El imposible cometido de afinar una trompeta

Iván Martí-Vidal

Max-Planck-Institut für Radioastronomie
Auf dem Hügel 69, D-53121 Bonn (Alemania)

Publicado en la Revista Española de Física (2011, Vol. **25**, 4, 45 – 49)

Abstract

The design and tuning of a brass instrument is here proposed as an academic exercise, in which key concepts of Acoustics (steady waves) are combined with simple Mathematics (sequences and logarithmic rules) in a way accessible to high-school students.

1. Introducción

El problema de afinar una trompeta es como el de cuadrar el círculo; sólo podemos hallar soluciones aproximadas. Para comprender bien las razones de esta afirmación, necesitamos entender primero conceptos básicos de Acústica y de Teoría Musical; conceptos que son, por otra parte, accesibles a nivel pre-universitario. Es por ello que el afinamiento y la eventual mejora del diseño de una trompeta (o de cualquier otro instrumento basado en principios similares, como la tuba) puede plantearse de forma amena como un problema académico, con el que el alumnado afiance y complemente sus conocimientos de Acústica.

En este artículo, haremos un breve repaso a la escala musical llamada *bien temperada*, describiremos el funcionamiento de una trompeta y plantearemos el (irresoluble) problema de su perfecto afinado. Finalmente, daremos algunas ideas para la mejora del diseño de la trompeta; ideas que podrían ser en su momento analizadas, criticadas, ampliadas y/o mejoradas por parte del alumnado.

2. La escala bien temperada

La definición de una escala musical (es decir, de una sucesión de notas con sus respectivas frecuencias fundamentales) es un problema de Teoría Musical que no tiene solución única, y en el que se han involucrado multitud de matemáticos a lo largo de la Historia (ver, e.g., Hall 1980). Creemos que vale la pena resumir y simplificar la esencia de este problema en las siguientes líneas.

Las escalas denominadas *naturales* son aquellas en las que las razones entre las longitudes de onda de sus notas son racionales. Es decir, la longitud de onda correspondiente a cualquier nota, dividida entre la longitud de onda correspondiente a cualquier otra nota, es un número racional (1/2, 3/2, etc.). Esta forma de escalar las longitudes de onda de las notas musicales empezó a ser estudiada por matemáticos y filósofos tan antiguos como Pitágoras (quien definió su escala a partir de la razón 3/2, o *quinta perfecta*, y sus pontencias consecutivas) y resulta en composiciones con una armonía perfecta entre los diferentes instrumentos musicales. La razón de esto es algo sutil. Los instrumentos musicales se basan en la producción de ondas estacionarias, resultantes de efectos de resonancia dentro de las cavidades acústicas que componen cada instrumento. Como bien es sabido, estas ondas estacionarias pueden descomponerse como una sucesión de armónicos, cuyas longitudes de onda se relacionan precisamente de forma racional (en la figura 1 mostramos ejemplos de armónicos producidos en la cavidad resonante de un instrumento de viento). Así pues, para que en una superposición de melodías haya una concordancia total entre los armónicos producidos por todos los intrumentos, las razones entre las longitudes de onda de las notas musicales deben guardar cierta correspondencia con las razones entre las longitudes de onda de los armónicos que componen el timbre de cada instrumento. De ahí se deriva que con las escalas naturales se obtenga una perfecta armonía entre los distintos instrumentos.

