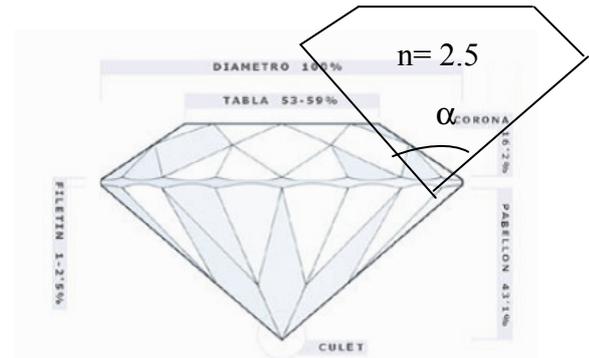


1.- Un tubo cilíndrico tiene un diámetro interior de 5 cm y una longitud de un metro. Su superficie interior es reflectante en los primeros 89 cm y absorbente en el resto. En la extremidad absorbente del tubo se coloca un diafragma provisto de un orificio muy pequeño, centrado respecto al eje del cilindro. En el otro extremo se coloca otro diafragma idéntico detrás del cual se sitúa una fuente luminosa. Determinad la inclinación respecto al eje con la que emergen del tubo los rayos de luz. Describid el aspecto del campo observado cuando se mira a través del tubo.

$n = 2.5$

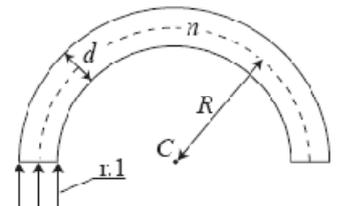
2.- Considérese un brillante con la talla de la figura. Suponiendo una iluminación paralela y normal a la cara superior, calcular los valores de α que permiten que la luz, tras sufrir dos reflexiones internas, salga del brillante por esta misma cara (para un primer cálculo no considerar la influencia del rebajado del borde).



3.- Considerad una guía curvada de sección rectangular como la de la figura.

Teniendo en cuenta que, según una descripción puramente geométrica, la luz se propaga en el interior de una guía por reflexión total,

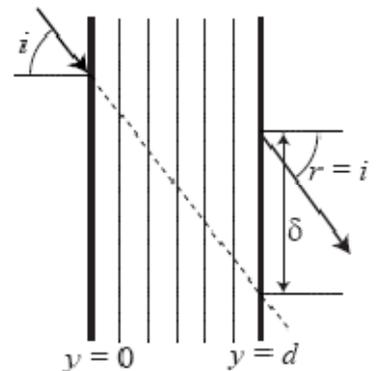
- demostrad que es suficiente que el rayo 1 cumpla la condición de propagación para que todo el haz se propague a lo largo de la guía; y
- obtened la expresión para el radio mínimo, R_m , que puede tener esta guía, sin que deje de propagarse la luz por ella



4.- Un rayo de luz incide, como se indica en la figura, sobre un medio inhomogéneo estratificado en forma de lámina planoparalela de grosor d , cuyo índice de refracción varía horizontalmente de acuerdo con la expresión $n^2(y) = 3/2(1 + 2y)$; y en m.

a) Suponed que la lámina se encuentra entre aire y un medio de índice de refracción n_0 . El rayo incidente se mueve en el aire y, tras atravesar la lámina, sale de la misma con un determinado ángulo. ¿Qué condiciones deben verificar n_0 y d para que el rayo emergente sea paralelo al incidente?

b) En el caso de que se verifiquen las condiciones del apartado anterior, calculad el desplazamiento δ producido sobre el rayo incidente por la presencia de la lámina suponiendo que el ángulo de incidencia es de $\pi/3$ radianes

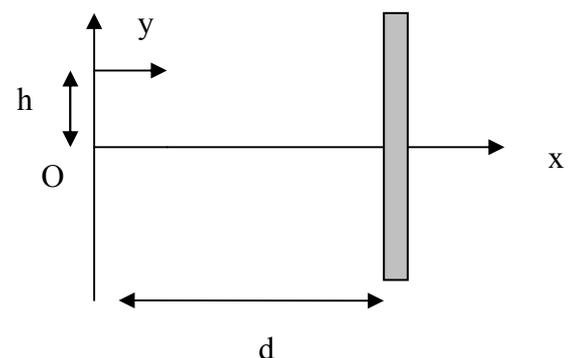


-----PROBLEMAS PROPUESTO

(A entregar, junto con el problema II, en el periodo comprendido entre el 9/11 y el 23/11, ambos inclusive)

I.- Considérese un medio estratificado caracterizado por un índice de refracción $n^2(y) = n_0^2(1 - \alpha y^2)$ en el que se propaga un rayo luminoso. En un punto caracterizado por una posición $y=h$ la dirección de propagación del rayo es perpendicular al eje coordenado OY .

a) Determinar la ecuación de la trayectoria seguida por este rayo.



b) Suponer ahora que se inserta un espejo plano en el interior del medio estratificado, paralelo al eje OY . Determinar la distancia d , respecto del eje OY a la que debemos situar el espejo para que un rayo que incide sobre el medio a una altura h del eje OX y paralelo a él, emerja por el mismo punto del plano de entrada después de reflejarse en el espejo. (Ver figura adjunta)

-----TRABAJO TUTELADO

i.- Demuéstrese que para un medio estratificado plano en el que $n = n(y)$, las trayectorias de los rayos luminosos satisfacen la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2C^2} \frac{dn^2}{dy}$, donde C es la constante

de la relación de Bouguer ($n \sin \varepsilon = C$). ¿Es posible que un rayo describa una trayectoria rectilínea en un medio como este?.

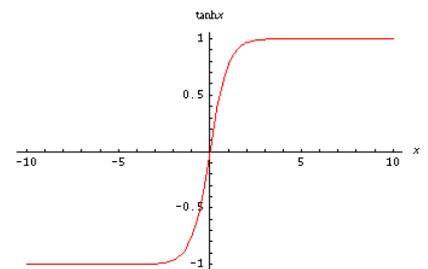
ii.- Un rayo de luz monocromática penetra en una esfera homogénea de índice n sumergida en aire, con ángulo de incidencia i , y sufre p reflexiones parciales en su interior antes de salir de ella.

- a) Calculad la desviación del rayo emergente en relación al rayo incidente.
- b) ¿Para qué ángulo de incidencia, i_m , esta desviación pasa por un extremo relativo?
- c) Calculad i_m y la desviación correspondiente para $n = 4/3$ y $p = 1$ y 2 . Este resultado es la base para la justificación geométrica de la formación del arco iris.

iii.- Desde un punto de la superficie terrestre, O , donde el índice de refracción del aire es n_0 , se mide el ángulo cenital de una estrella, es decir, el ángulo que forma la dirección en la que se ve la estrella con la vertical del punto de observación. Debido a la variación del índice del aire con la altura, hay una pequeña diferencia $\Delta = \varepsilon - \varepsilon_0$ entre el ángulo cenital real, ε , y el observado, ε_0 . Determinad la ecuación de las trayectorias que pasan por O si el índice de refracción de la atmósfera viene dado por $n(z) = \sqrt{n_0^2 - bz}$ donde b es una constante, y obtened la expresión de Δ en función de ε_0 .

-----ejemplo de problemas de examen-----Examen primer parcial 2007.

Un rayo de luz se propaga en un medio inhomogéneo, estratificado en la dirección y , siguiendo una trayectoria que viene dada por la ecuación $y(x) = a \tanh(x/a)$.



- a) Calcúlese cuál es la ley de variación del índice de refracción $n(y)$ del medio.
- b) ¿Es posible que un rayo describa una trayectoria rectilínea en un medio como el descrito?.

Bibliografía.-

P. Mejias, R. Martinez "100 Problemas de Óptica" .Alianza Editorial 1996.
 V.L. Ginzburg et al. "Problems in Undergraduate Physics. 3: Optics". Pergamon Press. 1965.
 A. Moussa, P. Ponsonnet "Tome II. Exercices avec solutions . 1er vol. Óptique". Ed- André Desvigné.1992
 R. Prat "Problemes d'Óptique (C2). Armand Colin. 1967.
 J. Renault "Óptica y Física Ondulatoria. Ejercicios resueltos". Paraninfo 1993.
 S.V. Sivujin "Problemas de Física General (tomo 2) Óptica". Ed. Reverté S.A. 1984.
 A. Siciliano "Optics : problems and solutions" .AWorld Scientific, cop. 2006.
 F. Carreño, M.A. Antón "Optica física : problemas y ejercicios resueltos" Pearson Educación, 2001.

I) $n^2 = n_0^2 (1 - \alpha y^2)$ $\alpha > 0$

$n^2 > 0 \rightarrow (1 - \alpha y^2) > 0 \rightarrow \alpha y^2 < 1$

$(0, h) \rightarrow \epsilon_0 = \pi/2$

a) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2c^2} \frac{dn^2}{dy} = \frac{n_0^2}{2c^2} (-2\alpha y)$

$0 < y < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
 $\Rightarrow h < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n_0^2 \alpha}{c^2} y = 0 \Rightarrow$ O. A. Simple $\omega_x = \frac{n_0 \sqrt{\alpha}}{c}$

$\Rightarrow y = A \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} + \varphi\right)$

$C = n_0 \downarrow \sin \pi/2 = n_0 \sqrt{1 - \alpha h^2}$
 $\sqrt{1 - \alpha h^2}$

$\rightarrow \omega_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} - h^2}}$

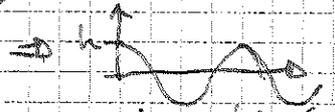
$h = A \sin(\varphi) \rightarrow A \neq 0$

$\frac{dy}{dx} = A \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} + \varphi\right) = 0 = A \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} \cdot \cos \varphi$

$\epsilon_0 = \pi/2$ $(h, 0)$

$\Rightarrow \varphi = \pi/2$
 $\Rightarrow A = h$

$\Rightarrow y = h \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} + \pi/2\right) = h \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{1 - \alpha h^2}}\right)$



b) En el espejo plano paralelo a OY, el rayo invertirá su movimiento en x mientras que la y no cambiará de signo y será como si los valores de x menores se añadiesen a d (como si fuera el tiempo).
 Por tanto, al volver a $x=0$ tras rebotar en d, para y:

cambia la dirección de propagación

$y = h \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha} \cdot 2d}{\sqrt{1 - \alpha h^2}}\right) = h \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} \cdot 2d}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d = \frac{n\pi \sqrt{1 - \alpha h^2}}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi \sqrt{1 - \alpha h^2}}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow d = n \cdot \frac{\lambda}{2}$

Esto implica situar el espejo en los puntos donde y toma el valor $\pm h$, con lo que al incidir perpendicularmente, el rayo retorna por el camino ya recorrido.

Comprobación: ✓

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n_0^2 (1 - \alpha y^2)}{c^2}} - 1' = h \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - \alpha h^2}} x\right) \right] \cdot (-1)'$

$\frac{n_0^2 (1 - \alpha y^2)}{c^2} - 1 = \frac{h^2 \alpha}{1 - \alpha h^2} \cdot \sin^2(\omega \cdot x)$

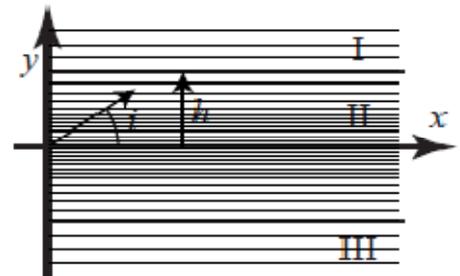
$1 - \alpha y^2 - 1 + \alpha h^2 = h^2 \alpha \sin^2 \omega x$

$\alpha h^2 - \alpha h^2 \cos^2 \omega \cdot x = h^2 \alpha \sin^2 \omega x$

$\Rightarrow dh^2 = \alpha h^2 (\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x) \checkmark$

Boletín nº 2 Grupo B

5.- Considere un medio estratificado de espesor $2h$ (región II), caracterizado por un índice de refracción dado por $n(y) = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 y^2}$, y rodeado por dos medios homogéneos (regiones I y III) de índice $n_I = n_{III} = n$ (para $y = h$). En el origen de coordenadas se sitúa una fuente puntual que emite rayos en todos los ángulos posibles hacia el interior del medio. a) Calcúlese la trayectoria de los rayos. b) ¿Qué condición ha de cumplir el ángulo i para que un rayo se mantenga confinado en la región II? c) Determínese la zona a través de la cual los rayos procedentes de la fuente atraviesan la superficie de separación entre las regiones I y II. d) Particularizar el resultado del apartado a) para el caso de que el ángulo i sea pequeño (aproximación paraxial).



6.- Considere el medio de índice de refracción definido por $n(y) = n_1 (y/A)$, $y > A$ (región I), $n(y) = n_1$ y $y \leq A$ (región II), en donde A es una constante real y positiva. En la posición caracterizada por $y = 2A$ se sitúa una fuente puntual que emite en todas las direcciones.

- Encuentre la ecuación de las trayectorias en la región I.
- Determine cuales de estos rayos presentan un punto de retorno y dónde se localiza este. Discuta el resultado.
- Determine que rayos de los emitidos por la fuente llegan hasta la región II y describa cualitativamente la trayectoria de los mismos.

7.- Se considera un medio isótropo caracterizado ópticamente por un índice de la forma $n(y) = n_0 \sqrt{1 + (2y/a)}$. Determínese el tiempo que emplea un rayo luminoso en ir de $A(0,0,0)$ a $C(2,3.56,0)$ cuando $a = 7.12$ cm, en los siguientes casos:

- Si va primero de A a $B(1,3.56,0)$ y luego de B a C , en ambos recorridos en línea recta.
- Va de A a C en línea recta.
- realiza el recorrido a lo largo de la curva contenida en el plano $z=0$,
 $(x / \text{sen} \varepsilon_0) - (a \sqrt{\cos^2 \varepsilon_0 + 2y/a} + a \cos \varepsilon_0) = 0$ para $\varepsilon_0 = \pi/5$.

8.- Dedúzcase la ley de la reflexión:

- a partir del principio de Fermat.
- a partir del teorema de Malus.

PROPUESTO II

Demuéstrese que el radio de curvatura ρ de un rayo que atraviesa un medio de índice n variable cumple la relación $1/\rho = d/dN (\ln n)$, donde d/dN significa derivación respecto a la normal a la trayectoria.

demostrar que $\frac{1}{p} = \frac{d \ln n}{dN}$

$$\rightarrow \frac{d \ln n}{dN} = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dN} \xrightarrow{\text{derivada direccional}} \frac{1}{n} \cdot \nabla n \cdot \vec{N}$$

\vec{N} : vector normal a la trayectoria

\hat{s} : vector tangente

Por otro lado:

$$\frac{1}{p} = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| ; \quad \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{p} \cdot \hat{N}$$

Utilizando la ecuación de las trayectorias y la Eikonal:

$$n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla} S \quad \left. \right\} \cdot \frac{1}{ds} \text{ (para obtener } \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \text{)}$$

$$\frac{dn}{ds} \frac{d\vec{r}}{ds} + n \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \vec{\nabla} S = \vec{\nabla} \left(\frac{dS}{ds} \right)$$

$$\frac{dn}{ds} \hat{s} + n \cdot \frac{1}{p} \hat{N} = \vec{\nabla} n$$

→ Quitamos el carácter vectorial multiplicando escalarmente por un vector, sin perder el término con ?

$$\hat{N} \perp \hat{s} \quad \rightarrow \quad 0 + \frac{n}{p} = \vec{\nabla} n \cdot \hat{N} \quad \rightarrow \quad \hat{N} \cdot \hat{N}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{n} \vec{\nabla} n \cdot \hat{N} \xrightarrow{\text{ver arriba}} \frac{d \ln n}{dN} \quad \text{q.e.d.}$$

Boletín nº 3 Grupo B

9.- Determine la ecuación de la superficie reflectante que focaliza estigmáticamente un haz de rayos paralelos en un punto situado a una distancia d del vértice de la superficie. Resuelva el problema aplicando:

- a) exclusivamente la ley de la refracción, y
- b) la condición de constancia del camino óptico recorrido (condición de estigmatismo).

10.- Determine analítica y gráficamente, la posición y naturaleza de las imágenes proporcionadas por una lente delgada sumergida en aire, tanto para objetos reales como virtuales. Considérese tanto el caso de una lente convergente como el de una lente divergente.

11.- Dada una lente delgada de radios de curvatura r_1 y r_2 e índice n , determine la potencia ϕ' de la misma cuando se encuentra sumergida entre dos sustancias de índice n_1 y n_2 .

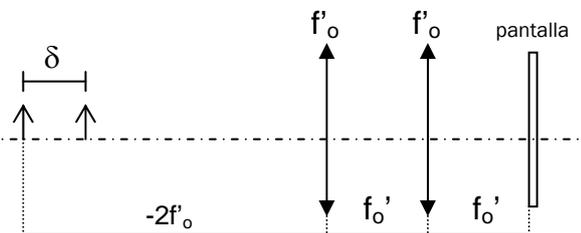
Una lente delgada convergente, situada en aire, tiene una distancia focal de 20 cm e índice $n = 3/2$. ¿Cuál es su distancia focal cuando se sumerge en agua cuyo índice de refracción es $4/3$? ¿Y cuando se sumerge en bisulfuro de carbono (con índice de refracción $8/5$). Analícese también el caso en el que se sumerja en un medio de índice de refracción 1.5.

12.- Calcule la distancia $\overline{HH'}$, entre los planos principales de una lente en aire. Determine a continuación las condiciones que debe cumplir la lente para que :

- a) $\overline{HH'} = e$, siendo e el espesor de la lente.
- b) $\overline{HH'} = 0$.

En ambos casos, determine la potencia de la lente resultante y haga un esquema del sistema señalando la situación de los planos principales.

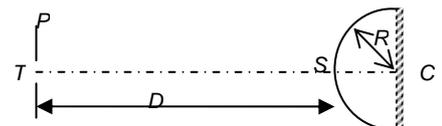
13.- El dispositivo mostrado en la figura se emplea para la medida de distancias focales. Consta de una lente convergente de focal conocida, f'_o , y de un objeto situado a una distancia $-2f'_o$, cuya imagen se forma sobre una pantalla a distancia $2f'_o$ de la lente.



Cuando se sitúa una lente de focal desconocida es el plano focal imagen de la primera lente es necesario desplazar el objeto una distancia δ respecto de la posición original para obtener su imagen de nuevo en la pantalla. (Suponga que ambas lentes son delgadas).

- a) Calcule, para esta situación la matriz de transferencia entre el plano objeto y la pantalla
- b) Halle la relación entre la focal f'' de la lente problema y el desplazamiento δ .
- c) Calcule el aumento del sistema.

14.- Para determinar el índice de refracción n de una lente semiesférica de radio R , se dispone, tal y como muestra la figura, de una pantalla P , provista de una pequeña abertura T donde se emplaza una fuente luminosa. A continuación, se desplaza la lente, cuya cara plana está espejada, hasta la posición en que la imagen de la fuente dada por la lente, se percibe nítida sobre la pantalla. Suponiendo conocida la distancia D entre la pantalla y el vértice S de la lente en esta posición, obtenga el índice de la lente.



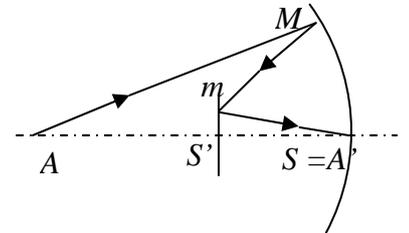
PROPUESTO III-----

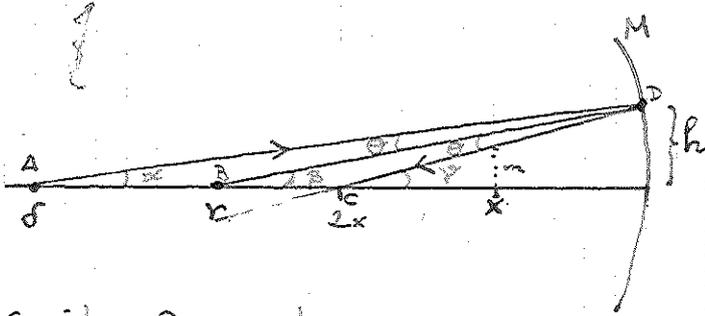
Un sistema óptico está formado, tal y como indica la figura, por un espejo esférico M de radio de curvatura R, y un espejo plano m, con sus superficies reflectantes enfrentadas. Un punto A, tal que $\overline{SA} = \delta$, envía luz sobre M. Después de una reflexión en M seguida de otra en m, se obtiene una imagen A' de A sobre el vértice S de M, donde se encuentra una pequeña abertura.

a) Exprese el valor de δ que cumple el enunciado en función de la separación $x = \overline{SS'}$ entre los espejos.

b) Represente la función $\delta(x)$ para M cóncavo e identifique el rango de valores de x que corresponden a un objeto A real situado a la izquierda del espejo m.

c) A partir del trazado de rayos deduzca la posición que debe ocupar m cuando sobre M incide un haz paralelo y verifique posteriormente que este resultado es solución del apartado b).





Sustituyo la condición de que el rayo llegue en el vértice del espejo tras reflejarse de el espejo plano m (a distancia x) por la condición equivalente de que corte el eje óptico en 2x sin reflejarse.

