La paradoja de los trillizos grávidos

Iván Martí Vidal
Onsala Space Observatory, SE-43992
Chalmers University of Technology (Suecia)

Publicado en la *Revista Española de Física*, **Vol. 30, 5 (2016)**

1. Introducción

Uno de los experimentos mentales más fascinantes la Relatividad Especial de Einstein es el de la *paradoja de los gemelos*. Descripciones más o menos detalladas de este experimento mental, y de la aparente paradoja a la que nos lleva, pueden encontrarse en multitud de libros y sitios de internet orientados a la divulgación científica (p. ej., [1], [2]). En [3] puede encontrarse un resumen detallado de las publicaciones más importantes al respecto. No obstante, la experiencia personal del autor del presente artículo es que hay sutilezas en la Teoría de la Relatividad (tanto Especial como General) que, de no comprenderse debidamente bien, pueden llevar (y de hecho llevan) a interpretaciones erradas, tanto del experimento mental como de la solución a la paradoja que de él se deriva. En el presente artículo, pretendemos, de forma amena y sencilla, dar otra vuelta de tuerca a la descripción, planteamiento y solución de la paradoja de los gemelos, haciendo hincapié en los detalles que a nuestro juicio más suelen escaparse al público profano. Asimismo, describimos un experimento mental inspirado en la paradoja de los gemelos, pero enunciado en el marco de la Relatividad General, a partir del cuál podemos plantear una nueva paradoja (la *paradoja de los trillizos grávidos*) en la que saltan a la vista de forma clara y contundente algunas interesantes sutilezas de la Teoría de la Relatividad General. Aunque el caso de sistemas de referencia no inerciales en la paradoja de los gemelos ha sido muy estudiado (p. ej., [4]), los casos de trayectorias geodésicas en presencia de Gravitación (que son lo que estudiaremos en este artículo) no se han tratado mucho, a nuestro parecer, en trabajos a nivel divulgativo.

En la siguiente sección, describiremos someramente la clásica paradoja de los gemelos, así como su correcta solución en el marco de la Relatividad Especial. En la sección 3, nos centraremos en el planteamiento y solución del problema de los trillizos grávidos. En la sección 4, resumiremos nuestras principales conclusiones.

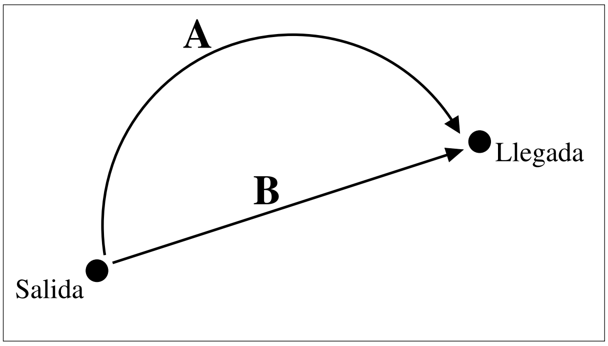

Figura 1: Trayectorias de los hermanos A y B, vistas por un observador inercial distante.

2. La paradoja de los gemelos

Dos gemelos se encuentran sobre la superficie de la Tierra. Cada hermano lleva consigo un reloj muy preciso, perfectamente sincronizado con el del otro hermano. Uno de ellos (llamémoslo A) sube a una nave espacial con motores extraordinariamente potentes. Conecta los motores y la nave sale lanzada al espacio exterior. El otro hermano (llamémoslo B) se queda en reposo, esperando en la Tierra. El hermano A disfruta de un maravilloso viaje por la vecindad del Sistema Solar, a velocidades enormes, y regresa a la Tierra a contarle al hermano B sus aventuras. Cuando baja de la nave espacial, comprueba atónito que B es mucho más viejo que él. Un intervalo de tiempo que para A ha sido de unas pocas semanas, para B ha podido ser de varias décadas. Los relojes, antes perfectamente sincronizados, difieren ahora en decenas de años. Por supuesto, experimentos más realistas pueden involucrar velocidades de unos pocos miles de m/s, con retrasos del orden de millonésimas de segundo entre los relojes de A y B.