No obstante, estas escalas tienen un problema fundamental: son escalas inexactas. Al intentar construir una escala con todas las notas posibles a intervalos racionales (3/2 en el caso de la escala de Pitágoras), es imposible obtener un conjunto de notas que puedan dividirse en subconjuntos escalables unos con otros (esta es la raíz del problema conocido como *coma pitagórica*) lo que impediría, por ejemplo, poder cambiar el tono de una composición. Por consiguiente, existen melodías que no pueden *bajarse o subirse de tono* en estas escalas. Si pretendemos alterar cierta melodía, de foma que comience con una nota diferente pero no cambien los intervalos entre las notas que la componen, puede que sea imposible asignar una correspondencia nota a nota entre las dos versiones de dicha melodía o, en caso de poder hacerse, puede que el resultado suene muy desafinado. Hablando de forma un tanto heterodoxa, es como si, en ocasiones, a la naturaleza *no le gustase cambiar de tono*. Para solucionar este problema, se propuso el uso de la *escala bien temperada* de 12 notas, en la que puede cambiarse el tono de cualquier melodía sin problema alguno. En esta escala, el compositor goza de una total libertad para la entonación y composición de una obra. Esta escala divide la *octava* (es decir, la razón de frecuencias 2:1) en 12 semitonos exactos. Las frecuencias de las 12 notas resultantes dentro de la octava obeceden a la ecuación:

$$\nu_i = \nu_0 \, 2^{i/12} \tag{1}$$

donde ν_i es la frecuencia de la nota i-ésima y ν_0 es la frecuencia de referencia (la de la nota $i = 0$). Obviamente, para $i = 12$ obtenemos $\nu_{12} = 2\nu_0$, lo que corresponde a una octava (la diferencia entre el armónico fundamental y el primer armónico de una onda estacionaria). En esta escala, cualquier subconjunto de notas es escalable a otros subconjuntos, sin más que multiplicando las frecuencias de las notas por el factor $2^{k/12}$, siendo k un entero. Por lo tanto, la coma pitagórica desaparece por completo. El problema fundamental de esta escala es que no se obtienen relaciones racionales entre las frecuencias de las notas, a diferencia de como ocurre con las escalas naturales. Es decir, hay una ligera disonancia (del orden del $0.1-1\,\%$) entre los armónicos que componen el timbre de los instrumentos y las distintas notas de una melodía. Aunque este nivel de disonancia es más bien pequeño, un oído sensible y bien entrenado puede, en ocasiones, percatarse de ella, haciendo notar que la escala bien temperada introduce cierta artificiosidad, o falta de perfecta armonicidad, en una melodía... Ese es el precio a pagar por tener una escala cromática exacta.

En la actualidad, se asigna un valor de referencia $\nu_0 = 440\,\text{Hz}$ a la nota A_4 (es decir, la nota *La* dentro de la cuarta octava). Así pues, por ejemplo, la nota A_5 (una octava por encima de A_4) tiene una frecuencia de $880\,\text{Hz}$ y la G_4 (dos semitonos por debajo de la A_4) una frecuencia de unos $392\,\text{Hz}$. En la tabla 1 damos las frecuencias de las 12 notas que hay en la octava 4.

Nosotros realizaremos el análisis de la trompeta, y el planteamiento del problema de su afinado, basándonos en la escala bien temperada, para lo que haremos uso de la ecuación 1.

3. La trompeta moderna

La trompeta es un instrumento de viento-metal, compuesto básicamente por una cavidad resonante de unos 1.16 metros de longitud[1] (que llamaremos l_0) y tres teclas (o pistones) con los que puede modificarse la longitud efectiva de la cavidad. En la figura 2 mostramos gráficamente cómo funcionan estos pistones. Cada pistón, al pulsarse, aumenta la longitud de la cavidad de resonancia en un valor diferente. Llamaremos l_1, l_2 y l_3 a las longitudes de los tubos de los pistones 1, 2 y 3, respectivamente. Así pues, cuando no se pulsa ningún pistón (es decir, cuando se toca *al aire*) la longitud de la cavidad de resonancia es l_0; si se mantiene pulsado el pistón 1, la longitud pasa a ser $l_0 + l_1$; si se pulsan simultáneamente los pistones 1 y 2, la longitud cambia a $l_0 + l_1 + l_2$, etc.

Para hacer sonar la trompeta, el músico coloca sus labios en la boquilla del instrumento e insufla energía acústica en la cavidad resonante mediante soplidos, haciendo también vibrar sus labios[2]. La finalidad de hacer vibrar los labios es insertar pulsos de aire, que son expelidos a un ritmo determinado. Estos pulsos ejercen una presión de variación periódica sobre la cavidad resonante y excitan, por consiguiente, los modos de vibración de la misma.

