = \frac{2nd}{\cos \epsilon'} - 2y \sin \epsilon = \frac{2nd}{\cos \epsilon'} - 2 \tan \epsilon' d \sin \epsilon$

$= \frac{2nd}{\cos \epsilon'} - 2 \tan \epsilon' n \sin \epsilon' d = \frac{2nd}{\cos \epsilon'} (1 - \sin^2 \epsilon') = 2nd \cos \epsilon'$

Amplitudes  $e^{i\phi}$

$\rightarrow \delta = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L$

$\Delta_1' : A \cdot t \cdot t' e^{i\phi}$   $\rightarrow A_p = A \cdot tt' (r')^{2(p-1)} \cdot e^{i\delta(p-1)}$

$\Delta_2' : A \cdot t \cdot r' \cdot n' \cdot t'$

$t \cdot t' = T, r'^2 = R$

$A_{tot} = \sum_{p=1}^{\infty} A \cdot T R^{(p-1)} \cdot e^{i\delta(p-1)} = AT \sum_{p=1}^{\infty} (R \cdot e^{i\delta})^{p-1} = \frac{A \cdot T}{1 - R e^{i\delta}} = A'$

$\frac{I'}{I} = \frac{A' \cdot A'^*}{A \cdot A^*} = \frac{T^2}{(1 - R e^{i\delta})(1 - R e^{-i\delta})} = \frac{T^2}{(1 - R \cos \delta - iR \sin \delta)(1 - R \cos \delta + iR \sin \delta)}$

$= \frac{T^2}{(1 - R \cos \delta)^2 + R^2 \sin^2 \delta} = \frac{(1 - R)^2}{1 - 2R \cos \delta + R^2} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R + 2R(1 - \cos \delta)}$

$= \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 2R \cdot 2 \sin^2 \delta / 2} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$

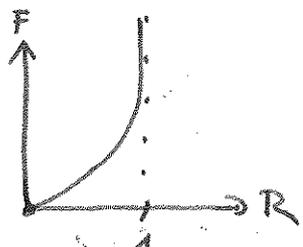
$= \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}$

$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$

52

$$I_r' = \frac{I'}{I} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$



$\delta > F \rightarrow < I_r'$  si  $\delta \neq 0, 2\pi$

$\delta = 0, 2\pi \rightarrow$  mínimo

NO se transmite

$\delta > F \rightarrow > R$

a)  $> R \rightarrow > F \rightarrow < I_r'$

b)  $V = \frac{I_{max}' - I_{min}'}{I_{max}' + I_{min}'}$



amplitud  $\frac{1}{1-R}$

$I_{max}' = 1 = I (\delta = 2m\pi)$ ,  $I_{min}' = \frac{1}{1+F} = I (\delta = (2m+1)\pi)$

$$V = \frac{1 - \frac{1}{1+F}}{1 + \frac{1}{1+F}} = \frac{1+F-1}{1+F+1} = \frac{F}{F+2} = 1 - \frac{2}{F+2}$$

... (todo se refleja)

$\lim_{F \rightarrow 0} V = 0$   
 con brillo máximo  
 $\delta \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  todo se transmite

$\lim_{F \rightarrow \infty} V = 1$  pero brillo mínimo si  $\delta$  no es  $2m\pi$   
 la gran "suscibilidad"

a  $F > V$

crece con ambas!

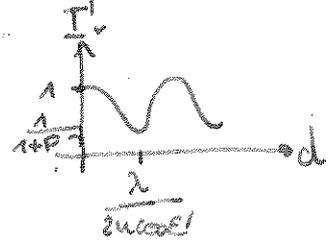
SI  
NO

a  $R > V \rightarrow F > V$

c)  $I_r' = \frac{1}{1 + F \sin^2 \left( \frac{k_0 2nd \cos \theta}{2} \right)} = \frac{1}{1 + F \sin^2 (k_0 n \cos \theta \cdot d)}$

NO

transmisión oscilante con d.



$\theta = 0 \rightarrow d_{min} = \frac{m\lambda}{2n}$ ,  $I_r' = \frac{1}{1 + F \sin^2 (k_0 n d)}$

53

a) se pierde intensidad, el sumatorio se trunca a partir de la reflexión  $P_{max}$ . Por otro lado se pierden también la mitad de los rayos que no se transmiten ni una sola vez.

No obstante, los anillos permanecerán si  $\frac{L}{\lambda} \gg 1$  (las primeras reflexiones son las principales contribuciones a  $I_r'$ ).

El sumatorio exacto sería:

$$\frac{x^{p+2} - 1}{x - 1} \quad (\text{reflexión})$$

$$p-1 \quad (\text{transmisión})$$

anillo exterior  
 los interiores

↓  
 medios anillos  
 si  $\delta > \pi$

✓  
?