Considero $\delta, r, x, h > 0$.
según la posición de lo punto del espejo.

a) $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{h}{\delta}$

$\Delta ADC \rightarrow 2\theta + (\pi - \gamma) + \alpha = \pi \rightarrow 2\theta + \alpha = \gamma$

$\tan \beta \approx \beta = \frac{h}{r}$

$\Delta BDC \rightarrow \beta + \theta + (\pi - \gamma) = \pi \rightarrow \theta + \beta = \gamma$

$\tan \gamma = \frac{h}{2x} \approx \gamma$

$\Delta ADB \rightarrow \alpha + \theta + (\pi - \beta) = \pi \rightarrow \theta + \alpha = \beta$

$\Rightarrow \alpha = \gamma - 2\theta = \gamma + 2\beta - 2\gamma \Rightarrow \alpha = 2\beta - \gamma = 2\frac{h}{r} - \gamma = \frac{2 \cdot (2x\gamma)}{r} - \gamma$

$\Rightarrow h = \delta \alpha = \gamma \cdot 2x \rightarrow \delta = \frac{\gamma \cdot 2x}{\alpha} = \frac{2x}{\frac{4x}{r} - 1} = \delta(x)$

b) M cóncava, con mi criterio $r > 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta = \frac{r}{2}$

$\delta(0) = 0$

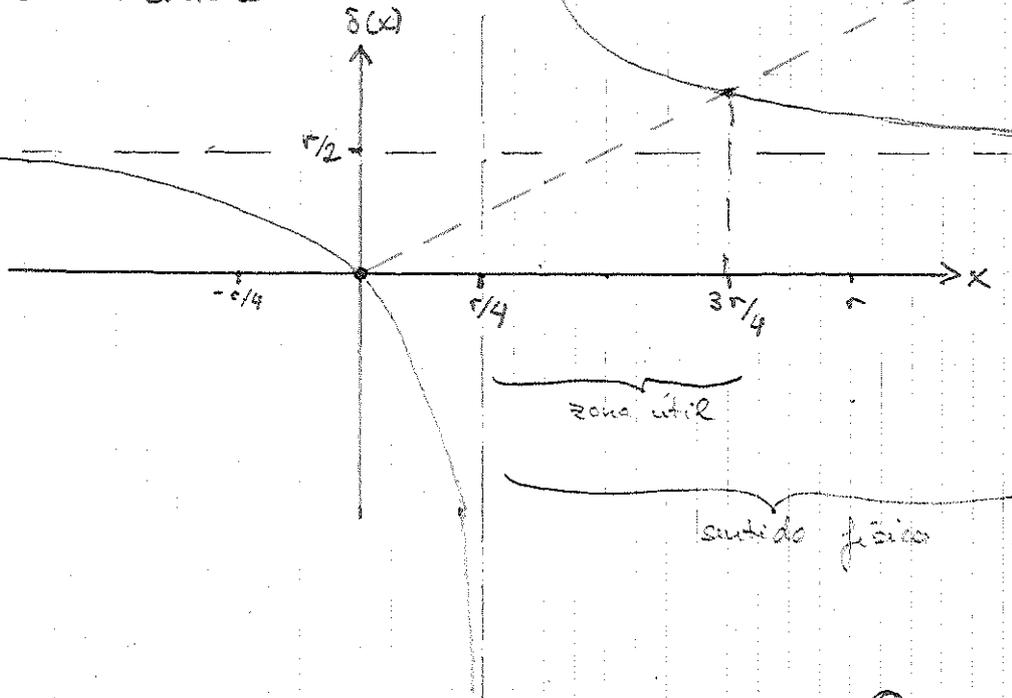
$\delta(\frac{r}{4}) \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow (\frac{r}{4})^-} \delta = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow (\frac{r}{4})^+} \delta = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \delta = \frac{r}{2}$

$\delta(\frac{3}{4}r) = \frac{3}{4}r$



Para que el objeto A sea real $\rightarrow \delta > 0 \rightarrow x < 0, x > r/4$ ①

Para que A esté situado a la izquierda de m, si el espejo es real ($x > 0$), $\delta > x$. Gráficamente se cumple para valores de x tal que $\delta(x)$ queda por encima de la recta $\delta(x) = x$. $\rightarrow \frac{r}{4} < x < \frac{3r}{4}$

Análiticamente:

$\frac{2x}{\frac{4x}{r} - 1} > x \rightarrow \frac{2x}{\frac{4x - r}{r}} > \frac{x}{1} \rightarrow 2xr > 4x^2 - rx \rightarrow 4x^2 - 3xr < 0$

→ Si $x < 0 \rightarrow 4x - 3r > 0 \rightarrow 4x > 3r \rightarrow$ No es posible porque $r > 0$ y $x < 0$
 ↳ La situación de un espejo virtual

→ Si $x > 0 \rightarrow 4x - 3r < 0 \rightarrow x < \frac{3}{4}r$ ②

Juntando ① y ②:

$\frac{r}{4} < x < \frac{3r}{4} \rightarrow$ coincide con lo dicho antes.

• Si $x < \frac{r}{4} \rightarrow 2xr < 4x^2 - 3rx \rightarrow x(4x - 3r) > 0$

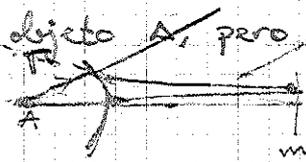
↳ Si $x > 0 \rightarrow 4x > 3r \rightarrow x > \frac{3}{4}r \rightarrow$ Contradictorio con $x < \frac{r}{4}$

↳ Si $x < 0 \rightarrow 4x - 3r < 0 \rightarrow x < \frac{3}{4}r$

↳ $x < 0$

El espejo virtual estará a la derecha del objeto A, pero reflexión virtual

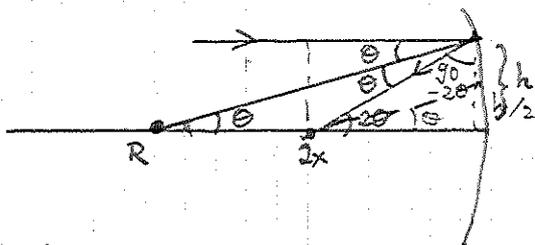
Si se tratara de otro problema práctico, que



④ sólo tendría solución física para el rayo axial ($\theta = 0$). $\forall r, x$

Por tanto: $\frac{r}{4} < x < \frac{3r}{4}$

c)



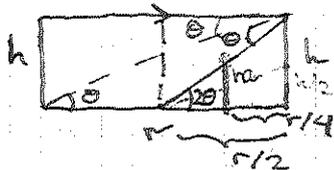
$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{h} &= \tan \theta \approx \theta \\ \frac{h}{2x} &= \tan 2\theta \approx 2\theta \end{aligned} \right\} \frac{2h}{r} = \frac{h}{2x} \rightarrow x = \frac{r}{4}$$

En efecto

$\delta\left(\frac{r}{4}\right) = +\infty = \frac{2 \cdot r/4}{4 \cdot r/4 - 1} = +\infty$

Visualmente:

Visualmente:



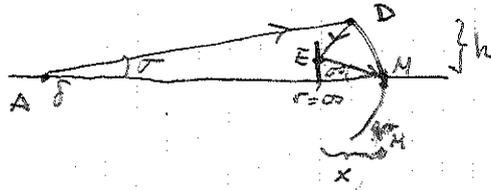
⑤ Para $x \in [0, r/4]$, el objeto no sería real, y correspondería a una reflexión física en M por la cara convexa y una reflexión virtual en m. Sólo tendría sentido físico el rayo axial ($\theta = 0$). ($\forall r, x$)



Concentra rayos en un punto $f(r) > 1 \rightarrow \delta(x) \rightarrow x(r)$

Comprobación de III a) con el método matricial: Fernando Hueso González

$$\delta, r, x, h > 0$$



1. De A a D:
traslación \rightarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

Vector inicial: $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$

2. Reflexión en M cóncavo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & -1 \end{pmatrix}$$

final: $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma' \end{pmatrix}$

3. De D a E
traslación \leftarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Reflexión en m: plano $\rightarrow r = \infty$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. De E a M

traslación \rightarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{r} & -x \\ -\frac{2}{r} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma\delta \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{r} - \frac{2x}{r} & -2x \\ \frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma\delta \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma\delta(1 - \frac{4x}{r}) - 2x\sigma \\ -2\sigma\frac{\delta}{r} + \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma' \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow -\sigma\delta(1 - \frac{4x}{r}) - 2x\sigma = 0 \quad | : \sigma \Rightarrow \sigma \neq 0$ para que no choque con m
(o iría directamente a M, sin interés)

$$\downarrow$$

$$-\delta(1 - \frac{4x}{r}) = 2x$$

$$\downarrow$$

$$\delta = -\frac{2x}{1 - \frac{4x}{r}} = \frac{2x}{\frac{4x}{r} - 1} = \delta(x) //$$

$$-2\sigma\frac{\delta}{r} + \sigma = \sigma' \rightarrow 2\frac{\delta}{r} = \frac{\sigma'}{\sigma} = \rho' \rightarrow \text{si } \delta > \frac{r}{2} \rightarrow \rho' > 1 \rightarrow x \in [\frac{r}{4}, \infty[$$

zona útil en $x > r/4 \rightarrow$ objetos "ligeros": $r/4 < x < \frac{3r}{4}$

Gran aumento cerca de $r/4$

$\frac{4r}{4}$ - cota para $\sigma' > x$

Boletín nº 4 Grupo B

- 15.- a) Determine la matriz de Jones de *i*) una lámina de cuarto de onda de eje rápido vertical, y *ii*) una lámina de cuarto de onda de eje rápido horizontal.
b) El vector campo eléctrico de un estado lineal incidente sobre una lámina de cuarto de onda forma un ángulo de 30° con el eje rápido de esta. Describa, con detalle, el estado de polarización de la onda emergente.
- 16.- Considere un haz de luz polarizada elípticamente de intensidad I_o que incide normalmente sobre un polarizador lineal giratorio. Calcule como varía la intensidad I emergente del sistema, en función del ángulo que forma el polarizador con el eje X. ¿Pasa esta intensidad por un valor máximo o mínimo?
- 17.- a) Calcule la matriz de Jones asociada a un retardador, con sus líneas neutras centradas, que introduce un desfase δ en la componente Y.
b) Resuelva el mismo caso cuando se gira el elemento anterior un ángulo θ .
c) Se sitúa la lámina retardadora anterior entre dos polarizadores lineales cruzados, de modo que las líneas neutras de la lámina forman un ángulo θ con los ejes de transmisión de ambos polarizadores. Calcule la intensidad emergente del dispositivo si se ilumina normalmente con un haz paralelo de luz natural de intensidad I_o . ¿Bajo qué condiciones la intensidad anterior es máxima?
- 18.- Sea un dispositivo óptico que se pretende caracterizar. Su acción sobre cualquier luz linealmente polarizada es únicamente girar su plano de polarización un ángulo α , sin ningún otro cambio en su estado de polarización o en su intensidad. A este fenómeno se le denomina *actividad óptica* o *poder rotatorio*. A partir de este hecho,
a) Calcule la matriz de Jones del dispositivo, y
b) obtenga los valores y vectores propios de esta matriz, e intérpretelos en función de luces polarizadas elementales.
- 19.- Existen sustancias que absorben de forma diferente la luz polarizada circularmente a derechas, R , o a izquierdas, L , (dicroísmo circular). Calcule la matriz de Jones asociada a una sustancia de este tipo, cuya transmitancia en amplitud es p_R y p_L , para luz R y L , respectivamente.
- 20.- Se dispone de un sistema formado por el acoplamiento de dos laminas de media onda con sus ejes lentos formando entre ellos un ángulo β .
a) Calcule la matriz de Jones que caracteriza este dispositivo.
b) Se sitúa ahora el dispositivo anterior entre dos polarizadores lineales con sus ejes de transmisión perpendiculares entre sí. Calcule la intensidad emergente de este dispositivo cuando se ilumina normalmente con un haz colimado de luz natural de intensidad I_o .
- 21.- Sea un dispositivo óptico formado por una lámina de cuarto de onda, cuyos ejes rápido y lento coinciden, respectivamente, con los ejes OX y OY del sistema de ejes cartesianos de referencia, seguida de un polarizador lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo ε con el eje OX. Determine los valores y vectores propios de la configuración y especifique detalladamente los tipos de luz que representan. Razone el porque estas luces son propias del sistema en cuestión.
En una segunda parte, resuelva las mismas cuestiones que en el párrafo anterior para una configuración similar en la que el polarizador lineal haya sido girado 90° respecto de su posición original. Reconozca que cada uno de los nuevos vectores propios es ortogonal a uno de los de la primera situación.

- 22.- a) Analice la actuación del dispositivo descrito en el apartado anterior sobre *i)* luz elíptica centrada , de elipticidad ε , y *ii)* sobre su estado ortogonal.
b) Repita el análisis cuando se añade a continuación de una lámina retardadora idéntica a la primera pero girada respecto a ella 90° . Compare ambos resultados.
c) Particularice los resultados anteriores al caso en el que $\varepsilon = \pi / 4$.

23.- Se dispone de una lámina de media onda con sus líneas neutras giradas un ángulo α respecto a los ejes cartesianos de referencia.

- a) Calcule el efecto de esta lámina sobre la luz polarizada circularmente, tanto dextrógira como levógira. Interprete el resultado en términos de luces polarizadas elementales.
b) La lámina anterior se sitúa entre dos láminas de cuarto de onda. El eje lento de cada una de estas láminas forma un ángulo de 45° con el eje X. Analice el efecto que este dispositivo tiene sobre una luz linealmente polarizada a 0° y a 90° .
c) Compruebe que el dispositivo del apartado (b) se comporta como un retardador con sus líneas neutras centradas. Encuentre el valor del desfase que introduce.
d) ¿A qué elemento equivaldría el dispositivo del apartado (b) si las dos láminas de cuarto de onda tuviesen sus ejes lentos coincidentes con el eje X?

PROPUESTO

IV.- Un rotor es un elemento óptico que gira el plano de polarización de cualquier luz linealmente polarizada un ángulo determinado. Calcule la intensidad emergente de los siguientes sistemas cuando se iluminan normalmente con un haz de luz natural de intensidad unidad:

- a) Un sistema formado por un polarizador lineal orientado a 0° - eje de transmisión paralelo al eje X-, seguido de m rotores idénticos, cada uno de ángulo $\alpha = \pi / (2m)$, y de otro polarizador lineal a 0° .
b) Un sistema idéntico al del apartado anterior pero en el que se intercala un polarizador lineal a 0° detrás de cada rotor.

Resuelva también los dos apartados anteriores cuando, en ambos sistemas, se substituye cada rotor por una lámina de $\lambda/2$ con su eje lento girado un ángulo $\theta = \alpha/2$ respecto al eje X.

Boletín n° 4

15.

a) i) $\angle CO - ERV$

$\pi/4 \rightarrow \pi/2$



$R|P_0\rangle = |P_0\rangle$

$R = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + i|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$

$R|P_{30}\rangle = |P_{30}\rangle i$

$R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow R \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow a = 1$

$c = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow b = 0$
 $d = i$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \checkmark$

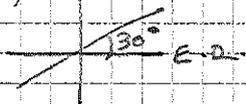
ii) ERH $\rightarrow R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) ERK

si E.R en 0:



$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \varphi = 3\pi/2$

16

$\rightarrow I_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

luz clip centrada
deorigina

$\hookrightarrow PL\theta \rightarrow PL \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} (c \ s) = \begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix}$

$PL \begin{pmatrix} \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta + \pi/2) \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow PL_0 = \begin{pmatrix} c^2 \theta & sc \theta \\ sc \theta & s^2 \theta \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow PL_0(I_x) = \begin{pmatrix} \alpha c^2 \theta + s^2 \theta c \theta s \alpha e^{i\varphi} \\ s \theta c \theta c \alpha + s^2 \theta s \alpha e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta (\cos \alpha \cos \theta + \sin \theta \sin \alpha e^{i\varphi}) \\ \sin \theta (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha e^{i\varphi}) \end{pmatrix}$

$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\cos^2 \theta (\cos^2 \alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \alpha) + \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \alpha)} (c \alpha c^2 \theta + s \theta c \theta s \alpha c \varphi)^2 + (s \theta c \theta s \alpha s \varphi)^2 + (s \theta c \theta c \alpha + s^2 \theta s \alpha c \varphi)^2 + (s^2 \theta s \alpha s \varphi)^2$

$= c^2 \alpha c^2 \theta + s^2 \alpha c^2 \theta s^2 \alpha c^2 \varphi + 2 \alpha c \theta s \theta s \alpha c \varphi + s^2 \theta c^2 \theta s^2 \alpha s^2 \varphi$



12

$$G_\alpha(P_\alpha) = P_{\alpha+\alpha}$$

a)

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\alpha) \\ \sin(\alpha+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\alpha) &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ \sin(\alpha+\alpha) &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & -s \\ s & c-\lambda \end{vmatrix} = (c-\lambda)^2 + s^2 = 0$$

$$\lambda = c \pm is$$

$$\begin{pmatrix} -is & -s \\ s & -is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -isa + sb = 0$$

$$\begin{pmatrix} is & -s \\ s & is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \rightarrow isc - sd = 0 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \lambda_1 = c + is$$

$$\rightarrow isc - sd = 0 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \lambda_2 = c - is$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \rightarrow \text{alt. c base} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$G|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle \Rightarrow G \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$G|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle \Rightarrow G \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

13

$$S|L\rangle = p_L|L\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |L\rangle$$

$$S|R\rangle = p_R|R\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = |R\rangle$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} p_R + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} p_L$$

$$= \frac{p_R}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ +i & +1 \end{pmatrix} + \frac{p_L}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_L + p_R & i(p_R - p_L) \\ i(p_R - p_L) & p_L + p_R \end{pmatrix}$$

$$\text{si } p_L = 0$$

$$p_R = 0$$

$$\frac{1}{2} p_R \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{p_L}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$\pi/2 \rightarrow \pi$

β

$$R(\pi, \alpha) = \begin{pmatrix} c^2\alpha - s^2\alpha & 2s\alpha c\alpha \\ 2s\alpha c\alpha & s^2\alpha - c^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c2\alpha & s2\alpha \\ s2\alpha & -c2\alpha \end{pmatrix}$$

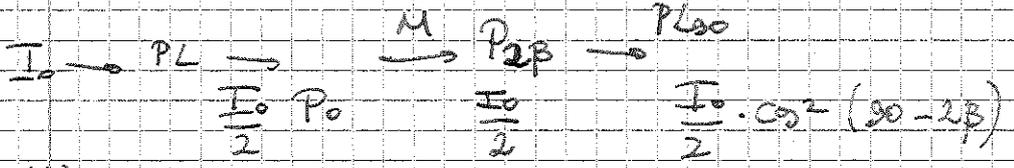
$R(\pi, \alpha + \beta)$

$$\begin{pmatrix} c2(\alpha + \beta) & s2(\alpha + \beta) \\ s2(\alpha + \beta) & -c2(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} c2\alpha c2(\alpha + \beta) + s2\alpha s2(\alpha + \beta) & c2(\alpha + \beta) \cdot s2\alpha - s2\alpha c2\alpha \\ s2(\alpha + \beta) c2\alpha - c2(\alpha + \beta) s2\alpha & s2\alpha s2(\alpha + \beta) + c2(\alpha + \beta) c2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c2\alpha c2\alpha c2\beta - c2\alpha s2\alpha s2\beta + s2\alpha s2\alpha c2\beta + s2\alpha c2\alpha s2\beta & \\ s2\alpha c2\alpha c2\beta - s2\alpha s2\alpha s2\beta - s2\alpha c2\alpha c2\beta - c2\alpha s2\beta c2\alpha & \\ c2\alpha s2\alpha c2\beta + c2\alpha c2\alpha s2\beta - s2\alpha c2\alpha c2\beta + s2\alpha s2\alpha s2\beta & \\ \cos(2(\alpha + \beta) + 2\alpha) & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad \forall \alpha$$



$$(c \ s) \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c2\beta + s2\beta \\ c2\beta \end{pmatrix}$$

$\frac{2\beta}{2\beta} \rightarrow \text{liberty}$

23

$$R(\pi, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow a) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha - i \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\pm i2\alpha} \\ -\cos(2\alpha + \pi/2) \quad \sin(2\alpha + \pi/2) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\pm i2\alpha} \\ -e^{\pm i(2\alpha + \pi/2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\pm i2\alpha} \\ e^{\pm i2\alpha + \pi/2 + \pi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i2\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(\pi/2 + \pi/2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i2\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha \rightarrow R \\ R \rightarrow \alpha \end{matrix}$$

b)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ (1-i) & (1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} e^{-i\pi/4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow |L\rangle$$

$$|L\rangle \xrightarrow{RMO} |R\rangle \xrightarrow{LCG} |L\rangle \xrightarrow{RMO} |R\rangle \xrightarrow{LCG} |L\rangle$$

$$P_{00} \rightarrow |R\rangle \xrightarrow{e^{-i\pi/4}} |\alpha\rangle \xrightarrow{e^{-i\pi/4+2\alpha}} |L\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \pm (j+1) \\ 1-i \pm (j-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+2j \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+j \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2-2j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1-j \end{pmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{10} \xrightarrow{D_1} R \xrightarrow{D_2} R \xrightarrow{D_3} P_{00} e^{i\pi/2-2\alpha}$$

$$P_{00} \xrightarrow{D_1} R \xrightarrow{D_2} R \xrightarrow{D_3} P_{00} e^{-i\pi/2+2\alpha}$$

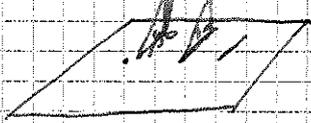
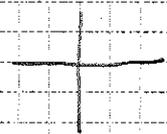
$$P_0 \xrightarrow{D} P_0 \cdot e^{i(\pi/2+2\alpha)}$$

$$P_{00} \xrightarrow{D} P_{00} \cdot e^{-i(\pi/2+2\alpha)}$$

$$\sigma = \pi/4 \quad \alpha$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i\alpha} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-i\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{i\alpha} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-i\alpha}$$

$e^{j\alpha}$ reuta $j e^{j\alpha}$



$\angle'_{\alpha} = \alpha + 45^\circ$



$\delta = \pi - 4(\alpha + 45^\circ) = \pi - 4\alpha - 4 \cdot \pi/4 = -4\alpha$

$\delta \rightarrow 4\alpha - \pi \rightarrow 4\alpha$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+j & 1-j \\ 1-j & 1+j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+j & 1-j \\ 1-j & 1+j \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 1 \\ 1 & j \end{pmatrix} \cdot e^{-i\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\alpha - j \sin 2\alpha & \sin 2\alpha + j \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha - j \cos 2\alpha & -\cos 2\alpha - j \sin 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} j \cos + \sin + \sin + j \cos & \cos - j \sin + j \sin - \cos \\ j \sin + \cos - \cos - j \sin & \sin - j \cos - j \cos + \sin \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} j \cos + \sin & 0 \\ 0 & \sin - j \cos \end{pmatrix} = j \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos - j \sin & 0 \\ 0 & -\cos - j \sin \end{pmatrix}$$

$$= j \begin{pmatrix} e^{-j2\alpha} & 0 \\ 0 & -e^{j2\alpha} \end{pmatrix} = e^{j(\pi-2\alpha)/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j(\pi+4\alpha)} \end{pmatrix}$$

$$= e^{j(\pi/2+2\alpha)} \begin{pmatrix} e^{-j4\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{j(3\pi/2+2\alpha)} \begin{pmatrix} e^{-j(\pi+4\alpha)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPUESTO IV

Fernando Hueso González

$$\begin{matrix} E & \xrightarrow{R} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{\alpha} & \xrightarrow{R} & P_{\alpha'} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{\delta}} \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 / \cos \delta \\ R_3 & R_4 / \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix}$$

Luz natural $\rightarrow I_0 = 1$

$$\hookrightarrow R_1 \cos \alpha + R_2 \sin \alpha = \cos \alpha'$$

$$R_3 \cos \alpha + R_4 \sin \alpha = \sin \alpha'$$

a) Luz natural sobre $P_{L00} \rightarrow \frac{I_0}{2} \rightarrow P_{00}$

$$R_1 = \cos \delta$$

$$R_2 = -\sin \delta$$

$$\hookrightarrow \alpha' = \alpha + \delta$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

polarizador, proyección

$$R(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \leftarrow \text{rotación propia}$$

$$\begin{matrix} R_3 = \sin \delta \\ R_4 = \cos \delta \end{matrix} \rightarrow \alpha' = \alpha + \delta$$

$$R(\delta_2) \cdot (R(\delta_1) \cdot E) = R(\delta_1 + \delta_2)$$

$$I = \langle E' | E \rangle$$

\hookrightarrow m rotaciones:

$$R(\alpha_m) \dots R(\alpha_2) R(\alpha_1) = R\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\right) = R\left(\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^m \frac{1}{m}\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall m$$

$$P_0 \xrightarrow{R(\frac{\pi}{2})} P_{0+\frac{\pi}{2}} \xrightarrow{P_{L0}} P_0 \equiv \emptyset \text{ porque perpendiculares}$$