En cuanto al espectro de frecuencias de estos modos de vibración, que define el timbre de la trompeta, el estudio detallado de los mismos es un problema de gran dificultad que escapa a los objetivos de este artículo. Básicamente, la marcada curvatura negativa de la superficie de la campana, así como la curvatura ligeramente positiva del interior de la boquilla, afectan de forma distinta a la relación entre la longitud de onda (local) y la frecuencia de cada onda estacionaria, lo que permite obtener resonancias con frecuencias distintas a las que se obtendrían con una cavidad puramente cilíndrica (Benade 1973). Si se pretende modelar el espectro del sonido emergente de una trompeta, es necesario

[1] En todo momento, aunque esto no afectará a nuestras conclusiones, supondremos que la trompeta está afinada en *Do* (es decir, en C_4) y que la velocidad del sonido es $343\,\text{m/s}$.

[2] En la jerga de los trompetistas, a este proceso de soplar mientras se hace vibrar los labios se le suele llamar *pedorreta*.

Nota	C_4	$C_4^{\#}$	D_4	$D_4^{\#}$	E_4	F_4
ν (Hz)	261.63	277.18	293.66	311.13	329.63	349.23
Nota	$F_4^{\#}$	G_4	$G_4^{\#}$	A_4	$A_4^{\#}$	B_4
ν (Hz)	370.00	392.00	415.30	440.00	466.16	493.88

Tabla 1: Notas musicales (*C, D, E, F, G, A* y *B* equivalen a *Do, Re, Mi, Fa, Sol, La* y *Si*, respectivamente) y sus frecuencias de acuerdo a la escala bien temperada. El símbolo # se refiere a las notas en *sostenido*, es decir, medio tono más altas que las correspondientes sin sostenido.

resolver numéricamente la ecuación de ondas con simetría cilíndrica. Por lo tanto, de aquí en adelante trabajaremos con un modelo simplificado de trompeta.

A primera vista, se diría que en la cavidad de la trompeta solo deben resonar los armónicos impares (aquellos con frecuencia igual a $n\,\nu_1$, siendo ν_1 la frecuencia del armónico fundamental y n un número natural impar). Esto se debe a que la cavidad de resonancia está abierta por un lado (la campana), pero cerrada por el otro (los labios del músico sobre la boquilla). No obstante, ciertas partes de la cavidad de resonancia tienen un corte aproximadamente cónico (la garganta de la boquilla y la parte cercana a la campana), lo que permite una cierta distribución de energía entre los armónicos pares (e.g., Hall 1980). La Figura 1 muestra esto esquemáticamente. En el caso de instrumentos como la tuba o la corneta, el corte cónico de la cavidad es, en proporción, más largo y pronunciado que el de la trompeta, lo que permite una mayor amplitud de resonancia para los armónicos pares[3].

4. Diseñando una trompeta

Llegados a este punto, el lector se preguntará cómo es posible que con sólo 3 pistones puedan generarse todas las notas de la escala temperada. Evidentemente, este es un problema sobredeterminado, ya que el número de condiciones (12 notas en cada octava) sobrepasa, y por mucho, el número de grados de libertad (las longitudes de los tubos de los tres pistones, aunque podamos pulsar diferentes combinaciones de estos). Para explicar esta aparente sobredeterminación en el problema del diseño de una trompeta entran en escena los armónicos de las ondas estacionarias, como explicamos a continuación (ver, e.g., Berg & Stork 2005).