Suele decirse que la diferencia en los tiempos medidos por ambos hermanos se debe a la *velocidad relativa* entre éstos; a mayor velocidad de A en su nave espacial, tanto más despacio correrá su tiempo en relación al tiempo de B. No obstante, el lector ya se habrá percatado, o seguramente conocerá de antemano, que en la descripción de este experimento mental ha surgido una preciosa paradoja. Si A se está desplazando a gran velocidad respecto de B, entonces, por necesidad, B también debe estar moviendose a gran velocidad respecto de A. Si esto es así, ¿por qué es A, y no B, el más joven de los dos hermanos cuando éstos se reencuentran? De hecho, si la velocidad relativa de A respecto de B es la misma que la de B respecto de A (pero cambiada de signo), ¿por qué debería haber un hermano más joven que el otro en el momento del reencuentro?

La solución a la paradoja es bien sencilla, aunque el diablo está en los detalles, como veremos más adelante. Lo que hace que un hermano envejezca menos que el otro no es la velocidad relativa entre ambos, ni el hecho de que ésta sea más o menos cercana a la de la luz. Más bien, la razón por la que el tiempo total transcurrido para A es distinto que para B es la *aceleración* sufrida por A (causada por los motores de su nave) que pasó totalmente desapercibida para B, quien no sintió ninguna aceleración de los motores de la nave de A.

Así pues, es la aceleración de A la que decide cuál de los dos hermanos será más joven en el momento del reencuentro. Hay una interpretación geométrica sencilla con la que esta afirmación puede comprenderse en toda su gloria. Supongamos que la curvatura espacio-temporal generada por la Tierra es despreciable. En la figura 1, mostramos las trayectorias que han seguido A y B durante el experimento, vistas por un observador inercial situado en la distancia. Si δt es un intervalo diferencial de tiempo medido por dicho observador, entonces los diferentes intervalos de tiempo para A y B (llamémoslos $\delta\tau_A$ y $\delta\tau_B$) obedecen a las ecuaciones

$$c^2\delta\tau_A^2 = c^2\delta t^2 - \delta R_A^2 \tag{1}$$

y

$$c^2\delta\tau_B^2 = c^2\delta t^2 - \delta R_B^2, \tag{2}$$

donde δR_A^2 y δR_B^2 son el cuadrado de las distancias recorridas por A y B durante el intervalo δt, visto por el observador inercial. La constante c es la velocidad de la luz en el vacío. Obviamente, la trayectoria rectilínea seguida por B hace que la suma de todos los δR_B^2 tome el valor más pequeño posible (la linea recta es el camino más corto entre los puntos de inicio y fin del experimento). Por lo tanto, y según la ecuación 2, τ_B tomará el valor más alto posible. En otras palabras, B es quien más envejece. Por el contrario, el hermano A sigue una trayectoria curvada, por lo que los intervalos de recorrido δR_A^2 serán, en suma, mayores que δR_B^2; tanto mayores como más curvada (es decir, más *acelerada*) sea su trayectoria. Aplicando pues la ecuación 1, concluimos que A será tanto más joven que B cuanto más acelerada sea su trayectoria en la nave espacial. En resumen, y siempre que no nos salgamos de un espacio-tiempo sin curvatura, lo que retrasa el envejecimiento de A respecto de B no es tanto su velocidad como su aceleración.

2.1. Gemelos y gravedad. Una paradoja en la paradoja

Llegados a este punto, parece que hemos solucionado de un plumazo el problema de la paradoja de los gemelos, si bien hemos escondido bastantes detalles bajo la alfombra para no complicar demasiado la discusión.

No obstante, la cosa ya no parece tan sencilla cuando la curvatura del espacio-tiempo, la gravedad, entra en escena. De acuerdo con el Principio de Equivalencia de Einstein (en su versión fuerte), cuando los dos gemelos se encuentran sobre la superficie de la Tierra, ambos están siendo acelerados de forma continua; el suelo sobre el que se encuentran está ejerciendo sobre ellos una fuerza que produce una aceleración que hace que sus trayectorias en el espacio-tiempo no sean geodésicas. La única forma de describir una geodésica (es decir, el camino que *maximiza* el tiempo transcurrido para un observador) en el espacio-tiempo curvado por la Tierra es encontrarse en caída libre.

Así pues, en el contexto de la Relatividad General, el hermano B nunca deja de acelerar durante todo el experimento, mientras que A bien podría permanecer sin aceleración durante la práctica totalidad de su vuelo, si desconectara sus motores al poco de salir de la atmósfera terrestre y se dedicara a describir una gran órbita (por tanto, una geodésica) alrededor de la Tierra. ¿Podrían entonces invertirse los papeles de A y B, pasando a ser B el más joven de los dos hermanos?