Si el sistema rotar es ideal y no absorbe, sólo hay absorción en el primer y último polarizador, según la ley de Malus:

$$\frac{I_0}{2} \xrightarrow{P_0} \frac{I_0}{2} \xrightarrow{R(\frac{\pi}{2})} \frac{I_0}{2} \xrightarrow{P_0} \frac{I_0}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{en el último polarizador no pasa la luz}$$

Si suponemos que cada rotar absorbe (independientemente del δ) un factor t , la I antes de entrar en el último polarizador:

$$\boxed{I_{\text{ant}} = \frac{I_0}{2} t^m}$$

(caso ideal: $t=1$)
real $t < 1$

b)

$$P_0 \rightarrow R_{\alpha_1} \rightarrow P_0 \rightarrow R_{\alpha_2} \rightarrow P_0 \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow P_{\alpha} \rightarrow P_0 \rightarrow P_{\alpha}$$

\rightarrow la luz emergente seguirá polarizada $P_{\alpha} = P_0$ linealmente si llega intensidad suficiente y no ha habido ningún polarizador que formase $\frac{\pi}{2}$ con P_{α} (caso $m=1$)

$$P_{L0} \xrightarrow{m \text{ veces}} (R_{\alpha}^m \cdot P_0) \rightarrow \boxed{I_f = \frac{I_0}{2} t^m \cdot \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right]^m}$$

Entre P_{L0} y $R \rightarrow P_0$, entre R y $P_{L0} \rightarrow P_{\frac{\pi}{2m}}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos^2 \frac{\pi}{2m}\right)^m = Y \rightarrow \ln Y = \lim_{m \rightarrow \infty} m \ln \cos \frac{\pi}{2m} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \frac{\pi}{2u}}{1/2u} \rightarrow 0$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos(\pi/2m)} \cdot (-\sin \pi/2m) \cdot \left(-\frac{\pi}{2m}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} -\pi \tan \frac{\pi}{2m} = 0 \rightarrow Y = e^0 = 1$$

$$R(\frac{\pi}{4m}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4m} & \sin \frac{\pi}{4m} \\ -\sin \frac{\pi}{4m} & \cos \frac{\pi}{4m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{4m} \sin \frac{\pi}{4m} & -\cos^2 + \sin^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 2\theta$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2m} & \sin \frac{\pi}{2m} \\ \sin \frac{\pi}{2m} & -\cos \frac{\pi}{2m} \end{pmatrix} \rightarrow \text{reflexión} = \text{rotación impropia}$$

$LN \xrightarrow{P_0} P_0 \xrightarrow{R(\frac{\pi}{4m})} \dots \xrightarrow{m} P_0 \Rightarrow P_0 \rightarrow P_x \rightarrow P_0 \rightarrow P_x$

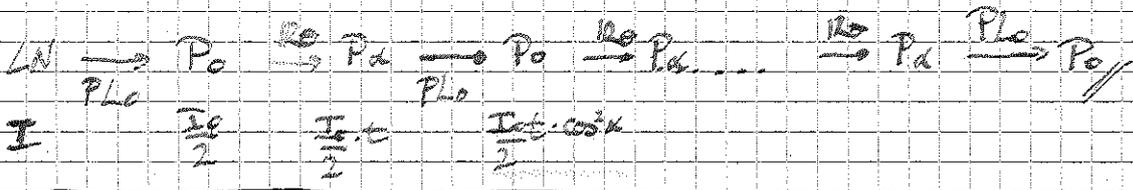
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$ cambia estado polarización a P_x , pero no absorbe

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$ devuelve estado inicial P_0
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$m \times R(\frac{\pi}{4m}) \rightarrow P_0$ si m impar $\rightarrow P_0 \rightarrow P_0$

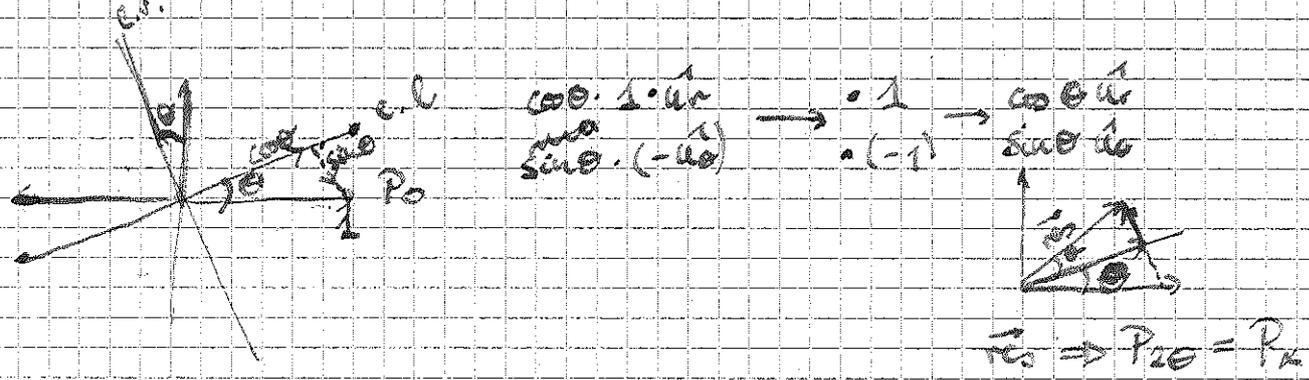
Si m par: $I = \frac{I_0}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot t^m$
 Si m impar: $I = \frac{I_0}{2} \cdot 1 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{2m}) \cdot t^m$

Si P_0 detrás de cada lámina:



$I = \frac{I_0}{2} \cdot t^m \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{2m} \right)^m$

Retardador (visualmente):



? símil para

24.- Un haz de luz circularmente polarizada incide, desde el aire, con un ángulo de 45° sobre una lámina de vidrio. Describir el estado de polarización del haz reflejado y refractado. ($n_{\text{vidrio}} = 1.5$). Repetir el proceso para $\theta_i = 65^\circ$.

25.- Comprobar que los ángulos azimutales de las componentes transmitida α_T , y reflejada α_R , satisfacen:

$$\operatorname{tg} \alpha_T = \cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T) \operatorname{tg} \alpha_I \quad \operatorname{tg} \alpha_R = -\frac{\cos(\varepsilon_I - \varepsilon_T)}{\cos(\varepsilon_I + \varepsilon_T)} \operatorname{tg} \alpha_I$$

siendo ε_I y ε_T los ángulos de incidencia y refracción y α_I el ángulo azimutal de la radiación incidente. Demostrar que en la reflexión el campo eléctrico se aleja del plano de incidencia y que en la refracción se acerca.

26.- Comprobar que el ángulo límite es siempre mayor que el de Brewster. Hallar estos ángulos para: $n = 1.33$ y $n = 1.75$.

27.- Un rayo de luz incide sobre una superficie de separación aire-vidrio de manera que el ángulo de incidencia i vale el doble que el ángulo de refracción r . En estas condiciones el factor de reflexión R_{\perp} vale 0,411. Se pide:

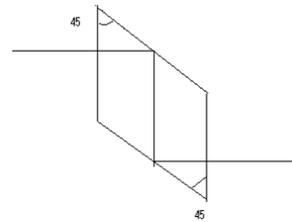
- Determinar el índice de refracción n del vidrio respecto al aire y los ángulos i y r .
- Si en lugar de estar en contacto con el aire, dicho vidrio se encuentra en contacto con el agua (índice de refracción $n_a = 1,33$ respecto al aire) y el rayo de luz incide con el mismo ángulo i sobre la superficie de separación de ambos medios, determinar el nuevo ángulo de refracción r' y los factores de reflexión $R_{//}$ y R_{\perp} en los dos casos siguientes:

El rayo incide desde el agua con el ángulo de incidencia i .

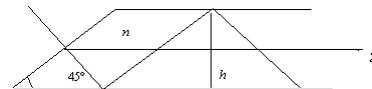
El rayo incide desde el vidrio también con el ángulo de incidencia i .

- Demostrar que para la superficie de separación agua-vidrio no puede obtenerse ningún ángulo de incidencia que valga el doble que el ángulo de refracción.

28.- Un haz plano de luz monocromática linealmente polarizada es desviado por un romboedro de reflexión total de índice $n = 1.554$, como se indica en la figura. Describese el efecto del dispositivo sobre cada una de las componentes del campo. Obtener la matriz de Jones que caracteriza al dispositivo. Si el plano de vibración de la luz incidente forma un ángulo de 45° con el plano de incidencia, describese con detalle el estado de polarización de la radiación que emerge del romboedro.



29.- Se dispone de una lámina planoparalela de espesor h e índice $n = 1.554$, sumergida en aire, con una de sus caras tallada a 45° . Un rayo de luz circularmente polarizado levógiro incide normalmente sobre dicha cara de entrada propagándose en su interior, tal y como muestra la figura. Determinar el estado de polarización del rayo en el interior de la lámina en función de la coordenada z .



30.- Un rayo de luz natural cuasimonocromática incide, con ángulo θ , sobre una esfera dieléctrica homogénea de índice de refracción n sumergida en aire, y sufre una única reflexión parcial en su interior antes de emerger de la misma.

Obtener una expresión para el grado de polarización V del rayo emergente en función de los ángulos θ (incidencia) y θ' (refracción)

Calcular el ángulo de incidencia para el cual el rayo de luz emergente está totalmente polarizado en el caso de una esfera de agua ($n = 4/3$). Razonar la respuesta

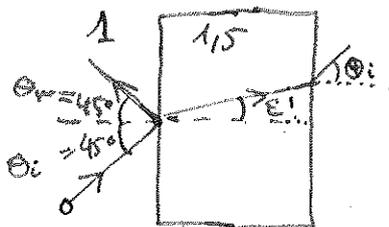
Problema propuesto

V.- Cuál debe ser la altura angular del sol sobre el horizonte para que la luz reflejada por una superficie de agua esté totalmente polarizada ($n_{\text{agua}} = 4/3$)?. Cuando el sol alcanza esta altura, se sumerge un bloque de vidrio, de índice $n = 1.6$, cuya superficie plana forma un ángulo θ con la horizontal. Determinar θ para que el haz reflejado por el bloque esté también totalmente polarizado. ¿Puede emerger del agua este haz?.

PROBLEMAS ÓPTICA

BOLETÍN 5

(24)



realmente se escribe con una sola de.
Ley de Snell: $n_i \sin \theta_i = n_j \sin \theta_j$

$$1 \sin 45 = 1,5 \sin \theta_e$$

$$\theta_e = \arcsin \left(\frac{1}{1,5} \sin \theta_i \right) = \begin{cases} 28,13^\circ \\ 37,17^\circ \end{cases}$$

$$\theta_i = \theta_r = \begin{cases} 45^\circ \\ 65^\circ \end{cases}$$

Estado de polarización de los haces:

→ Vectores de Jones

Incidente:

$$A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{pmatrix}$$

De luz circular pasará a elíptica centrada.
Sólo cambiará sentido de giro para $\theta_i = 45^\circ$
el haz reflejado porque $\theta_i < \theta_B$

El elige
 $n = 1,52$

Reflejados

$$A_0 \begin{pmatrix} r_{\parallel} \\ \pm r_{\perp} i \end{pmatrix}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad \theta_t = \theta_e$$

$$r_{\perp} = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\rightarrow A_0 \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \begin{pmatrix} \cos(\theta_i + \theta_t) \\ \mp i \end{pmatrix}$$

Refractado:

$$A_0 \begin{pmatrix} t_{\parallel} \\ \pm t_{\perp} i \end{pmatrix} \quad t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\cos(\theta_i - \theta_t) \sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$A_0 \begin{pmatrix} t_{\parallel} \\ \pm t_{\perp} i \end{pmatrix} = A_0 \cdot \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(\theta_i - \theta_t)} \\ \pm i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} = A_0 \cdot 0,303 \begin{pmatrix} 0,303 \\ \mp i \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0,092 \\ \mp i \cdot 0,303 \end{pmatrix} \\ = A_0 \cdot 0,478 \begin{pmatrix} -0,328 \\ \mp i \end{pmatrix} \\ = A_0 (-) \cdot \begin{pmatrix} 0,114 \\ \pm 0,478 i \end{pmatrix} \end{cases}$$

desfase de π entre las fases de las componentes $\theta_i < \theta_B$

No hay desfase porque hemos superado el ángulo de Brewster
 $\theta_B = \arctan \frac{1,5}{1} = 56,3^\circ$

$$= \begin{cases} A_0 \cdot 0,696 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{0,957} \\ \pm i \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0,728 \\ \pm 0,696 i \end{pmatrix} \\ A_0 \cdot 2 \cdot 0,262 \begin{pmatrix} \frac{1}{0,88} \\ \pm i \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} 0,591 \\ \pm 0,522 i \end{pmatrix} \end{cases}$$

no hay desfase entre \parallel y \perp extra al incid.

Transmitido:

$$A_0 \begin{pmatrix} t_{\parallel} t_{\parallel}' \\ \pm t_{\perp} t_{\perp}' i \end{pmatrix}$$

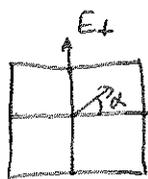
$$t_{\parallel}' (\theta_i = \theta_e, \theta_t = \theta_{i0} \begin{cases} 45^\circ \\ 65^\circ \end{cases})$$

$$= A_0 \frac{2 \sin \theta_e \cos \theta_{i0}}{\sin(\theta_{i0} + \theta_e)} \cdot \frac{2 \sin \theta_{i0} \cos \theta_e}{\sin(\theta_e + \theta_{i0})} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos(\theta_{i0} - \theta_e) \cos(\theta_e - \theta_{i0})} \\ \pm i \end{pmatrix}$$

$$= A_0 \cdot \frac{\sin 2\theta_e \sin 2\theta_{i0}}{\sin^2(\theta_{i0} + \theta_e)} \begin{pmatrix} \phantom{\frac{1}{\cos(\theta_{i0} - \theta_e) \cos(\theta_e - \theta_{i0})}} \\ \end{pmatrix} = A_0 \begin{cases} 0,85 \begin{pmatrix} 1/0,92 \\ \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,928 \\ \pm 0,85 i \end{pmatrix} \\ 0,772 \begin{pmatrix} 1/0,78 \\ \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,987 \\ \pm 0,772 i \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\rightarrow t_{\parallel}' / t_{\perp}' > 1 \rightarrow I_{\parallel}' > I_{\perp}' < 1$, interviene reflexión, coeeficiente índices

25



$$\operatorname{tg} \alpha_I = \frac{E_{\perp i}}{E_{\parallel i}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{E_{\perp r}}{E_{\parallel r}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_T = \frac{E_{\perp t}}{E_{\parallel t}}$$

E_{\parallel} → paralelo a plano de incidencia

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_T}{\operatorname{tg} \alpha_I} = \frac{E_{\perp t}}{E_{\perp i}} \cdot \frac{E_{\parallel i}}{E_{\parallel t}} = \frac{t_{\perp}}{t_{\parallel}} = \frac{2 \sin \epsilon_r \cdot \cos \epsilon_i / \sin(\epsilon_i + \epsilon_r)}{2 \sin \epsilon_r \cos \epsilon_i / \sin(\epsilon_i + \epsilon_r) \cos(\epsilon_i - \epsilon_r)}$$

$$= \cos(\epsilon_i - \epsilon_r)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_R}{\operatorname{tg} \alpha_I} = \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} = - \frac{\sin(\epsilon_i - \epsilon_r) / \sin(\epsilon_i + \epsilon_r)}{\operatorname{tg}(\epsilon_i - \epsilon_r) / \operatorname{tg}(\epsilon_i + \epsilon_r)} = - \frac{\cos(\epsilon_i - \epsilon_r)}{\cos(\epsilon_i + \epsilon_r)}$$

Al transmitirse:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_t}{\operatorname{tg} \alpha_i} = \cos(\epsilon_i - \epsilon_t) \leq 1 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_t \leq \operatorname{tg} \alpha_i \rightarrow \alpha_t < \alpha_i$$

Lo $\alpha_t < \alpha_i$ implica que al refractarse se acerca al plano de incidencia (E_{\parallel} , eje que marca plano incidencia, $\alpha < \alpha_i$)!

Al reflejarse: ($\epsilon_i, \epsilon_t \leq \pi/2$)

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_r}{\operatorname{tg} \alpha_i} \right| = + \left| \frac{\cos(\epsilon_i - \epsilon_t)}{\cos(\epsilon_i + \epsilon_t)} \right| = \left| \frac{\cos(\epsilon_i) \cos \epsilon_t + \sin \epsilon_i \sin \epsilon_t}{\cos \epsilon_i \cos \epsilon_t - \sin \epsilon_i \sin \epsilon_t} \right| = \left| 1 + \frac{2 \sin \epsilon_i \sin \epsilon_t}{\cos(\epsilon_i + \epsilon_t)} \right|$$

Cuando $\epsilon_i + \epsilon_t \leq \pi/2$, es decir, por debajo del ángulo de Brewster, el segundo término es positivo. ($\epsilon_i, \epsilon_t \leq \pi/2$)

Lo $\frac{\operatorname{tg} \alpha_r}{\operatorname{tg} \alpha_i} > 1 \rightarrow \alpha_r$ (con cambio de signo) $> \alpha_i \rightarrow$ se aleja del plano.

En ángulo de Brewster, el cociente va a ∞ . El caso extremo $\epsilon_i + \epsilon_t \leq \pi$ se alcanza desde valores de $\epsilon > \epsilon_B$, donde el cociente va desde ∞ hasta 1, siempre por encima de 1 (ya sin cambio de signo).

26

$$n \sin \epsilon_e = n' \sin \pi/2 \rightarrow \sin \epsilon_e = \frac{n'}{n}$$

$$\tan \epsilon_B = \frac{n'}{n}$$

$$\sin \epsilon_e = \tan \epsilon_B = \frac{\sin \epsilon_B}{\cos \epsilon_B} > \sin \epsilon_B$$

$$\leq 1$$

$$\sin \epsilon_e > \sin \epsilon_B$$

$$\text{como } \epsilon_e, \epsilon_B \leq \pi/2 \Rightarrow \epsilon_e > \epsilon_B //$$

$$n' = 1:$$

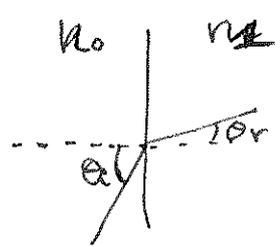
$$\rightarrow n = 1,33 \rightarrow \epsilon_e = 48,8^\circ$$

$$\epsilon_B = 36,9^\circ$$

$$\rightarrow n = 1,75 \rightarrow \epsilon_e = 34,8^\circ$$

$$\epsilon_B = 29,7^\circ$$

(27)



$$R_{\perp} = r_{\perp}^2 = \frac{\sin^2(\theta_r - \theta_i)}{\sin^2(\theta_r + \theta_i)}$$

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r$$

$$\theta_i = 2\theta_r \rightarrow R_{\perp} = 0,411 = \frac{\sin^2(-\theta_r)}{\sin^2(3\theta_r)}, \quad n_0 = 1$$

$$\sin \theta_i = \sin 2\theta_r = n \sin \theta_r$$

$$= 2 \sin \theta_r \cos \theta_r = n \sin \theta_r$$

$$\rightarrow n = 2 \cos \theta_r$$

$$\sin(\theta_r + 2\theta_r) = \sin \theta_r (4 \cos^2 \theta_r - 1)$$

$$\hookrightarrow 0,411 = \frac{\sin^2 \theta_r}{\sin^2 \theta_r (4 \cos^2 \theta_r - 1)^2}$$

$$\hookrightarrow 4 \cos^2 \theta_r - 1 = \frac{1}{0,411}$$

(Como $\theta_i = 2\theta_r \leq \pi/2$, $\theta_r \leq \pi/4$
 $\cos \theta_r \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \cos^2 \theta_r \geq 1/2$,
 $4 \cos^2 \theta_r - 1 \geq 1 > 0$)

$$\cos \theta_r = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{0,411}}{4}} = 0,8 \rightarrow n = 1,6$$

$$\hookrightarrow \theta_r = 36,87^\circ, \theta_i = 2\theta_r = 73,74^\circ$$

b) $n_0 = n_a = 1,33$

$$\bullet n_a \sin \theta_i = n \sin r' \rightarrow r' = 52,94 \rightarrow R_{\perp} = \frac{\sin^2(-)}{\sin^2(+)} = 0,1961$$

$$\rightarrow R_{\parallel} = \frac{t^2(-)}{t^2(+)} = 0,0801$$

$\bullet n \sin \theta_i = n_a \sin r' \rightarrow r' \times \rightarrow$ se ha superado el ángulo límite, reflexión total, $R_{\parallel} = R_{\perp} = 1$

$$\hookrightarrow \epsilon_c = 56,23^\circ < \theta_i$$

c) $1,33 \sin 2\theta_r = 1,6 \sin \theta_r = 1,33 \cdot 2 \sin \theta_r \cos \theta_r$

$$\hookrightarrow \cos \theta_r = \frac{1,6}{1,33 \cdot 2} = \cos \theta_i / 2 \quad \text{donde } \theta_i \leq \pi/2$$

$$\hookrightarrow \cos \frac{\theta_i}{2} \stackrel{(\pi/4)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1,6}{1,33 \cdot 2} = 0,602 < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$

\hookrightarrow Por tanto no se da la condición

otra manera \rightarrow calcular $\theta_r = 53,02^\circ \rightarrow \theta_i = 106^\circ > 90^\circ \rightarrow$ no es posible //

28

$n' = 1,554 \rightarrow$ reflexión total
 $n = 1$

Incide $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$ Polariza lineal \rightarrow Incidencia normal: Transmisión $\begin{pmatrix} t_{||} \cos \alpha \\ t_{\perp} \sin \alpha \end{pmatrix} = 2n/n' \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = 0,783 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$

no cambia polariza, solo intensidad

1ª reflexión $\rightarrow r \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\phi} \end{pmatrix}_{0,783}; \tan \frac{\phi}{2} = \frac{\cos \epsilon_i \sqrt{\sin^2 \epsilon_i - (n/n')^2}}{\sin^2 \epsilon_i}$

Reflexión total porque $\epsilon_e = 40^\circ < 45^\circ = \epsilon_i$

\Rightarrow No cambia la amplitud pero sí la polarización

$|r_{||}| = |r_{\perp}| = 1$

$\phi = 45,028^\circ \approx \pi/4$ rad

2ª reflexión, equivalente a 1ª

$\rightarrow r \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i2\phi} \end{pmatrix}$

4) transmisión, incidencia normal $n' \rightarrow n$ sin cambio en polarización

$\approx 0,783 \cdot 1,217 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \approx 0,952 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\pi/2} \end{pmatrix}$

Matriz del dispositivo: ... No importa que > 1 , $T_r = 1,217 \cdot \frac{n}{n'} < 1$

$\approx 0,952 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \rightarrow$ retardador, LCO líneas neutras entradas, eje rápido y. No ideal, absorción

Si $\alpha = 45^\circ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{0,952}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

P. plana P_{45°

P. circular dex. R

T = 90%

29

h, n



$\tan 45^\circ = \frac{h}{z} = 1 \rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow$ actúa inicialmente el factor de transmisión 0,783

(ver apartado anterior). Después actúa en cada reflexión $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$

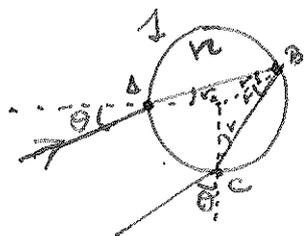
En la reflexión m , el estado será:

$0,783 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \cdot e^{i\phi \cdot m} \end{pmatrix}$ donde $\phi \approx \pi/4 \rightarrow 0,783 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(m\pi/4 - \pi/2)} \end{pmatrix}$

$= 0,783 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} (\frac{m}{2} - 1) \end{pmatrix} \rightarrow$ válido entre $z = mh$ y $z = (m-1)h$ escogiendo $z=0$ donde se produce la 1ª reflexión.