La resonancia en la cavidad de la trompeta se produce, como ya hemos dicho, cuando el músico insufla energía con sus labios. El músico hace vibrar sus labios a una cierta frecuencia en la boquilla del instrumento. Si la frecuencia de vibración de los labios es suficientemente baja, la energía se distribuirá por todos los armónicos de la onda estacionaria. No obstante, si el músico aumenta la frecuencia de vibración de sus labios, no habrá componentes de baja frecuencia en el espectro de la energía transmitida a la cavidad resonante, por lo que los armónicos de frecuencias bajas no serán excitados. Dicho de otro modo, el músico entrenado es capaz de adaptar la vibración de sus labios para seleccionar el armónico fundamental de la onda estacionaria generada; a más frecuencia en la vibración de los labios, mayor será la frecuencia fundamental de la onda estacionaria.

Por consiguiente, un músico tocando la trompeta *al aire* (es decir, sin pulsar ningún pistón) puede generar la nota C_4 (que se corresponde al segundo armónico de la cavidad de resonancia, ver tabla 3), pero también la nota G_4 (tercer armónico), la C_5 (cuarto armónico) o incluso la E_5 (quinto armónico). Por supuesto, todas estas notas se corresponden con una escala natural (¡no con la escala bien temperada!), ya que se generan a partir de los armónicos de la cavidad resonante, cuyas longitudes de onda guardan relaciones racionales. No obstante, como ya hemos dicho anteriormente, la diferencia entre las frecuencias de las escalas naturales y la bien temperada es más bien pequeña.

Cuando se pulsa el pistón 2, la longitud de la cavidad resultante es tal que las notas generadas caen medio tono por debajo de sus correspondientes *al aire*. A partir de la ecuación 1 obtenemos, en términos de longitudes de onda,

$$l_0 + l_2 = 2^{1/12}\, l_0 \qquad (2)$$

de donde puede deducirse el valor de l_2 (unas 0.059 veces la longitud l_0). Este es el tubo más corto de los tres pistones. Así pues, si el músico puede generar las notas C_4, G_4, C_5 o E_5 tocando *al aire*, pulsando el pistón 2 podrá generar las notas B_3, $F_4^{\#}$, B_4 o $D_5^{\#}$ (es decir, medio tono por debajo de las anteriores; ver tabla 1). Los armónicos correspondientes a

[3]En realidad, pocos instrumentos de viento tienen cortes púramente cilíndricos o cónicos. Suelen tener partes de un tipo y de otro en distintas proporciones. La distribución de los cortes cónico y/o cilíndrico a lo largo de la cavidad resonante afecta al timbre del instrumento.