4) Aparece una  $\Delta L$  detectable (método de Tolansky)

$$I_r = \frac{1}{1 + F \sin^2 (k_0 n d + k_0 (n' - n) e')} \quad (\varepsilon = 0)$$

para  $\varepsilon = 0 \rightarrow$  constante  $\Delta I = \frac{\Delta I}{I} = 1 - \frac{1 + F \sin^2 (k_0 n d)}{1 + F \sin^2 (k_0 n d + k_0 (n' - n) e')}$

↳ Anillos con láminas cambian su "radio" ( $\varepsilon$ )

↳ Corte en los anillos

↳ el corte

dependiendo de  $\frac{d}{\lambda_0}$



54

19 franjas  $\rightarrow 33 \pm 1 \text{ mm}$

$$p = 1.74 \pm 0.05 \text{ mm}$$

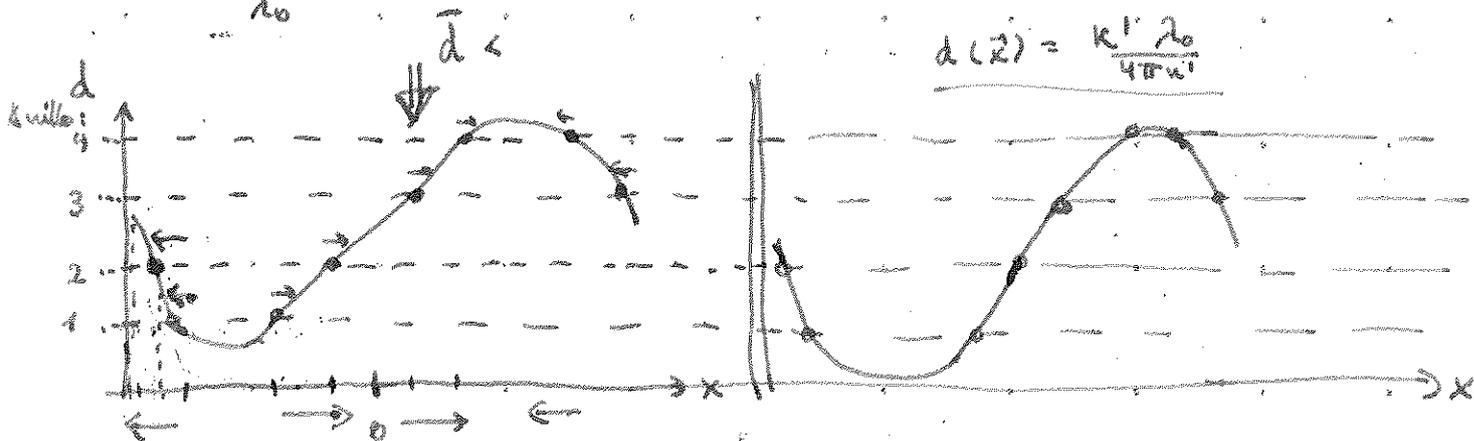
$$\lambda_0 = 589 \text{ nm}$$

$$p \text{ (Fizeau)} = x_{m+1} - x_m = \frac{(m + \frac{1}{2} + N) \lambda}{2\alpha} - (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha} \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{2p} = \frac{\lambda_0 / n_0}{2p} = [n_0 = 1] = (1.69 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

55

$$\delta_t = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' d(x) + \pi = \text{cte en 1 anillo}$$



## CUESTIONES PARA LAS EVALUACIONES INDIVIDUALES (TEMA 8)

56.- A partir de la expresión del patrón de difracción de Fraunhofer de una abertura rectangular, discute cómo es éste (forma y extensión) en los siguientes casos: (i) rendija infinitamente alta con anchura infinitesimal, (ii) rendija infinitamente alta con anchura finita, (iii) rendija con anchura y altura finitas.

57.- Obtén el patrón de difracción de Fraunhofer de una abertura circular. ¿Qué relación tiene este patrón de difracción con el poder de resolución de los instrumentos ópticos?

58.- Una abertura circular de radio  $R$  variable (esto es, un diafragma iris) es iluminada por una onda esférica proveniente de una fuente puntual situada a  $\rho = 50\text{cm}$  de ella. Calcula para un punto  $P$  que dista  $r_0 = 30\text{cm}$  del diafragma. Calcula el tamaño del diafragma para que (i) sólo lo atraviese la primera zona de Fresnel y (ii) lo atraviesen las dos primeras zonas de Fresnel. Si la intensidad detectada en  $P$  es  $I_0$  cuando no hay diafragma, ¿cuál será, aproximadamente, la intensidad en  $P$  en los dos casos considerados? Suponed que la luz es monocromática de longitud de onda (a)  $\lambda = 460\text{nm}$  y (b)  $\lambda = 620\text{nm}$ .

59.- Para una abertura circular, el patrón de difracción de Fraunhofer es la función de Airy (ejercicio 57), que es siempre el mismo independientemente de la distancia a la que observemos el patrón siempre que ésta sea lo bastante grande. Por el contrario, el patrón de difracción de Fresnel es diferente dependiendo del tamaño de la abertura y la distancia de observación. Razona cómo podemos conectar, cualitativamente, estos dos comportamientos tan dispares.