Cada 8 reflexiones (período) pasa de circular \rightarrow elíptica \rightarrow plana \rightarrow elíptica \rightarrow circular de otros \rightarrow circular de otros

Luz natural, desfase aleatorio, suma incoherente (no tienen en cuenta fases)



$n = \theta'$

a) Grado de polarización V

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_v} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}$$

Stokes

Luz natural N:

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + I_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{aplicas Fresnel por separado y vuelves a sumar}$$

A: $t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta')}$
 $t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta'}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')}$

↓
 Transmisión gota:
 $t_{\perp} = t \cdot r' \cdot t'$

B: $r'_{\parallel} = \frac{\tan(\theta' - \theta)}{\tan(\theta' + \theta)}$
 $r'_{\perp} = -\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta' + \theta)}$

$$t_{\perp \perp} = t_{\perp} \cdot r'_{\parallel} \cdot t' = \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} \cdot \frac{\tan(\theta' - \theta)}{\tan(\theta' + \theta)} \cdot \frac{2 \sin \theta \cos \theta'}{\sin(\theta + \theta')}$$

$$= \frac{\sin(2\theta) \sin(2\theta') \cdot \sin(\theta' - \theta) \cdot \cos(\theta' + \theta)}{\sin^3(\theta + \theta') \cos^3(\theta - \theta')}$$

C: $t'_{\perp} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta'}{\sin(\theta' + \theta)}$
 $t'_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta'}{\sin(\theta' + \theta) \cos(\theta' - \theta)}$

$$t_{\parallel \parallel} = \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta')} \cdot \frac{(-) \sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} \cdot \frac{2 \sin \theta \cos \theta'}{\sin(\theta' + \theta)}$$

$$= \frac{\sin(2\theta) \sin(2\theta')}{\sin^3(\theta + \theta')} \cdot (-) \sin(\theta' - \theta)$$

$$t_{\perp \parallel} = -t_{\perp} \cdot \frac{\cos(\theta' + \theta)}{\cos(\theta - \theta')}$$

$T_{\perp} = |t_{\perp}|^2$ (entra y sale en aire)

$T_{\parallel} = A^2 T_{\perp}^2$

$$N = \frac{1}{2} (P_{\perp} + P_{\parallel}) \rightarrow S = \frac{1}{2} (T_{\perp} P_{\perp} + T_{\parallel} P_{\parallel}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} T_{\perp} \\ T_{\perp} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{\parallel} \\ -T_{\parallel} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_{\perp} + T_{\parallel} \\ T_{\perp} - T_{\parallel} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} + T_{\parallel}} = \frac{t_{\perp}^2 (1 - A^2)}{t_{\perp}^2 (1 + A^2)} = \frac{1 - A^2}{1 + A^2}$$

También

$$S = \frac{1}{2} (T_{\perp} P_{\perp} + T_{\parallel} P_{\parallel} + T_{\parallel} P_{\perp} - T_{\perp} P_{\parallel}) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(P_{\perp} + P_{\parallel})}_{2N} T_{\parallel} + P_{\perp} (T_{\perp} - T_{\parallel}) \right]$$

↳ luz natural polarizada

$$b) n_{\text{agua}} = 4/3$$

$$V = A = \frac{1 - A^2}{1 + A^2}$$

$$\text{si } A = 0 = \frac{c(\theta + \theta')}{c^2(\theta - \theta')} \rightarrow c(\theta + \theta') = 0$$

$$\rightarrow \theta + \theta' = \pi/2 \Rightarrow \theta = \theta_{\text{Brewster}} \rightarrow \tan \theta_B = \frac{n_{\text{agua}}}{1}$$

$$\rightarrow \theta_B = 53,13^\circ$$

$$\theta'_B = 36,87^\circ$$

\rightarrow Al reflejarse en B $r_{\parallel} = 0$, se anula una componente, queda luz totalmente polarizada.

Emerge con:

$D = \pi + 2(\theta - \theta') = 147^\circ$, coincide con arcos dres, prácticamente polarizado (84%).

PROPUESTOS

V- Para que la luz reflejada esté totalmente polarizada ($n' = 4/3$), debe incidir con ángulo de Brewster, ya que $r_{\parallel}(\theta_B) = 0$, de manera que sólo queda componente perpendicular reflejada \Rightarrow luz totalmente polarizada.

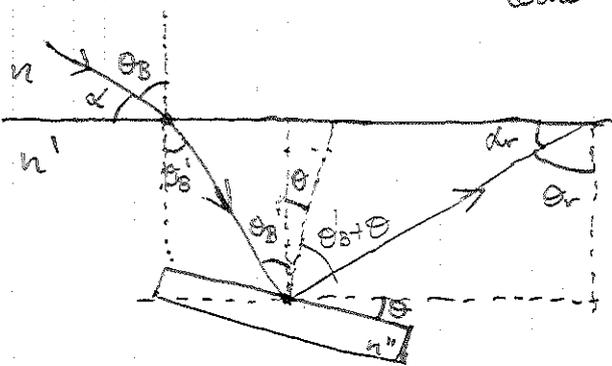
Condición: $\tan \theta_B = \frac{n'}{n} = 4/3 \Rightarrow \theta_B \approx 53,13^\circ$

 α : altura angular del sol

$\alpha = 90^\circ - \theta_B = 36,87^\circ$

Para esta α , se sumerge vidrio ($n'' = 1,6$) formando θ con la horizontal:

Como $\theta_B + \theta_B' = 90^\circ \rightarrow \theta_B' = \alpha$



Nueva condición:

$\theta_B' + \theta$ es ángulo Brewster para $n' \rightarrow n''$

$\tan(\theta_B' + \theta) = \frac{1,6}{4/3}$

$\alpha + \theta = 50,19^\circ = \beta$

$\theta = 50,19^\circ - \alpha = 13,32^\circ$

El luz transmitido está parcialmente polarizado; tras reflejarse con el nuevo ángulo de Brewster se polariza totalmente.

Para que vuelva a la interfase $n-n'$, $2\theta + \theta_B' < 90^\circ$

En efecto: $2 \cdot 13,3^\circ + 36,8^\circ < 90^\circ \checkmark$

Para que pueda emerger, θ_r tiene que ser menor que el ángulo límite $\theta_e = \text{asin} \frac{n}{n'} = 48,6^\circ$

$\theta_r = 2\theta + \alpha = 63,5^\circ$

Por tanto, $\theta_r > \theta_e$ y sufre reflexión total interna, con lo que el luz no puede emerger del agua.

31.- Comprobar que la fórmula de Lorentz-Lorenz verifica, con las aproximaciones oportunas que hay que establecer, la fórmula de Cauchy (1830) para el índice de refracción de gases:

$$n(\lambda) - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

en donde A y B son constantes a determinar.

32.- Demostrar que el índice de refracción de una mezcla de gases vale: $n(\omega) = \sum_i f_i n_i(\omega)$, en donde $n_i(\omega)$ es el índice de refracción de cada uno de los gases y f_i su concentración fraccional molecular (número de moléculas del gas "i" dividido por el número total de moléculas). Como aplicación encontrar el índice de refracción del aire para $\lambda = 589 \text{ nm}$ a partir de los valores $n_{O_2} = 1.000272$ y $n_{N_2} = 1.000297$ correspondientes respectivamente al oxígeno y al nitrógeno. (Considerar el aire como una mezcla de estos dos gases con proporciones respectivas del 75% y el 25%).

33.- A partir de la expresión dada por el modelo clásico para la relación de dispersión, encuentre la fórmula semiempírica de Sellmeier

$$n^2(\lambda) = A + \sum_i \frac{C_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

válida para medios transparentes en las regiones espectrales alejadas de las longitudes de onda de resonancia λ_i . Como aplicación, considerar en la región visible el caso del CaF_2 , del cual se conoce la existencia de dos longitudes de onda de resonancia $\lambda_1 = 94.2 \text{ nm}$ y $\lambda_2 = 35000 \text{ nm}$. La primera de ellas está asociada a una transición electrónica, mientras que la segunda corresponde a una transición entre estados de vibración de iones F^- en la molécula. Encontrar el valor de las constantes de la fórmula de Sellmeier en este caso. (Considerar que $m_F = 3470 m_e$ donde m_e es la masa del electrón)

34.- Considerar un medio dieléctrico, homogéneo e isótropo, sometido a la acción de un campo magnético \vec{B} uniforme y estacionario en la dirección del eje Z, y en el cual se propaga una onda monocromática de frecuencia ω . Haciendo uso del modelo de Lorentz del oscilador electrónico de frecuencia propia ω_0 y menospreciando, para simplificar, el término de amortiguamiento,

a) Escribir la ecuación de movimiento del electrón.
 b) Suponiendo que los electrones del medio oscilan a la misma frecuencia que el campo \vec{E} de la onda plana, demostrar que la polarización \vec{P} del medio puede expresarse como $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, donde la susceptibilidad eléctrica compleja χ es una matriz 3x3 de

la forma
$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & -i\chi_{12} & 0 \\ i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

Obtener una expresión para los coeficientes χ_{11} , χ_{12} y χ_{33} .
 c) Considerar ahora que la onda plana que se propaga en el medio, lo hace en la dirección del eje Z. A partir de la ecuación de ondas inhomogénea, demostrar que en este caso la onda plana está necesariamente polarizada circularmente. Obtener el índice de refracción del medio para el caso en que la polarización de la onda sea dextrógira o levógira.

Problema propuesto

VI.- Considerar el modelo de un átomo en el cual el electrón se encuentra ligado mediante un potencial de oscilador armónico de tipo anisótropo, teniendo asociadas frecuencias propias de oscilación ω_x , ω_y y ω_z diferentes en las direcciones X, Y y Z, respectivamente. Supóngase ahora que una onda electromagnética plana de frecuencia ω se propaga en el seno de un material formado por este tipo de átomos. Con las hipótesis de la teoría clásica del índice de refracción,

a) Demostrar que el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se puede escribir como
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}$$

en donde $\epsilon(\omega)$ es una matriz diagonal 3x3. Obtener una expresión de los elementos de esta.

b) Considerar ahora que la onda incidente se propaga en dirección del eje Z. Probar que los electrones de cada átomo no vibran en la dirección del campo incidente y que el plano de vibración de la polarización eléctrica \vec{P} forma un ángulo θ con el eje X que cumple.

$$\text{tg } \theta = \frac{\omega_x^2 - \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2} \text{tg } \theta_E$$

en donde θ_E es el ángulo que forma el campo eléctrico con el eje X.

34

transformamos modelo a fórmula de Cauchy de la forma $n(\lambda) = 1 + \frac{A}{\lambda^2} + \dots$
 ondas \rightarrow sistema \rightarrow aviación

21+1.- Comprobar que la fórmula de Lorentz-Lorenz verifica, con las aproximaciones oportunas (a establecer), la fórmula de Cauchy (1836) para el índice de refracción de gases

$$n(\lambda) - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

en donde A y B son constantes a determinar.

Errata en el boletín- la fecha de la fórmula de Cauchy es 1836

La fórmula de Cauchy establece una relación entre el índice de refracción y la longitud de onda: el índice de refracción del medio se relaciona con la susceptibilidad eléctrica mediante:

$n^2 = 1 + \chi_e$ dependiendo la χ_e de la frecuencia de vibración del campo incidente y de la

frecuencia propia de resonancia mediante $\chi_e = \frac{N}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^Z \frac{e^2/m}{\omega_i^2 - \omega^2}$ y la frecuencia con la

longitud de onda mediante $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, por lo tanto la relación entre el índice y la longitud de onda es de la forma:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m} \sum_{i=1}^Z \frac{\lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

Ahora teniendo en cuenta las siguientes consideraciones (aproximaciones).

Consideraciones físicas.

Como el índice de refracción es $n > 1$ ya que el sumatorio es > 0 , propiedad que cumplen la mayoría de los materiales transparentes (aire, agua, vidrio, ...) y estamos trabajando a frecuencias ópticas, para las que $\lambda_i < \lambda_{visible}$.

Aproximaciones matemáticas.

Podemos realizar la aproximación binomial $(1+x)^m$ para $\left(1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$ ya que $\frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} \ll 1$

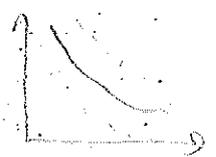
mediante los dos primeros términos del desarrollo, ... $1 + mx + 1/2 m(m-1) x^2 + \dots$ si además posteriormente tenemos en cuenta también que $|n^2(\lambda) - 1| \ll 1$ obtendremos:

$$n(\lambda) = 1 + \frac{Ne^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} \sum_{i=1}^Z \lambda_i^2 \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} \right)$$

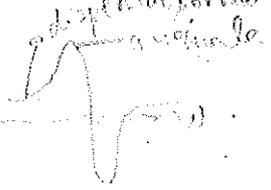
que coincide *cualitativamente* (aunque no cuantitativamente) con la fórmula de Cauchy (1836) que es de la forma:

$$n(\lambda) - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

Como ejemplo, para el aire $n_{aire} = 1.000287566 + (1.3412 \cdot 10^{-18})/\lambda^2$



Wavelength \rightarrow amorf silicio (plasma)



atmosfera \rightarrow como dispersión



31) $n(\lambda) - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$

$$n^2 = 1 + K_e = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m} \sum_i \frac{\lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m} \sum \frac{\lambda_i^2}{1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}}$$

• $n > 1 \rightarrow n \approx 1 + \frac{1}{2}x \dots$ Taylor
 • $\lambda_i < \lambda$ visible

• $\left(1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} \right)^{-1} \approx 1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}$

$$\rightarrow n(\lambda) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m} \sum \lambda_i^2 \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} \right)$$

Lo coincide cualitativamente con $n(\lambda) - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$

Aire:

$$n_{aire} = 1,000287566 + (1,3412 \cdot 10^{-18})/\lambda$$

32)

$$n(\omega) = \sum_i f_i \cdot n_i(\omega) \quad f_i = \frac{N_i}{N}$$

$$n = (1 + y)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}y$$

$$= 1 + \sum_i \frac{N_i}{2\epsilon_0} \left(\frac{e^2/m}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \alpha(\omega) \quad f_i = \frac{N_i}{N}$$

$$n = \sum f_i + \sum \frac{N f_i}{2\epsilon_0} \alpha(\omega) = \sum f_i \left(1 + \frac{N \alpha(\omega)}{2\epsilon_0} \right) = \sum f_i \cdot n_i(\omega)$$

$n_{aire} = 1,00029075$ en cond normales, 25°C, 1atm, 75% - 25%
 $N_2 \quad O_2$

33)

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{N_i f_i^2 \alpha_i}{m_i \epsilon_0 (\omega_i^2 - \omega^2)} = 1 + \sum \frac{N_i \alpha_i}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2}$$

$$\rightarrow n^2 = 1 + \sum K_i \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad \text{Fórmula de Sellmeier}$$

Lejos de la zona de absorción $\lambda \gg \lambda_i \rightarrow$ transiciones en UV

$$n^2 \approx 1 + \frac{Ne^2/m_e}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0} \sum \left(\lambda_i^2 + \frac{\lambda_i^4}{\lambda^2} + \dots \right)$$

$$n \approx 1 + \underbrace{\frac{Ne^2/m_e}{8\pi^2 c^2 \epsilon_0}}_A \sum \lambda_i^2 + \underbrace{\left(\frac{Ne^2}{8\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e} \sum \lambda_i^4 \right)}_{C_2} \frac{1}{\lambda^2} + \dots$$

$\text{CaF}_2 \rightarrow$ no es un gas

$\lambda_1 = 24,2 \mu\text{m}$ UV

$\lambda_2 = 35000 \mu\text{m}$ FAR-IR

$m_1 = m_e, q_1 = e, \lambda_1 = 24,2 \mu\text{m}$

$m_2 = 3470 m_e, q_2 = e, \lambda_2 = 35 \mu\text{m}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \frac{m_2}{m_1} \approx 0,025$

transiciones electrónicas
" "
moleculares

$N_2 = N_1 = N_i ?$



34

↳ Ver hoja

28.- Considerar un medio dieléctrico, homogéneo e isótropo, sometido a la acción de un campo magnético \vec{B} uniforme y estacionario en la dirección del eje Z, y en el cual se propaga una onda monocromática de frecuencia ω . Haciendo uso del modelo de Lorentz del oscilador electrónico de frecuencia propia ω_0 y menospreciando, para simplificar, el término de amortiguamiento,

- Escribir la ecuación de movimiento del electrón.
- Suponiendo que los electrones del medio oscilan a la misma frecuencia que el campo \vec{E} de la onda plana, demostrar que la polarización \vec{P} del medio puede expresarse como $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, donde la susceptibilidad eléctrica compleja χ es una matriz 3x3 de la forma

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & -i\chi_{12} & 0 \\ i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad \text{en osciladores elementales}$$

Obtener una expresión para los coeficientes χ_{11} , χ_{12} y χ_{33} .

c) Considerar ahora que la onda plana que se propaga en el medio, lo hace en la dirección del eje Z. A partir de la ecuación de ondas inhomogénea, demostrar que en este caso la onda plana está necesariamente polarizada circularmente. Obtener el índice de refracción del medio para el caso en que la polarización de la onda sea dextrógira o levógira.

a) Se trata de ver como un campo magnético rompe la simetría del medio.

Inicialmente la ecuación del movimiento venía dada por: $\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$ en donde e es la carga del electrón y $\vec{r} = \vec{r}(t)$, si ahora añadimos un campo magnético, \vec{B} , que produce una fuerza dependiente de la velocidad (y de su dirección). $\vec{F}_B = -e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, la ecuación del movimiento es ahora:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E} - e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

ley de Lorentz
 $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$
los efectos

ley de Newton Maxwell

Si \vec{B} está en la dirección del eje Z ($\vec{B} = B\hat{k}$)

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \dot{y}B\hat{i} - \dot{x}B\hat{j}$$

que, como era de esperar, no tiene componente en Z.

xy la y hay a la izquierda opone a la de la letra

Por otra parte tenemos $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (E_{ox}, E_{oy}, E_{oz}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{s})}$ siendo

$\vec{s} = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{s})}$ entonces las ecuaciones del movimiento, por componentes, serán:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m} E_x - \frac{e}{m} \dot{y}B \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{e}{m} E_y - \frac{e}{m} \dot{x}B \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m} E_z \end{cases} \quad (1)$$

... única con contribución B \rightarrow *xy definiciones*
 \vec{B} / así
R12

b) La solución para z(t) es la de siempre: $z(t) = \frac{(e/m)E_{oz}}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{s})}$ para x e y

suponemos que las vibraciones son a la misma frecuencia que el campo, esto es, ensayamos (solución particular (solución general \rightarrow transitorios)).

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{i(\alpha - \vec{k} \cdot \vec{r})} \rightarrow \dot{x} = i\alpha x \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \\ y(t) = y_0 e^{i(\alpha - \vec{k} \cdot \vec{r})} \rightarrow \dot{y} = i\alpha y \rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \end{cases} \text{ que al sustituir en (1) nos da:}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)x = -\frac{e}{m} E_x - i\frac{eB}{m} \omega y \\ (\omega_0^2 - \omega^2)y = -\frac{e}{m} E_y + i\frac{eB}{m} \omega x \end{cases} \text{ donde hemos eliminado el factor común } e^{i(\alpha - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)x_0 + i\frac{eB}{m} \omega y_0 = -\frac{e}{m} E_{0x} & (a) \\ (\omega_0^2 - \omega^2)y_0 - i\frac{eB}{m} \omega x_0 = -\frac{e}{m} E_{0y} & (b) \end{cases} \text{ de aqu\u00ed podemos despejar } x_0 \text{ e } y_0:$$

(a) $\cdot (\omega_0^2 - \omega^2)$ - (b) $\cdot (i\frac{eB}{m} \omega)$ se van los y_0

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 \omega^2 x_0 = -\frac{e}{m} (E_{0x}(\omega_0^2 - \omega^2) - E_{0y} \frac{ieB}{m} \omega) \text{ como}$$

$$\frac{eB}{m} = \omega_c \equiv \text{frecuencia de ciclotr\u00f3n}$$

$$x_0 = -\frac{e (\omega_0^2 - \omega^2) E_{0x} - i\omega_c \omega E_{0y}}{m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_c^2 \omega^2)}$$

An\u00e1logamente, podemos despejar $x_0 \rightarrow$

$$(a) \cdot (i\omega\omega_c) + (b)(\omega_0^2 - \omega^2) \rightarrow -\omega_c^2 \omega^2 y_0 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 y_0 = -\frac{e}{m} (E_{0y}(i\omega_c \omega) + E_{0x}(\omega_0^2 - \omega^2))$$

$$y_0 = -\frac{e (\omega_0^2 - \omega^2) E_{0y} + i\omega_c \omega E_{0x}}{m ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_c^2 \omega^2)}$$

As\u00ed, incluyendo de nuevo la variaci\u00f3n temporal:

que se puede relacionar con la susceptibilidad, recordando que:

$$\vec{P}(t) = -Ne\vec{r}(t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \rightarrow \vec{r}(t) = -\frac{\epsilon_0}{eN} \chi_e \vec{E} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \text{ identificando}$$

$$\chi_e = \begin{bmatrix} \chi_{11} & -i\chi_{12} & 0 \\ i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\chi_{11} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2}$$

obtenemos a

$$\chi_{12} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

$$\frac{\omega_c \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2}$$

$$\chi_{33} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Nótese que si $\vec{P} = E_0 \vec{u}_z \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{P} \parallel \vec{E}$ en otro caso se rompe y deja de comportarse como un medio homogéneo, mezclándose varios componentes en la polarización (y en $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$)

c) Partimos de la ecuación de ondas inhomogénea

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1)$$

si no hay corrientes macroscópicas.

$$\text{Como } \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2)$$

Además (ecuaciones de Maxwell) $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ y $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ por lo que

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{P} \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{P} \text{ además } \vec{P} \parallel \vec{r} \rightarrow \nabla \cdot \vec{P} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3)$$

Y poniendo (2), (3) y $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ en (1) obtenemos:

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 \chi_e}{1/c^2} \ddot{\vec{E}} \rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} (1 + \chi_e) \ddot{\vec{E}} \text{ para un campo que se propaga en el eje Z}$$

$\rightarrow E_z = 0, E = (E_x, E_y, 0)$ y poniendo $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$; $\partial_x = 0$; $\partial_y = 0$ (ya que $E = f(z) e^{i(\omega t - kz)}$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 1 + \chi_{11} & -i\chi_{12} & 0 \\ i\chi_{12} & 1 + \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{E}_x \\ \ddot{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} (\ddot{E}_x + \chi_{11} \ddot{E}_x - i\chi_{12} \ddot{E}_y) \\ \frac{1}{c^2} (i\chi_{12} \ddot{E}_x + \ddot{E}_y + \chi_{11} \ddot{E}_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ahora ponemos $\begin{cases} -k^2 E_{0x} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_{0x} - \chi_{11} \frac{\omega^2}{c^2} E_{0x} + i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_{0y} \\ k^2 E_{0y} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_{0y} - \chi_{11} \frac{\omega^2}{c^2} E_{0y} - i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_{0x} \end{cases}$

Que es lo que se debe cumplir para que el campo se propague. Reagrupando términos:

$$\left. \begin{aligned} E_{0x} \left(\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) - k^2 \right) - i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_{0y} &= 0 \\ E_{0x} \left(i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) - k^2 \right) E_{0y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es decir:
$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) - k^2 \right) & -i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} \\ i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} & \left(\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) - k^2 \right) \end{vmatrix} = 0$$

dirección z

paralelo

Si hay

ondas de isotropía

ondas ya no esféricas

efecto E sobre luz q se propaga en su sentido

2o término de 0 caracterizamos onda incidente

3 ves 2 direcciones + polarizadas ortogonales

no según

en realidad E_z, B_z yo es muy pequeña, despreciable en s ondas evanescentes

E_x y E_y cumplen las 2 simultáneamente

frase lapidaria

2. ec. 2 inóguo.