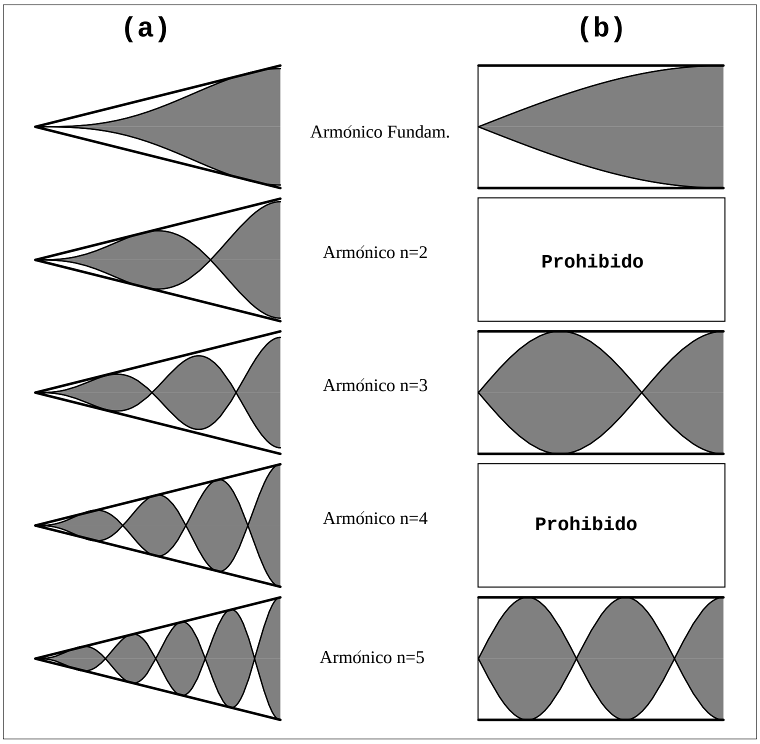

Figura 1: Representación de los primeros armónicos generados en la cavidad resonante de un instrumento de viento con corte cónico (a) y cilíndrico (b). El lado izquierdo de la cavidad está tapado por los labios del músico, mientras que el derecho está abierto por la campana. La amplitud de las zonas sombreadas simboliza la amplitud del desplazamiento longitudinal del aire (para una mayor claridad visual, no se ha guardado una proporción constante entre la amplitud de la onda mostrada y la de la onda real que, de hecho, disminuye al aumentar la sección transversal de la cavidad cónica). Debido al corte cónico de la cavidad (a), las frecuencias de los sucesivos armónicos permitidos son $n\nu_1$, siendo ν_1 la frecuencia del armónico fundamental y n un numero natural. No obstante, debido al corte cilíndrico de la cavidad (b), sólo los armónicos impares están permitidos (es decir, los de frecuencias $n'\nu_1$, siendo n' un número impar). Las cavidades de los instrumentos de viento suelen ser, realmente, una mezcla de (a) y (b).

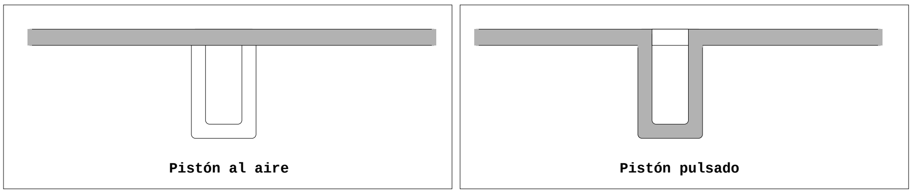

Figura 2: Esquema simplificado del funcionamiento de un pistón. Cuando no se pulsa (figura izquierda), la cavidad resonante (área sombreada) tiene cierta longitud. Si se pulsa el pistón (figura derecha), la cavidad resonante aumenta de longitud.

estas notas son los mismos que los correspondientes a las notas tocadas *al aire* (ver tabla 3).

Cuando se pulsa el pistón 1, la longitud de la cavidad resultante es tal que las notas generadas caen un tono por debajo de sus correspondientes *al aire*. De nuevo, usando la ecuación 1 obtenemos

$$l_0 + l_1 = 2^{2/12}\, l_0 \tag{3}$$

de donde puede deducirse el valor de l_1 (unas 0.122 veces la longitud l_0). Manteniéndose pulsado este pistón, el músico puede generar las notas $A_3^{\#}$, F_4, $A_4^{\#}$ o D_5 (ver de nuevo las tablas 1 y 3).

Hasta aquí, todo ha transcurrido sin problemas en el diseño de este instrumento, salvo el pequeño detalle de que las notas en cada pulsación obedecen a una escala natural, y no a la bien temperada.

El problema surge cuando introducimos el pistón 3 y las combinaciones de pistones. El lector podrá comprobar, a partir de la tabla 1, que para generar todas las notas a partir de C_4, G_4 y C_5 (las obtenidas *al aire*) deben poder bajarse estas notas 1, 2, 3, 4, 5 e incluso 6 semitonos. La forma de conseguir todas esas variaciones usando sólo 3 pistones es que estos, por separado, bajen 1, 2 y 3 semitonos (ver tabla 2). Con esto, los pistones 1 y 2 (simultáneamente) bajan 3 semitonos, el 2 y el 3, simultáneamente, bajan 4 semitonos, el 1 y el 3 bajan 5 semitonos y, finalmente, los tres juntos bajan 6 semitonos.