56

$$\beta' = \frac{\beta_0 b}{2z} \quad \alpha' = \frac{\beta_0 a x}{2z}$$

✓  
★

$$\mathcal{F}\{\text{rect}\} = \text{sinc}$$

$$u(x, z) = C \int_{-b/2}^{b/2} dy' e^{i\beta_0 y y'} \int_{-a/2}^{a/2} dx' e^{i\beta_0 x x'} = \frac{C |V_0|}{\lambda z} b \left( \frac{e^{i\beta b'} - e^{-i\beta b'}}{2i\beta'} \right) a \left( \frac{e^{i\alpha a'} - e^{-i\alpha a'}}{2i\alpha'} \right)$$

$$= \frac{C |V_0|}{\lambda z} \underbrace{ab}_A \text{sinc}(\beta') \text{sinc}(\alpha')$$



$$I = u(x, z) \cdot u^*(x, z) = \frac{|V_0|^2 \cdot A^2}{\lambda^2 z^2} \cdot \text{sinc}^2(\alpha') \text{sinc}^2(\beta')$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(zx)}{zx} = 1$$

$$\alpha' \propto a, \quad \beta' \propto b$$

i)  $a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty \quad / \quad \Delta = \text{cte}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \text{sinc}(zx) = q \delta(x)$$

$$I(x, y) = \frac{|V_0|^2}{\lambda^2 b^2} \cdot A \cdot 1 \cdot \delta^2(y) \cdot q^2$$

Primer mínimo:  $z = \pi$

localizado  $\rightarrow 0: x_1 = \infty$  ... deslocalizado  
deslocalizado  $b \rightarrow \infty: y_1 = 0$

Ondas planas no acotadas

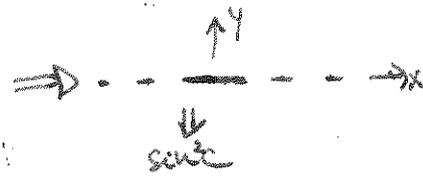
$$\pi = \frac{\beta_0 a x}{2z}$$

$$x_1 = \frac{2z\pi}{\beta_0} \cdot \frac{1}{a}$$

$$y_1 = \frac{2z\pi}{\beta_0} \cdot \frac{1}{b}$$

ii)  $a \rightarrow \infty$

$$I(x, y) = q \cdot \delta^2(y) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\beta_0 a x}{2z}\right)$$



$$x_1 = \frac{2z\pi}{\beta_0} \cdot \frac{1}{a} < \infty$$

$$iii) I(x, y) = q \text{sinc}^2 \alpha' \text{sinc}^2 \beta'$$

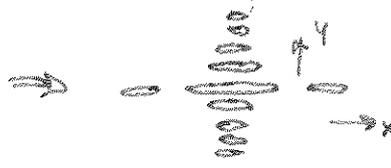
$$\Delta x': \Delta x \geq \text{cte}$$
  
$$a \cdot \Delta x \geq \text{cte}$$

$b > a$



$$\Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{b}{a} > 1$$

Más ancho en x



Más localizado en  $x'$   
Menos " en  $y'$

Más ancho en  $x$  (lóbulos)  
Menos ancho en  $y$

(57)

Abertura circular, diámetro  $D/2$  ✓

$$U(\vec{x}, z) = \frac{U_0 C}{\lambda z} \int d^2x' e^{i \frac{\beta_0}{z} \vec{x} \cdot \vec{x}'}$$

$$= B \iint_{\Omega} dx' e^{i \frac{\beta_0}{z} x x'} \cdot dy' e^{i \frac{\beta_0}{z} y y'}$$

↓ función J de Bessel, Disco de Airy  
1ª especie

$$= \frac{U_0 C}{\lambda z} \frac{\lambda z}{\beta_0 a} J_1(\beta_0 a/2) \quad , \quad a^2 = x^2 + y^2$$

Jinc

$$I(x, y) \propto \frac{J_1^2\left(\frac{\beta_0}{z} (x^2 + y^2)^{1/2}\right)}{\beta_0^2 (x^2 + y^2)}$$

Los instrumentos ópticos tienen diafragmas circulares por donde entra la luz, con un determinado diámetro.

Para poder "resolver" dos objetos, es necesario que en el plano de observación, sus patrones de difracción no se solapen exclusivamente. Según el criterio de Lord Rayleigh, se resuelve si el 1º mínimo de un patrón coincide con el máximo del otro.

Lo permite resolver arcos: .



$$\phi \sim 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

A mayor D, mayor resolución. 'Blue ray' también analógico,  $\propto \lambda$ , + precisión

GRANTECAN (D = 30m) → 0,014"

Ojo (1,5 - 6 mm) → 1'32" - 23"  
poca poca luz