Podemos añadir otra sutileza que complica más aún el experimento mental cuando incorporamos la gravedad: el potencial gravitatorio. El potencial gravitatorio en la teoría newtoniana, ϕ, puede relacionarse, en el límite de bajas velocidades y campos no muy intensos, con la componente temporal de la métrica del espacio-tiempo en la teoria einsteiniana. La relación entre ambas es

$$\phi = \frac{c^2}{2}\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2 - 1\right), \tag{3}$$

donde t es el tiempo coordenado (el medido por un observador inercial en la distancia) y τ es el tiempo medido por un observador sometido al potencial gravitatorio ϕ. Como la aceleración (en el sentido de la mecánica newtoniana) es proporcional al gradiente del potencial, cambiado de signo, llegamos a la conclusión de que los objetos en caída libre se sienten atraídos hacia las regiones del espacio donde el tiempo transcurre de forma más lenta (o sea, donde $\partial\tau/\partial t$ disminuye). Es como decir, hablando de forma un tanto heterodoxa, que la materia en caída libre siente *repulsión* por el tiempo. En resumen, el hermano que se queda en la Tierra, y no lucha contra la gravedad terrestre con los motores de su nave, podría permanecer en todo momento en una región del espacio donde el tiempo fluye de forma más lenta que en todas las regiones que A exploraría con su nave. ¿Podría ser este efecto decisivo a la hora de comparar la edad de A con la de B, siendo definitivamente B más joven que A?

Para responder bien a estas preguntas no hay más remedio que ensuciarse las manos con ecuaciones de Relatividad General. Solo resolviendo las trayectorias de los hermanos cuantitativamente podremos sopesar todos los efectos de la gravedad terrestre en el desenlace de la paradoja de los gemelos. Esto es lo que haremos en la siguiente sección. Si el lector desea comprobar las ecuaciones que vamos a utilizar, o encontrar sus justificaciones, puede usar cualquier referencia avanzada sobre Relatividad General (p. ej. [5]).

3. Los trillizos grávidos

Sean tres hermanos trillizos, cada uno con un reloj de gran precisión perfectamente sincronizado con los de los otros hermanos. Los tres hermanos, llamémoslos A, B y C, se encuentran en el Polo Norte de la Tierra. A la Tierra, además, se le ha practicado un agujero que la atraviesa en línea recta, desde el Polo Norte hasta el Polo Sur. En un momento determinado, $t_0 = 0$, el hermano A se deja caer por el agujero, comenzando una caída libre hacia el centro de la Tierra. Al mismo tiempo, C es lanzado en dirección a la Estrella Polar a una velocidad de unos $8300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. El tercero de los hermanos, B, permanece inmovil sobre la superficie terrestre durante todo el experimento. Aproximadamente unos 5000 segundos después de t_0, los trillizos se reencuentran: el hermano A atravesó el centro de la Tierra y siguió en caída libre hasta llegar al Polo Sur, tras lo que empezó de nuevo a caer en sentido opuesto hasta regresar al Polo Norte. Por otra parte, C llegó hasta una altura similar al radio de la Tierra, tras lo que comenzó a caer de nuevo hacia la superficie terrestre. Suponiendo que A y C hayan sobrevivido a su apasionante viaje, ¿cuál de los tres será el más joven en el momento del reencuentro? ¿Cuál será el más viejo?

3.1. Ecuaciones del problema

La métrica del espacio-tiempo en nuestro problema es muy parecida a la de Schwarzschild, solo que en nuestro caso podemos aproximar la masa generadora, M, como una función de la distancia[1]. Si t es el tiempo coordenado de un observador inercial en el infinito y z es la coordenada cartesiana en dirección Sur-Norte, medida por el mismo observador, podemos escribir la métrica de nuestro problema en la forma

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \Lambda(z) dt^2 - \Lambda(z)^{-1} dz^2, \tag{4}$$

donde

$$\Lambda(z) = \left(1 - \frac{2\,G\,M(z)}{c^2|z|}\right) \tag{5}$$

y donde

$$M(z) = M_T \times \min\left(1, \left(\frac{|z|}{R_T}\right)^3\right), \tag{6}$$

siendo min() la función que devuelve el mínimo de todos sus argumentos, M_T la masa de la Tierra, R_T su radio y G la constante de Gravitación Universal de Newton. Las geodésicas de la métrica dada por la ecuación 4 pueden resolverse numéricamente, usando, por ejemplo, el sencillo método de la poligonal de Euler (ver p. ej. [6]). En la dirección web `http://www.uv.es/radioastronomia/outreach`, el lector encontrará el código (en Python) usado para generar las simulaciones aquí mostradas.