¿Cuál debe ser la longitud del tubo del pistón 3? Si nos basamos en que los pistones 2 y 3 pulsados simultáneamente resultan en una bajada de 2 tonos, la longitud l_3 obedece a la ecuación

$$l_0 + l_2 + l_3 = 2^{4/12}\, l_0, \tag{4}$$

lo que resulta en $l_3 = 0.200\, l_0$. No obstante, si con los pistones 1 y 3 deben bajarse 2.5 tonos, obtenemos, de forma análoga al cálculo anterior, $l_3 = 0.212\, l_0$, un valor un 6 % mayor. Finalmente, para que la pulsación simultánea de los tres pistones resulte en una bajada de 3 tonos, la longitud l_3 debe valer $0.232\, l_0$, un valor un 16 % mayor que el

Pistón			semitonos
1	2	3	
○	○	○	0
○	●	○	−1
●	○	○	−2
○	○	●	−3
●	●	○	−3
○	●	●	−4
●	○	●	−5
●	●	●	−6

Tabla 2: Funcionamiento teórico de la trompeta. Cada combinación de pistones (○ simboliza pistón *al aire* y ● pistón pulsado) se traduce en una bajada de las notas en un número determinado de semitonos.

calculado a partir de la condición derivada de los pistones 1 y 3.

Asimismo, la pulsación simultánea de los pistones 1 y 2 que, en teoría, debería resultar en una bajada de 1.5 tonos, tampoco produce el resultado esperado. La longitud resultante es

$$l_0 + l_1 + l_2 = 1.181\, l_0, \tag{5}$$

que resulta en unas frecuencias 1.181 veces menores que las generadas *al aire*. No obstante, un tono y medio en la escala bien temperada corresponde a una razón de frecuencias de 1.189, un 0.67 % mayor.

La raíz de toda esta problemática es que las longitudes l_1, l_2 y l_3 están calculadas en base a l_0, por lo que su efecto no es exactamente acumulativo dentro de la escala cromática. En otras palabras, si pulsamos el pistón 1 y bajamos un tono, al pulsar el pistón 2 no bajaremos exactamente medio tono más, ya que la longitud del pistón 2 debería ser, en ese caso, 0.059 veces $l_0 + l_1$, y no 0.059 veces l_0. Al combinar los distintos pistones y considerar su efecto como acumulativo en la escala cromática, estamos considerando que la longitud del tubo de cada pistón es despreciable frente a l_0, cosa que no es así.

5. El problema de afinar la trompeta

¿Cómo solucionamos los problemas planteados en la sección anterior? Si los ordenamos por su efecto en el afinamiento de la trompeta, el problema de la combinación de los pistones 1 y 2 para bajar 1.5 tonos es el menos importante, ya que la inexactitud de las notas generadas es sólo de un 0.67 % (de hecho, es del orden de las diferencias entre la escala natural y la bien temperada). Esto hace que sea muy aconsejable bajar 1.5 tonos pulsando los pistones 1 y 2 simultáneamente, en lugar del problemático pistón 3, como en un principio podría alguien plantearse. Y es que los mayores problemas en el afinado de la trompeta son los relacionados precisamente con este pistón, con el que se obtienen diferencias de hasta un 2.7 % entre las notas generadas y las esperadas. La forma en que se suele solucionar este problema es dando a l_3 un valor determinado entre 0.200 y 0.232 veces l_0 (es decir, un valor de compromiso con el que se minimice la inexactitud, combinada, de todas las notas) o bien, en algunos casos, incorporando un dispositivo con el que el músico pueda alterar la longitud l_3 en función de la nota que se toque en cada momento.

Ambas estrategias tienen sus ventajas y sus inconvenientes. Por una parte, la primera estrategia es sencilla, pero poco precisa. El músico debe, en ocasiones, *forzar* con la vibración de sus labios una desviación de las frecuencias de las ondas estacionarias para que el instrumento no desafine respecto al resto de la banda u orquesta. Aunque a primera vista esto parece imposible (ya que es absurdo pensar que la longitud de la cavidad resonante pueda cambiarse con la vibración de los labios), el músico puede en efecto *sintonizar* las frecuencias de las notas dentro de un pequeño margen, en virtud del valor finito del factor de calidad de la cavidad resonante[4]. Por otra parte, la segunda solución puede ser más precisa, pero es más complicada para el músico.