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) - k^2 \right]^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right)^2 \chi_{12}^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left[\frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11}) - k^2 \right] = \pm \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \chi_{12}^2$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_{11} \pm \chi_{12})$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}}$$

Si k^2 lo sustituimos en (5):

$$\left. \begin{aligned} \mp E_{0x} \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} - i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_{0y} = 0 \\ E_{0x} i \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{12} E_{0y} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E_{0x} = \pm i E_{0y} \text{ esto es polarización circular a derechas o}$$

izquierdas.

$$\begin{pmatrix} \pm i E_{0y} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = E_{0y} \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} = \pm i \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} E_{0y} \text{ si además ponemos } k = (\omega/c) n$$

$$n_R = \sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}} // +$$

$$n_L = \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}} // -$$

luz se propagara
en eje z
se desfasa $\pm \pi/2$
↳ α, R

ms dtes según polariza

Esto es R y L se propagan con velocidades diferentes. El medio presenta el análogo forzado a la actividad óptica (la luz polarizada lineal gira su plano de polarización \equiv Efecto Faraday)

medio
con campo

intenso I

↳ plano de vibración cambia

↳ a dtes $n_R, n_L \rightarrow$ cambia base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a dtes \rightarrow cambia su estado de polariza

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$



\rightarrow anisotropía

en gas no mixta

en cristal sí

$$V = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = -m (\omega_x^2 x, \omega_y^2 y, \omega_z^2 z)$$

suponemos polarización lineal

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m (\omega_x^2 x, \omega_y^2 y, \omega_z^2 z) = - \hat{e} \frac{e}{m} E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \text{C.C.}$$

\parallel
 $\frac{e}{m} \vec{E}$

Solución homogénea:

$$x_{ih} = e^{i\omega t} x_{i0} \cos(\omega x_i t + \phi_{0i}) \quad i=1,2,3 \quad \begin{matrix} x_1 \equiv x \\ x_2 \equiv y \\ x_3 \equiv z \end{matrix}$$

Solución particular:

$$x_{ip} = - \hat{e} \cdot \hat{u}_i \frac{e}{m} \left[\frac{E_0}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \text{C.C.} \right]$$

$$\vec{P} = -e \vec{r}(t) ; \quad \vec{P} = N \vec{p} \quad \vec{r} \approx \vec{r}_p \quad \text{para } t \gg \frac{1}{\gamma}$$

$$\vec{P} = \frac{e^2}{m} N e^{i\omega t} \hat{u}_i \left(\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} + \text{C.C.} \right)$$

$$\vec{P} = \frac{e^2}{m} N e^{i\omega t} \hat{u}_i \left(\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} + \text{C.C.} \right)$$

Obviamos el C.C. y al final se $(E_i \hat{u}_i)$ toma la parte real

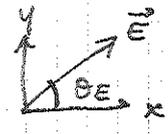
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \epsilon \left(\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \hat{u}_i \right) + \text{C.C.}$$

$$D_i = -\epsilon_0 \frac{E_0 \omega_i^2}{\epsilon_0 m} e^{-i\omega t} + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \epsilon_0 \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} = -\epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \right)$$

$$= \epsilon_0 E_i \left(1 - \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \right) \rightarrow \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & & \\ & \epsilon_{yy} & \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E} = \vec{D}$$

$\epsilon_{ii}(\omega) \rightarrow$ matriz diagonal

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}$$



$$b) \hat{s} = \hat{z} \rightarrow \vec{k} = k \hat{z}, \quad E_z = 0$$

$$\text{tg } \theta = \frac{E_y}{E_x}, \quad \text{tg } \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{r_y}{r_x}$$

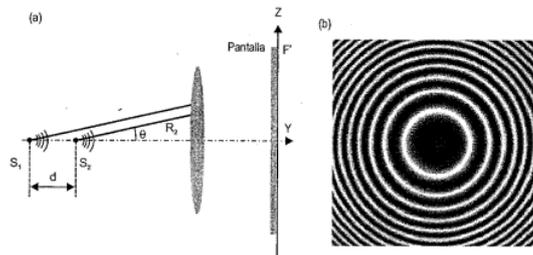
$$\text{si } \gamma \rightarrow 0 \quad \text{y a partir de } \vec{r}_p = -i \frac{2e}{m} E_0 \cos \left(\frac{1}{\omega_x^2 - \omega^2} e_x + \frac{1}{\omega_y^2 - \omega^2} e_y \right) = -2 \frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{E_y}{E_x} \frac{\omega_x^2 - \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2} = \text{tg } \theta = \frac{\omega_x^2 - \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2}$$

Se señala que no se tiene en cuenta la solución homogénea.

35.- Supongamos un dispositivo clásico de Young en el que la rendija fuente, F , emite luz natural monocromática de longitud de onda $\lambda = 0.68 \mu m$. Consideremos que los dos orificios F_1 y F_2 se hallan cubiertos por sendas láminas plano paralelas de vidrio idénticas L_1 y L_2 . Sobre una de ellas se coloca una película jabonosa, L , (índice de refracción $n = 1.33$) cuyo espesor cambia uniformemente con el tiempo debido a la evaporación. Demostrar que la irradiancia en cualquier punto de la pantalla de observación π presenta una variación temporal periódica. Sabiendo que el intervalo de tiempo que transcurre entre máximos de irradiancia sucesivos, detectados en un mismo punto de dicha pantalla, es de $\Delta t = 1.5 \text{ min}$, calcular la velocidad con la que disminuye el grosor de la película. (Además de las suposiciones habituales en los dispositivos interferenciales de Young considerar que la luz incide normalmente sobre las láminas de vidrio).

36.- Considérese dos fuentes puntuales de radiación monocromática ($\lambda = 0.514 \mu m$) que están separadas una distancia d entre ellas. En la dirección perpendicular a la recta en la que están ambas fuentes, se coloca una lente de focal f' y en el plano focal imagen se coloca una pantalla de observación, tal y como muestra la figura adjunta:



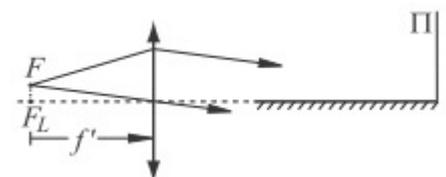
- (a) determinar el orden interferencial que se obtiene en el foco imagen de la lente en el caso en el que $d = 0.26728 \text{ mm}$.
- (b) Determinar la interfranja del diagrama interferencial.

37.- Una rendija fuente F de un dispositivo clásico de Young se ilumina con luz monocromática de $\lambda = 0.6 \mu m$, polarizada linealmente por un polarizador P . Las rendijas de Young F_1 y F_2 , equidistantes de F y distantes entre sí $2a = 1 \text{ mm}$, están colocadas a $D = 4 \text{ m}$ de la pantalla de observación π . Las rendijas F_1 y F_2 se cubren con dos polarizadores P_1 y P_2 idénticos. Obtener la distribución de intensidad que se observa sobre la pantalla, así como la interfranja y la visibilidad de las franjas obtenidas, en los casos siguientes:

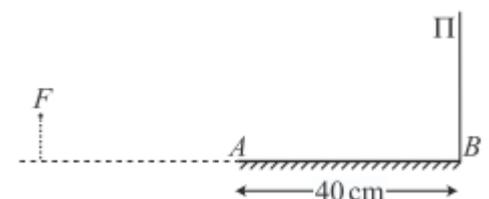
- a) Cuando los ejes de transmisión de P_1 y P_2 son paralelos.
- b) Cuando los ejes de transmisión de P_1 y P_2 forman un ángulo β ($0 \leq \beta < \pi/2$).
- c) Cuando los ejes de transmisión de P_1 y P_2 son ortogonales y sobre la pantalla de observación se sitúa otro polarizador lineal, P' (analizador), el eje del cual forma un ángulo ψ con el de P_1 .

38.- Supongamos un dispositivo interferencial de Lloyd como el de la figura. Una fuente puntual S está colocada a 4 m del borde A de una lámina isotrópica y a 1 cm por encima del plano definido por ella. Las franjas se observan en un plano vertical que pasa por B .

- a) Indicar los límites del campo interferencial.
- b) Calcular el valor de la interfranja para luz monocromática de $\lambda = 0.5 \mu m$ y el número de franjas que se observa en Π .
- c) Si se reemplaza la fuente puntual por una rendija infinitamente fina, ¿cómo hay que orientarla para aumentar la iluminación de las franjas?



39.- Sea un dispositivo interferencial de espejo de Lloyd modificado tal y como se representa en la figura. Suponiendo que la rendija F es infinitamente estrecha, calcúlese la distribución de intensidad sobre la pantalla de observación. Calcúlese la interfranja sabiendo que $f' = 20 \text{ cm}$, $\lambda = 0.5 \mu m$ y $FLF = 0.5 \text{ mm}$. A continuación se aumenta simétricamente, a partir de su posición original, la rendija fuente hasta una anchura $2s = 0.1 \text{ mm}$, siendo ahora la iluminación espacialmente incoherente. Determínese la nueva distribución de intensidad sobre la pantalla P .



VII.- Considérese un dispositivo convencional para la obtención de franjas de Young. La rendija fuente del dispositivo se cubre con un polarizado lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo θ respecto a la dirección perpendicular a la rendija, y se sitúa una lámina de media onda sobre uno de los orificios que componen la abertura doble. El eje de la lámina es perpendicular a la línea que une los dos orificios.

- a) Determinar la visibilidad del patrón interferencial que se obtiene en la pantalla de observación. Obtener los valores de θ para los que la visibilidad sea máxima o mínima.
 - b) Generalizar los resultados del apartado anterior para el caso en que la lámina retardadora no es de media onda sino que introduce un desfase cualquiera δ .
-

35

$$\lambda = 0,68 \mu\text{m}$$

$$n = 1,33$$

Cond. Young, vidrio incidente normal

$$\Delta L = \Delta L_0 + L(t) \cdot (n-1) = L_2 - L_1$$

∴ aire

$$= \frac{2ay}{D} + L(t)(n-1)$$

$$\delta = k_0 \Delta L = \frac{4\pi a}{\lambda D} y + \frac{2\pi}{\lambda} L(n-1)$$

$$\frac{I}{I_0} = 2 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi a}{\lambda D} y + \frac{2\pi}{\lambda} L(n-1) \right) \right]$$

$$= 2 \left[1 + \cos (\delta_0(y) + \phi(t)) \right]$$

→ no cambia interferencia,
sólo se mueve el patrón.

Periodicidad espacial: $i \equiv$ interferencia

$$\frac{4\pi a}{\lambda D} (y+i) = \frac{4\pi a}{\lambda D} y + 2\pi \rightarrow i = \frac{\lambda D}{2a}$$

Periodicidad temporal:

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \cdot L(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \cdot L(t+T) + 2\pi$$

$$p = L(t) - L(t+T) = \frac{\lambda}{(n-1)}$$

⇒ Variación temporal periódica hasta que se evapora completamente.

Si $T = 1,5 \text{ min}$ y suponemos la evaporación reduce linealmente L , la velocidad de evaporación:

$$v_e = \frac{p}{T} = \frac{\lambda}{(n-1)T} = 2,29 \cdot 10^{-8} \text{ m/s} = 23 \text{ nm/s}$$

$$L(t) = L(t=0) - v_e \cdot t = L_0 - v_e t = L_0 - \frac{\lambda t}{(n-1)T}$$

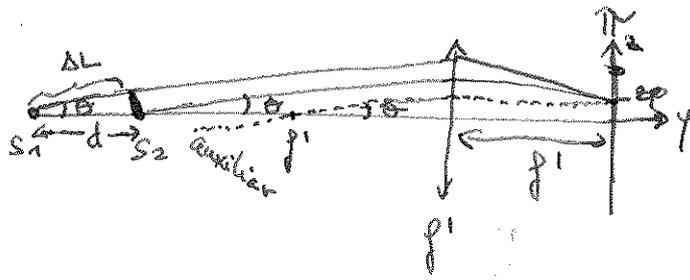
$$\frac{I}{I_0} = 2 \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi \cdot y}{i} + \frac{2\pi}{\lambda} L_0 (n-1) - \frac{2\pi t}{T} \right] \right]$$

Si la película está en F_2 , al disminuir su espesor, el argumento del coseno decrece ($t >$), con lo que el patrón se moverá hacia arriba ($y >$ para que el argumento sea constante).

36

p. 150 Carrón

$$\lambda = 0,514 \mu\text{m} = 514 \text{ nm}$$



$$\cos \theta = \frac{\Delta L}{d}$$

Stigmatismo, Δ amiso entre planos \rightarrow lentes = 0

$$\Delta L = d \cos \theta \rightarrow \delta = k_0 \Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta$$

$$\frac{I}{I_0} = 2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta \right) \right)$$

a) $d = 0,26728 \text{ mm} \rightarrow$ foco imagen, $\theta = 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{I}{I_0} &= 2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{514 \text{ nm}} \cdot 0,26728 \text{ mm} \cdot 1 \right) \right) = 2 \left(1 + \cos \left(\underbrace{2\pi \cdot 520}_{\varphi = 2m\pi} \right) \right) \\ &= 2(1 + 1) = 4 \quad \rightarrow \text{máximo interferencial de orden } m = 520 \end{aligned}$$

b) $\frac{2\pi}{\lambda} d \cos(\theta + i) = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta + 2\pi$; $\frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_m = 2\pi m$

$$\frac{\lambda}{d} = \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin i - \cos \theta \rightarrow \text{interfranja } i \text{ angular no es constante}$$

\rightarrow Se prevé que en la pantalla interfranja en t tampoco lo sea, como se comprueba en la gráfica del enunciado.

$$z_p(m) = f' \tan \theta \quad (\text{a partir del dibujo}) \quad d \cos \theta = m \lambda$$

Máximo

$$= f' \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{d} \right)^2} \cdot \frac{d}{m\lambda} = f(m) \rightarrow \text{depende del orden}$$

37

$\lambda = 0,6 \mu m$

$P_1 \equiv P$

$P_1 \equiv F_1 \delta, F_2 \gamma \equiv P_2$

$2a = 1 mm$

$D = 4 m$

Incide luz natural ($I=2$)

Término interferencial:

$\sim \vec{E}_{F1} \cdot \vec{E}_{F2} \sim E_{F1} \cdot E_{F2} \cdot \underbrace{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2}_{\cos(\gamma - \delta) = \cos \beta}$



Tratamiento general:

$P_{\alpha} \equiv P_{00} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tras pasar F

$F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \cdot \cos \delta = \vec{\Delta}_1$ Ley de Malus, o con matriz Jones

$F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \cdot \cos \gamma = \vec{\Delta}_2 \rightarrow \vec{\Delta}_2 = \vec{\Delta}_2^0 \cdot e^{i\gamma} \rightarrow \gamma = \gamma_{Young} = \frac{4\pi a y}{\lambda D}$

$\vec{\Delta}_{\pi} = \vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2, I = \vec{\Delta}_{\pi} \cdot \vec{\Delta}_{\pi}^*$

Solvo π : superposición $\{ I = I_1 + I_2 + 2I_1 I_2 = \vec{\Delta}_1 \cdot \vec{\Delta}_1^* + \vec{\Delta}_2 \cdot \vec{\Delta}_2^* + 2 \vec{\Delta}_1 \cdot \vec{\Delta}_2^*$

$I \propto \cos^2 \delta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \delta \cos \gamma \underbrace{\cos(\gamma - \delta)}_{\cos \beta} \cdot (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma})$

$= \cos^2 \delta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \delta \cos \gamma \cos \beta \cos \gamma$

$\Rightarrow \underbrace{\cos^2(\gamma - \beta)}_M + \cos^2 \gamma + \underbrace{2 \cos(\gamma - \beta) \cos \gamma \cos \beta \cos \gamma}_N$

$\hookrightarrow V = \frac{(M+N) - (M-N)}{(M+N) + (M-N)} = \frac{2N}{2M} = \frac{N}{M} = \frac{2 \cos(\gamma - \beta) \cos \gamma^2 \cos \beta}{\cos^2 \gamma + \cos^2(\gamma - \beta)}$

$P \equiv$ interfranja

$P = \frac{\lambda D}{2a} \rightarrow$ independiente de polarizadores

a) P_1 y P_2 paralelos $\rightarrow \gamma = \delta, \beta = 0$

$I \propto \cos^2 \delta + \cos^2 \delta + 2 \cos^2 \delta \cos \gamma = 2(1 + \cos \gamma) \cdot \cos^2 \delta //$

$V = \frac{2 \cos^2 \delta \cos \beta^2}{2 \cos^2 \delta} = 1 //$

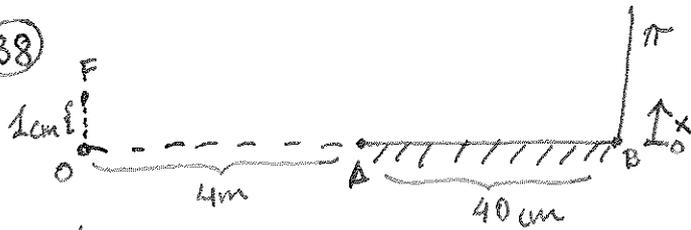
b) β general \rightarrow resultado general

$\beta = \pi/2 \rightarrow V = 0 \rightarrow I = 1$

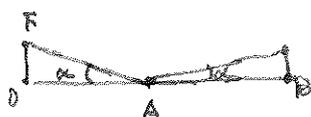
$\gamma = \pi/2 \rightarrow V = 0$ (sólo hay una rendija) $\rightarrow I = \sin^2 \beta$

$\gamma = 0 \rightarrow V = \frac{2 \cos^2 \beta}{1 + \cos^2 \beta} \rightarrow I = 1 + \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \beta \cos \gamma = 2 \cos^2 \beta (1 + \cos \gamma) + \underbrace{(1 - \cos^2 \beta)}_{\text{fondo}}$

38



a) Límites: rayo FA



$$\tan \alpha = \frac{1 \text{ cm}}{4 \text{ m}} = \frac{x_{\text{max}}}{40 \text{ cm}}$$

rayo FB

$$\hookrightarrow x_{\text{min}} = 0$$

$$\hookrightarrow x_{\text{max}} = \frac{40 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}}{4 \text{ m}} = 0,1 \text{ cm} = 1 \text{ mm}$$

Interferencias entre $x = 0 \text{ mm}$ y $x = 1 \text{ mm}$.

b)

$$a = 1 \text{ cm}$$

$$2a = 2 \text{ cm}$$

$$D = 4 \text{ m} + 40 \text{ cm} = 440 \text{ cm}$$

$$\lambda = 500 \text{ nm}$$

\approx Young, F' virtual (reflejo) + F real

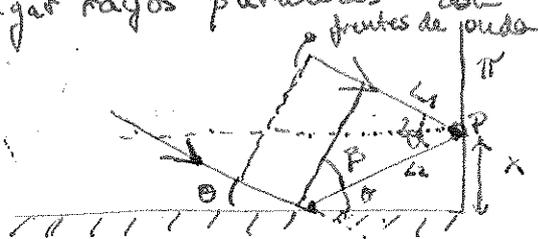
$$i = \frac{\lambda D}{2a} = 0,11 \text{ mm} = 110 \mu\text{m}$$

En 1 mm caben $\frac{1 \text{ mm}}{0,11 \text{ mm}} = 9,09$ franjas \rightarrow 9 franjas (3 brillantes, 6 oscuras)

en $x = 0$ hay un mínimo porque rayo reflejado sufre fase de π .

c) Orientarla perpendicularmente al plano definido por OFA.