3.2. Primera solución: un revés a los gemelos

En la figura 2 mostramos la simulación numérica del problema de los trillizos grávidos, usando la poligonal de Euler con intervalos de tiempo propio de 0.01 segundos. La parte

[1] Al hacer esto, estamos linealizando las ecuaciones de Einstein, cosa más que aceptable para el campo gravitatorio terrestre.

superior de la figura muestra la diferencia entre el tiempo propio de cada hermano (τ_A, τ_B y τ_C) y el tiempo coordenado (o sea, el del observador inercial en el infinito). A mayor diferencia en valor absoluto, tanto mayor será el retraso del reloj correspondiente (es decir, más joven será su portador). En la parte inferior de la figura, mostramos las trayectorias de cada hermano (su coordenada z en función del tiempo coordenado).

Como bien puede verse, el hermano que menos envejece de los tres es justo el que se queda esperando en el Polo Norte, que es precisamente *lo opuesto* de lo que habríamos esperado en la paradoja original de los gemelos. A primera vista, y teniendo en mente la solución a la paradoja original de los gemelos, podríamos aventurar que esto se debe a que el hermano que se queda esperando en la superficie de la Tierra es el único que ha permanecido acelerado durante todo el experimento (entendiendo aceleración en el marco del Principio de Equivalencia de Einstein). Los otros dos hermanos describieron, en cambio, sendas geodésicas, carentes por lo tanto de cuadri-aceleración. Otro detalle que debemos resaltar es que el hermano que fue lanzado al espacio exterior acaba siendo un poco más viejo que el que se dejó caer hacia el centro de la Tierra. Este detalle merece ser reescrito para una mejor asimilación: los dos hermanos, A y C, han seguido sendas geodésicas en el espacio-tiempo, y ambas se cruzan en dos puntos comunes (los sucesos que dan comienzo y fin al experimento). No obstante, la longitud de cada una de estas geodésicas es *diferente*.

En la parte inferior de la figura también mostramos, en escala de grises, el valor de la función $\Lambda(z) - 1$, que nos da la diferencia entre el ritmo al que transcurren los tiempos propios (de observadores estacionarios) y el tiempo coordenado, en función de z. La razón por la que mostramos esto se verá en la siguiente sección.

3.3. Segunda solución: el camino total es lo importante

En el apartado anterior, hemos concluído que el hermano que menos envejece es el que permanece en Tierra, en tanto en cuanto los otros dos hermanos describen sus dos geodésicas en la dirección z. Pero, ¿podemos extender esta conclusión a cualquier geodésica? ¿Será siempre el tiempo propio del hermano B, que se queda en Tierra, menor que el de cualquier otro observador en caída libre que se cruce eventualmente con él?

Vamos a variar ligeramente el experimento para ayudar a responder esta pregunta. Supongamos que, de repente, la Tierra se contrae a la mitad de su tamaño, conservando su masa. Supongamos también que el hermano B se ha subido a una nave espacial y ha conectado los motores justo antes de la contracción de la Tierra, quedando suspendido en el espacio, manteniendo fija su coordenada z. En este caso, si los tres hermanos repiten su experimento partiendo de la misma coordenada z que antes, pero con una Tierra de tamaño mitad, el resultado que obtendrán será el mostrado en la Figura 3. Nótese que tanto la duración del experimento como la velocidad inicial de C deben cambiarse para que se siga produciendo el reencuentro simultáneo de los tres hermanos.

Esta vez, el hermano que menos envejece de los tres es A, el que se deja caer en dirección