En cualquier caso, cabe decir que el músico es capaz de tocar afinado, independientemente de la estrategia que se haya adoptado para optimizar el afinado de la trompeta. Obviamente, esto es así en función no solo del oído del músico, sino también del oído del oyente. Un oído bien entrenado es capaz de detectar variaciones en la frecuencia de una nota tan pequeñas como un 1 % (e.g., Hall 1980). Esta gran sensibilidad del oído a la variación de la frecuencia permite percatarse perfectamente del desafinado de una trompeta (que para algunas notas, combinando pistones, puede ser incluso de un 15 % o más) si el músico no es capaz de afinar bien la melodía.

6. Las redundancias de los pistones

Si en un principio le podía parecer difícil al lector que con 3 pistones se generaran, con mayor o menor exactitud, todas las notas de la escala cromática, le parecerá aún más difícil, si no asombroso, que buena parte de las notas de la escala puedan generarse con más de una combinación de teclas. Cada una de estas combinaciones puede generar las notas correspondientes con mayor o menor exactitud (ver tabla 3), y es decisión del músico usar una u otra combinación de pistones en función, principalmente, de la mayor o menor dificultad de digitación de la melodía que se esté interpretando.

Así, por ejemplo, la nota G_4 puede generarse al aire, pero también pulsando los pistones 1 y 3, como podrá comprobar el lector con un sencillo cálculo a partir de la ecuación 1. También puede generarse la nota $F_4^{\#}$ sólo con el pistón 2, o con los tres pistones simultáneos; la nota $A_4^{\#}$ con el pistón 1 o también con los tres simultáneos; la nota B_4 con el pistón 2, o con el 1 y el 3; la C_5 al aire, o con los pistones 1 y 2, etc. Dejamos al lector el entretenido ejercicio de regenerar la tabla 3, encontrando todas estas redundancias y determinando a qué armónicos corresponde cada una de ellas. Por ejemplo, la nota B_4, generada pulsando el pistón 2, corresponde al cuarto armónico, mientras que la misma nota generada con los pistones 1 y 3 corresponde al quinto armónico.

7. Rediseñando la trompeta

Varias son las soluciones que pueden proponerse, o se han propuesto, para mejorar el diseño de las trompetas y tratar de evitar (o minimizar) el problema del tercer pistón.

Por una parte, el lector notará que si asignáramos a la nota C_4 la frecuencia correspondiente al cuarto armónico *al aire* (en lugar del segundo armónico, como se hace actualmente), podrían generarse las notas C_4, E_4, G_4 y C_5 al aire, con una desviación muy pequeña respecto de la escala bien temperada.

[4]El factor de calidad, Q, se relaciona con la cantidad de energía disipada en un número determinado de oscilaciones. A menor factor de calidad (es decir, a mayor energía disipada), menor es la pureza de la oscilación, en el sentido de que el sistema puede llegar a resonar con frecuencias ligeramente distintas a su frecuencia natural, si bien tales resonancias son de menor amplitud que la natural.

Pistón			Armónico			
1	2	3	2	3	4	5
○	○	○	$C_4(0)$	$G_4(2)$	$C_5(0)$	$E_5(-14)$
•	○	○	$A_3^{\#}(1)$	$F_4(3)$	$A_4^{\#}(1)$	$D_5(-13)$
○	•	○	$B_3(1)$	$F_4^{\#}(3)$	$B_4(1)$	$D_5^{\#}(-13)$
○	○	•	$A_3(-33)$	$E_4(-30)$	$A_4(-32)$	$C_5^{\#}(-47)$
•	•	○	$A_3(12)$	$E_4(14)$	$A_4(12)$	$C_5^{\#}(-2)$
○	•	•	$G_3^{\#}(-15)$	$D_4^{\#}(-13)$	$G_4^{\#}(-15)$	$C_5(-29)$
•	○	•	$G_3(1)$	$D_4(3)$	$G_4(1)$	$B_4(-12)$
•	•	•	$F_3^{\#}(26)$	$C_4^{\#}(28)$	$F_4^{\#}(26)$	$A_4^{\#}(12)$

Tabla 3: Notas de la trompeta diseñada en este artículo para cada combinación de pistones (○ simboliza pistón *al aire* y • pistón pulsado) y para cada armónico fundamental de las ondas estacionarias. La desviación de cada nota respecto de la escala bien temperada se muestra entre paréntesis, en centésimas de semitono.