39) Llegar rayos paralelos con ángulo θ :



Se superponen en P

$$\sin \theta = x/L_2$$

$$180 - 90 - 2\theta = \beta = 90 - 2\theta$$

$$\sin \beta = L_1/L_2$$

$$\rightarrow \Delta L = L_2 - L_1 = L_2 - L_2 \sin \beta = L_2 (1 - \sin(90 - 2\theta))$$

$$= \frac{x}{\sin \theta} (1 - \cos 2\theta) = \frac{x}{\sin \theta} (2 \cdot \sin^2 \theta) = 2x \sin \theta$$

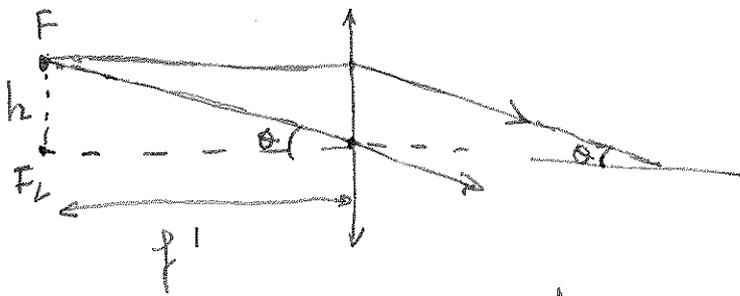
$$\varphi = k_0 \Delta L + \pi \text{ por reflexión} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta x + \pi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos \varphi, \quad I_1 = 1, \quad I_2 = R \cdot I_1$$

$$= 1 + R + 2 \sqrt{R} \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta x + \pi \right)$$

$$p = \text{mínimo franja} \quad \frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta p = 2\pi \rightarrow p = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

$$V = \frac{2 \sqrt{R}}{1 + R}$$



$$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$$

$$f' = 20 \text{ cm}$$

$$h = 0,5 \text{ mm}$$

$$\tan \theta = \frac{h}{f'} \rightarrow p = \frac{\lambda}{2 \sin(\arctan \frac{h}{f'})}$$

$$\theta \approx 0,14^\circ \quad = 0,1 \text{ mm} = 100 \mu\text{m}$$

b) $2s = 0,1 \text{ mm}$

suma incoherente $0,5 \text{ mm} \ll 20 \text{ cm}$

suponemos $\theta \ll 1$ $\hookrightarrow \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{x'}{f'}$

$$I = \sum_{h+s}^{h-s} dI = \int_{h-s}^{h+s} \frac{1}{2s} (\Delta + R + 2\sqrt{R} \cos(\frac{4\pi x}{\lambda} \cdot \frac{x'}{f'} + \pi)) dx'$$

Normalizamos la irradiancia incidente en la zona $2s$.

$$= \frac{1}{2s} \int_{h-s}^{h+s} (\Delta + R + 2\sqrt{R} \frac{\lambda f'}{4\pi x} \sin(\frac{4\pi x}{\lambda f'} x' + \pi)) dx'$$

$$= \Delta + R - \frac{\sqrt{R}}{s} \frac{\lambda f'}{4\pi x} \left[\sin(\frac{4\pi x}{\lambda f'} x (h+s)) - \sin(\frac{4\pi x}{\lambda f'} x (h-s)) \right] \quad \frac{4\pi x}{\lambda f'} x h = \alpha$$

$$= \Delta + R - \frac{\sqrt{R}}{s} \frac{\lambda f'}{4\pi x} \left(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos(-\beta) - \sin(-\beta) \cos \alpha \right) \quad \frac{4\pi x}{\lambda f'} x s = \beta$$

$$= \Delta + R - \frac{\sqrt{R}}{s} \frac{\lambda f'}{4\pi x} (2 \sin \beta \cos \alpha) = \Delta + R - 2\sqrt{R} \frac{1}{\beta} \sin \beta \cos \alpha$$

$$= \Delta + R - 2\sqrt{R} \text{sinc}\left(\frac{4\pi x s}{\lambda f'}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi x h}{\lambda f'}\right)$$

$$\rightarrow V = \frac{2\sqrt{R}}{\Delta + R} \text{sinc}\left(\frac{4\pi x s}{\lambda f'}\right) \rightarrow = V_0 \cdot \tilde{F}(\text{rect})$$

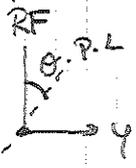
\hookrightarrow transformada Fourier rectángulo \hookrightarrow sinc

si $s \rightarrow 0 \quad V = V_0 = \frac{2\sqrt{R}}{\Delta + R} \checkmark$

En realidad es más complicado porque el sinc también depende de x . Sólo si $1 \gg \frac{sx}{\lambda f'}$ con todos los valores de x , se cumple la expresión de V . \hookrightarrow $s \ll h$, comparado con la frecuencia del coseno.

VII

Suponemos la RF a 90° desde nuestro S. REF.:



dentro a la salida: P.L.: $\begin{pmatrix} \cos(\pi/2 - \theta) \\ \sin(\pi/2 - \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

Lámina retardadora en S_2 , orientada \perp a la horizontal, paralela a RF: $\delta = \pi/2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \rightarrow$ sobre $P_{\pi/2-\theta} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta e^{i\delta} \end{pmatrix}$

Intensidad en un punto P de la pantalla

$I \propto \vec{E} \cdot \vec{E}^*$

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} e^{i\beta_1} + E_0 \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta e^{i\delta} \end{pmatrix} e^{i\beta_2}$

$I \propto |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^*$
 $= 2E_0^2 + E_0^2 \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} (\sin\theta \cos\theta e^{-i\delta}) e^{i(\beta_1 - \beta_2)} + \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta e^{i\delta} \end{pmatrix} (\sin\theta \cos\theta) e^{i(\beta_2 - \beta_1)}$
 $= 2E_0^2 + E_0^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta e^{-i\delta}) e^{i(\beta_1 - \beta_2)} + c.c.$

α : Diferencia usual en Young

$I = 2I_0 + I_0 \sin^2\theta \cdot 2\cos\alpha + I_0 \cos^2\theta \cdot 2\cos(\alpha + \delta)$

$= 2I_0 (1 + \cos(\alpha + \delta) \cos^2\theta + \sin^2\theta \cos\alpha) = I(\alpha, \delta, \theta)$

a) $\delta = \pi$

$I = 2I_0 (1 - \cos\alpha \cos^2\theta + \cos\alpha \sin^2\theta)$

$= 2I_0 (1 - \cos\alpha \cos 2\theta)$

si $\cos 2\theta > 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi/2$

si $\cos 2\theta < 0, \pi/2 \leq \theta \leq \pi$

$\Rightarrow I_{max} = 2I_0 (1 + |\cos 2\theta|) \quad \alpha = 0 \quad \alpha = \pi \quad I_{max} = 2I_0 (1 + \cos 2\theta) \quad (\alpha = 0)$

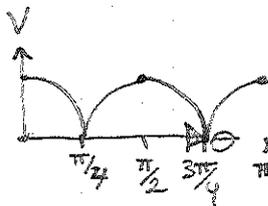
$I_{min} = 2I_0 (1 - |\cos 2\theta|) = 0 \quad (\alpha = 0) \quad I_{min} = 2I_0 (1 + \cos 2\theta) \quad (\alpha = \pi)$

$$I_{max} + I_{min}$$

$$1 - |\cos 2\theta| + 1 + |\cos 2\theta|$$

V máximo/mínimo

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \text{ \& gráficamente:}$$



1 Máximo en $\theta = 0, \pi$ (posiciones equivalentes del P.L.)

Otro " en $\theta = \pi/2$

2 mínimos en $\theta = \pi/4, 3\pi/4$

Para un δ arbitrario:

$$= M + N \cos(\delta - \alpha)$$

$$= M - N \sin \alpha \cos \delta + N \sin \delta \cos \alpha$$

$$= 1 + \cos^2 \theta \cos \alpha \cos \delta - \cos^2 \theta \sin \alpha \sin \delta + \sin^2 \theta \cos \alpha \cos \delta$$

$$= 1 + \cos \alpha (\cos^2 \theta \cos \delta + \sin^2 \theta) + \sin \alpha (-\cos^2 \theta \sin \delta)$$

$$\Rightarrow M = 1, N \cos \delta = \cos^2 \theta \sin \delta$$

$$I = 2I_0 (1 + \cos^2 \theta \cos(\alpha + \delta) + \sin^2 \theta \cos \alpha) \quad N \sin \delta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos \delta$$

$$N^2 \sin^2 \delta + N^2 \cos^2 \delta = N^2$$

$I_{max, min}$:

$$= \cos^4 \delta + \sin^4 \delta + \cos^2 \theta \cos^2 \delta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \delta$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow -\cos^2 \theta \sin(\alpha + \delta) - \sin^2 \theta \sin \alpha = 0 = \cos^4 \theta \sin^4 \delta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \delta = 1 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos \delta - 1)$$

$$\hookrightarrow -\sin^2 \theta \sin \alpha = \sin(\alpha + \delta) - \sin^2 \theta \sin(\alpha + \delta) = 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} (1 - \cos \delta)$$

$$-\sin^2 \theta \sin \alpha = \sin \alpha \cos \delta \cos^2 \theta + \sin \delta \cos \alpha \cos^2 \theta = 1 - \frac{\sin^2 2\theta \sin^2 \delta}{2}$$

$$-\sin \alpha (\cos \delta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \sin \delta \cos \alpha \cos^2 \theta \sin \delta \quad \hookrightarrow V = \frac{N}{M} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\theta \sin^2 \delta}{2}}$$

$$\tan \alpha = - \frac{\sin \delta \cos^2 \theta}{\cos \delta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = - \frac{\sin \delta}{\cos \delta + \tan^2 \theta}$$

Si α_r es solución, $\alpha_r + \pi$ también, y uno corresponderá a un máximo y otro a un mínimo (depende de π). $\alpha_r(\delta, \theta)$

$$I_{max} = 2I_0 (1 + \cos^2 \theta \cos(\alpha_r + \delta) + \sin^2 \theta \cos \alpha_r)$$

$$I_{min} = 2I_0 (1 + \cos^2 \theta \cos(\alpha_r + \pi + \delta) + \sin^2 \theta \cos(\alpha_r + \pi)) = 2I_0 (1 - \cos^2 \theta \cos(\alpha_r + \delta) - \sin^2 \theta \cos \alpha_r)$$

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\cos^2 \theta \cos(\alpha_r + \delta) + \sin^2 \theta \cos \alpha_r}{\cos^2 \theta \cos(\alpha_r + \delta) + \sin^2 \theta \cos \alpha_r}$$

camino más sencillo $\rightarrow \delta = \pi$, se recupera caso e)

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} \sin^2 \delta} \quad \rightarrow \delta = \pi, \text{ se recupera caso e)}$$

$\delta = 0, 2\pi$ (Nº hay mínimo) $\rightarrow V = 1$ en (δ, α_r)

$\delta = \pi$, si $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$
 $\delta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rightarrow V = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{2V} 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 2\theta \cdot 2 \cos 2\theta = \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\theta}{V} = 0 \quad \rightarrow \sin 4\theta = 0$$

$\theta = 0 \rightarrow V_{max}$
 $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow V_{min}$
 $\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow V_{max}$
 $\theta = \frac{3\pi}{4} \rightarrow V_{min}$

TRABAJO TUTELADO

1.- Una lente delgada convergente de distancia focal f de diámetro ϕ se corta según un plano meridiano y los dos fragmentos así obtenidos se separan una distancia l . El espacio que queda entre ambas piezas se rellena con un material opaco, tal y como se muestra en vista frontal en la figura 1.

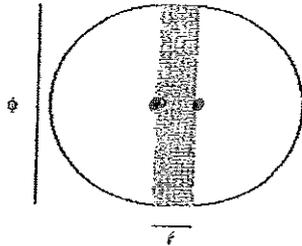


Figura 1

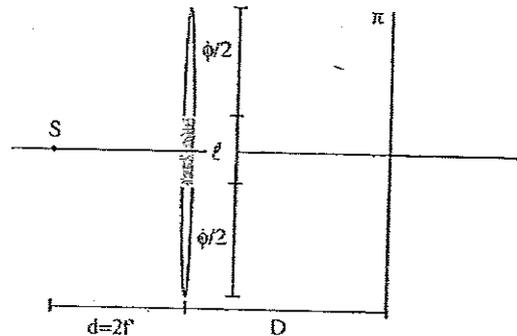


Figura 2

Se ilumina con una fuente puntual S y se sitúa una pantalla de observación π tal y como se presenta en la figura 2.

- Determinar la posición y la distancia de las dos imágenes S_1 y S_2 que se obtiene de la fuente y la separación entre estas.
- Determinar el rango de los valores de l que hace que las fuentes S_1 y S_2 produzcan interferencias en algún punto del espacio. Para valores de l dentro de dicho intervalo, calcular la distancia mínima D necesaria para que se observen interferencias sobre la pantalla.
- Cuantifica el valor de la interfranja y la extensión del Campo interferencial obtenido sobre la pantalla para valores de D que hagan válidas las aproximaciones habituales en la experiencia clásica de Young.
- Se sitúa sobre una de las "semilentes" una lámina planoparalela de espesor e y de índice de refracción n . Describir cuantitativamente el efecto que se observa en el diagrama de interferencias del apartado anterior. ¿Es este efecto igual para cualquier plano de observación elegido?

① Considérese un interferómetro de Michelson iluminado por una fuente puntual policromática que emite un flujo por unidad de número de onda, $\sigma=1/\lambda$, dado por la función $B(\sigma)$. A partir de la posición de equilibrio de los brazos del interferómetro, el espejo móvil se desplaza longitudinalmente $\Delta/2$.

- Hállese la expresión de la intensidad que llega al detector en función de Δ .
- Demostrar que la función $W(\Delta) = 2I(\Delta) - I(0)$ permite obtener la distribución espectral $B(\sigma)$ por medio de una transformada de Fourier inversa con respecto al desplazamiento Δ .
- En la práctica el desplazamiento Δ está limitado por un valor máximo $\Delta_{m\acute{a}x}$, debido a ello la

función experimental que se puede obtener es: $W_{exp} = \begin{cases} W(\Delta), & \text{si } |\Delta| \leq \Delta_{m\acute{a}x} \\ 0 & \text{si } |\Delta| \geq \Delta_{m\acute{a}x} \end{cases}$ *escalón*

Hállese qué limitación impone esta restricción en el poder de resolución del dispositivo cuando se utiliza como espectroscopio de acuerdo con lo demostrado en el apartado b).

$$x = \frac{l}{2f'} (D_{\min} + \frac{D_{\min} \frac{x}{2}}{\phi/2 + l/2} + 2f') = \frac{l}{2f'} \cdot D_{\min} \left(1 + \frac{x}{\phi + l}\right) + l$$

$$= \frac{l}{2f'} \cdot 2f' \frac{\phi + l}{\phi - l} \left(1 + \frac{x}{\phi + l}\right) + l = l \left(\frac{x}{\phi - l} + \frac{\phi + l}{\phi - l} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow x \left(1 - \frac{l}{\phi - l}\right) = l \left(\frac{\phi + l}{\phi - l} + 1 \right) = l \left(\frac{2\phi}{\phi - l} \right)$$

$$x = \frac{l (2\phi) (\phi - l)}{(\phi - l)(\phi - 2l)} = \frac{2l\phi}{\phi - 2l} = \frac{1}{\frac{1}{2l} - \frac{1}{\phi}}$$

Si $D < D_{\min} + L$

$$L \frac{x}{D + 2f'} = \frac{2l}{4f'} \rightarrow x = \frac{l}{2f'} (D + 2f') = l \left(1 + \frac{D}{2f'}\right)$$

d) $\Delta L = \Delta L_{\text{Young}} = (n-1)e$ (eje y hacia arriba) =
 ↳ se mueve el patrón

$$\frac{I}{I_0} = 2 \left[1 + \cos \left(\delta_{\text{Young}} - \frac{2\pi(n-1)e}{\lambda} \right) \right] = 2 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi ay}{\lambda D} - \phi \right) \right]$$

$$= 2 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi l}{\lambda(D-2f')} \left(y - \frac{(n-1)e}{2l} \cdot (D-2f') \right) \right) \right]$$

Desplazamiento hacia arriba $y_0 = \frac{(n-1)e}{2l} (D-2f')$

↳ depende de D !
 mayor desplazamiento a mayor D .

2

$$\sigma = 1/\lambda$$

$$B(\sigma)$$

$$\Delta/2$$

$$a) I(\Delta)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \frac{\Delta}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2\pi\sigma\Delta$$

$$E' = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\varphi(t)} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\varphi(t)+\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i\varphi(t)} (1 + e^{i\varphi})$$

↳ fluctuación temporal

$$I' = E' \cdot E'^* = 2I_0 (1 + \cos\varphi) = 2I_0 (1 + \cos 2\pi\sigma\Delta)$$

$$I(0) = I(\Delta=0) = 4I_0$$

$$dI = 2I_0 B(\sigma) (1 + \cos 2\pi\sigma\Delta) d\sigma$$

$$I = 2I_0 \int_0^{\infty} B(\sigma) (1 + \cos(2\pi\sigma\Delta)) d\sigma = 2I_0 \int_0^{\infty} B(\sigma) d\sigma + 2I_0 \int_0^{\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\Delta) d\sigma$$

Normalizado a la unidad

$$2 \int_0^{\infty} B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\Delta) d\sigma = \int_0^{\infty} B(\sigma) (e^{j2\pi\sigma\Delta} + e^{-j2\pi\sigma\Delta}) d\sigma \rightarrow \text{simetrizamos}$$

= I(0)/2

$$= \int_0^{\infty} B(\sigma) e^{j2\pi\sigma\Delta} d\sigma + \int_0^{\infty} B(-\sigma) \cdot e^{j2\pi\sigma\Delta} d\sigma$$

$$i) \text{ Parte par: } B_p(\sigma) = \frac{1}{2} [B(\sigma) + B(-\sigma)] \rightarrow \text{si } \sigma > 0 \quad B_p = \frac{1}{2} B(\sigma)$$

$$\text{" impar: } B_i(\sigma) = \frac{1}{2} [B(\sigma) - B(-\sigma)] \quad \sigma \leq 0 \quad B_i = \frac{1}{2} B(-\sigma)$$

$$I(\Delta) = \frac{I(0)}{2} + 2I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) e^{i2\pi\sigma\Delta} d\sigma = \frac{I(0)}{2} + 2I_0 \tilde{B}_p(\Delta)$$

↳ Transformada de Fourier
Inversa respecto a Δ

c)

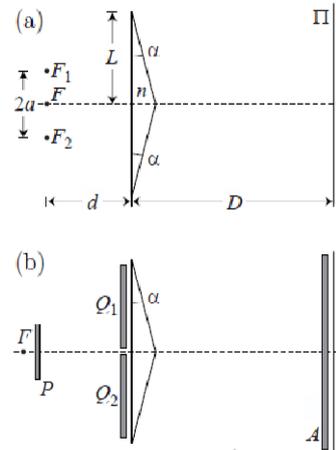
$> \Delta \rightarrow$ patrón picado intensidad por atenuación y coherencia ya que la longitud del tren de ondas es limitada y no se llegan a superponer.

40.- Consideremos un dispositivo clásico para la obtención de franjas de Young, en el que la rendija fuente se puede considerar de anchura despreciable.

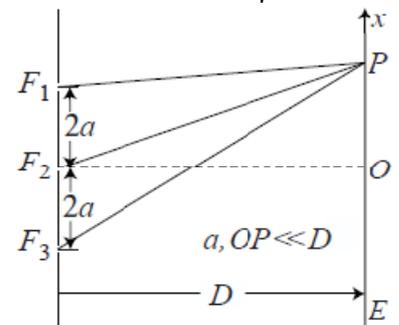
- a) ¿Cuánto hay que desplazar la rendija fuente, F , sobre el plano en que se encuentra, para que la figura interferencial observada en la pantalla π sea idéntica a la original?
- b) Si se sustituye la rendija fuente por un conjunto de N rendijas paralelas equidistantes, muy estrechas e incoherentes entre sí, ¿cuál ha de ser la separación entre ellas para que el patrón observado sobre π sea igual al anterior pero más luminoso?. ¿Qué ocurre si en estas condiciones la pantalla de observación se sitúa en otra posición?
- c) Si ahora suponemos que la fuente tiene una anchura s y se sitúa a una distancia $d = 1.5 m$, calcular la visibilidad de las franjas y determinar la anchura máxima que puede tener la rendija para que la visibilidad siga siendo buena ($V \geq 2/\pi$).
- d) Considérese ahora que la fuente incoherente se compone de dos rendijas, análogas a la del apartado anterior y situadas simétricamente respecto de esta, separadas una distancia $2b$. Calcular la ley de variación de la intensidad sobre la pantalla de observación y la visibilidad de las franjas obtenidas. Demostrar que cuando $s = 2b$, la expresión anterior se reduce a la correspondiente al caso de una rendija fuente sencilla de ancho $2s$.

41.- Se dispone de un dispositivo interferencial como el de la figura (a), biprisma de Fresnel iluminado por una fuente puntual monocromática F de longitud de onda λ .

- a) Demostrar que este sistema es equivalente a un dispositivo clásico de franjas de Young en el que la separación entre las dos fuentes puntuales es $2a = 2(n-1)\alpha d$. Se supone que los prismas son delgados y que la incidencia de la luz en ellos es casi normal.
- b) Se coloca sobre el haz incidente un polarizador lineal P y sobre cada prisma una lámina de cuarto de onda para la radiación utilizada, tal y como se indica en la figura (b). El eje rápido de Q_1 es perpendicular al de Q_2 y ambos están a 45° con el eje de transmisión de P . ¿Qué distribución se obtiene en la pantalla?
- c) Por último, observamos el patrón sobre la pantalla π a través de un analizador A cuyo eje de transmisión es paralelo al de P . ¿Qué distribución de intensidades se observará ahora?. ¿Cambiará este patrón interferencial al girar el analizador?



42.- Sea un dispositivo interferencial, como el de la figura, constituido por tres orificios cuasi puntuales, iguales y equidistantes ($F_1F_2 = F_2F_3 = 2a$), que se ilumina coherentemente con un haz plano monocromático. Obtener una expresión matemática sencilla para la distribución de intensidades $I(x)$ del patrón interferencial que se observa sobre la pantalla E en los casos siguientes:



- a) Los tres orificios actúan como emisores secundarios de radiación.
- b) Se obtura la apertura F_2 .
- c) Frente a las aperturas F_1 y F_3 se colocan sendas láminas delgadas no absorbentes tales que cada una introduce un desfase adicional $\delta = \pi/2$ respecto a la luz procedente de F_2 .

Represente las tres curvas $I(x)$ anteriores, especificando, para cada una de ellas. Su periodo y la visibilidad del patrón.

43.- Sobre un vidrio de índice n , rodeado de aire, se deposita una lámina de caras plano paralelas de espesor e e índice de refracción N . El conjunto se ilumina con una radiación monocromática de longitud de onda en el vacío λ_0 , de intensidad unidad y en incidencia normal. Demuéstrese que la intensidad de la onda resultante de la interferencia múltiple es:

$$I_r = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \phi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \phi}$$

donde r_1 y r_2 son los coeficientes de reflexión de los dioptrios, en el sentido aire-vidrio y vidrio-lámina respectivamente, y ϕ es el desfase introducido por dos reflexiones sucesivas en el interior de la lámina. Hállese el valor de esta reflexión para $\phi=0$ y $\phi=\pi$. Para este último caso encuéntrese para qué valor de N el factor de reflexión es nulo y para qué valor es 0.5. Para la aplicación tómesese $n = 1.5$.

44.-Un haz plano de luz monocromática ($\lambda=0.6 \mu m$) incide sobre una película jabonosa ($n=4/3$) que presenta forma de cuña. Suponiendo que la variación del espesor es muy pequeña podemos considerar que el haz incidente lo hace normalmente a la superficie de la película. Encontrar la diferencia de espesor entre dos franjas consecutivas brillantes u oscuras.

44. - Considérese una lamina plano paralela de vidrio, semimetalizada en ambas caras, de espesor e e índice de refracción n , ambos rigurosamente constantes, que se ilumina en incidencia normal. Se desea emplear este dispositivo como filtro interferencial.

(a) Indíquese el espesor que ha de tener la lámina para que la intensidad transmitida tenga un máximo para $\lambda= 550 \text{ nm}$ y para que este sea el único máximo en el intervalo $400 \text{ nm} < \lambda < 750 \text{ nm}$. Tómese el índice de refracción $n=1.5$. Si el factor de reflexión es $R=0.9$, determínese el ancho de banda de la luz transmitida.

(b)¿Cómo se modifica la longitud de onda del máximo de transmisión cuando el haz incide con un ángulo i sobre la lámina?.

(NOTA.- Despréciense los cambios de fase introducidos en la reflexión en los recubrimientos metálicos)

----- Problema propuesto

VIII.- Una cubeta de caras plano paralelas tiene una pared intermedia que divide el espacio interior en dos compartimentos, cada uno de los cuales se llena con un líquido transparente diferente. Los índice de refracción de los líquidos son n y $n+\Delta n$, respectivamente. La pared intermedia puede desplazarse de manera que es posible variar los espesores e_1 y e_2 manteniendo el espesor total e . Este elemento se sitúa en uno de los brazos de un interferómetro de Michelson, inicialmente equilibrado, que se ilumina con una fuente puntual monocromática de longitud de onda $\lambda=550 \text{ nm}$.

a) Demuéstrese que la intensidad recibida por el detector es una función periódica de e_2 .

b) Si cuando pasamos progresivamente de $e_2= 0$ a $e_2 = 10 \text{ mm}$ la intensidad evoluciona a lo largo de 3755 periodos, encuéntrase la diferencia Δn entre los índice de refracción de los dos líquidos.

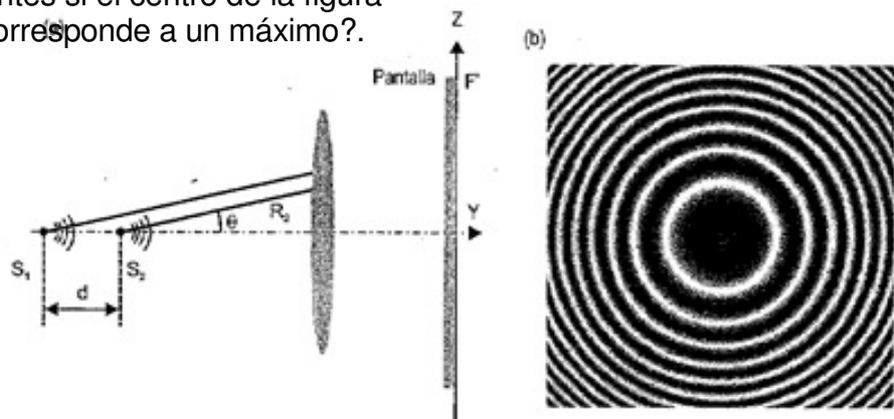
33.- Una cubeta de caras plano paralelas tiene una pared intermedia que divide el espacio interior en dos compartimentos, cada uno de los cuales se llena con un líquido transparente diferente. Los índices de refracción de los líquidos son n y $n+\Delta n$, respectivamente. La pared intermedia puede desplazarse de manera que es posible variar los espesores e_1 y e_2 manteniendo el espesor total e . Este elemento se sitúa en uno de los brazos de un interferómetro de Michelson, inicialmente equilibrado, que se ilumina con una fuente puntual monocromática de longitud de onda $\lambda=550$ nm.

- Demuéstrese que la intensidad recibida por el detector es una función periódica de e_2 .
- Si cuando pasamos progresivamente de $e_2=0$ a $e_2 = 10$ mm la intensidad evoluciona a lo largo de 3755 periodos, encuentre la diferencia Δn entre los índices de refracción de los dos líquidos.

34.- Considérese un interferómetro de Fabry-Perot en el vacío con un espesor

e . Se denomina intervalo entre órdenes, $\Delta\lambda$, a la distancia que separa dos longitudes de onda cuyos órdenes de interferencia difieren en una unidad (considérese incidencia normal y espesor constante).

- Calcúlese $\Delta\lambda$ para el caso en que $e=2.5$ mm y $\lambda = 500$ nm.
- ¿Cuál sería el orden de interferencia en el centro del patrón interferencial para $\lambda=500$ nm?
- Si los anillos se observan en el plano focal de una lente con $f'=2$ m, ¿cuáles son los radios de los dos primeros anillos brillantes si el centro de la figura corresponde a un máximo?



40

$$a) \frac{I}{I_0} = I_r = 2 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi a}{\lambda D} \left(y + y_s \cdot \frac{D}{d} \right) \right) \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{4\pi a}{\lambda D} (y + \Delta + y_s \frac{D}{d}) = \frac{4\pi a}{\lambda D} (y + y_s \frac{D}{d}) + 2m\pi$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{m \lambda D}{2a}$$

de ecuación I_r proviene de considerar la diferencia de caminos

$$\Delta L = \Delta L_{Young} + \Delta L_s$$

Lo equivalente a Young: $\frac{2ay_s}{d}$

tres simplificar $d \sqrt{1 + \frac{(x'+a)^2 + y^2}{d^2}} - d \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2 + y^2}{d^2}}$ con condiciones de Young

b) Situarse entre sí a $\frac{m \lambda D}{2a}$, 1 centrado.

$$I_r = \sum I_i = I_0 \cdot N$$

→ suma incoherente, pero son equivalentes (con a de patrones) si separados Δm

Si cambia D pero no a, los patrones ya no se superpondrán en la misma posición, con lo que se perderá visibilidad progresivamente.

c) Ancho de s
 $d = 1.5m$

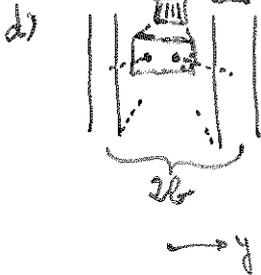
Transformada de Fourier de función rectángulo

$$\Delta I = \frac{2I_0}{s} \int_{-s/2}^{s/2} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi a}{\lambda D} y + \frac{4\pi a}{\lambda d} y_s \right) \right) dy_s$$

$$V = \text{sinc } \Omega = \text{sinc} \left(\frac{2\pi a s}{\lambda d} \right) \geq \frac{2}{\pi} = 0,64$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \Omega}{\Omega} \geq \frac{2}{\pi} \rightarrow \Omega \leq \pi/2$$

$$\frac{2\pi a s}{\lambda d} \leq \pi/2 \rightarrow s \leq \frac{\lambda d}{4a}$$



→ Incoherentes

$$\alpha = \frac{4\pi a}{\lambda D} y \quad \beta = \frac{4\pi a}{\lambda d} b$$

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_r = 2 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{2\pi a s}{\lambda d} \right) \cos \left(\frac{4\pi a}{\lambda D} \left(y + b \frac{D}{d} \right) \right) \right)$$

$$+ 2 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{2\pi a s}{\lambda d} \right) \cdot \cos \left(\frac{4\pi a}{\lambda D} \left(y - b \frac{D}{d} \right) \right) \right)$$

$$= 2 \left(2 + \text{sinc} \left(\frac{2\pi a s}{\lambda d} \right) \cdot \left(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos (-\beta) - \sin \alpha \sin (-\beta) \right) \right)$$

$$= 2 \left(2 + \text{sinc } \Omega \cdot 2 \cos \alpha \cos \beta \right) = 4 \left(1 + \text{sinc } \Omega \cdot \cos \frac{4\pi a}{\lambda D} y \cdot \cos \frac{4\pi a}{\lambda d} b \right)$$

$$\Omega = \frac{2\pi a s}{\lambda D}, \quad V = \text{sinc } \Omega \cdot \cos \frac{4\pi a b}{\lambda d}$$

$S_c \quad s = 2b$

$$\hookrightarrow \frac{\sin \frac{\Omega}{2}}{\frac{\Omega}{2}} \cdot \cos(\dots) \cdot \cos(\dots) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi a b}{\lambda d}\right)}{\frac{4\pi a b}{\lambda d}} \cos \frac{4\pi a}{\lambda D} \cos \frac{4\pi a b}{\lambda d}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin\left(\frac{8\pi a b}{\lambda d}\right)}{\frac{4\pi a b}{\lambda d}} \cdot \cos \frac{4\pi a}{\lambda D} = \text{sinc}\left(\frac{8\pi a b}{\lambda D}\right) \cdot \cos \frac{4\pi a}{\lambda D} = \text{sinc}\left(\frac{4\pi a s}{\lambda D}\right) \cdot \cos(\dots)$$

$$= \text{sinc}\left(\frac{2\pi a (2s)}{D}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi a y}{\lambda D}\right)$$

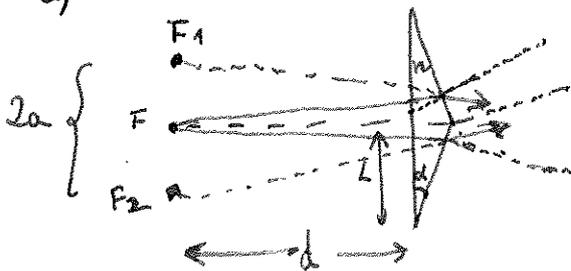
$\hookrightarrow \Omega$ de una rendija centrada de anchura $2s$.

$$I_r = 4 \left(1 + \text{sinc} \frac{\Omega_{2s}}{\dots} \cdot \cos(\dots) \right)$$

\hookrightarrow Doble de intensidad por ser 2 rendijas juntas.

(44)

a)



prismas delgados
incide cuasirnormal

rayo por vértice:



θ_i en 2ª cara $\approx \alpha$
 $n \sin \alpha = 1 \cdot \sin r \rightarrow n d \approx r$
 $r - \alpha = \beta$



$\tan \beta = \frac{a}{d} \rightarrow a = d \tan \beta$

$2a = 2d \tan(r - \alpha) \approx 2d(r - \alpha)$

$\hookrightarrow 2a = 2d(n\alpha - \alpha) = 2d\alpha(n - 1) // \rightarrow$ Equivalente a Young, fuentes virtuales

b) Elegimos sin pérdida de generalidad polarizador a 45° L.T.

$\vec{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ (si incide luz natural, intensidad mitad al pasar, lo obviamos)
 $\alpha = 45^\circ \hookrightarrow$ vector de Jones

Q_1 eje rápido a 90° , Q_2 a 0° , si al revés, intercambiar $1 \leftrightarrow 2$ pero no altera resultado. $\hookrightarrow \lambda/4 \leftrightarrow \pi/2$

$Q_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \quad Q_2 \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_{45} \hookrightarrow R$

$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$P_{45} \hookrightarrow \alpha$ ortogonales

$\vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\vec{A}_2 = \vec{A}_2^{00} \cdot e^{i\varphi}$
 $\hookrightarrow \varphi$: diferencia de camino

Sobre la pantalla se superponen $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

$$\frac{\vec{I}}{I_0} = \vec{A} \cdot \vec{A}^* = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1^* + \vec{A}_2 \cdot \vec{A}_2^* + \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2^* + \vec{A}_1^* \cdot \vec{A}_2$$

$$= I_1 + I_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \end{pmatrix}}_{=0} \cdot e^{i\psi} + c.c. \right) = I_1 + I_2$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad \rightarrow \text{No hay interferencias}$$

c) Añadimos analizador con ángulo ψ respecto a C.T. ($Q_N = 0^\circ$).

La matriz Jones:

$$\vec{A}_1' = \begin{pmatrix} c^2\psi & s\psi c\psi \\ s\psi c\psi & s^2\psi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c^2\psi + is\psi c\psi \\ s\psi c\psi + is^2\psi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (c\psi + is\psi)c\psi \\ (c\psi + is\psi)s\psi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi} \underbrace{\begin{pmatrix} c\psi \\ s\psi \end{pmatrix}}_{P_\psi}$$

$$\vec{A}_2' = (\text{análogo}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c\psi \\ s\psi \end{pmatrix}}_{P_\psi} \cdot e^{-i\psi} \cdot e^{i\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} P_\psi \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} - \psi + \psi)}$$

Los Paralelos, prod. escalar = 1 $\begin{pmatrix} c\psi \\ s\psi \end{pmatrix} \cdot (c\psi \ s\psi) = 1$

$$I_r = I_1 + I_2 + I_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (e^{i(\frac{\pi}{2} - \psi + \psi - \psi)} + c.c.)$$

$$= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\psi + \psi\right)_{\text{Young}}$$

→ Franjes de Young, visibilidad = 1.

Un cambio en ψ desplaza el patrón. si aumentó ψ , el patrón se desplaza hacia arriba, pero sin cambiar la intensidad ni la visibilidad.

Si $\psi = 45^\circ$ (paralelo a P):

$$I_r = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \psi\right) = 1 + \cos\psi$$

(42)

$$a) \vec{A}_p = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \vec{A}_0 (e^{-i\varphi} + 1 + e^{i\varphi}) \quad \varphi_{\text{Young}} = \frac{4\pi a x}{\lambda D}$$

$$= \vec{A}_0 (1 + 2\cos\varphi)$$

$$I \doteq \vec{A}_p \cdot \vec{A}_p^* = I_0 (1 + 2\cos\varphi)^2 = I_0 (1 + 4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)$$

$$= I_0 \left(1 + 4\cos\varphi + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) \right) = I_0 (3 + 4\cos\varphi + 2\cos 2\varphi)$$

• bien:

$$4\cos^2\varphi/2 - 1 = 1 + 2\cos\varphi$$

$$I_r = (1 + 2\cos\varphi)^2 = (2\cos^2\varphi/2 + 2(\cos^2\varphi/2 - 1))^2 = (3\cos^2\varphi/2 - \sin^2\varphi/2)^2$$

• bien:

$$\vec{A}_p = \vec{A}_0 e^{-i\varphi} (1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi}) \quad \text{progression géométrique}$$

$$= \vec{A}_0 \cdot e^{-i\varphi} \cdot \frac{e^{i3\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = \vec{A}_0 \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{i\varphi/2} \frac{(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})}{(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})}$$

$$= \vec{A}_0 \cdot \frac{\sin 3\varphi/2}{\sin \varphi/2}$$

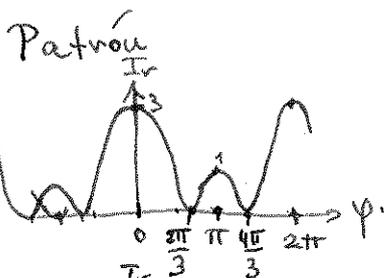
$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 3\varphi/2}{\sin^2 \varphi/2}$$

$$b) \vec{A}_p = \vec{A}_0 (e^{-i\varphi} + 0 + e^{i\varphi}) = 2\vec{A}_0 \cdot \cos\varphi$$

$$I_r = 4\cos^2\varphi = 2 + 2\cos 2\varphi = 2(1 + \cos 2\varphi)$$

$$c) \vec{A}_p = \vec{A}_0 (e^{-i\varphi} \cdot e^{i\pi/2} + 1 + e^{i\varphi} \cdot e^{i\pi/2}) = \vec{A}_0 (1 + 2i\cos\varphi)$$

$$I_r = |1 + 2i\cos\varphi|^2 = 1 + 4\cos^2\varphi = 1 + 2 + 2\cos 2\varphi = 3 + 2\cos 2\varphi$$

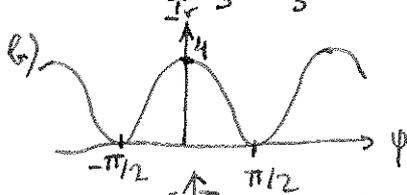


à φ :

$$i\varphi = 2\pi/3 \rightarrow p = \lambda D/6a$$

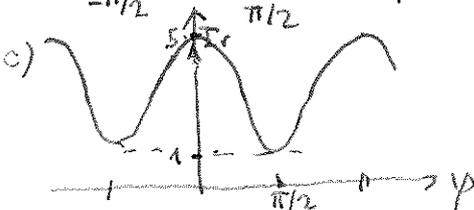
$$\Delta\varphi = 2\pi \quad \delta = \frac{\lambda D}{2a}$$

$$V_\varphi = 1 \quad v = 1$$



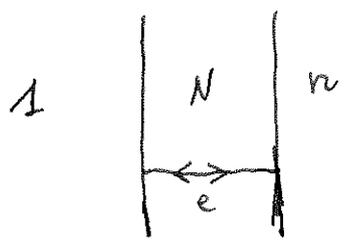
$$p = \frac{\lambda D}{4a}$$

$$v = 1$$



$$p = \frac{\lambda D}{4a}$$

$$v = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > \frac{2}{\pi}$$



$$\Delta L = 2eN$$

$$\delta = \frac{4\pi eN}{\lambda}$$

$$1 \rightarrow N \quad r_1 \quad t_1$$

$$N \rightarrow n \quad r_2$$

$$N \rightarrow 1 \quad r_1' = -r_1 \quad t_1'$$

- Onda 1: r_2
- Onda 2: $t_1 \cdot r_2 \cdot t_1' \leftarrow e^{i\delta}$
- Onda 3: $t_1 \cdot r_2 \cdot r_1' \cdot r_2 \cdot t_1' \leftarrow e^{i2\delta}$
- Onda p: $t_1 t_1' r_2 \cdot (r_1' r_2)^{p-2} \cdot e^{i(p-1)\delta}$

$$E = \sum_{p=2}^{\infty} \overbrace{t_1 t_1' r_2 \cdot (r_1' r_2)^{p-2}}^T e^{i(p-1)\delta} A_0 + r_1 A_0$$

$$= A_0 (r_2 + T r_2 \sum_{p=0}^{N-2} (r_1' r_2)^p e^{i(p+1)\delta}) = A_0 (r_2 + T r_2 e^{i\delta} \sum_{p=0}^{N-2} ((r_1' r_2) e^{i\delta})^p)$$

lim $N \rightarrow \infty$

$$= A_0 (r_2 + \frac{T r_2 e^{i\delta}}{1 - r_1' r_2 e^{i\delta}}) \quad \leftarrow r_1' = -r_1$$

$$= A_0 \left(\frac{r_2 + r_1^2 r_2 e^{i\delta} + T r_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} \right) \quad T = 1 - r_1^2$$

$$= A_0 \left(\frac{r_2 + r_1^2 r_2 e^{i\delta} + r_2 e^{i\delta} - r_1^2 r_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} \right) = A_0 \left(\frac{r_1 + r_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta}} \right)$$

$$I = E \cdot E^* = I_0 \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \delta} \right)$$

$$I_w(\delta=0) = \frac{(r_1 + r_2)^2}{(1 + r_1 r_2)^2} \quad r_2 = \frac{1-N}{1+N} \quad r_2 = \frac{N-n}{N+n}$$

$$= \left(\frac{\frac{1-N}{1+N} + \frac{N-n}{N+n}}{1 + \frac{1-N}{1+N} \cdot \frac{N-n}{N+n}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{N+n - N^2 - Nn + N-n + N^2 - Nn}{(1+N)(N+n)}}{\frac{N+n + N^2 + Nn + N-n - N^2 + Nn}{(1+N)(N+n)}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{2N(1-n)}{2N(1+n)} \right)^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 = \left(\frac{0,5}{2,5} \right)^2 = 0,04$$

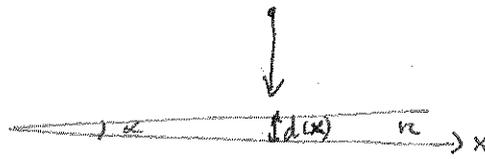
$$I_r(\delta=\pi) = \left(\frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 = \left(\frac{N+n - N^2 - Nn - N+n - N^2 + Nn}{N+n + N^2 + Nn - N+n + N^2 - Nn} \right)^2 = \left(\frac{2(n - N^2)}{2(n + N^2)} \right)^2$$

$$= \left(\frac{n - N^2}{n + N^2} \right)^2 \quad \text{Si } N=n \rightarrow I_r = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n - N^2}{n + N^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} n + \frac{1}{\sqrt{2}} N^2 = n - N^2 \rightarrow N^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\rightarrow N = \sqrt{n \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)} \approx 0,507$$

44) $\lambda = 600 \text{ nm}$
 $n = 4/3$



$$\Delta L = 2nd$$

$$\delta = 2k_0nd + \pi \rightarrow \delta(d) = \delta(d+p) = 2\pi \rightarrow 2\pi = 2k_0np$$

$$\hookrightarrow p = \frac{\lambda}{2n} = 225 \text{ nm}$$

$$I_r = 2(1 + \cos \delta)$$

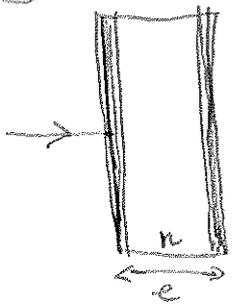
$$= 2(1 - \cos(2k_0nd)) = 2(2 \sin^2(\frac{2k_0nd}{2})) = 4 \sin^2(k_0nd)$$

$$d \approx x \alpha$$

$$d_{\max} \rightarrow k_0nd_{\max} = (2m+1)\pi/2 \rightarrow d_{\max} = \frac{(2m+1)\lambda}{4n}$$

$$d_{\min} \rightarrow \dots = m\pi \rightarrow d_{\min} = \frac{m\lambda}{2n}$$

45)



a) $\lambda_c = 550 \text{ nm}$
 $\Delta\lambda \approx 200 \text{ nm}$
 $n = 1,5$
 $R = 0,9$

$\lambda_r = 400 \text{ nm}$
 $\lambda_v = 750 \text{ nm}$

$$2ne = \Delta L = m\lambda \rightarrow e = \frac{\lambda_c \cdot m}{2n}$$

Y necesitas que al menos:

$$e = \frac{\lambda_r}{2n} (m-1) = \frac{\lambda_v}{2n} (m+1)$$

(Resonancias siguientes en los extremos del visible)

$$m \lambda_c = \lambda_r (m-1)$$

$$m \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_r} = m-1 \rightarrow m = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_c}{\lambda_r}} = 3,75$$

$$m \cdot \lambda_c = \lambda_v (m+1) \rightarrow m = \frac{1}{\frac{\lambda_c}{\lambda_v} - 1} = 2,7$$

→ Elegimos el menor m para que sea válido en ambos casos.
 $m < 2,7$

En $m = 2,7$, la resonancia $m-1$ está más allá del rojo, con lo que no hay problema. Por tanto, elegimos $m=2$ (si elegiésemos $m=3,75$ habría resonancia por encima de 700 nm)

Con $R=0,9$, ancho de banda: $\epsilon \approx \frac{4}{VF}$
 $\hookrightarrow F = \frac{4R}{(1-R)^2} = 360$

$\hookrightarrow \epsilon \approx 0,21 \text{ rad} \rightarrow \Delta\lambda \approx 0,21 \cdot \lambda_c \approx 116 \text{ nm}$
 $\lambda_{res}(m=2) = 550 \text{ nm}$
 $\lambda_{res}(m=1) = 400 \text{ nm}$
 $\lambda_{res}(m=3) = 367 \text{ nm}$

c) $\frac{4\pi ne}{\lambda'} \cdot \cos \epsilon' = \frac{4\pi n}{\lambda} \rightarrow \lambda' = k \lambda_c \rightarrow k = \cos \epsilon' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \epsilon'}{n^2}} \rightarrow \lambda' < \lambda_c$
 $\sin i = 1,5 \sin \epsilon' \uparrow$
 $\Delta\lambda = \lambda_c - \lambda'$
 se mueve hacia la izquierda

Etalon

problema examen
7-8 veas

Franjas Fabry-Perot por transmisión.

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + F \sin^2 \frac{\Phi}{2}}$$

con $\Phi = 2\pi \frac{2ne \cos \epsilon}{\lambda}$, estando los máximos en $\Phi = 2\pi m$, para $m \in \mathbb{N}$ (orden de

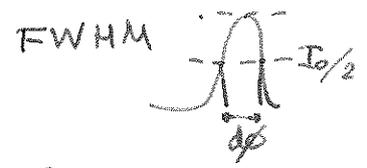
interferencia). Las franjas pueden obtenerse variando el espesor, la longitud de onda o el ángulo de incidencia (como sucede con fuente puntual). F se define como

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

siendo $R=r^2$ el factor de reflexión de una de las superficies, supuestas idénticas. Se ignoran posibles desfases adicionales en las reflexiones internas.