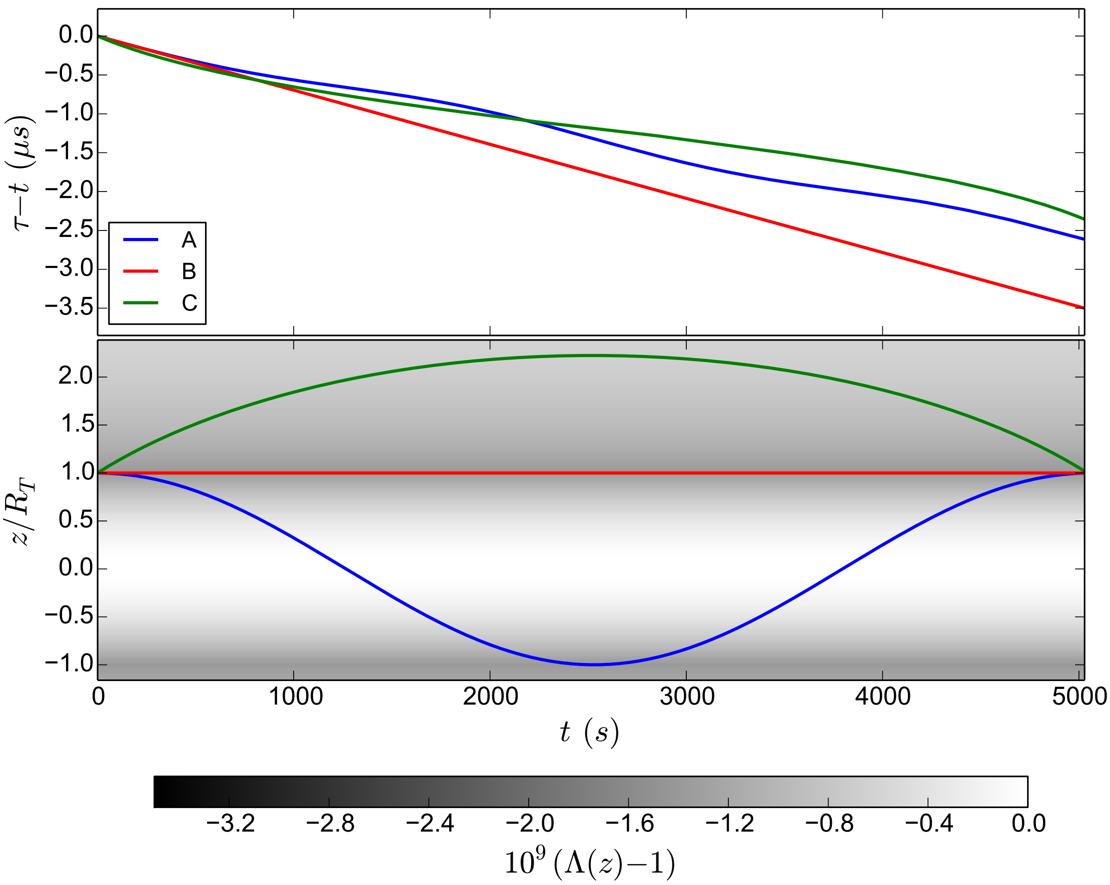

Figura 2: Arriba, evolución de la diferencia entre los tiempos propios y el tiempo coordenado en el problema de los trillizos grávidos. Abajo, coordenada z de cada hermano en función del tiempo coordenado. Se muestra, en escala de grises, la cantidad $\Lambda(z) - 1$.

al centro de la Tierra. He aquí, pues, el caso de una geodésica (la de A) que entre dos sucesos del espacio-tiempo tiene una longitud espacio-temporal *menor* que la de una curva acelerada (la de B) que pasa por los mismos sucesos. ¿Cómo es esto posible?

Localmente (es decir, en porciones muy pequeñas de espacio-tiempo), las geodésicas siempre tienen un tiempo propio asociado más largo que el de cualquier curva con aceleración. Este es, de hecho, el corazón de la paradoja de los gemelos. No obstante, esto puede dejar de ser cierto para grandes porciones de espacio-tiempo, donde la curvatura puede dejar señales notables impresas en los relojes de nuestros observadores. En un espacio-tiempo curvado, la dirección inicial de cada trayectoria geodésica puede influir de forma decisiva en la longitud total recorrida entre dos sucesos. En nuestro caso, el hermano que se dejó caer hacia la Tierra exploró, durante su trayectoria, regiones del espacio (las zonas más oscuras en la escala de grises de la figura 3) en las que el tiempo fluye mucho más lentamente que en las regiones exploradas por los otros dos hermanos. Como consecuencia de esto, el reloj de A se retrasó lo suficiente en esas regiones del espacio como para que, globalmente, su reloj fuera el más atrasado de los tres.