La presencia de la nota E_4 tocada al aire implicaría que sólo necesitásemos bajar 0.5, 1, 1.5 y 2 tonos para generar el resto de notas. De este modo conseguiríamos, con sólo tres pistones, generar toda la escala cromática con enorme exactitud (dejamos al lector que realice estos cálculos por su cuenta). ¿Cómo podríamos asignar a C_4 el cuarto armónico *al aire*? La respuesta es sencilla: duplicando la longitud l_0. No obstante, esta respuesta tan sencilla tiene efectos más sutiles; al modificar l_0, también estaríamos modificando sensiblemente el timbre de la trompeta, ya que el metal de la cavidad resonante distribuiría la energía de forma ligeramente distinta entre los armónicos.

Otra solución sería el aumento del número de pistones. De hecho, las tubas incorporan, frecuentemente, un cuarto pistón (incluso un quinto y un sexto pistón, aunque esto es mucho menos común). Dejamos también a cuenta del lector calcular cuántos pistones harían falta, como mínimo, para generar toda la escala cromática con precisión. A primera vista, parece haber una respuesta inmediata a esta pregunta: 5 pistones (el 1, el 2 y un pistón adicional para cada combinación de 1 y/o 2 con el pistón 3), pero si el lector echa unas cuentas, puede que encuentre una buena combinación usando sólo 4 pistones.

8. Algunas cuestiones adicionales

En base a lo que se ha descrito en las secciones anteriores, el lector puede plantearse bastantes preguntas relacionadas con el funcionamiento de la trompeta y con algunos conocimientos fundamentales de Acústica; preguntas que dejamos sin respuesta de forma intencionada: ¿se mantiene el afinado de la trompeta si bajamos su temperatura (digamos, a $-20\,^{\circ}$C)? ¿Sigue afinada si la tocamos a gran altura (digamos, a 8000 metros sobre el nivel del mar) o en condiciones de gran humedad (por ejemplo, en mitad de la niebla)? ¿Cómo afectan todas estas condiciones al afinado de la trompeta si lo comparamos con el afinado de los instrumentos de cuerda, como el violín? ¿Cómo afecta al afinado de la trompeta aumentar la longitud l_0 (en un 6 %, por ejemplo, cambiando la boquilla del instrumento) sin modificar las longitudes l_1, l_2 y l_3?

9. Conclusiones

Hemos analizado el problema del diseño, afinamiento y posible mejora de la trompeta y, en general, de los instrumentos de viento-metal basados en los mismos principios de funcionamiento, como la tuba. Para todo esto, hemos hecho uso de conocimientos básicos de Acústica, sucesiones numéricas y escalas logarítmicas. Las herramientas para llevar a cabo este análisis son accesibles al alumnado universitario y pre-universitario. Asimismo, el diseño del instrumento, y el estudio de posibles mejoras en el mismo, pueden servir de ayuda para afianzar y ampliar los conocimientos de Acústica.

Agradecimientos

El autor es investigador postdoctoral, becario de la Fundación Alexander von Humboldt, en el Instituto Max Planck de Radioastronomía (Bonn, Alemania) y agradece al evaluador anónimo de este artículo sus comentarios y sugerencias.

Bibliografía

- Benade, A.H. 1973, The Physics of brasses, Scientific American 229, 24−35
- Hall, D.E. 1980, Musical Acoustics, Wadsworth Pub. Co. (California)
- Berg, R.E. & Stork, D.G. 2005, The Physics of Sound, Pearson/Prentice Hall (New Jersey)