La ~~semit~~ anchura a media altura en Φ y en λ de los máximos es:

$$d\Phi = \frac{4}{\sqrt{F}} \quad (\text{independiente de } \Phi, m) \quad d\lambda = \lambda \frac{d\Phi}{\Phi} = \lambda \frac{4}{\sqrt{F}} \frac{1}{2\pi m}$$



Los máximos sucesivos se producen para $\Phi = 2\pi m$, o bien para $\lambda = \frac{2ne}{m}$ (incidencia normal).

La fineza del resonador (número de máximos que cabrían entre 2 consecutivos) se define como:

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{d\Phi} = \pi \frac{\sqrt{F}}{2}$$

que sólo depende de la reflectancia de los espejos.

El poder resolutivo es:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{d\lambda} = \pi \frac{\sqrt{F}}{2} m = m\mathcal{F}$$

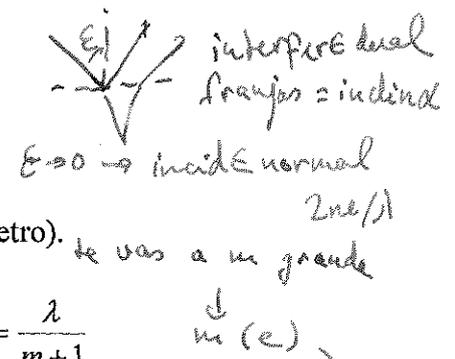
que depende del orden de interferencia (es decir del espesor del interferómetro).

La separación entre 2 longitudes de onda que dan intensidad máxima será:

$$\Delta\lambda = \lambda[\Phi = 2\pi m] - \lambda[\Phi = 2\pi(m+1)] = 2ne \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) = 2ne \left(\frac{1}{m(m+1)} \right) = \frac{\lambda}{m+1}$$

Así, para resolver bien una longitud de onda dada, necesitaremos \mathcal{R} alto. Dada una reflectividad de los espejos esto implica un orden (m) alto. Pero esto reduce el rango de longitudes de onda ($\Delta\lambda$) que se puede examinar.

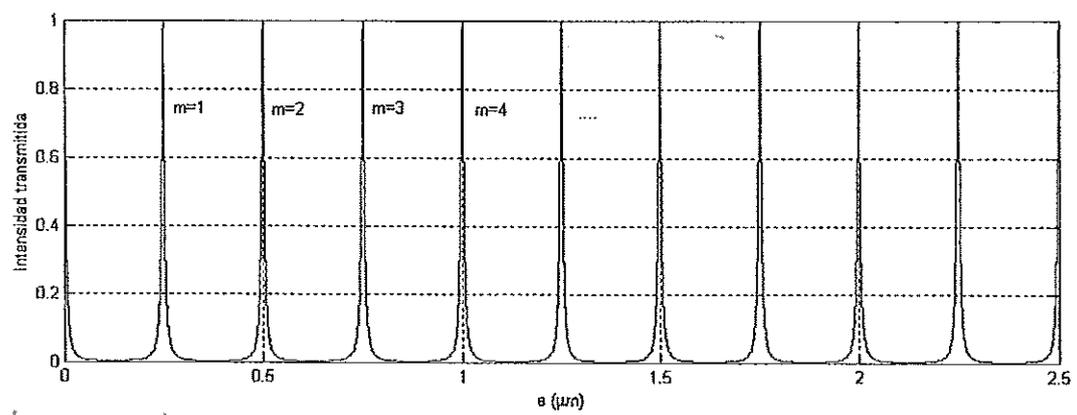
Franjas de X
= espesor
en unidades



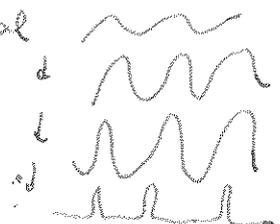
Ejemplo: Aplicación en la medida de espectros.

Tomamos $R=0.9$, $n=1$ e incidencia normal. Se considera un espectro dado y se varía el espesor de modo continuo varios órdenes de interferencia, midiendo la intensidad transmitida.

Si consideramos un espectro monocromático de una sola longitud de onda $\lambda_0=500$ nm la intensidad en función del espesor es:



interferencia dual

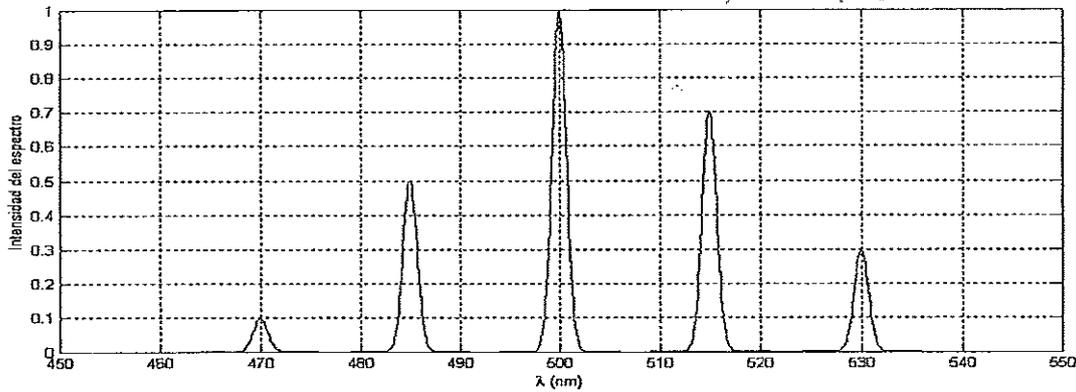


d espesor
... distintos órdenes

máximos
+ estrechos y
separados

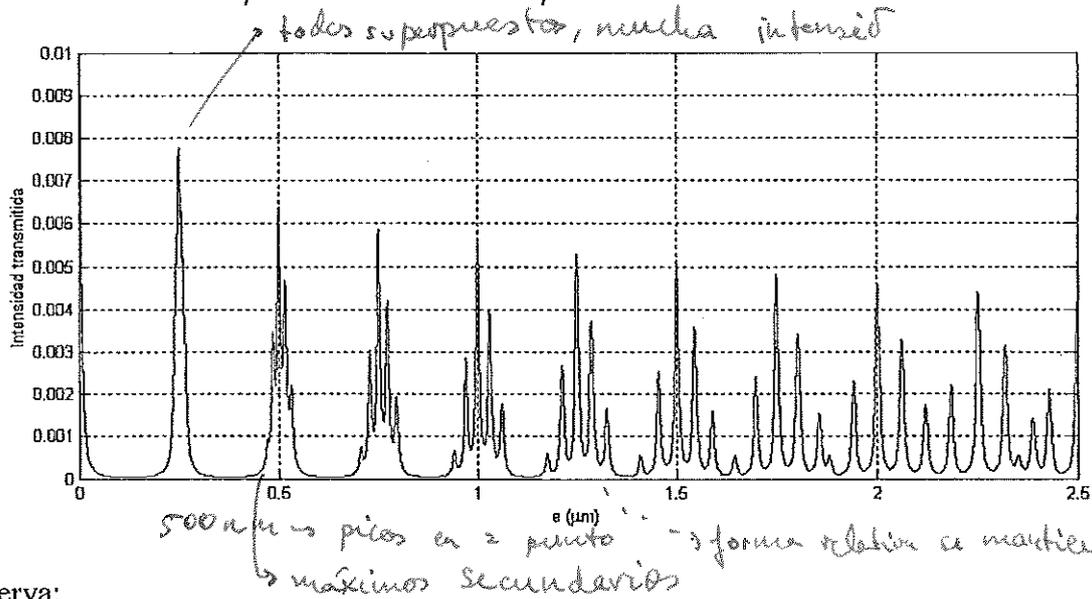
El orden de interferencia (m) es el número de longitudes de onda exactas que caben en una vuelta completa en la cavidad ($2e$). Por ejemplo, $m=4$ corresponde con $4\lambda = 2e$, es decir, $e=2\lambda$. Para estos valores $F=360$ y $\mathcal{F}=29.8$. Es decir se podrían resolver unos 30 máximos entre órdenes sucesivos.

Consideremos ahora un espectro formado por varias longitudes de onda (separadas 15 nm):



Al pasar por el Fabry-Perot la distintas longitudes de onda no interfieren entre sí, así que se puede calcular la intensidad total para este espectro como la suma (o integral, en su caso) de las intensidades para cada longitud de onda:

$$I_{total} = \sum_i \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{2\pi m e \cos \epsilon}{\lambda_i}} = \sum_i \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{2\pi e}{\lambda_i}}$$



Se observa:

- Para órdenes bajos no se resuelven las líneas del espectro. Por ejemplo para $m=1$ ($e=0.250$) la resolución para 500 nm sería: $d\lambda = \frac{\lambda}{m\mathcal{F}} \approx \frac{500}{1 \times 30} = 16 \text{ nm}$, que no es suficiente para apreciar la separación de las líneas espectrales.
- Para órdenes altos se resuelven las líneas, pero se solapan espectros de distintos órdenes. Por ejemplo para $m=8$ ($e=2 \mu\text{m}$) la resolución: $d\lambda = \frac{\lambda}{m\mathcal{F}} \approx \frac{500}{8 \times 30} \approx 2 \text{ nm}$. Obsérvese, que la línea espectral de 530 nm se superpone con la de 470 del orden siguiente. En la práctica no se podrían distinguir entre sí.
- En órdenes "apropiados" ($m=4$) se tiene suficiente resolución sin solapamiento.

espectroscopia de red

cuantizado
contribución de varios fenómenos

filtro interferencial \rightarrow Δx
espectro continuo

PROPUESTO VII

Fernando Hueso González

Inicialmente, el interferómetro está equilibrado, es decir,

$$\Delta L_0 = 0 \rightarrow \phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L_0 = 0 \rightarrow \text{dos fuentes virtuales están en el mismo punto y en fase. } I_0: \text{ intensidad de cada haz. } \oplus$$

$$I = 2I_0 \left\{ 1 + \cos \phi_0 \right\} = 4I_0$$

$$\lambda = 550 \text{ nm} \quad \text{término interferencial: } \phi_0 = 0$$

Si colocamos la cubeta, en un brazo recorrerá ^{2 veces (ida y vuelta)} la distancia e por un índice n_0 , y en el otro por n y $e + \Delta n$, es decir habrá una diferencia de camino óptico adicional, y por tanto un desfase entre las fuentes virtuales (que siguen en el mismo punto):

$$\Delta L' = 2n_0 e_1 + 2(n + \Delta n) e_2 - 2n_0 e = 2(n - n_0) e + 2e \Delta n$$

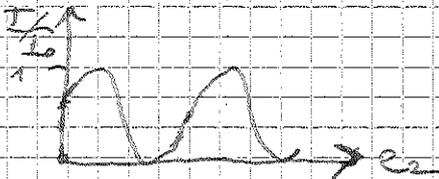
→ Esto provocará interferencias, pues es equivalente a desplazar uno de los espejos en las condiciones iniciales, aunque la diferencia está en que no se ven anillos.

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} (e(n - n_0) + e_2 \Delta n) \cdot 2$$

↓
si colocas una lente

$$a) \frac{I}{2I_0} = 1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (e(n - n_0) + e_2 \Delta n) \right)$$

Variación periódica de I (e_2)



b) Cuando haya pasado un periodo, el argumento del coseno habrá cambiado en π :

$$\frac{4\pi}{\lambda} (cte + e_2 \Delta n) + 2\pi = \frac{4\pi}{\lambda} (cte + (e_2 + p) \Delta n)$$

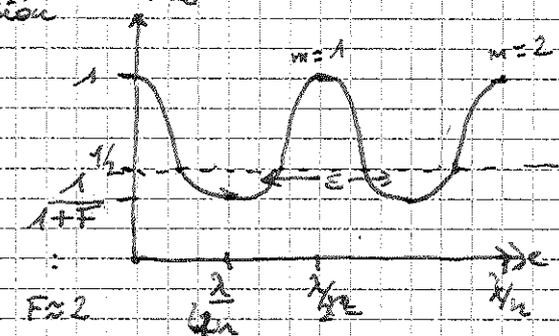
$$2\pi = \frac{4\pi}{\lambda} p \Delta n \rightarrow p = \frac{\lambda}{2\Delta n} \quad \text{(período espacial en } e_2)$$

$$\text{Si } \Delta e_2 = 10 \text{ mm} = 3755p = \frac{3755\lambda}{2 \cdot \Delta n}$$

$$\Delta n = \frac{3755\lambda}{2 \cdot 10 \text{ mm}} = \underline{\underline{0,1032625}} \approx 0,1033$$

Interferencia múltiple Fabry-Pérot → transmisión

$$1) \frac{I'}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(k_0 n e)} = I_r$$



- $k_0 n e = m\pi \rightarrow$ máximo ($I_r = 1$)
 $e = m \frac{\lambda}{2n}$
- $k_0 n e = (2m+1)\pi/2$ $m \in \mathbb{N}$ ($I_r = \frac{1}{1+F}$)
 $e = \frac{(2m+1)\lambda}{4n}$ $m \in \mathbb{N}$

si F mayor →

• $I_r = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\epsilon}{2} k_0 n)}$ → Ancho de $\epsilon \approx \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{F}}$ en distancias

Si fuente puntual monocromática, incidencia perfectamente normal → no se ven anillos, mismo patrón x, y

2) a) $\delta' = 2k_0 (n(e-e') + n'e') = 2k_0 (n\epsilon + (n'-n)\epsilon')$

b) $\Delta I_r = \frac{1}{1 + F \sin^2(k_0 n e)} - \frac{1}{1 + F \sin^2(k_0 n e + k_0 (n'-n)\epsilon')}$

$\Delta \gamma = \frac{\Delta I_r}{I_0} = 1 - \frac{1 + F \sin^2(\phi_0)}{1 + F \sin^2(\phi_0 + \alpha)}$

El contraste es máximo, dado α , cuando el numerador del segundo término es mínima, es decir, cuando la intensidad I_i original es máxima:
 $\sin^2 \phi_0 = 0$

• $k_0 n e = m\pi \rightarrow e = m \frac{\lambda}{2n}$, $m \in \mathbb{N}$

Para valores de $\alpha = m\pi$ especiales el contraste podría ser cero, si ϕ_0

si $\sin^2 \alpha = 0,1$

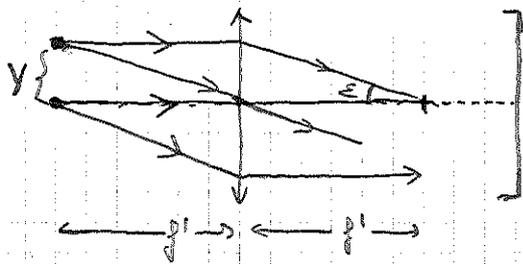
• $0,9 = \frac{1}{1 + F \sin^2 \alpha} \rightarrow F \sin^2 \alpha = \frac{1}{0,9} - 1 = \frac{0,1}{0,9}$

$F = 2938$

$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{0,1}{0,9 \cdot 2938}} = 0,38^\circ = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = k_0 (n' - n) \epsilon' = \frac{\Delta L}{\lambda}$

• $\Delta L = \alpha \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = 0,53 \mu\text{m}$

3



$$\delta'' = 2k_0 n e \cos E'$$

$$\Delta \delta = \delta_0 - \delta'' = 2k_0 n e f (\cos E' + 1) \leq \pi/50$$

$$\cos E' \geq 1 - \frac{\pi}{100 k_0 n e} \rightarrow E' \leq 0,0854^\circ$$

$$1 - \frac{\lambda}{200 n e}$$

$$\sin E = n \sin E' \rightarrow E \leq 0,128^\circ$$

$$\tan E \geq \frac{y}{f} \rightarrow y \leq f \tan E = 0,112 \text{ mm}$$

$$D = 2y \leq 0,224 \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta \delta}{2} \leq \pi/50$$

$$E' \leq 0,121^\circ$$

$$E \leq 0,18^\circ$$

$$y \leq 0,158 \text{ mm}$$

$$D \leq 0,316 \text{ mm}$$

4

$$\Delta \delta = 2n e \left(\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda'} \right) = 4\pi n e \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda \lambda'} \right) \leq \pi/50$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{200 n e} \geq \frac{\Delta \lambda}{\lambda(\lambda + \Delta \lambda)} = \frac{\Delta \lambda / \lambda}{\lambda \left(1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)} = \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)} \rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \leq \left(\frac{200 n e - 1}{\lambda} \right)^{-1} = 1,111 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} \sim 9 \cdot 10^5 \checkmark \quad \text{ó } 2,222 \cdot 10^{-6} \leq \lambda / \Delta \lambda$$

5 Quitar objetivo / (ocular con f' en I)

$$\Delta \text{willo } m \rightarrow \delta_m = c t e = \delta(E'_0) = 2k_0 n e_0 \cos E'_0 = 2k_0 n (e_0 - e) \cos E'$$

$$\hookrightarrow \cos E' > \cos E'_0 \rightarrow E' < E'_0$$

$$E < E_0 \rightarrow \text{cubrase (hacia dentro)}$$

↪ Necesario que sea extensa.

2a) $I = \frac{1}{1 + F \sin^2(\dots)}$

$$dI = \frac{1}{(\dots)^2} \cdot 2F \sin(\dots) \cos(\dots) \cdot k_0 (u - u) d\epsilon'$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{F \sin(2(\dots)) k_0 (u - u)}{(1 + F \sin^2(\dots))} d\epsilon' \rightarrow \frac{d\Delta \gamma}{d\epsilon''} = \frac{F \sin(2(\dots)) k_0 (u - u)}{(1 + F \sin^2(\dots))}$$

46.- Considérese una abertura rectangular en una pantalla opaca, iluminada por una onda esférica convergente monocromática.

- a) Calcúlese la distribución de intensidad que se obtiene sobre un plano paralelo a la pantalla y que contiene al punto donde se focaliza la onda esférica.
- b) Evalúese la distribución de intensidad si desplazamos la abertura en el plano de la pantalla.

47.- Calcúlese el patrón de Fraunhofer de un objeto constituido por N rendijas transparentes de la misma anchura y equidistantes entre sí.

48.- Determínese el patrón de Fraunhofer de una abertura en forma de elipse de semiejes a y b , al ser iluminada por un haz plano de longitud de onda λ , propagándose en la dirección perpendicular a la abertura.

Si ahora sumergimos todo el sistema en agua, en lugar del vacío en el que estaba anteriormente y modificamos la longitud de onda del haz a un nuevo valor λ' , ¿cuál debería ser el valor de esta para que la figura de difracción sobre el mismo plano no se modificase?.

49.- Considerando la luz visible como aquella cuya $\lambda \in [400, 700]$ nm.

- a) Encontrar la separación angular del espectro visible de primer orden producido por una red de difracción plana de 15 000 líneas por pulgada, cuando la luz incide normalmente sobre la red.
- b) Demostrar que el violeta del tercer orden del espectro visible se solapa con el rojo del segundo orden.
- c) ¿Cuál es la anchura máxima de cada rendija d para que se forme al completo el espectro de segundo orden?.

50.- Comparar, utilizando el criterio de resolución de Rayleigh, la separación angular mas pequeña con la que pueden, teóricamente, resolverse (verse como separados) dos objetos puntuales lejanos, para una longitud de onda de 555 nm, utilizando los siguientes instrumentos ópticos:

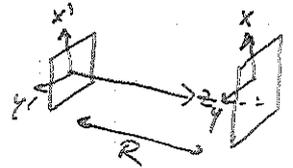
- a) El ojo humano, distinguiendo entre observación con alta o baja iluminación ambiental (radio de la pupila 1,5 y 6 mm, respectivamente).
- b) El Gran telescopio de Canarias (GRANTECAN) con un espejo primario de 10 m. (Sin tomar en consideración que este espejo está segmentado ni el efecto de obturación del espejo secundario)

----- Propuesto IX

Calcúlese el patrón de Fraunhofer de un objeto constituido por tres aberturas circulares iguales, alineadas y equidistantes.

Difracción Fraunhofer \rightarrow zona paraxial, $R \gg \frac{x_0^2 + y_0^2}{\lambda}$
 campo lejano

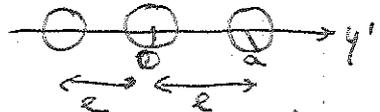
$$u(\vec{x}, z) = \frac{Q'}{\Omega} \int d^2x' e^{i \frac{\beta_0}{z} \vec{x} \cdot \vec{x}'} u(\vec{x}', 0)$$



Suponemos iluminación plana e integramos en la región circular (donde hay transmisión)

$$= Q' \int dx' dy' e^{i \frac{\beta_0}{z} (xx' + yy')} = C' \cdot \text{jinc}(a; x, y)$$

$a \rightarrow$ círculo de radio a , $r \leq a$



Si la abertura está desplazada una distancia e hacia la derecha, pero su radio es similar, entonces hacemos el cambio de variable $y'' = y' - e$
 $x = x''$ $dy'' = dy'$

$$u'(\vec{x}, z) = Q' \int_{-a}^a dx'' dy'' e^{i \frac{\beta_0}{z} (xx'' + yy'')} \cdot e^{-i \frac{\beta_0}{z} ye} \quad \text{jinc}(a; x, y) \quad \text{fase que sale fuera de la integral}$$

con lo que queda una integral circular salvo una fase

$$u' = C' \text{jinc}(a; x, y) = e^{-i \beta_0 y e / z} = u \cdot e^{-i \beta_0 y e / z}, \quad \alpha = \frac{\beta_0 y}{z}$$

Si tenemos 3 aberturas circulares: una con $e=0$, otra con $e=d$ y otra con $e=-d$

$$u_T = u (1 + e^{-i \alpha d} + e^{i \alpha d}), \quad u \cdot u^* = I_0(x, y)$$

salvo factores

$$I \equiv u_T(x, y, z) \cdot u_T(x, y, z)^* = I_0 (1 + e^{-i \alpha d} + e^{i \alpha d}) (1 + e^{i \alpha d} + e^{-i \alpha d})$$

$$= I_0 (1 + 2 \cos \alpha d)^2 = I_0 (1 + e^{-2i \alpha d} + e^{2i \alpha d} + 2e^{-i \alpha d} + 2e^{i \alpha d} + 1 + 1)$$

\rightarrow Jinc. Young 3x

$$= I_0 (3 + 2 \cos 2 \alpha d + 4 \cos \alpha d)$$

$$\alpha = \frac{\beta_0 y}{z} = \frac{2\pi y}{\lambda z} \quad \text{si} \quad \frac{2\pi y e}{\lambda z} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \frac{y e}{z} \ll z \quad \rightarrow \quad d \approx 0$$

$$\hookrightarrow I = 9 I_0(x, y)$$

\downarrow
jinc²

Lambert

$$I_0 \cdot \frac{\sin^2(\frac{3 \alpha d}{2})}{\frac{3 \alpha d}{2}}$$

$$I_0 \propto \left(\frac{A \cdot a^2}{z}\right)^2 \frac{J_1^2(\frac{R \beta_0}{z})}{R^2 \beta_0^2}$$

$$d \propto \frac{1}{\alpha y^2}$$