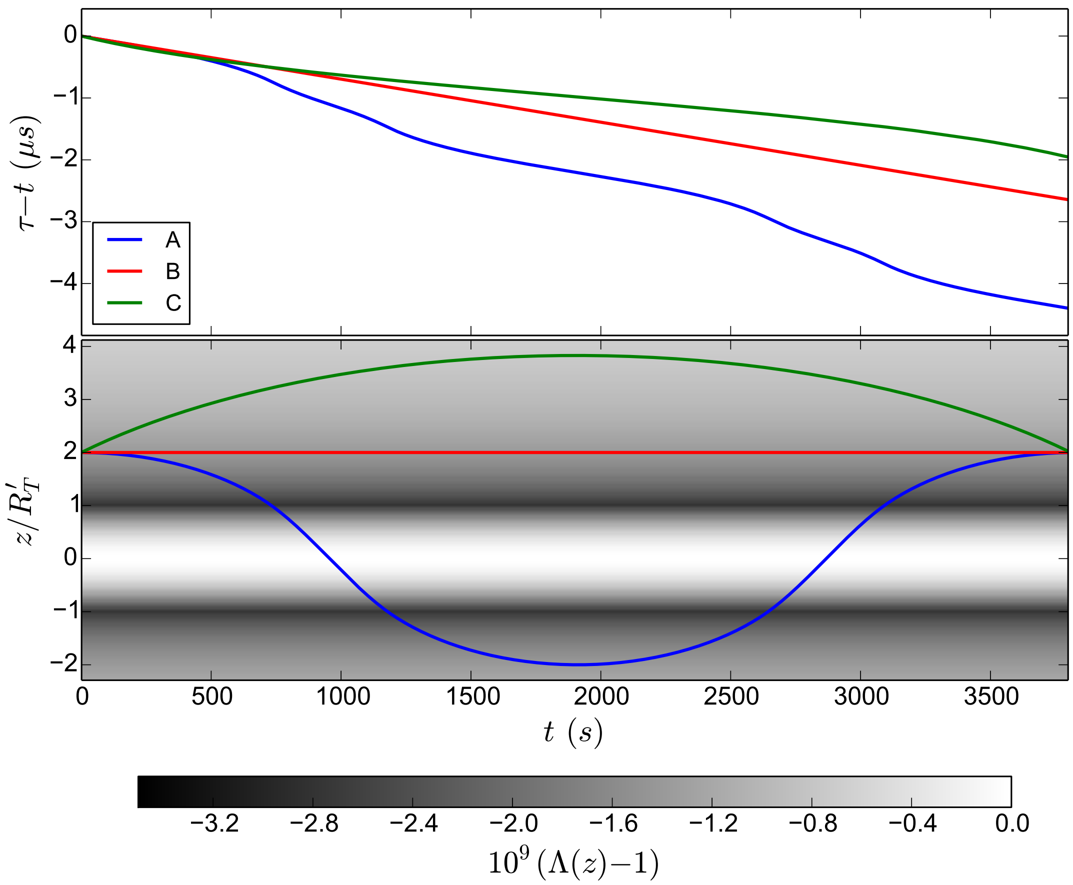

Figura 3: Similar a la figura 2, pero con un radio de la Tierra $R'_T = R_T/2$

4. Conclusión

Hemos visto cómo la solución a la paradoja de los gemelos que se da en el marco de la Relatividad Especial (atendiendo a las diferentes *aceleraciones* sufridas por cada gemelo) resulta incompleta en el marco de la Relatividad General, donde la curvatura espacio-temporal puede imprimir efectos de retraso y/o adelanto del tiempo en observadores geodésicos, mayores que los causados por la aceleración de los observadores no inerciales. Estos efectos añaden una mayor casuística y riqueza a la clásica paradoja de los gemelos y ponen de relieve algunos sutiles efectos que la curvatura espacio-temporal introduce en el transcurso del tiempo medido por diferentes observadores.

Estos resultados pueden ser interesantes de cara a la docencia, para ayudar al alumnado a afianzar sus conocimientos sobre la relatividad de las medidas en el espacio y el tiempo.

Referencias

[1] E. Sheldon (2003) *Relativistic twins or sextuplets?*, European Journal of Physics, **24**, 91−99

[2] T. A. Debs & M. L. G. Redhead (1996) *The twin 'paradox' and the conventionality of simultaneity*, American Journal of Physics, **64**, 384−92

[3] R. Shuler Jr. (2014) *The Twins Clock Paradox History and Perspectives*, Journal of Modern Physics, **5**, 1062−1078

[4] C. E. Dolby & S. F. Gull (2001) *On Radar Time and the Twin 'Paradox'*, American Journal of Physics, **69**, 12, 1257−1261

[5] R. M. Wald (1984) *General Relativity*, Univ. of Chicago Pr.

[6] J. C. Butcher (2003) *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons